

# 2021 年普通高等学校招生全国统一考试

## 天津卷·数学

### 第 I 卷

注意事项:

1. 每小题选出答案后, 用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

2. 本卷共 9 小题, 每小题 5 分, 共 45 分

参考公式:

• 如果事件  $A$ 、 $B$  互斥, 那么  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

• 如果事件  $A$ 、 $B$  相互独立, 那么  $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

• 球的体积公式  $V = \frac{1}{3}\pi R^3$ , 其中  $R$  表示球的半径。

• 圆锥的体积公式  $V = \frac{1}{3}Sh$ , 其中  $S$  表示圆锥的底面面积,  $h$  表示圆锥的高。

一、选择题: 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

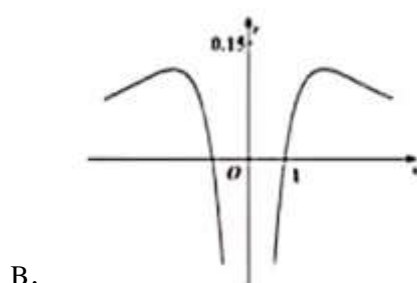
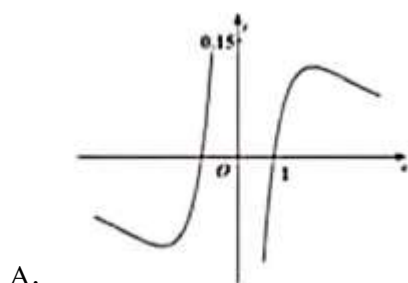
1. 设集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ ,  $C = \{0, 2, 4\}$ , 则  $(A \cap B) \cup C =$  ( )

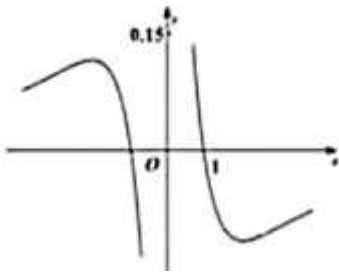
A.  $\{0\}$               B.  $\{0, 1, 3, 5\}$               C.  $\{0, 1, 2, 4\}$               D.  $\{0, 2, 3, 4\}$

2. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > 6$ ”是“ $a^2 > 36$ ”的 ( )

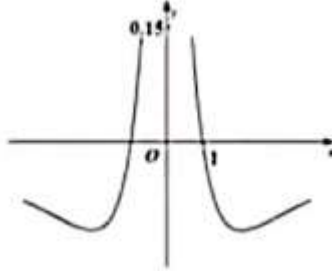
A. 充分不必要条件              B. 必要不充分条件  
C. 充要条件              D. 既不充分也不必要条件

3. 函数  $y = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$  的图像大致为 ( )



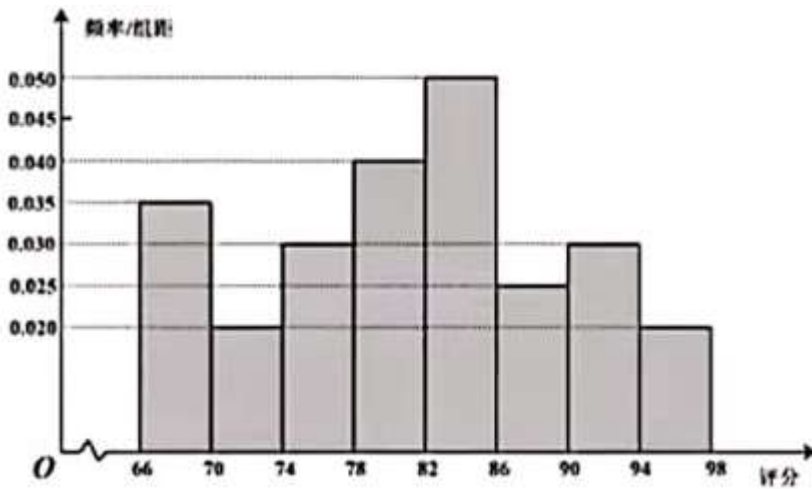


C.



D.

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取 400 部，统计其评分数据，将所得 400 个评分数据分为 8 组： $[66,70)$ ,  $[70,74)$ ,  $[74,78)$ ,  $[78,82)$ ,  $[82,86)$ ,  $[86,90)$ ,  $[90,94)$ ,  $[94,98]$ ，并整理得到如下的频率分布直方图，则评分在区间  $[82,86)$  内的影视作品数量是 ( )



- A. 20      B. 40      C. 64      D. 80

5. 设  $a = \log_2 0.3$ ,  $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$ ,  $c = 0.4^{0.3}$ ，则  $a$ ,  $b$ ,  $c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $c < a < b$       C.  $b < c < a$       D.  $a < c < b$

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面，顶点均在球面上，若球的体积为  $\frac{32\pi}{3}$ ，两个圆锥的高之比为 1:3，则这两个圆锥的体积之和为 ( )

- A.  $3\pi$       B.  $4\pi$       C.  $9\pi$       D.  $12\pi$

7. 若  $2^a = 5^b = 10$ ，则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$  ( )

- A. -1      B.  $\lg 7$       C. 1      D.  $\log_7 10$

8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点与抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点重合，抛物线的准线交双曲线于  $A, B$  两点，交双曲线的渐近线于  $C, D$  两点，若  $|CD| = \sqrt{2}|AB|$ ，则双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C. 2      D. 3

9. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a), & x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5, & x \geq a \end{cases}$ , 若  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内恰有 6 个零点, 则  $a$

的取值范围是 ( )

- A.  $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$       B.  $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$       C.  $\left(2, \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$       D.  $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left[\frac{11}{4}, 3\right)$ .

## 2021 年普通高等学校招生全国统一考试 (天津卷)

### 数学

### 第 II 卷

#### 注意事项

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.

2. 本卷共 11 小题, 共 105 分.

二、填空题, 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 试题中包含两个空的, 答对 1 个的给 3 分, 全部答对的给 5 分.

10.  $i$  是虚数单位, 复数  $\frac{9+2i}{2+i} =$ \_\_\_\_\_.

11. 在  $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^6$  的展开式中,  $x^6$  的系数是\_\_\_\_\_.

12. 若斜率为  $\sqrt{3}$  的直线与  $y$  轴交于点  $A$ , 与圆  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  相切于点  $B$ , 则  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

13. 若  $a > 0, b > 0$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$  的最小值为\_\_\_\_\_.

14. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语, 若一方猜对且另一方猜错, 则猜对的一方获胜, 否则本次平局. 已知每次活动中, 甲、乙猜对的概率分别为  $\frac{5}{6}$  和  $\frac{1}{5}$ , 且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响, 各次活动也互不影响, 则一次活动中, 甲获胜的概率为\_\_\_\_\_; 3 次活动中, 甲至少获胜 2 次的概率为\_\_\_\_\_.

15. 在边长为 1 的等边三角形  $ABC$  中,  $D$  为线段  $BC$  上的动点,  $DE \perp AB$  且交  $AB$  于点  $E$ .  $DF \parallel AB$  且交  $AC$  于点  $F$ , 则  $|2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DF}|$  的值为\_\_\_\_\_;  $(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}) \cdot \overrightarrow{DA}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题, 本大题共 5 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 14 分)

在  $\triangle ABC$ , 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{2}$ .

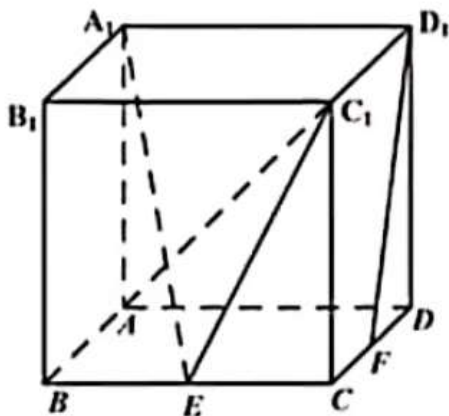
(I) 求  $a$  的值;

(II) 求  $\cos C$  的值;

(III) 求  $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$  的值.

17. (本小题满分 15 分)

如图，在棱长为 2 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $E$  为棱  $BC$  的中点， $F$  为棱  $CD$  的中点。



(I) 求证:  $D_1F \parallel$  平面  $A_1EC_1$ ;

(II) 求直线  $AC_1$  与平面  $A_1EC_1$  所成角的正弦值.

(III) 求二面角  $A-A_1C_1-E$  的正弦值.

18. (本小题满分 15 分)

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 上顶点为  $B$ , 离心率为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 且  $|BF| = \sqrt{5}$ .

(I) 求椭圆的方程;

(II) 直线  $l$  与椭圆有唯一的公共点  $M$ , 与  $y$  轴的正半轴交于点  $N$ , 过  $N$  与  $BF$  垂直的直线交  $x$  轴于点  $P$ . 若  $MP \parallel BF$ , 求直线  $l$  的方程.

19. (本小题满分 15 分)

已知  $\{a_n\}$  是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项和为 64.  $\{b_n\}$  是公比大于 0 的等比数列,  $b_1 = 4, b_3 - b_2 = 48$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 记  $c_n = b_{2n} + \frac{1}{b_n}, n \in \mathbb{N}^*$ .

(i) 证明  $\{c_n^2 - c_{2n}\}$  是等比数列;

(ii) 证明  $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{a_k a_{k+1}}{c_k^2 - c_{2k}}} < 2\sqrt{2} (n \in \mathbb{N}^*)$

20. (本小题满分 16 分)

已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = ax - xe^x$ .

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(II) 证明  $f(x)$  存在唯一的极值点

(III) 若存在  $a$ , 使得  $f(x) \leq a + b$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  成立, 求实数  $b$  的取值范围