

高一数学

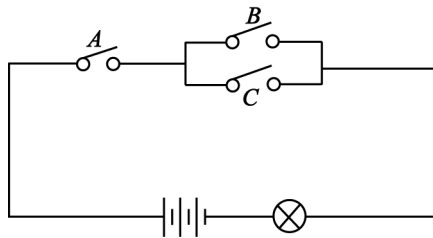
满分:150分 考试时间:120分钟

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂;非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的笔书写,字体工整、笔迹清晰。
3. 请按照题序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域的答案无效;在草稿纸、试题卷上的答题无效。
4. 保持答题卡卡面清洁,不要折叠、不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap \mathbf{Z} =$
A. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$
C. $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. 已知 $2x^2 - kx + m < 0$ 的解集为 $(-1, t) (t > -1)$, 则 $k + m$ 的值为
A. -1 B. -2 C. 1 D. 2
3. 若 $\sin 2\theta + \cos^2 \theta = 1$, 则 $\tan \theta =$
A. -1 B. 1 C. 2 D. 0 或 2
4. 已知 $\mathbf{a} = (-2, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 2)$, 若向量 \mathbf{a} 在向量 \mathbf{b} 上的投影向量为 \mathbf{c} , 则 $\mathbf{c} =$
A. $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$ B. $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)$ C. $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$
5. 一个电路如图所示, A, B, C 为3个开关, 其闭合的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且是相互独立的, 则灯亮的概率是



- A. $\frac{16}{27}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{11}{27}$ D. $\frac{19}{27}$
6. 一支田径队有男运动员24人,女运动员18人,用分层抽样从全体运动员中抽取一个容量为14的样本,抽出的男运动员平均身高为180.1 cm,抽出的女运动员平均身高为168.2 cm,则估计该田径队运动员的平均身高为
A. 174.6 cm B. 175 cm C. 175.5 cm D. 176 cm
 7. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,棱长为2, E 为 BC 的中点,点 P 在平面 BDD_1B_1 内运动,则 $PE + PC_1$ 的最小值为
A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 5
 8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 \mathbf{R} , $f(1+x)$ 为偶函数, $\forall x \in \mathbf{R}, f(4+x) = -f(-x)$ 成立, $f(1) = 2$, 则 $f(2023) =$
A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

二、选择题:共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,选对但不全的得2分,有选错的得0分。

9. 若复数 z 满足: $\bar{z} + 2i = 3 + i$, 则

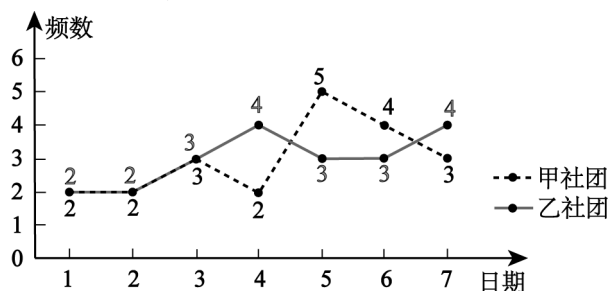
A. z 的实部为 3

B. z 的虚部为 1

C. $z\bar{z} = \sqrt{10}$

D. z 在复平面上的点位于第一象限

10. 冬季奥林匹克运动会,是世界规模最大的冬季综合性运动会,自1924年起,每四年举办一届.第24届由中国2022年2月在北京举办,分北京赛区、延庆赛区、张家口赛区三个赛区,共15个比赛项目.为了宣传奥运精神,红星实验学校组织了甲、乙两个社团,利用一周的时间对外进行宣传,将每天宣传的次数绘制成如下频数分布折线图,则



A. 甲社团众数小于乙社团众数

B. 甲社团的平均数小于乙社团的平均数

C. 甲社团的第80百分位数等于乙社团的第80百分位数

D. 甲社团的方差大于乙社团的方差

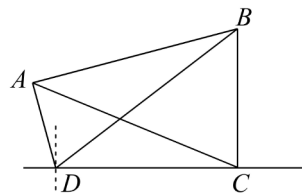
11. 如图所示,为了测量 A, B 处岛屿的距离,小明在 D 处观测, A, B 分别在 D 处的北偏西 15° 、北偏东 45° 方向,再往正东方向行驶 30 海里至 C 处,观测 B 在 C 处的正北方向, A 在 C 处的北偏西 60° 方向,则下列结论正确的是

A. $\angle CAD = 60^\circ$

B. A, D 之间的距离为 $15\sqrt{2}$ 海里

C. A, B 两处岛屿间的距离为 $15\sqrt{6}$ 海里

D. B, D 之间的距离为 $30\sqrt{3}$ 海里



12. 棱长为 1 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, AC 和 BD 相交于点 O , 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起,使点 A 到达 P 的位置,连接 PC ,得到四面体 $P-BCD$,则

A. 四面体 $P-BCD$ 中 PC 的取值范围为 $(0, \sqrt{3})$

B. $BD \perp PC$

C. 四面体 $P-BCD$ 的体积最大值为 $\frac{1}{4}$

D. 直线 PD 与平面 BCD 所成角的最大值为 45°

三、填空题:共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知 $0 < x < 1$, 则函数 $f(x) = x^3(1-x^3)$ 的最大值为_____。

14. 从 1, 3, 5, 7 这 4 个数中随机取出 2 个不同的数为 a, b , 则 $a + b > ab$ 的概率为_____。

15. 已知 $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 2$, \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 则三角形 ABC 的 BC 边上中线的长为_____。

16. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, $AC = AA_1$, 若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为 $\sqrt{7}$, 则三棱锥 A_1-ABC 的体积的最大值为_____。

四、解答题:共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在复平面 xOy 内,向量 \overrightarrow{AB} 对应的复数 z_1 ,向量 \overrightarrow{BC} 对应的复数 z_2 , $2\overline{z_1} + 3i = 2 - i$, $z_2 = \frac{3+i}{2-i}$.

(1) 求向量 \overrightarrow{AC} 对应的复数;

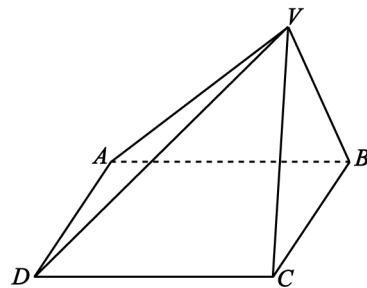
(2) 若点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 则三角形 POQ 的面积为 $\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$. 计算三角形 ABC 的面积.

18. (12 分)

在四棱锥 $V-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形, $BC \perp$ 平面 VAB , $VA \perp VB$, 设平面 VAB 与平面 VCD 的公共直线为 l .

(1) 写出图中与 l 平行的直线, 并证明;

(2) 求证: 平面 $VAD \perp$ 平面 VBC .



19. (12 分)

已知 e_1, e_2 为一组单位基向量, 且向量 $a = xe_1 + 4e_2, b = e_1 + xe_2$.

(1) 若 $e_1 = i, e_2 = j$ (其中 i, j 是方向分别与 x, y 轴正方向相同的单位向量), $a \parallel b$, 求 x 的值;

(2) 若 $e_1 \cdot e_2 = \ln \frac{1}{\sqrt{e}}$ (其中的 e 为无理数, $e = 2.718\cdots$), $(a+b) \perp (a-b)$, 求 $|a|$ 的值.

20. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c(\sqrt{3}\sin A - \cos A) = 2a - b$.

(1) 求 C ;

(2) 若 $a = 3, b = 4$, 在角 C 的平分线上取点 D , 且 $CD = \frac{36}{13}$, 判断点 D 是否在线段 AB 上? 请说明理由.

21. (12 分)

2021 年元旦甲、乙二人共同投资注册了一家公司. 公司经过一年的运营走入正轨, 但公司没有盈利也没有亏损. 根据大数据, 走入正轨后的同类公司共有 100 家, 其中有 10 家盈利率为 20%, 50 家盈利率为 10%, 35 家盈利率为 5%, 5 家盈利率为 -20%. 以下用频率代替概率.

(1) 若事件 A 发生的概率不超过 5%, 则事件 A 称为小概率事件, 在现实中小概率事件可以看作是几乎不可能发生的事件. 请预测甲、乙二人的这家公司 2022 全年不亏损的概率, 并对亏损情况作出统计推断;

(2) 设甲、乙二人的这家公司 2022 全年的盈利率为 r , 请你预测 r 的平均值 \bar{r} 和 r 的方差 S^2 ;

(3) 已知盈利率分别为 20%, 10%, 5%, -20% 的公司可以依次评定为 A, B, C, D 四个等级, 某人从以上 A, B, C, D 四个等级的公司中抽取等级不同的两家, 且抽取到的两家互不影响, 求这两家公司的盈利率之和不小于 0 的概率.

提示: $(20\% - \bar{r})^2 \times 10 + (10\% - \bar{r})^2 \times 50 + (5\% - \bar{r})^2 \times 35 + (-20\% - \bar{r})^2 \times 5 = 0.59$.

22. (12 分)

在正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中, 各棱长都为 a , O 为 B_1E 的中点.

(1) 求 A_1E 与侧面 BCC_1B_1 所成角的正切值;

(2) 求平面 ACO 与平面 EDD_1E_1 所成的锐二面角的正弦值.

