高一数学暑假作业（一）参考答案：

1．B　　2．A　3．A　　4．A

因为$a=\log_2 3=\log_8 27<\log_8 65=c$，所以由题意得$a<b<c$，

即$\log_2 3<\dfrac{1}{2}\log_2 x<\dfrac{1}{3}\log_2 65$，则$\log_2 3<\log_2\sqrt{x}<\log_2\sqrt[3]{65}$，

所以$3<\sqrt{x}<\sqrt[3]{65}$，解得$9<x<65^{\frac{2}{3}}$.

5．C

$a=2\ln e=\ln e^2=2$，$b=\ln\sqrt{10}$，$\because e^2>\sqrt{10}$，$\therefore a>b$，$\because c=10^{\lg e}=e$，$\therefore c>a>b$.

6．C

$v=v_0\ln\dfrac{M}{m}=1000\times\ln 500=1000\times\dfrac{\lg 500}{\lg e}=1000\times\dfrac{3-\lg 2}{\lg e}\approx 6219m/s$.

7．B

由已知可得$f\left(\log_{\frac{1}{3}}18\right)=-f\left(\log_3 18\right)=-f\left(\log_3 18-2\right)=-f\left(\log_3 2\right)=-3^{\log_3 2}=-2$

8．B

因为函数$f\left(x+2\right)$为偶函数，则$f\left(2+x\right)=f\left(2-x\right)$，可得$f\left(x+3\right)=f\left(1-x\right)$，

因为函数$f\left(2x+1\right)$为奇函数，则$f\left(1-2x\right)=-f\left(2x+1\right)$，所以，$f\left(1-x\right)=-f\left(x+1\right)$，

所以，$f\left(x+3\right)=-f\left(x+1\right)=f\left(x-1\right)$，即$f\left(x\right)=f\left(x+4\right)$，

故函数$f\left(x\right)$是以4为周期的周期函数，因为函数$F\left(x\right)=f\left(2x+1\right)$为奇函数，则$F\left(0\right)=f\left(1\right)=0$，故

$f\left(-1\right)=-f\left(1\right)=0$，其它三个选项未知.

9．AD

10．ABD

因为$b<2$，所以$-b>-2$，又$a>1$，所以$a-b>-1$，A正确；

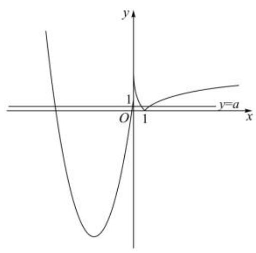
因为$a>1$，$b<2$，则$a-1>0$，$b-2<0$，所以$\left(a-1\right)\left(b-2\right)<0$，B正确；

因为$a>1$，所以$a-1>0$，所以$a+\dfrac{1}{a-1}=a-1+\dfrac{1}{a-1}+1\geq 2\sqrt{\left(a-1\right)\cdot\dfrac{1}{a-1}}+1=3$，

当且仅当$a=2$时，等号成立，C不正确；

因为$b<2$，则$b\left(b-2\right)+1=\left(b-1\right)^2\geq 0$，所以，$b\left(2-b\right)\leq 1$，

因为$2-b>0$，所以$\dfrac{1}{2-b}\geq b$，D正确.



11．BC

如图所示：

因为关于x的方程$f\left(x\right)=a\left(a\in R\right)$有四个实数解$x_1,x_2,x_3,x_4$，且$x_1<x_2<x_3<x_4$，所以$0<a\leq 1$.

$y=x^2+10x+1$的对称轴为$x=-5$，所以$x_1+x_2=-10$.

因为$\left|\lg x_3\right|=\left|\lg x_4\right|$，所以$\lg x_3+\lg x_4=0$，即$x_3x_4=1$，$x_4=\frac{1}{x_3}$.

因为$\left|\lg x_3\right|\le 1$，所以$\frac{1}{10}\le x_3<1$.所以$\left(x_1+x_2\right)\left(x_3-x_4\right)=-10\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)$，

因为$y=-10\left(x-\frac{1}{x}\right)$，$\frac{1}{10}\le x<1$为减函数，所以$\left(x_1+x_2\right)\left(x_3-x_4\right)=-10\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)\in\left(0,99\right]$.

12．BCD

对于 A：$f\left(x\right)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$，定义域为$R$，$f\left(-x\right)=\frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}}=-\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f\left(x\right)$，

则$f\left(x\right)$为奇函数，故 A 错误；对于 B：$g\left(x\right)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$，定义域为$R$，

$g\left(-x\right)=\lg\left(\sqrt{\left(-x\right)^2+1}-\left(-x\right)\right)=-\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-g\left(x\right)$，

则$g\left(x\right)$为奇函数，故 B 正确；

对于 C：$F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$，$f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$都为奇函数，

则$F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$为奇函数，

$F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$在区间$\left[-1,1\right]$上的最大值与最小值互为相反数，

必有$F\left(x\right)$在区间$\left[-1,1\right]$上的最大值与最小值之和为 0，故 C 正确；

对于 D：$f\left(x\right)=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-\left(\frac{2^x+1-2}{2^x+1}\right)=\frac{2}{2^x+1}-1$，则$f\left(x\right)$在$R$上为减函数，

$g\left(x\right)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$，则$g\left(x\right)$在$R$上为减函数，

则$F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$在$R$上为减函数，若$F\left(2a\right)+F\left(-1-a\right)<0$即$F\left(2a\right)<F\left(1+a\right)$，

则必有$2a>1+a$，解得$a>1$，即$F\left(2a\right)+F\left(-1-a\right)<0$的解集为$\left(1,+\infty\right)$，故 D 正确；

13．1

14．[0,1)

15．$\{m\mid m\ne 1\}$

因为对任意的$x_1,x_2\in R$总有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$所以函数$y=f(x)$是$R$上的单调增函数，

从而由$f(m^2+1)>f(2m)$得$m^2+1>2m$，解得$m\ne 1$

16．0

R 上的奇函数 $f\left(x\right)$，则有 $f\left(-x\right)=-f(x)$，而当 $x>0$ 时，有 $f\left(x\right)=\begin{cases}-\log_3\left(4-x\right),0<x\leq\dfrac{5}{4}\\ f\left(x-3\right),x>\dfrac{5}{4}\end{cases}$，

于是有 $f(2)=f(-1)=-f(1)=1$， $f(4)=f(1)=-1$， $f(6)=f(3)=f(0)=0$，

因 $\forall x>\dfrac{5}{4}$， $f(x)=f(x-3)$，则有 $\forall n\in\mathrm{N}^*,f(6n-4)=f(2)=1,f(6n-2)=f(1)=-1$，

$f(6n)=f(3)=0$，

所以 $f\left(2\right)+f\left(4\right)+f\left(6\right)+\cdots+f\left(2022\right)=337[f\left(2\right)+f\left(4\right)+f\left(6\right)]=0$.

17．（1）$\complement_U B=\{x\mid x<3\text{ 或 }x>5\}$， $A\cup B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$．（2）$\because$ 集合 $A\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$， $B=\{x\mid m\leqslant x\leqslant m+2\}$，

因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$，

$\therefore\begin{cases}m\geqslant 0\\ m+2\leqslant 4\end{cases}$，解得 $0\leqslant m\leqslant 2$．$\therefore$ 实数 m 的取值范围 $\left[0,2\right]$．

（3）$\because$ 集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$， $B=\{x\mid m\leqslant x\leqslant m+2\}$.

$A\cap B=\varnothing$，$\therefore m+2<0$ 或 $m>4$，解得 $m<-2$ 或 $m>4$．$\therefore$ 实数 m 的取值范围 $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(4,+\infty\right)$.

18．(1)

解：因为不等式 $f\left(x\right)\geq 0$ 的解集是实数集 R，所以 $ax^2+x+1\geq 0$，对 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立，

当 $a=0$ 时， $x\geq -1$，不成立，

当 $a>0$ 时，$\Delta=1-4a\leq 0$，解得 $a\geq\dfrac{1}{4}$．综上：a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

(2)因为不等式 $f\left(x\right)<2$ 的解集是实数集 R，

所以不等式 $ax^2+x-1<0$ 对 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立当 $a=0$ 时， $x<1$，不成立，

当 $a<0$ 时，$\Delta=1+4a<0$，解得 $a<-\dfrac{1}{4}$ 综上：a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right]$.

(3)因为 $x\in[-1,1]$ 时， $0\leq f\left(x\right)\leq 2$，

则 $\begin{cases}0\leq f\left(1\right)=a+2\leq 2,\\ 0\leq f\left(-1\right)=a\leq 2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\leq a\leq 0,\\ 0\leq a\leq 2\end{cases}$ 解得 $a=0$.

若 $a=0$， $x\in[-1,1]$ 时， $f\left(x\right)=x+1\leq 2$ 恒成立，符合要求.

所以 a 的取值集合是 $\left\{0\right\}$.

19．（1）当 $a=1$ 时，原不等式可化为 $\dfrac{2x-3}{x-1}<1$ 即 $\dfrac{x-2}{x-1}<0$，

故 $(x-2)(x-1)<0$，所以 $1<x<2$，故原不等式的解为 $(1,2)$.

（2）原不等式可化为 $\dfrac{ax-2}{x-1}<0$ 即 $(ax-2)(x-1)<0$

当 $a<0$ 时，不等式的解为 $x<\dfrac{2}{a}$ 或 $x>1$；

当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $x-1>0$ 即 $x>1$；

当$a>0$时，原不等式可化为$(x-\frac{2}{a})(x-1)<0$，

若$0<a<2$，则不等式的解为$1<x<\frac{2}{a}$；

若$a=2$，则不等式的解为$\varnothing$；

若$a>2$，则不等式的解为$\frac{2}{a}<x<1$.

综上，当$a<0$时，不等式的解为$(-\infty,\frac{2}{a})\cup(1,+\infty)$，

当$a=0$时，不等式的解为$(1,+\infty)$，

当$0<a<2$时，不等式的解为$(1,\frac{2}{a})$，

当$a=2$时，不等式的解为$\varnothing$，

当$a>2$时，不等式的解为$(\frac{2}{a},1)$.

20.（1）$W=\begin{cases}-6x^2+384x-40, 0<x\leq 40,\\ -\frac{40000}{x}-16x+7360, x>40.\end{cases}$；（2）32万部，最大值为6104万美元.

（1）因为生产该款手机2万部并全部销售完时，年利润为704万美元.

所以$400\times2-4k-40-2\times16=704$，

解得$k=6$，

当$0<x\leq 40$时，$W=xR(x)-(16x+40)=-6x^2+384x-40$，

当$x>40$时，$W=xR(x)-(16x+40)=-\frac{40000}{x}-16x+7360$.

所以$W=\begin{cases}-6x^2+384x-40, 0<x\leq 40,\\ -\frac{40000}{x}-16x+7360, x>40.\end{cases}$

（2）①当$0<x\leq 40$时，$W=-6(x-32)^2+6104$，所以$W_{\max}=W(32)=6104$；

②当$x>40$时，$W=-\frac{40000}{x}-16x+7360$，由于$\frac{40000}{x}+16x\geq 2\sqrt{\frac{40000}{x}\times16x}=1600$，

当且仅当$\frac{40000}{x}=16x$，即$x=50\in(40,+\infty)$时，取等号，所以此时W的最大值为5760.

综合①②知，当$x=32$，W取得最大值为6104万美元.

21. (1)解：原问题等价于$x\in[1,3]$时，$f(x)_{\min}\leq 0$，

当$m=0$时，显然不成立；

当$m>0$时，由于$f(x)$的对称轴为$x=-1$，

所以$f(x)_{\min}=f(1)=6m+1\leq 0$，即$m\leq-\frac{1}{6}$，不合题意；

当$m<0$时，由于$f(x)$的对称轴为$x=-1$，

所 以$f(x)_{\min}=f(3)=30m+1\leq 0$，即$m\leq-\frac{1}{30}$.综上所述，$m\leq-\frac{1}{30}$；

(2)解：因为$m>0, f(x)<0$的解集为(a,b)，

所以$f(x)=0$有两个不同的实根a,b，即a,b是方程$2mx^2+4mx+1=0$的两个不同实根，

所以$a+b=-2,ab=\frac{1}{2m}>0$，所以a,b同为负数，

所以$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)(a+b)=-\frac{1}{2}\left(13+\frac{4b}{a}+\frac{9a}{b}\right)\leq-\frac{1}{2}\left(13+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}\right)=-\frac{25}{2}$，当且仅当

$\frac{4}{a}=\frac{9}{b}$，即$a=-\frac{8}{13},b=-\frac{18}{13}$时等号成立，所以$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}$的最大值为$-\frac{25}{2}$.

22．解：(1) $\because f(x)$是R上的奇函数，$\therefore f(0)=\frac{b-1}{2}=0$，$\therefore b=1$；

(2) $\because f(x)=\frac{1-2^x}{2^x+1}=\frac{2-(2^x+1)}{2^x+1}=\frac{2}{2^x+1}-1$，设$x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{2^{x_1}+1}-1-\frac{2}{2^{x_2}+1}+1=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$$

$\because 2^{x_1}<2^{x_2},(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，$\therefore f(x_1)>f(x_2)$所以$f(x)$是$R$上的$R$减函数.

(3) $\because f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0,\therefore f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)$，

$\because f(x)$是R上的奇函数，$\therefore f(t^2-2t)<f(k-2t^2)$又$\because f(x)$是$R$上的减函数，

$\therefore t^2-2t>k-2t^2$，即$3t^2-2t-k>0$在$t\in R$上恒成立，$\therefore\Delta=4+12k<0$，即$k<-\frac{1}{3}$.

高一数学暑假作业（二）参考答案：

参考答案

1．A

2．A

3．B

4．A

5．B

6．B 由题可得，前4小时，废气中的污染物恰好被过滤掉90%，

故由$P=P_0\cdot e^{-kt}$得$(1-90\%)P_0=P_0e^{-4k}$，所以$0.1=e^{-4k}$，即$k=\frac{1}{4}\ln 10$，

由再过滤2小时，即共6小时，空气中剩余污染物为

$$P=P_0e^{-6k}=P_0e^{-6\left(\frac{1}{4}\ln 10\right)}=P_0e^{-\frac{3}{2}\ln 10}=P_0e^{\ln 10^{-\frac{3}{2}}}=P_0\left(10^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{\sqrt{10}}{100}P_0\ ,$$

$\sqrt{10}\in(3,3.5)$，故污染物所剩比率约为$3\%P_0$，

7．D

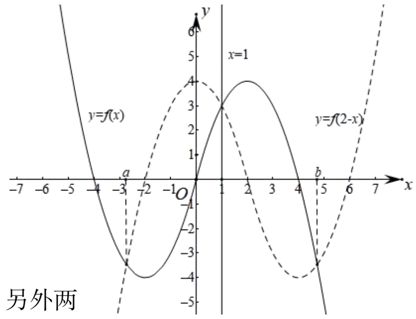
解：由已知，将a分离得出$a=2^x-\frac{1}{x-1}$.令$f(x)=2^x-\frac{1}{x-1},(x<0)$.

因为函数 $y=2^x$ 和 $y=-\dfrac{1}{x-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上均为增函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数.

所以 $0<f(x)<f(0)=2$， a 的取值范围是 $(0,2)$.

8．C 设 $x>0$，则 $-x<0$，所以 $f(-x)=-x(-x+4)$，又因为函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,

所以且当 $x\le 0$ 时， $f(x)=-f(-x)=x(-x+4)$,



所以 $f(x)=\begin{cases}x(x+4),x\le 0\\ x(-x+4),x>0\end{cases}$,

又 $y=f(2-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

在同一坐标系中，作出两函数图象，如图所示:

由图象知: $y=f(2-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点，其中一个根为 1，另外两个根关于 $x=1$ 对称，所以方程 $f(x)=f(2-x)$ 的所有根的和为 3

故选：C

9．CD

10．AC

11．ACD

$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的定义域为 R 关于原点对称,

$f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{\left(2^{-x}-1\right)2^x}{\left(2^{-x}+1\right)2^x}=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，图象关于原点对称,

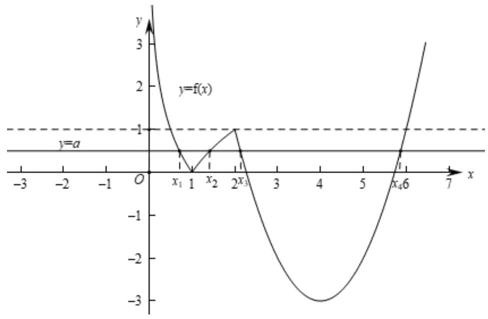
故选项 A 正确，选项 B 不正确;

$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}=\dfrac{2^x+1-2}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，因为 $2^x>0$，所以 $2^x+1>1$，所以 $0<\dfrac{1}{2^x+1}<1$,

$-2<\dfrac{-2}{2^x+1}<0$，所以 $-1<1-\dfrac{2}{2^x+1}<1$，可得 $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$，故选项 C 正确;

设任意的 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=1-\dfrac{2}{2^{x_1}+1}-(1-\dfrac{2}{2^{x_2}+1})=\dfrac{2}{2^{x_2}+1}-\dfrac{2}{2^{x_1}+1}=\dfrac{2\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)}{\left(2^{x_1}+1\right)\left(2^{x_2}+1\right)}$,

因为 $2^{x_1}+1>0$， $2^{x_2}+1>0$， $2^{x_1}-2^{x_2}<0$，所以 $\dfrac{2\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)}{\left(2^{x_1}+1\right)\left(2^{x_2}+1\right)}<0$,



即 $f(x_1)-f(x_2)<0$，所以 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，故选项 D 正确;

12．ACD

解：在同一坐标系中作出函数 $y=f(x), y=a$ 的图象，如图所示:

由图象知：若 $f(x)=a$ 有四个不同的实数解，则 $0<a<1$，故 A 正确;

因为$\left|\log_2 x_1\right| = \left|\log_2 x_2\right|$，即$-\log_2 x_1 = \log_2 x_2$，则$\dfrac{1}{x_1} = x_2$，

所以$x_1 + 2x_2 = \dfrac{1}{x_2} + 2x_2, 1 < x_2 < 2$，因为$y = \dfrac{1}{x_2} + 2x_2$在$\left(1,2\right)$上递增，所以$\dfrac{1}{x_2} + 2x_2 \in \left(3, \dfrac{9}{2}\right)$，故 B 错误；

因为$x_1 + x_2 = \dfrac{1}{x_2} + x_2, 1 < x_2 < 2$，$y = \dfrac{1}{x_2} + x_2$在$\left(1,2\right)$上递增，所以$\dfrac{1}{x_2} + x_2 \in (2, \dfrac{5}{2})$，而$x_3 + x_4 = 8$，

所以$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \in \left(10, \dfrac{21}{2}\right)$，故 C 正确；

因为$2x_1 + x_2 = \dfrac{2}{x_2} + x_2, 1 < x_2 < 2$，$y = \dfrac{1}{x_2} + 2x_2$在$\left(1, \sqrt{2}\right)$上递减，在$\left(\sqrt{2}, 2\right)$上递增，则

$\dfrac{2}{x_2} + x_2 \in [2\sqrt{2}, 3)$，故 D 正确；

13．$\left(0,3\right)$

14．1

15．1010

解：因为$f(x) = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{x}{1-x}$所以$f(x) + f(1-x) = \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1-x}{x} = 1$，

因为$F(n) = f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{n-2}{n}\right) + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$，

所以$F(n) = f\left(\dfrac{n-1}{n}\right) + f\left(\dfrac{n-2}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + f\left(\dfrac{1}{n}\right)$，

所以$2F(n) = n - 1$，所以$F(n) = \dfrac{n-1}{2}$，所以$F(2021) = \dfrac{2021-1}{2} = 1010$，

16．$[1,2]$

解：因为$f\left(x\right) = \begin{cases} 2^{-|x-a|}, x \le 1 \\ -\dfrac{1}{2}x + 1, x > 1 \end{cases}$，当$x > 1$时$f\left(x\right) = -\dfrac{1}{2}x + 1$函数单调递减且$f\left(x\right) < \dfrac{1}{2}$，

当$x \le 1$时$f\left(x\right) = 2^{-|x-a|} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x-a|}$，可得在$x > a$时函数单调递减，在$x < a$单调递增，

若$a < 1$，xÇ1，则$f(x)$在$x = a$处取得最大值，不符题意；若aÉ1，xÇ1，则$f(x)$在$x = 1$处取得最大值，且$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a-1} \ge \dfrac{1}{2}$，解得$1$Ç$a$Ç$2$，综上可得$a$的范围是$\left[1,2\right]$.

17．(1)$\pi - 1$；(2)3.

18. (1) $\left(2,+\infty\right)$ (2) -9

(1)解：由题意，函数 $f\left(x\right)=2x^{2}+4x+m$，

不等式 $f\left(x\right)\leq 0$ 的解集为空集等价于 $f\left(x\right)=2x^{2}+4x+m>0$ 恒成立，

即 $\Delta=16-8m<0$，解得 $m>2$，即 m 的取值范围为 $\left(2,+\infty\right)$.

(2)解：若 $m>0$，$f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\left(a,b\right)$，所以 $f\left(x\right)=0$ 有两个不同实根 a,b，

即 a,b 是方程 $2x^{2}+4x+m=0$ 的两个实根，故 $a+b=-2$，$ab=\dfrac{m}{2}>0$，

故 a,b 同为负值，

则 $\dfrac{8}{a}+\dfrac{2}{b}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{2}{b}\right)\left(a+b\right)=-\dfrac{1}{2}\left(10+\dfrac{2a}{b}+\dfrac{8b}{a}\right)\leqslant-\dfrac{1}{2}\left(10+2\sqrt{\dfrac{2a}{b}\cdot\dfrac{8b}{a}}\right)=-9$，

当且仅当 $\dfrac{2a}{b}=\dfrac{8b}{a}$ 时，即 $a=-\dfrac{4}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$ 时等号成立，故 $\dfrac{8}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最大值为 -9.

19. (1) $\because A=\left\{x\left|x^{2}-x-2<0\right.\right\}=\left\{x\left|\left(x-2\right)\left(x+1\right)<0\right.\right\}=\left\{x\left|-1<x<2\right.\right\}$，

当 $m=1$ 时，$B=\left\{x\leq 1\text{或}x\geq 3\right\}$. 所以 $A\cup B=\left\{x\left|x<2\text{或}x\geq 3\right.\right\}$.

$\complement_{\mathbf{R}}B=\left\{x\left|1<x<3\right.\right\}$，所以 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=\left\{x\left|1<x<2\right.\right\}$

(2)因为 $A=\left\{x\left|-1<x<2\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|x\leq m\text{或}x\geq m+2\right.\right\}$.

由①或②或③，所以 A 是 B 的真子集. 所以 $m+2\leq-1$ 或 $m\geq 2$ 得 $m\geq 2$ 或 $m\leq-3$

即实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$

20. (1)依题意，$f\left(1\right)=1$，所以 $\log_{a}3-\log_{a}1=\log_{a}3=1$，解得：$a=3$，

由 $\begin{cases}2+x>0\\2-x>0\end{cases}$，得 $-2<x<2$，所以 $a=3$，函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-2,2\right)$.

(2)函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上单调递增.设 $-2<x_{1}<x_{2}<2$，则

$f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{2}\right)\ =\log_{3}\left(2+x_{1}\right)-\log_{3}\left(2-x_{1}\right)-\log_{3}\left(2+x_{2}\right)+\log_{3}\left(2-x_{2}\right)$

$=\left[\log_{3}\left(2+x_{1}\right)-\log_{3}\left(2+x_{2}\right)\right]+[\log_{3}\left(2-x_{2}\right)-\log_{3}\left(2-x_{1}\right)]$

$\because -2<x_{1}<x_{2}<2$，$\therefore 0<2+x_{1}<2+x_{2}$，$0<2-x_{2}<2-x_{1}$，又 $y=\log_{3}x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore \log_{3}\left(2+x_{1}\right)<\log_{3}\left(2+x_{2}\right)$，$\log_{3}\left(2-x_{2}\right)<\log_{3}\left(2-x_{1}\right)$，

即 $\log_{3}\left(2+x_{1}\right)-\log_{3}\left(2+x_{2}\right)<0$，$\log_{3}\left(2-x_{2}\right)-\log_{3}\left(2-x_{1}\right)<0$，

$\therefore f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上单调递增.

21.（1）由题意，得可变成本为 $\frac{1}{4}v^2$，固定成本为 a 元，所用时间为 $\frac{1000}{v}$，

所以 $y=\frac{1000}{v}\left(\frac{1}{4}v^2+a\right)=1000\left(\frac{1}{4}v+\frac{a}{v}\right)$，定义域为 $\left(0,80\right]$.

（2）$y=1000\left(\frac{1}{4}v+\frac{a}{v}\right)\geq 1000\cdot 2\sqrt{\frac{a}{4}}=1000\sqrt{a}$（元），

当 $\frac{1}{4}v=\frac{a}{v}$，得 $v=2\sqrt{a}$，因为 $0<v\leq 80$，

所以当 $0<a\leq 1600$ 时，货车以 $v=2\sqrt{a}\text{km/h}$ 的速度行驶，全程运输成本最小；

当 $a\geq 1600$ 时，货车以 80km/h 的速度行驶，全程运输成本最小.

22.（1）令 $x=-1,y=1$，可得 $f\left(0\right)-f\left(1\right)=-\left(-1+2+1\right)$，又由 $f\left(1\right)=0$，解得 $f\left(0\right)=-2$；令 $y=0$，

得 $f\left(x\right)-f\left(0\right)=x\left(x+1\right)$，又因 $f\left(0\right)=-2$，解得 $f\left(x\right)=x^2+x-2$；

（2）当 $-2\leq x\leq 1$ 时，不等式 $f(x)-a\geq(1-a)x-5$ 恒成立，即 $\left(1-x\right)a\leq x^2+3$，

若 $x=1$ 时不等式即 $0\leq 4$，显然成立；

若 $-2\leq x<1$ 时，$1-x>0$，故 $a\leq\frac{x^2+3}{1-x}$ 恒成立，只需 $a\leq\left(\frac{x^2+3}{1-x}\right)_{\min}$，

设 $g(x)=\frac{x^2+3}{1-x}=\frac{\left(1-x\right)^2-2\left(1-x\right)+4}{1-x}=\left(1-x\right)+\frac{4}{1-x}-2$，设 $t=1-x,t\in\left(0,3\right]$

则 $g(t)=t+\frac{4}{t}-2$ 是对勾函数，在 $\left(0,2\right)$ 递减，在 $\left(2,3\right)$ 递增，故 $t=2$ 时，即 $x=-1$ 时 $g(x)_{\min}=2$，故 $a\leq 2$，综上，a 的取值范围为 $a\leq 2$.

高一数学暑假作业（三）答案

1. C　2. A　3. C　4. C　5. B　6. D　7. A

8. D

$\because a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$，$\therefore \sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$

$\therefore \sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$，因为 $\sin C\neq 0$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A-1=0$，即 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$，

$\because \frac{\sqrt{3}}{2}(ab-c)=b\tan B$，$\therefore ab-c=\frac{b\tan B}{\sin A}$ $\therefore a\sin B=\frac{\sin B\tan B}{\sin A}+\sin C$，

$\therefore\ a=\dfrac{\sin B}{\sin A\cos B}+\dfrac{\sin C}{\sin B}$ $\therefore\ a=\dfrac{\sin B}{\sin A\cos B}+\dfrac{\sin A\cos B}{\sin B}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan B+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\dfrac{1}{2}$,

$\because$ $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\therefore$ $\tan B>0$，$\therefore$ $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan B+\dfrac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\dfrac{1}{2}\geq 2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$，当且仅当 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号，$\therefore$ a 的最小值是 $\dfrac{5}{2}$，

9. ABC　10. BC　11. BC

12. BCD

对于 A，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$，故 A 错误；

对于 B，$\because\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{CG}$，$\therefore\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，故 B 正确；

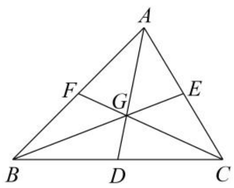
对于 C，由平面向量加法可知：$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 为与 $\angle BAC$ 的角平分线共线的向量，

又 $\because\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{\sqrt{3}\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}$，$\therefore AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线，

而 AD 为△ABC 的中线，∴△ABC 是等腰三角形，且 AB=AC，则 $AD\perp BC$，

则 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 的投影为 $|\overrightarrow{BA}|\cos B=|\overrightarrow{BA}|\times\dfrac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BA}|}=|\overrightarrow{BD}|$,

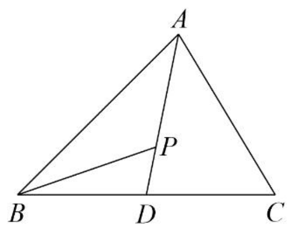
$\therefore\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 的投影向量为 $\overrightarrow{BD}$，故 C 正确；



对于 D，如图所示：$\because P$ 在 AD 上，即 A、P、D 三点共线，

则可设 $\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BA}+(1-t)\overrightarrow{BD}, 0\le t\le 1$，又 $\because\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，$\therefore\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BA}+\dfrac{(1-t)}{2}\overrightarrow{BC}$,

$\because\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，则 $\begin{cases}\lambda=t\\ \mu=\dfrac{1-t}{2}\end{cases}$，$0\le t\le 1$，$t=\dfrac{1}{2}$ 时，$\lambda\mu$ 取得最大值为 $\dfrac{1}{8}$，故 D 正确.



13. 2　　14. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$　　15. $400\sqrt{3}$

16. $\frac{1}{2}$　　$-\dfrac{3}{4}$

解：由题可知 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|=1,\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right\rangle=\dfrac{2\pi}{3}$,

$\therefore\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AF}^2\right)=\dfrac{1}{4}\left(1-2\times\dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{1}{4}$,

$\therefore\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{1}{2}$.

由题可知，P 点是线段 EC 上的动点，故设 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EC}=\lambda\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}\right),(0\leq\lambda\leq 1)$，

又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EP},\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{ED}$，故

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EP}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{ED}\right)=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\lambda\overrightarrow{ED}+\lambda\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left[(\lambda-1)\overrightarrow{ED}+\lambda\overrightarrow{DC}\right]$

$=3(\lambda^2-\lambda)$，故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}=3\left(\lambda^2-\lambda\right)=3\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$，

又 $\lambda\in[0,1]$，故当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DP}$ 取最小值为 $-\frac{3}{4}$.

17.（1）$-3<x<2$；　　（2）$x=-2$.

18.（1）$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$；

(2) $\because\overrightarrow{OA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OB}=n\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，

$\therefore\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\overrightarrow{OP}+\frac{n}{3}\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{9}\overrightarrow{OP}+\frac{n}{3}\overrightarrow{OQ}$，又 G，P，Q 三点共线，

$\therefore\frac{4}{9}+\frac{n}{3}=1$，解得 $n=\frac{5}{3}$，故 n 的值为 $\frac{5}{3}$.

解(1) $\frac{\pi}{4}$

（2）由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,4=2+c^2-2\times\sqrt{2}\times c\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$c^2-2c-2=0$，解得 $c=\sqrt{3}+1$（负根舍去），

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin C},\sin C=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

20.（1）解：$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，解得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π，其对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$

(2)解：$g(x)=f\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{9}\right]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\omega\pi}{9}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{9}+\frac{\pi}{6}\right]$，

因为 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{9}\right]$ 上是增函数，且 $\omega>0$，

所以 $\left[-\frac{\omega\pi}{9}+\frac{\pi}{6},\frac{\omega\pi}{9}+\frac{\pi}{6}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in Z$，

即$\begin{cases}-\dfrac{\omega\pi}{9}+\dfrac{\pi}{6}\ge-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ \dfrac{\omega\pi}{9}+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$，化简得$\begin{cases}\omega\le 6-18k\\ \omega\le 3+18k\end{cases}$，

因为$\omega>0$，所以$-\dfrac{1}{6}<k<\dfrac{1}{3}$，又因为$k\in Z$，所以$k=0$，得$\omega\le 3$，所以$\omega$的最大值为 3.

21．解（1）$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A>0$，则$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{4}{5}$，

$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times bc\times\dfrac{4}{5}=3$，$\therefore bc=\dfrac{15}{2}$.

因此，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{2}$；

（2）$\vec{m}//\vec{n}$，所以，$2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\cos B$，即$\sin B=\cos B$，$\therefore \tan B=1.\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{4}$.

$\sin 2C=\sin\left[2\left(\dfrac{3\pi}{4}-A\right)\right]=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2A\right)=-\cos 2A=1-2\cos^2 A=1-2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{7}{25}$，

$\cos 2C=\cos\left[2\left(\dfrac{3\pi}{4}-A\right)\right]=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2A\right)=-\sin 2A=-2\sin A\cos A=-2\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{3}{5}=-\dfrac{24}{25}$，

因此，$\sin(B-2C)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2C\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2C-\sin 2C)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\dfrac{24}{25}-\dfrac{7}{25}\right)=-\dfrac{31\sqrt{2}}{50}$.

22．(1)由图像可知$A=\dfrac{4-0}{2}=2,B=\dfrac{4+0}{2}=2,\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$　$\therefore T=\pi,\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，

$\therefore 2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\therefore \varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in Z)$，$\because|\varphi|<\dfrac{\pi}{2},\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{6}$ $\therefore f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+2$

(2)由（1）知$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+2$，要使函数$g(x)=\log_2[f(x)-1]$有意义,

有$f(x)-1>0$，故$2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1>0$，即$\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})>-\dfrac{1}{2}$

$\therefore 2k\pi-\dfrac{\pi}{6}<2x+\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{7\pi}{6}$解得　$k\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$.

$\therefore$函数$g(x)$的定义域为$\left\{x\mid k\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$

(3)对$\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$，有$-\dfrac{\pi}{6}<2x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}\therefore -\dfrac{1}{2}\le\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})\le 1,\therefore 1\le f(x)\le 4$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}4\le\log_{\frac{1}{2}}f(x)\le\log_{\frac{1}{2}}1$，即$-2\le\log_{\frac{1}{2}}f(x)\le 0$

若$\log_{\frac{1}{2}}f(x)>m-3$对$\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$恒成立，即$\log_{\frac{1}{2}}f(x)$的最小值大于$m-3$.

故$-2>m-3$，即$m<1$.所以实数m的取值范围为$(-\infty,1)$

参考答案（四）

1-8DDBCBCAD

9．BCD　　10．AD　　11．CD　　12．ABD

13．$\sqrt{2}$　　14．$\frac{2\pi}{3}$　　15．$2\sqrt{2}$　　16．6

16．6

17．（1）$\frac{1}{3}$；（2）$\sqrt{21}$.

（1）若$\vec{a}//\vec{b}$，则存在实数k，使得$\vec{b}=k\vec{a}$，即$\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2=k(3\vec{e}_1+\vec{e}_2)=3k\vec{e}_1+k\vec{e}_2$，

因为$\vec{e}_1,\vec{e}_2$不共线，所以$\begin{cases}1=3k\\ \lambda=k\end{cases}$，解得$\lambda=k=\frac{1}{3}$；

（2）单位向量$\vec{e}_1,\vec{e}_2$的夹角为$\frac{2}{3}\pi$，则$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，

由$\vec{a}\perp\vec{b}$得$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot(\vec{e}_1+\lambda\vec{e}_2)=3\vec{e}_1^{\,2}+(3\lambda+1)\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\lambda\vec{e}_2^{\,2}=3-\frac{1}{2}(3\lambda+1)+\lambda=0$，解得$\lambda=5$，

$|\vec{b}|^2=(\vec{e}_1+5\vec{e}_2)^2=\vec{e}_1^{\,2}+10\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+25\vec{e}_2^{\,2}=1-5+25=21$，所以$|\vec{b}|=\sqrt{21}$.

18．$\frac{5}{3}$

19．（1）$\sqrt{3}$；（2）$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

（1）由已知$\angle ACD=\frac{\pi}{4}$，

则$\triangle ADC$中，$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}\Rightarrow\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow AC=\sqrt{3}$；

（2）$\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{3}$，$AD=\sqrt{2}$，$\angle ADB=\pi-\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理得：$(\sqrt{3})^2=BD^2+(\sqrt{2})^2-2BD\times\sqrt{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}$，解得$BD=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，

所以$\triangle ABD$的面积为$\frac{1}{2}\times BD\times AD\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

20．方案一：选条件①：$\vec{AC}\cdot\vec{AB}=21$，

由正弦定理和 $2c\sin B=3a\sin C$，得：$2b=3a$，则$b=\frac{3a}{2}$，

又由正弦定理和 $\sin A+2\sin B-2\sin C=0$，得：$a+2b-2c=0$，$\therefore c=2a$，

由余弦定理得：$\cos A=\frac{\frac{9}{4}a^2+4a^2-a^2}{2\times\frac{3}{2}a\times 2a}=\frac{7}{8}$

因为$\vec{AC}\cdot\vec{AB}=21$，则$bc\cdot\cos A=bc\times\frac{7}{8}=21$，解得：$bc=24$，即$\frac{3a}{2}\cdot 2a=24$，

$\therefore a^2=8$，又$\because a>0$，$\therefore a=2\sqrt{2}$，所以存在这样的三角形，且$a=2\sqrt{2}$；

方案一：选条件②：外接圆半径为$\frac{\sqrt{15}}{2}$，

由正弦定理和 $2c\sin B=3a\sin C$，得：$2b=3a$，

又由正弦定理和 $\sin A+2\sin B-2\sin C=0$，得：$a+2b-2c=0$，$\therefore c=2a$

由余弦定理得：$\cos A=\frac{\frac{9}{4}a^2+4a^2-a^2}{2\times\frac{3}{2}a\times 2a}=\frac{7}{8}$，由 $\cos A=\frac{7}{8}$，得：$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=2R$，得：$a=2R\cdot\sin A=2\times\frac{\sqrt{15}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{15}{8}$，

所以存在这样的三角形，且$a=\frac{15}{8}$；

方案三：选条件③：$\cos A+\frac{a}{2b}=\frac{\sin C}{\sin B}$，由正弦定理和 $2c\sin B=3a\sin C$，得：$2b=3a$，

又由正弦定理和 $\sin A+2\sin B-2\sin C=0$，得：$a+2b-2c=0$，$\therefore c=2a$，

由余弦定理得：$\cos A=\frac{\frac{9}{4}a^2+4a^2-a^2}{2\times\frac{3}{2}a\times 2a}=\frac{7}{8}$，由 $2b=3a, c=2a$和余弦定理，

得：$\cos B=\frac{a^2+4a^2-\frac{9}{4}a^2}{2\times a\times 2a}=\frac{11}{16}$，

又由正弦定理和 $\cos A+\frac{a}{2b}=\frac{\sin C}{\sin B}$，得：$2\cos A\sin B+\sin A=2\sin C$，

又$\because \sin C=\sin(A+B)$，解得：$\sin A=2\sin A\cos B$，

在$\triangle ABC$中，$\sin A>0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$，则与 $\cos B=\frac{11}{16}$矛盾，故不存在这样的三角形.

21．(1)解：因为 $\cos B=\frac{2c-b}{2a}$，由正弦定理可得 $\cos B=\frac{2\sin C-\sin B}{2\sin A}$，

即 $2\sin A\cos B=2\sin C-\sin B$，所以 $2\sin A\cos B=2\sin(A+B)-\sin B$，

所以 $2\sin A\cos B=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B-\sin B$，所以 $\sin B=2\sin B\cos A$，

因为 $\sin B>0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，又因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$；

(2)

解：$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cos B=ca\cos B=2c\cos B$

$$=2\cdot 2R\sin C\cos B=2\cdot\frac{a}{\sin A}\sin C\cos B=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin C\cos B$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\cos B$$

$$=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos B-\cos\frac{2\pi}{3}\sin B\right)\cos B=\frac{8\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)\cos B$$

$$=4\cos^2 B+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\cos B=2\cos 2B+2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2B=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2B\right)+2$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)+2$$

又因为 $0<B<\frac{2}{3}\pi$，所以$\frac{\pi}{3}<2B+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，所以$-1\le\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$

所以$\vec{BA}\cdot\vec{BC}\in\left[2-\frac{4\sqrt{3}}{3},2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$.

22.（1）$\because f(x)$的图象经过点$P(0,\frac{A}{2})$，$\therefore\sin\varphi=\frac{1}{2}$,

$\because$点P在$f(x)$的递增区间，$\therefore\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$，$\because 0<\varphi<\pi,\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$.

（2）由（1）可知$f(x)=A\sin(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})$,

令$y=0$，得$\sin(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})=0$，$\therefore\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得$x=\frac{3k}{2}-\frac{1}{4},k\in Z$,

$\therefore Q(-\frac{1}{4},0),R(\frac{5}{4},0)$，又$P(0,\frac{A}{2})$，则$\vec{PQ}=(-\frac{1}{4},-\frac{A}{2})$，$\vec{PR}=(\frac{5}{4},-\frac{A}{2})$,

$\because PQ\perp PR,\therefore\vec{PQ}\cdot\vec{PR}=0$,即$(-\frac{1}{4})\times\frac{5}{4}+(-\frac{A}{2})(-\frac{A}{2})=0$，解得$A=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，又$A>0,\therefore A=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

（五）参考答案:

1．A　2．C　3．D　4．B　5．C　6．C　7．D　8．C

8.【解析】

因为矩形$ABCD$中，$AB=2AD=12$，点E，F分别是AB，CD的中点,

所以四边形$AEFD$和四边形$EFCB$是正方形,

又沿EF将四边形$AEFD$折起，使$\angle AEB=60°$,

所以几何体$AEB-DFC$是正三棱柱，$AD=6$,

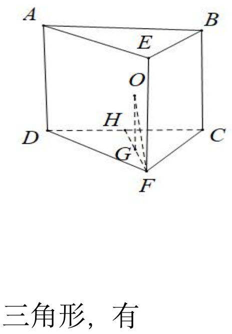
设球O的球心O在底面DFC的射影为G，因此$GO=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 6=3$,

显然G是等边三角形DFC的中心,

$FG=\frac{2}{3}FH=\frac{2}{3}\sqrt{DF^2-DH^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6^2-(\frac{1}{2}\times 6)^2}=\frac{2}{3}\times 3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

在直角三角形OFG中,

$OF=\sqrt{OG^2+FH^2}=\sqrt{3^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{21}$,



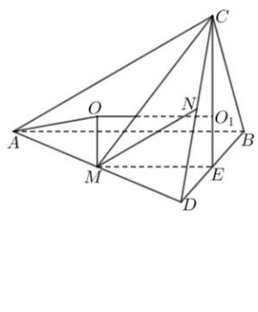
所以球O的表面积为$4\pi\cdot OF^2=84\pi$,

故选：C

9．ACD　10．AD　11．AD　12．BCD

12.【详解】

取BD中点E，连接CE，ME，如图，因$\triangle BCD$是正三角形，有$CE\perp BD$，而M是AD的中点,



有 $ME//AB$，而 $AB\perp BD$，则 $ME\perp BD$，$CE\cap ME=E$，$CE,ME\subset$ 平面 CME，
于是得 $BD\perp$ 平面 CME，$CM\subset$ 平面 CME，所以 $CM\perp BD$，A 不正确;
取 CD 的中点 N，连 MN，因 M 是 AD 的中点，则 $MN//AC$，$AC\subset$ 平面 ABC，$MN\not\subset$ 平面 ABC，所以 $MN//$ 平面 ABC，B 正确;
因 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DB=2$，要三棱锥 $C-ABD$ 的体积最大，当且仅当点 C 到平面 ABD 距离最大,
由选项 A 知，点 C 到直线 BD 的距离 $CE=\sqrt{3}$，$\angle CEM$ 是二面角 $A-BD-C$ 的平面角，当 $\angle CEM=90^{\circ}$ 时，$CE\perp$ 平面 ABD,
即当 C 到平面 ABD 距离最大为 $CE=\sqrt{3}$ 时，三棱锥 $C-ABD$ 的体积最大，此时 $CE\perp ME$，有 $CE\perp AB$,
而 $AB\perp BD$，$CE\cap BD=E$，$CE,BD\subset$ 平面 BCD，则有 $AB\perp$ 平面 BCD，$BC\subset$ 平面 BCD，所以 $AB\perp BC$，C 正确;
三棱锥 $C-ABD$ 的外接球被平面 BCD 所截小圆圆心 O_1 是正 $\triangle BCD$ 的中心，$O_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
被平面 ABD 所截小圆圆心为点 M，设球心为 O，连 OO_1,OM，则 $OO_1\perp$ 平面 BCD，$OM\perp$ 平面 ABD,
当二面角 $A-BD-C$ 为直角时，由选项 C 知，$CE\perp$ 平面 ABD，$ME\perp$ 平面 BCD，有 $OM//O_1E,OO_1//ME$,
四边形 OO_1EM 为矩形，$OM=O_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}$，连 AO，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 中,

$$AO=\sqrt{AM^2+OM^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\sqrt{\frac{7}{3}},$$

所以三棱锥 $C-ABD$ 的外接球的表面积 $S=4\pi\cdot AO^2=\frac{28\pi}{3}$，D 正确.

13．8　14．75　15．$\frac{1}{6}$　16．①③④

17 证明略

18．(1)证明略

(2)$\frac{8}{3}$

19．(1) 证明略;

(2)$\frac{1}{5}$.

(2)由（1）知，平面 $PON\perp$ 平面 $OMNB$，平面 $PON\cap$ 平面 $OMNB=ON$，则点 P 在底面圆内的射影在 ON 上,

因点 P 在底面圆内的射影在 BM 上，因此，点 P 在底面圆内的射影是 ON 与 MB 的交点 Q，

即 $PQ \perp$ 平面 $OMNB$，有 $PQ \perp ON$， $PN = PO = 2 = BO = BN$，

$PQ = \sqrt{PO^2 - OQ^2} = \sqrt{3}$，而 $BQ = \sqrt{3}$，即有 $PB = \sqrt{PQ^2 + BQ^2} = \sqrt{6}$，

取 PB 的中点 C，连 CN, CO，于是得 $CN \perp PB, CO \perp PB$，则有 $\angle OCN$ 是二面角 $A-PB-N$ 的平面角，

在 $\triangle OCN$ 中， $CN = CO = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{6}}{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$，

所以 $\cos\angle OCN = \frac{CN^2 + CO^2 - ON^2}{2CN \cdot CO} = \frac{(\frac{\sqrt{10}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{10}}{2})^2 - 4}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{5}$，

所以二面角 $A-PB-N$ 的余弦值是 $\frac{1}{5}$.

20. (1)证明略

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

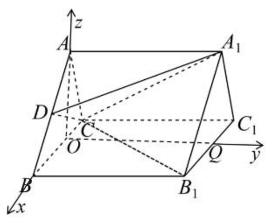
取 BC 中点为 O，B_1C_1 中点为 Q，则 $OA \perp BC, OQ \perp BC$，

由（1）知 $A_1A \perp$ 平面 ABC，且 $OA \subset$ 平面 ABC，所以 $OA \perp AA_1$，

又 $B_1B \parallel A_1A$，所以 $OA \perp BB_1, BB_1 \cap BC = B$，所以 $OA \perp$ 平面 BCC_1B_1，

于是 $\boldsymbol{OA, OB, OQ}$ 两两垂直

如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系



$O(0,0,0), A\left(0,0,\sqrt{3}\right), A_1\left(0,2,\sqrt{3}\right), C\left(-1,0,0\right), D\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B_1\left(1,\right.$

所以 $\overrightarrow{CD} = \left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{CA_1} = \left(1,2,\sqrt{3}\right), \overrightarrow{CB_1} = \left(2,2,0\right), \overrightarrow{AC} = \left(-1,0,-\sqrt{3}\right)$

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{n} = \left(x,y,z\right)$，

则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x + 2y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$

令 $x = 1$，则 $z = -\sqrt{3}, y = 1$ 于是 $\vec{n} = \left(1,1,-\sqrt{3}\right)$

设$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=\left(2\lambda,2\lambda,0\right),\lambda\in\left[0,1\right]$，则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=\left(2\lambda-1,2\lambda,-\sqrt{3}\right)$

由于直线AP与平面A_1CD所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

于是$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|2\lambda-1+2\lambda+3\right|}{\sqrt{1+1+3}\sqrt{(2\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即$\left|2\lambda+1\right|=\sqrt{(2\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+3}$，

整理得$4\lambda^2-8\lambda+3=0$，由于$\lambda\in\left[0,1\right]$，所以$\lambda=\frac{1}{2}$

于是$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CB_1}=\left(1,1,0\right)$

设点P到平面A_1CD的距离为d

则$d=\frac{\left|\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|1+1\right|}{\sqrt{1+1+3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

所以点P到平面A_1CD的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

21．(1)$a=0.006$；众数为75

(2)5（人）

(3)平均分为76.2；食堂不需要内部整顿

22．(1)$\frac{5}{6}$；(2)$\frac{1}{9}$.

(1)$A_i,B_i(i=1,2,3)$分别表示丈夫和妻子第i次通过考试的事件，则$P(A_i)=\frac{3}{4},P(B_i)=\frac{2}{3}$，

夫妻二人都不需要交补考费的事件$M=A_1B_1+\overline{A_1}A_2B_1+A_1\overline{B_1}B_2+\overline{A_1}A_2\overline{B_1}B_2$，

$P(M)=P(A_1B_1)+P(\overline{A_1}A_2B_1)+P(A_1\overline{B_1}B_2)+P(\overline{A_1}A_2\overline{B_1}B_2)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$，

所以这对夫妻在本次报名参加科目二考试通过且都不需要交补考费的概率是$\frac{5}{6}$.

(2)由（1）知，夫妻二人共交200元补考费的事件$N=\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3(B_1+\overline{B_1}B_2)+\overline{B_1}\,\overline{B_2}B_3(A_1+\overline{A_1}A_2)$，

则$P(N)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3})+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4})=\frac{1}{9}$，

所以这对夫妻在本次报名参加科目二考试通过且产生的补考费用之和为200元的概率$\frac{1}{9}$.

暑假作业 6 参考答案：

1. B
2. B
3. D
4. C
5. B 由题意知，如图，取 BC 的中点 E，B_1C_1 的中点 E_1，连接 AE、A_1E_1，则 $AE\perp BC$，$A_1E_1\perp B_1C_1$，

$AE=A_1E_1=2\sqrt{3}$，且 $AE//A_1E_1$ 所以四边形 AEE_1A_1 为矩形，

在 A_1C_1 上取一点 P_1 使得 $3A_1P_1=C_1P_1$，过 P_1 作 $P_1D_1\perp C_1B_1$，垂足为 D_1，则 $P_1D_1//A_1E_1$，

且 $\frac{P_1D_1}{A_1E_1}=\frac{3}{4}$；作 $PD\perp BC$，垂足为 D，则 $PD//AE$，$\frac{PD}{AE}=\frac{3}{4}$，所以 $P_1D_1//PD$ 且 $P_1D_1=PD$，连接

DD_1，PP_1，所以四边形 P_1D_1DP 为平行四边形，所以 $DD_1//PP_1$.

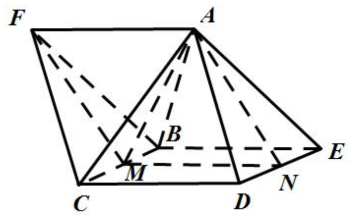
所以 $AA_1//PP_1//DD_1$，又 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $DD_1\perp$ 平面 ABC，所以 $DD_1\perp BC$，

又 $PD\perp BC$，$PD\cap D_1D=D$，所以 $BC\perp$ 平面 D_1DP，又 $PD\cap D_1D=D$，所以 $BC\perp$ 平面 D_1DP，

因为 $BC//B_1C_1$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 D_1DP，故 $\angle PD_1P_1$ 是二面角 $P-B_1C_1-A_1$ 所成的平面角；

因为 $AA_1//PP_1$，$AA_1\perp P_1D_1$，所以 $PP_1\perp P_1D_1$，在 $\triangle PP_1D_1$ 中，$PP_1=3,\frac{P_1D_1}{A_1E_1}=\frac{3}{4}\Rightarrow P_1D_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\tan\angle PD_1P_1=\frac{PP_1}{D_1P_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



6. C
7. C
8. D

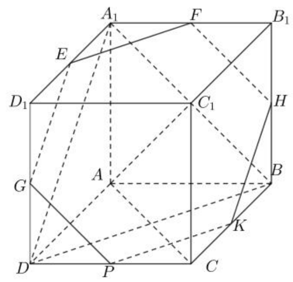
取 BC 的中点 M，DE 的中点 N，连 AM、FM、MN、AN，如图：
因为正三棱锥 $A-BCF$ 和正四棱锥 $A-BCDE$ 的所有棱长都为 2，
所以 $BC\perp FM$，$BC\perp AM$，$AN\perp DE$，又 $FM\cap AM=M$，所以 $BC\perp$ 平面 AMF，
因为 $BC//DE$，所以 $BC\perp AN$，因为 $AM\cap AN=A$，所以 $BC\perp$ 平面 AMN，

所以平面 AMF 与平面 AMN 重合，因为 $AF=MN=2$，$FM=AN=\sqrt{3}$，

所以四边形 $AFMN$ 为平行四边形，所以 $AF//MN$，又 $MN//CD$，所以 $AF//CD$，故 A 正确；
因为 $CD\perp DE$，所以 $AF\perp DE$，故 B 正确；
因为 $AF//CD$，$AF=CD$，所以四边形 $AFCD$ 为平行四边形，
同理得四边形 $AFBE$ 也为平行四边形，
所以 $CF//AD$，因为 $CF\not\subset$ 平面 ADE，$AD\subset$ 平面 ADE，所以 $CF//$ 平面 ADE，
同理得 $BF//$ 平面 ADE，因为 $CF\cap BF=F$，所以平面 $BCF//$ 平面 ADE，
又 $AF//CD//BE$，根据棱柱的定义可得该新几何体为三棱柱，故 C 正确；

设正四棱锥 $A-BCDE$ 的内切球半径为 R，因为正四棱锥 $A-BCDE$ 的高为 $\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，

由 $\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times 2^2=\frac{1}{3}R(4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2+2^2)$ 得 $R=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，故 D 不正确.



9. CD
10. BC
11. ABC

因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

$\therefore AC\perp BD$，$BD\perp CC_1$，又 $\because AC\cap CC_1=C$ $\therefore BD\perp$ 平面 ACC_1A_1

又 $\because AC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1 $\therefore AC_1\perp BD$ 同理：$AC_1\perp A_1D$ 又 $\because A_1D\cap BD=D$

$\therefore AC_1\perp$ 平面 A_1BD $\therefore$ 平面 α 可以是平面 A_1BD，又因为 $A_1D=BD=A_1B$

$\therefore \triangle A_1BD$ 为等边三角形，故 A 正确取 $A_1D_1,D_1D,CD,CB,BB_1,A_1B_1$ 的中点 E,G,P,K,H,F 并依次连接

易知 $EG\overset{/\!/}{=}\frac{1}{2}A_1D$，因为 $EG\not\subset$ 平面 A_1BD，$A_1D\subset$ 平面 A_1BD

$\therefore EG\overset{/\!/}{=}$ 平面 A_1BD 同理：$GP\parallel$ 平面 A_1BD 又因为 $EG\cap GP=G$ 且 $EG\subset$ 平面 $EGPKHF$，$GP\subset$ 平面 $EGPKHF$ $\therefore$ 平面 $EGPKHF/\!/$ 平面 A_1BD $\therefore$ 平面 α 可以是平面 $EGPKHF$

$\because EG=GP=PK=KH=HF=FE$ $\therefore$ 六边形 $EGPKHF$ 是正六边形，故 C 正确

以平面 α 是平面 A_1BD 为例计：设 A 到平面 A_1BD 的距离为 h 等体积法求距离

$\because V_{A-A_1BD}=V_{A_1-ABD}$，$\therefore \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle A_1BD}=\frac{1}{3}\cdot AA_1\cdot S_{\triangle ABD}$ 又因为 $S_{\triangle A_1BD}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$，

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$ $\therefore h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 则 AA_1 与平面 A_1BD 所成角的正弦值为 $\frac{h}{AA_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ 余弦值等于 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 B 正确对于 D 选项：由于直线 $AC_1\subset\beta$，在正方体上任取点但异于 A,C_1，与 A,C_1 可构成平面 β，但是截面的形状都不是正方形，故 D 错误

12. BCD
13. 360
14. 3.5
15. $\frac{125}{6}\pi$
16. 如果 $l\perp\alpha$，$m/\!/\alpha$，则 $l\perp m$ 或如果 $l\perp\alpha$，$l\perp m$，则 $m/\!/\alpha$.
17. (1) 6 条棱锥，PC,AB 成异面直线，PB,AC 成异面直线，PA,BC 成异面直线，

共 3 对.

(2) 取 AB 的中点为 Z，连接 MZ,NZ，

因为$PM=MB,AZ=ZB$，则$MZ//PA,MZ=\frac{1}{2}PA=2$，

同理，$NZ//BC,NZ=\frac{1}{2}BC=3$.所以异面直线$PA$与$BC$所成角为$\angle MZN$或其补角，

在$\triangle MZN$，由余弦定理可得$\cos\angle MZN=\frac{13-16}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}$，故异面直线$PA$与$BC$所成角的余弦值为$\frac{1}{4}$.

18. (1)由题得$a+0.20+0.15=0.70$，解得$a=0.35$，由$0.05+b+0.15=1-P(C)=1-0.70$，解得$b=0.10$.

(2)由甲离子的直方图可得，甲离子残留百分比的平均值为

$0.15\times2+0.20\times3+0.30\times4+0.20\times5+0.10\times6+0.05\times7=4.05$，

乙离子残留百分比的平均值为$0.05\times3+0.10\times4+0.15\times5+0.35\times6+0.20\times7+0.15\times8=6$

19.（1）取BB_1的中点M，连接HM、MC_1，四边则HMC_1D_1是平行四边形，$\therefore HD_1//MC_1$.

又$\because MC_1//BF$，$\therefore BF//HD_1$.（2）取BD的中点O，连接EO、D_1O，则$OE//D_1C$，$OE=\frac{1}{2}D_1C$．又$D_1G//DC$，$D_1G=\frac{1}{2}DC$,

$\therefore OE//D_1G$，$OE=D_1G$，$\therefore$四边形$OEGD_1$是平行四边形，$\therefore GE//D_1O$.

又$D_1O\subset$平面BB_1D_1D，$\therefore EG//$平面BB_1D_1D.

（3）由（1）知$D_1H//BF$，又$BD//B_1D_1$，B_1D_1、$HD_1\subset$平面HB_1D_1，BF、$BD\subset$平面BDF，且$B_1D_1\cap HD_1=D_1$，$DB\cap BF=B$，$\therefore$平面$BDF//$平面B_1D_1H.

20. 解：（1）设A_i表示事件:一个试验组中，服用A有效的小鼠有i只，$i=0$，1，2,

B_i表示事件“一个试验组中，服用B有效的小鼠有i只“，$i=0$，1，2,

依题意有：$P(A_1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$．$P(B_0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(B_1)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所求概率为：$P=P(B_0\bullet A_1)+P(B_0\bullet A_2)+P(B_1\bullet A_2)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$

（2）依题意这3个试验组中至少有一个甲类组的对立事件为这3个试验组中没有一个甲类组的.所以概率$P=1-\left(1-\frac{4}{9}\right)^3=\frac{604}{729}$；

21.（1）由棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的性质可知，$AB_1//DC_1$，$\because AB_1\not\subset$平面DA_1C_1，$DC_1\subset$平面A_1C_1D，

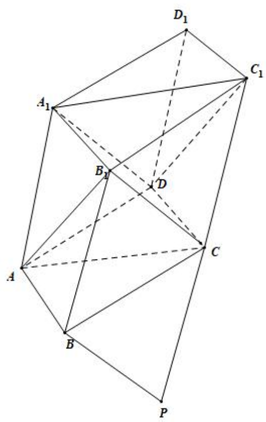
$\therefore AB_1//$平面A_1C_1D，同理可证$B_1C//$平面A_1C_1D，而$AB_1\cap B_1C=B_1$，AB_1、$B_1C\subset$平面AB_1C，

$\therefore$平面$AB_1C//$平面A_1C_1D；

（2）存在这样的点P，使$BP//$平面A_1C_1D，$\because A_1B_1//CD,A_1B_1=CD$，

$\therefore$四边形A_1B_1CD为平行四边形，$\therefore A_1D//B_1C$，

如图所示：



在C_1C的延长线上取点P，使$C_1C=CP$，连接BP，

$\because B_1B//C_1C$，$B_1B=C_1C$，$\therefore B_1B//C_1P,B_1B=C_1P$，

$\therefore$四边形BB_1CP为平行四边形，则$BP//B_1C, BP=B_1C$，

$\therefore BP//A_1D$，又$BP\not\subset$平面A_1C_1D $A_1D\subset$平面A_1C_1D，

$\therefore BP//$平面A_1C_1D.

22.（1）因为$AB=AD$，O是BD中点，所以$OA\perp BD$，

因为$OA\subset$平面ABD，平面$ABD\perp$平面BCD，

且平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，所以$OA\perp$平面BCD.

因为$CD\subset$平面BCD，所以$OA\perp CD$.

（2）**[方法一]：通性通法—坐标法**

如图所示，以O为坐标原点，OA为z轴，OD为y轴，垂直OD且过O的直线为x轴，建立空间直角坐标系$O-xyz$，

则$C(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0), D(0,1,0), B(0,-1,0)$，设$A(0,0,m), E(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}m)$，

所以$\overrightarrow{EB}=(0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}m), \overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，设$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$为平面$EBC$的法向量，

则由$\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$可求得平面$EBC$的一个法向量为$\vec{n}=(-\sqrt{3},1,-\frac{2}{m})$.

又平面BCD的一个法向量为$\overrightarrow{OA}=\left(0,0,m\right)$，

所以$\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{OA}\right\rangle=\left|\dfrac{-2}{m\cdot\sqrt{4+\frac{4}{m^2}}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$m=1$.

又点C到平面ABD的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$V_{A-BCD}=V_{C-ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以三棱锥$A-BCD$的体积为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

高一数学暑假作业（七）参考答案：

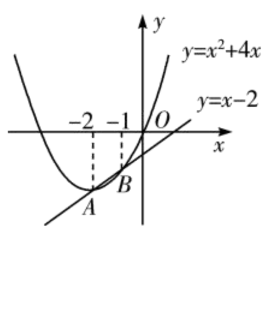
1．B　2．C　3．D 4．A

5．A　由$\forall x\in[1,2]$，$2x^2-a\geq0$可得$a\leq2x^2$对$\forall x\in[1,2]$恒成立，等价于$a\leq\left(2x^2\right)_{\min}=2$，

因为$a<1$可以推出$a\leq2$，但$a\leq2$不能推出$a<1$，所以命题“$\forall x\in[1,2]$，$2x^2-a\geq0$”为真命题的一个充分不必要条件是$a<1$.故选：A

6．B　$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\Rightarrow1+\sin2\alpha=\frac{18}{25}\Rightarrow\sin2\alpha=-\frac{7}{25}$.　故选：B.



7. D　如图，作出函数 $y=x-2$ 和 $y=x^2+4x$ 的大致图象.

$\begin{cases} y=x^2+4x \\ y=x-2 \end{cases}$，得 $x^2+3x+2=0$，解得 $x_A=-2$， $x_B=-1$， 注意到点 A 是二次函数 $y=x^2+4x$ 图象的最低点，所以若 $m<-2$，则当 $-2>x$Ém 时， $f(x)$ 单调递减，不符合题意；当 $m=-2$ 时符合题意；当 $-2<m<-1$ 时，则 $m-2>m^2+4m$，在 $x=m$ 时函数图象"向下跳跃"，不符合题意；当 mÉ -1 时，符合题意. 所以 m 的取值范围为： $m=-2$ 或 mÉ -1. 故选：D

8. C【详解】$\because BC$ 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{6}a$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2$，由面积公式得：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，

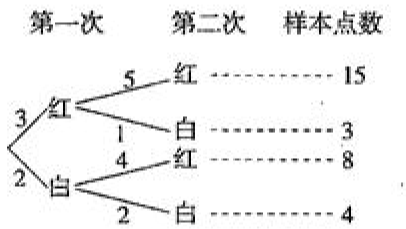
$\therefore \frac{\sqrt{3}}{12}a^2=\frac{1}{2}bc\sin A$，故 $a^2=2\sqrt{3}bc\sin A$， 由余弦定理得： $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore 2\sqrt{3}bc\sin A=b^2+c^2-2bc\cos A$, $\sqrt{3}\sin A+\cos A=\frac{b^2+c^2}{2bc}$

由辅助角公式得：$\sqrt{3}\sin A+\cos A=2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$, $\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b^2+c^2}{4bc}$,其中 $b^2+c^2\geq 2bc$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立,$\therefore \sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{2}$, $A+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$， 解得： $A\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$

$\because A\in(0,\pi)\ \therefore A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right]$ 故选：C

9. AD　根据题意画出树状图，得到有关事件的样本点数：



因此 $P(A_1)=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$， $P(A_2)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$， $P(B)=\frac{15+8}{30}=\frac{23}{30}$，A 正确；

又 $P(A_1B)=\frac{15}{30}$，因此 $P(A_1B)\neq P(A_1)P(B)$，B 错误；同理可以求得 $P(A_2B)\neq P(A_2)P(B)$，C 错误； A_1， A_2 不可能同时发生，故彼此互斥，故 D 正确，

10. ACD　对于 A，由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$，故 A 正确；

对于 B，若 $A>B$，当 $A=120°$， $B=30°$ 时，则 $\sin 2A<\sin 2B$，故 B 不正确；

对于 C， $c=a\cos B+b\cos A\Rightarrow \sin C=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$，故 C 正确；

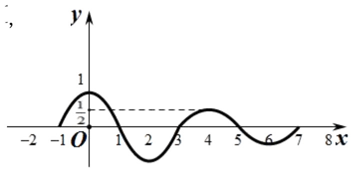
对于 D， 由 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$，可得 $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 垂直，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,又 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，可得 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，故 D 正确；故选：ACD

11．BCD　设长方体未知的两棱长分别为 a,b，则 $ab\times1=1$，$ab=1$，设外接球半径为 R，则 $2R=\sqrt{a^2+b^2+1}$，球体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}(a^2+b^2+1)^{\frac{3}{2}}$，$a^2+b^2\ge2ab=2$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立，所以 $V\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$．故选：BCD.

12．BCD 【详解】解：因为 $f(x)$ 为 R 上的偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$，又 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=1-x^2$，

所以 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=f(-x)=1-(-x)^2=1-x^2$，所以 $f(x)=1-x^2$，$x\in[-1,1]$，

当 $1<x\le3$ 时，$-1<x-2\le1$，由题意，$f(x)=-f(x-2)=-\left[1-(x-2)^2\right]=(x-2)^2-1$，



所以 $x\in[-1,3]$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=1$，$f(x)_{\min}=f(2)=-1$，

因为 $x>3$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-4)$，所以 $f(x)$ 不是周期函数，故选项 A 错误；

因为 $f(x)$ 为 R 上的偶函数，且 $x>3$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-4)$，所以任意

$x_1,x_2\in R,\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le\left|f(0)-f(2)\right|=2$，故选项 B 正确；

因为 $f(-10)=f(10)=\frac{1}{2}f(10-4)=\frac{1}{2}f(6)=\frac{1}{4}f(6-4)=\frac{1}{4}f(2)=-\frac{1}{4}$，所以选项 C 正确；

因为 $x\in[3,5]$，$x-4\in[-1,1]$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-4)=\frac{1}{2}\left[1-(x-4)^2\right]$，$f(3)=0$，

又当 $1<x\le3$ 时，$f(x)=-f(x-2)=-\left[1-(x-2)^2\right]=(x-2)^2-1$，$f(3)=0$，

所以由二次函数性质知 $f(x)$ 在区间 $[2,4]$ 上单调递增，所以选项 D 正确，故选：BCD.

13．$\frac{2\pi}{3}$　　14．2

15．0.6##$\frac{3}{5}$　　【详解】一个数由 6 改为 3，另一个数由 2 改为 5，故该数据的平均数 $\overline{x}$ 不变，设没有改变的八个数分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8，则原数据的方差为

$$s_1^2=\frac{1}{10}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+(x_4-\overline{x})^2+(x_5-\overline{x})^2+(x_6-\overline{x})^2+(x_7-\overline{x})^2+(x_8-\overline{x})^2+(6-\overline{x})^2+(2-\overline{x})^2]$$

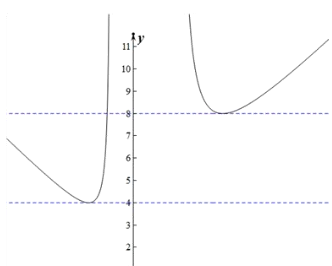
新数据的方差为

$$s_2^2=\frac{1}{10}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+(x_4-\overline{x})^2+(x_5-\overline{x})^2+(x_6-\overline{x})^2+(x_7-\overline{x})^2+(x_8-\overline{x})^2+(3-\overline{x})^2+(5-\overline{x})^2]$$

$\therefore s_2^2-s_1^2=\frac{1}{10}[(3-\overline{x})^2+(5-\overline{x})^2-(6-\overline{x})^2-(2-\overline{x})^2]=\frac{1}{10}\times(-6)=-0.6$，所以新的一组数的方差相比原先一组数的方差的减少值为 0.6．故答案为：0.6

16．$(4,8)$　分类讨论：当 $x\le0$ 时，方程 $f(x)=ax$ 即 $x^2+2ax+a=ax$，整理可得：$x^2=-a(x+1)$，

很明显 $x=-1$ 不是方程的实数解，则 $a=-\frac{x^2}{x+1}$，



当$x>0$时，方程$f\left(x\right)=ax$即$-x^2+2ax-2a=ax$，整理可得：$x^2=a\left(x-2\right)$，

很明显$x=2$不是方程的实数解，则$a=\dfrac{x^2}{x-2}$，

令$g\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{x+1},x\le 0\\ \dfrac{x^2}{x-2},x>0\end{cases}$，其中$-\dfrac{x^2}{x+1}=-\left(x+1+\dfrac{1}{x+1}-2\right)$，$\dfrac{x^2}{x-2}=x-2+\dfrac{4}{x-2}+4$

原问题等价于函数$g\left(x\right)$与函数$y=a$有两个不同的交点，求a的取值范围.结合对勾函数和函数图象平移

的规律绘制函数$g\left(x\right)$的图象，同时绘制函数$y=a$的图象如图所示，考查临界条件，

结合$a>0$观察可得，实数a的取值范围是$\left(4,8\right)$.

17. (1) 0.025 (2) 71 (3) 83.3

(3)设受嘉奖的学生分数不低于x分，因为$[80,90),[90,100]$对应的

频率分别为$0.15,0.1$，所以$(90-x)\times 0.015=0.1$，解得$x=\dfrac{250}{3}\approx 83.3$.

18. （1） $a=\sqrt{30}$；（2） $m>0$.

【详解】（1） $m=6$，$g\left(x\right)=\log_a\left(2x+4\right)$，则$F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=\log_a\left[x\left(2x+4\right)\right]$，$x\in\left[1,3\right]$.

当$a>1$时，$\left[F\left(x\right)\right]_{\max}=F\left(3\right)=\log_a 30=2$，所以$a=\sqrt{30}$；

当$0<a<1$时，$\left[F\left(x\right)\right]_{\max}=F\left(1\right)=\log_a 6=2$，所以$a=\sqrt{6}$，不合题意.综上，$a=\sqrt{30}$.

（2）要使$g\left(x\right)$在$\left[1,3\right]$上有意义，则$2+m-2>0$，解得$m>0$.由$f\left(x\right)<2g\left(x\right)$，即

$\log_a x<\log_a\left(2x+m-2\right)^2$，又$a>1$，$\therefore x<\left(2x+m-2\right)^2$，即$\sqrt{x}<2x+m-2$，得$m>-2x+\sqrt{x}+2$.

令$t=\sqrt{x}$，$t\in\left[1,\sqrt{3}\right]$，记$h\left(t\right)=-2t^2+t+2$，对称轴$t=\dfrac{1}{4}$，$\therefore\left[h\left(t\right)\right]_{\min}=h\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-4$，故

$m>\sqrt{3}-4$.综上，$m>0$.

19. （1） $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；（2） $\tan\angle DAC=\dfrac{2}{11}$.

（1）**[方法一]：正余弦定理综合法**

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+2-2\times 3\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$，所以$b=\sqrt{5}$.

由正弦定理得$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）由于$\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，$\angle ADC\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\dfrac{3}{5}$.

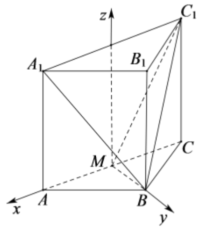
由于$\angle ADC\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.所以

$\sin\angle DAC=\sin\left(\pi-\angle DAC\right)=\sin\left(\angle ADC+\angle C\right)=\sin\angle ADC\cdot\cos C+\cos\angle ADC\cdot\sin C$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$. 由于$\angle DAC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所$\cos\angle DAC=\sqrt{1-\sin^2\angle DAC}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$.

所以$\tan\angle DAC=\frac{\sin\angle DAC}{\cos\angle DAC}=\frac{2}{11}$.

20. (1)由于$AB=BC$，$AM=CM$，所以$BM\perp AC$，根据直三棱柱的性质可知$BM\perp AA_1$，由于$AC\cap AA_1=A$，所以$BM\perp$平面AA_1C_1C，由于$BM\subset$平面C_1MB，所以平面$AA_1C_1C\perp$平面C_1MB.



(2)设N是A_1C_1的中点，连接MN，则$MN//AA_1$，MA，MB，MN，两两相互垂直.

以M为空间坐标原点建立如图所示空间直角坐标系，$A_1(\sqrt{3},0,1),B(0,1,0),C_1(-\sqrt{3},0,1)$,

$\overrightarrow{A_1B}=(-\sqrt{3},1,-1)$，设平面$C_1MB$的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MB}=y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MC_1}=-\sqrt{3}x+z=0\end{cases}$，令$x=1$，可得$\vec{n}=(1,0,3)$，设直线$A_1B$和平面$C_1MB$所成角为$\theta$，则$\sin\theta=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1B}\right|}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$；

(3)设$\overrightarrow{A_1T}=\lambda\overrightarrow{A_1B}=(-\sqrt{3}\lambda,\lambda,-\lambda)(\lambda\in(0,1))$,则$\overrightarrow{MT}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,\lambda,1-\lambda)$，过$T$作$TH\perp MC_1=H$，则$MH=|\lambda-1|$，$\because d^2+MH^2=MT^2$，$\therefore\frac{13}{9}+(\lambda-1)^2=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2+\lambda^2+(1-\lambda)^2$，

$\therefore 18\lambda^2-27\lambda+7=0$，$\therefore\lambda=\frac{1}{3}$或$\lambda=\frac{7}{6}$（舍）$\therefore A_1T=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

21.（1）由辅助角公式得$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

则$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2=2\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-\sin 2x$,

所以该函数的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

（2）由题意，$y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x$

$=2\sin x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$可得$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以当$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$即$x=\frac{3\pi}{8}$时，函数取最大值$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22.（1）$\sqrt{2}+1$；（2）$m\geq -5$.

解：(1) 当 $x<0$ 时，$f(x)=0\neq 2$，舍去；当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^x}=2$，即 $(2^x)^2-2\cdot 2^x-1=0$，$2^x>0$．

解得 $2^x=1+\sqrt{2}$，

(2) 当 $t\in[1,\ 2]$ 时，$2^t f(2t)+mf(t)\geq 0$，即 $2^t(2^{2t}-\dfrac{1}{2^{2t}})+m(2^t-\dfrac{1}{2^t})\geq 0$，即 $m(2^{2t}-1)\geq-(2^{4t}-1)$．

因为 $2^{2t}-1>0$，所以 $m\geq-(2^{2t}+1)$．由 $t\in[1,2]$，所以 $-(2^{2t}+1)\in[-17,-5]$．故 m 的取值范围是 $[-5,+\infty)$．

高一数学暑假作业（八）参考答案：

1-8　　ABCB　　DABC

9．BC　　10．ABD

如果 $B\subseteq A$，那么 $P(A\cup B)=P(A)=0.4$，$P(AB)=P(B)=0.3$，故 A 正确；

如果 A 与 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.4+0.3=0.7$，$P(AB)=P(\varnothing)=0$，故 B 正确；

如果 A 与 B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)=0.4\times 0.3=0.12$，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-0.4\times 0.3=0.58$，故 C 错误；

如果 A 与 B 相互独立，那么 $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=(1-0.4)(1-0.3)=0.42$，$P(\overline{A}\cdot B)=(1-0.4)\times 0.3=0.18$，故 D 正确；

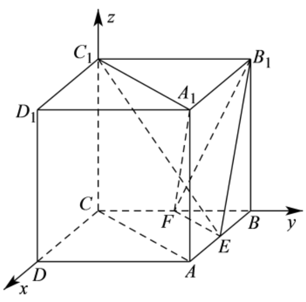
11．ACD　　12．ABD

当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，E，F 分别为 AB，BC 的中点，则 $EF\,/\!/\,AC\,/\!/\,A_1C_1$，故 A 正确；

建立如图所示的空间直角坐标系，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，点 $E(1,2,0)$，$F(0,1,0)$，$A_1(2,2,2)$，$B_1(0,2,2)$，

则 $\overrightarrow{B_1E}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1F}=(-2,-1,-2)$，

异面直线 B_1E 与 A_1F 所成角的余弦值为 $\dfrac{|\overrightarrow{B_1E}\cdot\overrightarrow{A_1F}|}{|\overrightarrow{B_1E}||\overrightarrow{A_1F}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\times 3}=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$，故 B 正确；



又 $|AE|=|BF|=2\lambda$，$\therefore |BE|=2-2\lambda$，

从而 $V_{B_1-BEF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\lambda\times(2-2\lambda)\times 2=\dfrac{4}{3}\lambda(1-\lambda)=-\dfrac{4}{3}\left(\lambda-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{3}$，故 C 错误

当 λ 取任意值时，$E(2-2\lambda,2,0)$，$F(0,2-2\lambda,0)$，$\overrightarrow{C_1E}=(2-2\lambda,2,-2)$，

$\overrightarrow{A_1F}=(-2,-2\lambda,-2)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1E}=-2(2-2\lambda)+2(-2\lambda)+(-2)^2=0$，

$\therefore C_1E\perp A_1F$，故 D 正确，

13．$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$　　14．0.9676

15．$\dfrac{3}{4}$

由题意知：$4a+\dfrac{4}{2a+b}+\dfrac{1}{2a-b}=2a+b+\dfrac{4}{2a+b}+2a-b+\dfrac{1}{2a-b}$

$\geq 2\sqrt{\left(2a+b\right)\cdot\dfrac{4}{2a+b}}+2\sqrt{\left(2a-b\right)\cdot\dfrac{1}{2a-b}}=6$，

当且仅当$2a+b=\dfrac{4}{2a+b},2a-b=\dfrac{1}{2a-b}$，即$a=\dfrac{3}{4},b=\dfrac{1}{2}$时取等，

故当$4a+\dfrac{4}{2a+b}+\dfrac{1}{2a-b}$取到最小值时，$a=\dfrac{3}{4}$.

16．$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，　6

因为四边形$ABCD$中，$AB//CD$，$AB=5$，$CD=2$，则$\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}$，

因为$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BC}^{2}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}^{2}=0$，

即$13-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\dfrac{2}{5}\times5^{2}=0$，可得$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=5$，因此，$\cos\angle ABC=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{5}{5\times\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，

$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}$，

所以，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BC}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BC}^{2}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\dfrac{6}{25}\overrightarrow{BA}^{2}=6$，

设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}\left(0\leq\lambda\leq1\right)$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=6\lambda\leq6$，所以，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$的最大值为6.

17．(1)由$\vec{a}$□$\vec{b}$，则$\vec{a}=\mu\vec{b}$，则$(2\cos x,1)=\mu(-\cos(x+\dfrac{\pi}{3}),\dfrac{1}{2})$，

$2\cos x=-\mu\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$1=\dfrac{\mu}{2}$，故$2\cos x=-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$\cos x=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，由于$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以$\cos x=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$，

所以$x=\pi-(x+\dfrac{\pi}{3})$，则$x=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) $f\left(x\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\cos x,1\right)\cdot\left(-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),\dfrac{1}{2}\right)=-2\cos x\cdot\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$，

$f\left(x\right)=-2\cos x\cdot\left(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\dfrac{1}{2}\cos2x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\because x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$.

$\because |f(x_1)-f(x_2)|\le\lambda$ 恒成立，$\therefore \lambda\ge|f(x_1)-f(x_2)|_{\max}=\left|1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right|=\dfrac{3}{2}$，

从而 $\lambda\ge\dfrac{3}{2}$，即 $\lambda_{\min}=\dfrac{3}{2}$.

18. (1)解：由频率分布直方图可知，测试分数位于 $[90,100]$ 的频率为 $10\times0.01=0.1$，

则测试分数位于 $[90,100]$ 个数为 $40\times0.1=4$，

所以，测试分数位于 $[80,90)$ 的个数为 $40-(4+10+14+4)=8$，所以 $a=\dfrac{8}{40}\div10=0.02$.

估计平均数为 $55\times0.1+65\times0.25+75\times0.35+85\times0.2+95\times0.1=74.5$.

(2)解：因为测试分数位于 $[90,100]$ 的频率为 0.1，测试分数位于 $[80,90)$ 的频率为 0.2，

能够获得"滑雪达人"证书的中学生测试分数要在前 26%，

故设能够获得证书的测试分数线为 x，则 $80<x<90$，

由 $(90-x)\times0.02=0.26-0.1$，可得 $x=82$，所以分数线的估计值为 82.

19. (1) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$，$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore A-B=\dfrac{\pi}{6}$，又 $\because A+B=\dfrac{2\pi}{3}$ $\therefore B=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\vec{m}\cdot\vec{n}=3\sin A+\cos2A=-2\sin^2A+3\sin A+1$，

$\because C=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore A\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$，$\sin A\in(0,1]$，$\therefore$ 当 $\sin A=\dfrac{3}{4}$ 时，$\vec{m}\cdot\vec{n}$ 有最大值 $\dfrac{17}{8}$.

20. (1)解：原问题等价于 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)_{\min}\le0$，

当 $m=0$ 时，显然不成立；

当 $m>0$ 时，由于 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-1$，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=6m+1\le0$，即 $m\le-\dfrac{1}{6}$，不合题意；

当 $m<0$ 时，由于 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-1$，

所 以 $f(x)_{\min}=f(3)=30m+1\le0$，即 $m\le-\dfrac{1}{30}$.综上所述，$m\le-\dfrac{1}{30}$；

(2)解：因为 $m>0,f(x)<0$ 的解集为 (a,b)，

所以 $f(x)=0$ 有两个不同的实根 a,b，即 a,b 是方程 $2mx^2+4mx+1=0$ 的两个不同实根，

所以 $a+b=-2,ab=\dfrac{1}{2m}>0$，所以 a,b 同为负数，

所以 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}\right)(a+b)=-\dfrac{1}{2}\left(13+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{9a}{b}\right)\le-\dfrac{1}{2}\left(13+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{9a}{b}}\right)=-\dfrac{25}{2}$，当且仅当

$\dfrac{4}{a}=\dfrac{9}{b}$，即 $a=-\dfrac{8}{13},b=-\dfrac{18}{13}$ 时等号成立，所以 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}$ 的最大值为 $-\dfrac{25}{2}$.

21．(1)证明：作 $GH /\!/ BE$ 交 A_1E 于 H，则 $\dfrac{GH}{BE}=\dfrac{A_1G}{A_1B}$，

因为 $A_1G=3GB$，所以 $\dfrac{GH}{BE}=\dfrac{A_1G}{A_1B}=\dfrac{3}{4}$.

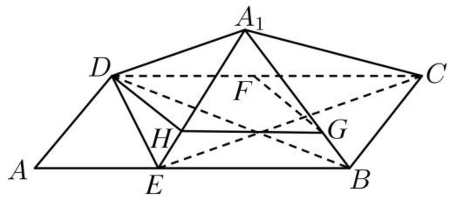
因为 $AB=3$，$BE=2AE$，$DF=FC$，所以 $AE=1$，$BE=2$，$DF=\dfrac{3}{2}$，

所以 $GH=\dfrac{3}{4}\times 2=\dfrac{3}{2}$，所以 $DF=GH$.又 $DF\parallel BE$，$BE\parallel GH$，所以 $DF\parallel GH$，

所以四边形 $DFCH$ 为平行四边形，所以 $FG\parallel DH$，

$DH\subset$ 平面 A_1DE，$FG\not\subset$ 平面 A_1DE，

所以 $FG /\!/$ 平面 A_1DE，



(2)因为三棱锥 $C-A_1DE$ 的体积也就是三棱锥 A_1-CDE 的体积，

所以当三棱锥 $C-A_1DE$ 的体积最大时，也就是点 A_1 到平面 $ABCD$ 的距离最大时，

此时平面 $A_1DE\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $AE=1$，$AD=2$，$\angle A=60^\circ$，则 $DE=\sqrt{AE^2+AD^2-2AE\cdot AD\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$，

所以 $AD^2=DE^2+AE^2$，所以 $DE\perp AE$，所以 $A_1E\perp DE$，

因为平面 $A_1DE\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $A_1DE\cap$ 平面 $ABCD=DE$，$A_1E\subset$ 平面 A_1DE，

所以 $A_1E\perp$ 平面 $ABCD$.设点 B 到平面 A_1DC 的距离为 d，连接 BD.

因为三棱锥 $B-A_1DC$ 的体积等于三棱锥 A_1-BCD 的体积，

即 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1DC}\cdot d=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot A_1E$，所以 $d=\dfrac{S_{\triangle BCD}\cdot A_1E}{S_{\triangle A_1DC}}$，因为 $DE\perp AE$，$DC\parallel AE$，所以 $CD\perp DE$，

因为平面 $A_1E\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $A_1DE\cap$ 平面 $ABCD=DE$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $CD\perp$ 平面 A_1DE，又 $A_1DC\subset$ 平面 A_1DE，所以 $CD\perp A_1D$，

所以 $S_{\triangle A_1DC}=\dfrac{1}{2}CD\cdot A_1D=\dfrac{1}{2}\times 3\times 2=3$，$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot DE=\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $d=\dfrac{S_{\triangle BCD}\cdot A_1E}{S_{\triangle A_1DC}}=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

22．(1)解：$\because f\left(x\right)=ka^x-a^{-x}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，故 $f\left(0\right)=0$，得 $k=1$，

此时，$f\left(x\right)=a^{x}-a^{-x}$，$f\left(-x\right)=a^{-x}-a^{x}=-f\left(x\right)$，

即$f\left(x\right)$是$\mathbf{R}$上的奇函数．又$f(1)=\frac{3}{2}$，即$2a^{2}-3a-2=0$，

解得$a=2$或$a=-\frac{1}{2}$（舍去），$\therefore g\left(x\right)=2^{2x}+2^{-2x}-4\left(2^{x}-2^{-x}\right)^{2}-4\left(2^{x}-2^{-x}\right)+2$，

令$t=2^{x}-2^{-x}\left(1\le x\le 2\right)$，

易知$t=m\left(x\right)$在$[1,2]$上为增函数，$\therefore t\in\left[\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right]$，

$\therefore g\left(x\right)=\varphi\left(t\right)=t^{2}-4t+2=\left(t-2\right)^{2}-2$，当$t=\frac{15}{4}$时，$g\left(x\right)$有最大值$\frac{17}{16}$；

当$t=2$时，$g\left(x\right)$有最小值-2，故$g\left(x\right)$的值域是$\left[-2,\frac{17}{16}\right]$．

(2)由$a>1$，$h\left(x\right)=a^{|x|}-\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases}a^{-x},x\ge 0,\\ a^{x},x<0,\end{cases}$

则$h\left(x\right)$为偶函数，且$h\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$单调递增，在$\left(0,+\infty\right)$单调递减，

又$\left[h\left(x\right)\right]^{2}=\begin{cases}a^{-2x},x\ge 0\\ a^{2x},x<0\end{cases}$，$h\left(2x\right)=\begin{cases}a^{-2x},x\ge 0\\ a^{2x},x<0\end{cases}$，

$\therefore h\left(x+\lambda\right)\le\left[h\left(x\right)\right]^{2}=h(2x)$，

则对任意$x\in\left[\lambda,\lambda+1\right]$恒成立，即$\left|2x\right|\le\left|x+\lambda\right|$对任意$x\in\left[\lambda,\lambda+1\right]$恒成立，

平方得：$3x^{2}-2\lambda x-\lambda^{2}\le 0$对$\forall x\in\left[\lambda,\lambda+1\right]$恒成立，

$\therefore\begin{cases}3\lambda^{2}-2\lambda\cdot\lambda-\lambda^{2}\le 0\\ 3\left(\lambda+1\right)^{2}-2\lambda\cdot\left(\lambda+1\right)-\lambda^{2}\le 0\end{cases}$，解得：$\lambda\le-\frac{3}{4}$，综上：$\lambda$的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right]$．