WPROWADZENIE DO OPERATORÓW RÓśNICZKOWYCH NA GRAFACH

KAMIL RESZKO

STRESZCZENIE.

Krótkie wprowadzenie do operatorów różniczkowych na grafach: laplasjan oraz operator prawdopodobieństwa

NOTIONS

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywisty
$\mathbb{R}^+$ - zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
$\#$ - ilość elementów w zbiorze.

1. GRAFY WAŻONE

Graf ważony (inaczej graf z wagami) jest parą *(V,b)*, gdzie V jest zbiorem wierzchołków (tj. dowolnym zbiorem) oraz b: V $\times$ V $\to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:
$b(x,y) \leq 0$ any $x,y \in V$,
$b(x,y)=b(y,x)$ for any $x,y \in V$,
$b(x,x) = 0$ for any $x \in$ V.
Jeśli $(x,y) \neq 0$, to mówimy, że pomiędzy x,y jest *krawędź* i zapisujemy$x \sim y$.
Trzeci warunek oznacza, że rozważamy grafy bez pętli.
Ścieżka w grafie to dowolny ciąg wierzchołków, taki że

$$x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_n$$

Spójny graf - graf, w którym każdą parę wierzchołków łączy pewna ścieżka. *Graf skończony* ma skończoną ilość wierzchołków ($\#V < \infty$). W tym wprowadzeniu rozważamy wyłącznie skończone spójne grafy.

Graf pełny - graf w którym if $x \sim y$ dla każdego $x, y \in V$. Inaczej graf nazywa się *niepełnym.*

Graf nazywa się *dwudzielnym*, jeżeli istnieje podział jego wierzchołków $V = V_1 \cup V_2$ taki że z $x \sim y$ $(x, y \in V)$ wynika albo $x \in V_1$, $y \in V_2$, albo $x \in V_2$, $y \in V_1$.

Będziemy też rozpatrywać wagi *znormalizowane*:

$$p(x,y) = \frac{b(x,y)}{b(x)}, \tag{1}$$

gdzie $b(x) = \sum_y b(x,y)$. Trzeba uważać, że ogólnie $p(x,y) \neq p(y,x)$.

2. PODSTAWOWE OPERATORY RÓŻNICZKOWE

Rozważmy następujący zbiór funckji na wierzchołkach grafu ważonego

$$\Im = \{f | f : V \to \mathbb{R}\}$$

Naszym głównym zainteresowaniem będzie znormalizowany operator Laplace'a (laplasjan) oraz operator prawdopodobieństwa $\Im$. *Operator Laplace'a (laplasjan)* jest zdefiniowany jako

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) \frac{b(x,y)}{b(x)} = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) p(x,y) \tag{2}$$

dla wszystkich $f \in \Im$.

Operator $\mathcal{P} = \mathcal{I} - \mathcal{L}$ dla $f \in \Im$ nazywa się *operatorem prawdopodobieństwa.*

Definition 1. Operator *różnicy* jest zdefiniowany jako

$$\nabla f = f(y) - f(x)$$

Operator różnicy jest dyskretnym analogiem pochodnej. Z(3) wynika, że
Oprócz tego, wprowadzimy nastepujące oznaczenie:

Jeżeli , to jest zbiorem pustym, wiec ostatni wyraz w (5) znika i otrzymujemy
Theorem 2 (Formula Greena). *Dla każdych dwóch fukcnji f,g:... i dla każdego... spełniają sie następujące tożsamości:*
gdzie w ostatnim wierszu zmieniliśmy notację zmiennich x i y w pierwszej sumie. Dodając do siebie ostatnie dwa wiersze i dzieląc przez 2, otrzymujemy (5).
Corollary 3. *Dla każdej funkcji f:*

3. PROBLEM DIRICHLETA

nazywa sie *problemem Dirichleta.* Ten problem jest dyskretną wersją ciągłego problemu Dirichleta.

Theorem 4 *Problem Dirichleta* (8) *zawsze ma dokładnie jedno rozwiazanie v:*
Punktem kluczowym dowodu twierdzenia 4 jest następna lemma.
Lemma 5 (Zasada maksimumа i minimuma) *Niech* $\sum \int$