

绝密★启用前

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

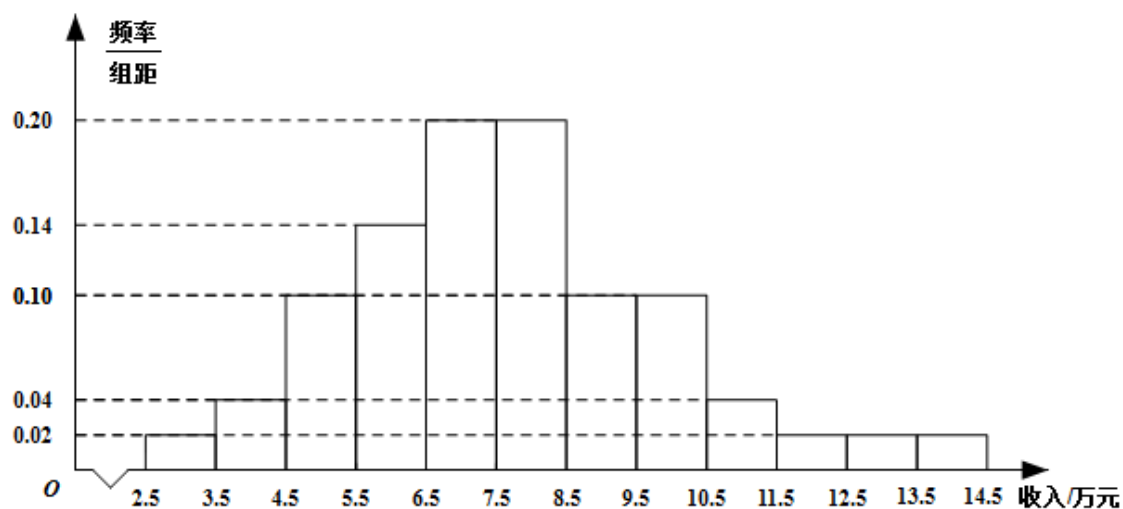
- 1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用皮擦干净后，再选涂其他答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $N = \{x | 2x > 7\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A. $\{7, 9\}$ B. $\{5, 7, 9\}$ C. $\{3, 5, 7, 9\}$ D. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是 ()

- A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
- B. 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
- C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
- D. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

3. 已知 $(1-i)^2 z = 3+2i$ ，则 $z =$ ()

- A. $-1-\frac{3}{2}i$ B. $-1+\frac{3}{2}i$ C. $-\frac{3}{2}+i$ D. $-\frac{3}{2}-i$

4. 下列函数中是增函数的为 ()

- A. $f(x) = -x$ B. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ C. $f(x) = x^2$ D.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

5. 点 $(3,0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条渐近线的距离为 ()

- A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

6. 青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录表的数据 V 的满足

$L = 5 + \lg V$. 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据为

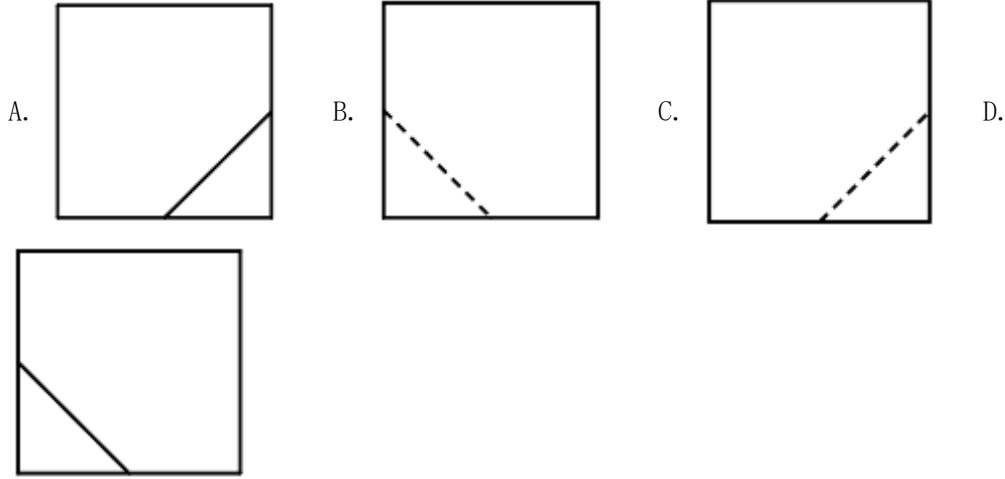
() ($\sqrt[10]{10} \approx 1.259$)

- A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6

7. 在一个正方体中,过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E, F, G . 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后,所得多面体的三视图中,正视图如图所示,则相应的侧视图是 ()



正视图



8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B=120^\circ$, $AC=\sqrt{19}$, $AB=2$, 则 $BC=$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. 3

9. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_2=4$, $S_4=6$, 则 $S_6=$ ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

10. 将 3 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为 ()

- A. 0.3 B. 0.5 C. 0.6 D. 0.8

11. 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 则 $\tan \alpha =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

12. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 且 $f(1+x)=f(-x)$. 若 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, 则 $f\left(\frac{5}{3}\right)=$

()

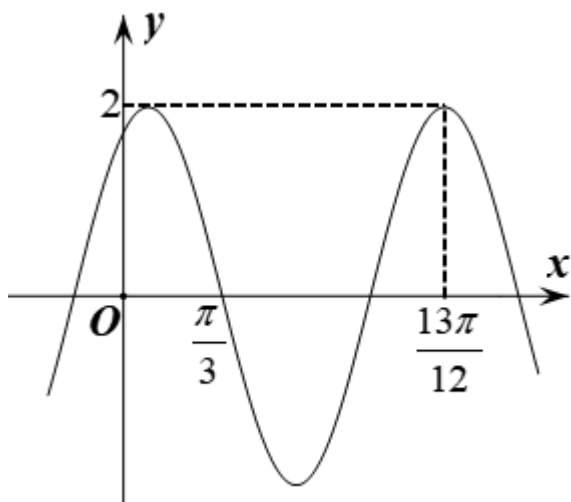
- A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=3, |\vec{a}-\vec{b}|=5, \vec{a} \cdot \vec{b}=1$, 则 $|\vec{b}|=$ _____.

14. 已知一个圆锥的底面半径为 6, 其体积为 30π 则该圆锥的侧面积为_____.

15. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ _____.



16. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两个焦点, P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$, 则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. 甲、乙两台机床生产同种产品, 产品按质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了 200 件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

- (1) 甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?
 (2) 能否有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
-----------------	-------	-------	-------

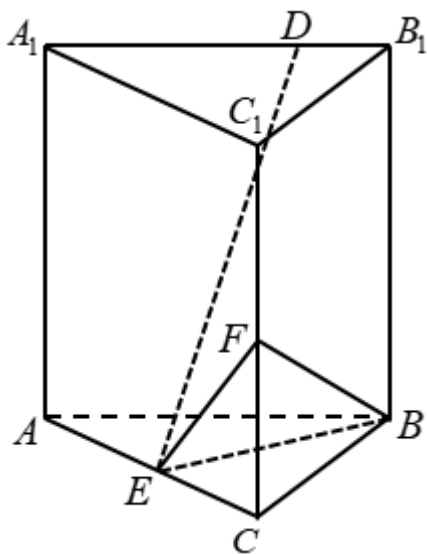
k	3.841	6.635	10.828
-----	-------	-------	--------

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_n > 0, a_2 = 3a_1$, 且数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 证明:

$\{a_n\}$ 是等差数列.

19. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB = BC = 2$, E, F 分别为

AC 和 CC_1 的中点, $BF \perp A_1B_1$.



(1) 求三棱锥 $F-EBC$ 的体积;

(2) 已知 D 为棱 A_1B_1 上的点, 证明: $BF \perp DE$.

20. 设函数 $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1$, 其中 $a > 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴没有公共点, 求 a 的取值范围.

21. 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O . 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x=1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且

$OP \perp OQ$. 已知点 $M(2,0)$, 且 eM 与 l 相切.

(1) 求 C, eM 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 A_1A_2, A_1A_3 均与 eM 相切. 判断直线 A_2A_3 与 eM 的位置关系, 并说明理由.

(二)选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

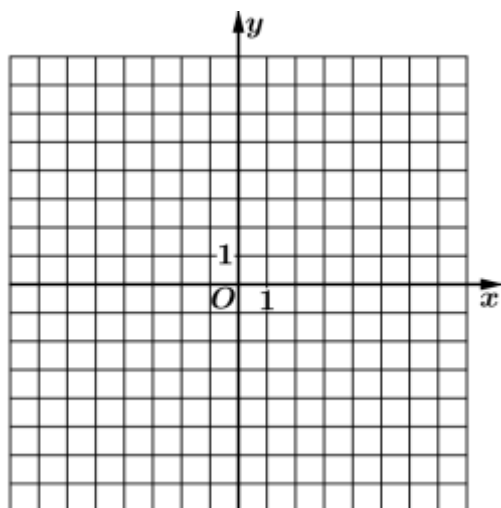
22. 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sqrt{2} \cos \theta$.

(1) 将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

(2) 设点 A 的直角坐标为 $(1,0)$ ， M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2} \overrightarrow{AM}$ ，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知函数 $f(x) = |x-2|$, $g(x) = |2x+3| - |2x-1|$.



(1) 画出 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像；

(2) 若 $f(x+a) \geq g(x)$ ，求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学 答案解析

一、选择题：

1. B

解析:

$$N = \left(\frac{7}{2}, +\infty\right), \text{ 故 } M \cap N = \{5, 7, 9\},$$

故选 B.

2. C

因为频率直方图中的组距为 1, 所以各组的直方图的高度等于频率. 样本频率直方图中的频率即可作为总体的相应比率的估计值.

该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户的比率估计值为 $0.02 + 0.04 = 0.06 = 6\%$, 故 A 正确;

该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计值为 $0.04 + 0.02 \times 3 = 0.10 = 10\%$, 故 B 正确;

该地农户家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间的比例估计值为

$$0.10 + 0.14 + 0.20 \times 2 = 0.64 = 64\% > 50\%, \text{ 故 D 正确;}$$

该地农户家庭年收入的平均值的估计值为

$$3 \times 0.02 + 4 \times 0.04 + 5 \times 0.10 + 6 \times 0.14 + 7 \times 0.20 + 8 \times 0.20 + 9 \times 0.10 + 10 \times 0.10 + 11 \times 0.04 + 12 \times 0.02 + 13 \times 0.02 + 14 \times 0.02 = 7.68$$

(万元), 超过 6.5 万元, 故 C 错误.

综上, 给出结论中不正确的是 C.

故选 C.

3. B

解析:

$$(1-i)^2 z = -2iz = 3+2i,$$

$$z = \frac{3+2i}{-2i} = \frac{(3+2i) \cdot i}{-2i \cdot i} = \frac{-2+3i}{2} = -1 + \frac{3}{2}i.$$

故选 B.

4. D

解析:

对于 A, $f(x) = -x$ 为 R 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 B, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为 R 上的减函数, 不合题意, 舍.

对于 C, $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 为减函数, 不合题意, 舍.

对于 D, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 为 R 上的增函数, 符合题意,

故选 D.

5. A

解析:

由题意可知, 双曲线的渐近线方程为: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$, 即 $3x \pm 4y = 0$,

结合对称性, 不妨考虑点 $(3, 0)$ 到直线 $3x + 4y = 0$ 距离: $d = \frac{9+0}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{5}$.

故选 A.

6. C

解析:

由 $L = 5 + \lg V$, 当 $L = 4.9$ 时, $\lg V = -0.1$,

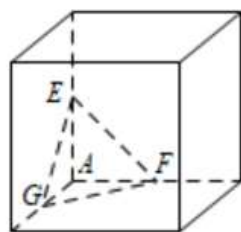
则 $V = 10^{-0.1} = 10^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx \frac{1}{1.259} \approx 0.8$.

故选 C.

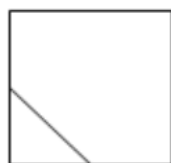
7. D

解析:

由题意及正视图可得几何体的直观图, 如图所示,



所以其侧视图为



故选 D

8. D

解析：

设 $AB = c, AC = b, BC = a$,

结合余弦定理： $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 可得： $19 = a^2 + 4 - 2 \times a \times \cos 120^\circ$,

即： $a^2 + 2a - 15 = 0$ ，解得： $a = 3$ ($a = -5$ 舍去)，

故 $BC = 3$.

故选 D.

9. A

解析：

$\because S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，

$\therefore S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等比数列

$\therefore S_2 = 4, S_4 - S_2 = 6 - 4 = 2$

$\therefore S_6 - S_4 = 1$,

$\therefore S_6 = 1 + S_4 = 1 + 6 = 7$.

故选 A.

10. C

解析：

将 3 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，可以是：

00111, 01011, 01101, 01110, 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100,

共 10 种排法，

其中 2 个 0 不相邻的排列方法为：

01011, 01101, 01110, 10101, 10110, 11010,

共 6 种方法，

故 2 个 0 不相邻的概率为 $\frac{6}{10} = 0.6$,

故选 C.

11. A

解析:

$$Q \tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha},$$

$$Q \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \cos \alpha \neq 0, \therefore \frac{2 \sin \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2 - \sin \alpha}, \text{ 解得 } \sin \alpha = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

故选 A.

12. C

解析:

$$\text{由题意可得: } f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(1 + \frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$\text{而 } f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(1 - \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = -f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$\text{故 } f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

故选 C.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13.

答案: $3\sqrt{2}$

解析:

$$\therefore |a - b| = 5$$

$$\therefore |a - b|^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 9 + |b|^2 - 2 = 25$$

$$\therefore |b| = 3\sqrt{2}.$$

故答案为 $3\sqrt{2}$.

14.

答案： 39π

解析：

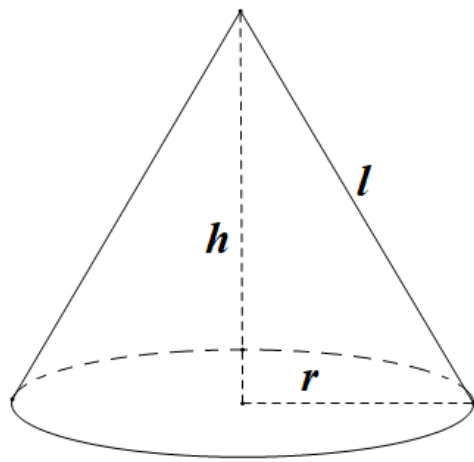
$$\because V = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot h = 30\pi$$

$$\therefore h = \frac{5}{2}$$

$$\therefore l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{13}{2}$$

$$\therefore S_{\text{侧}} = \pi r l = \pi \times 6 \times \frac{13}{2} = 39\pi.$$

故答案为 39π .



15.

答案： $-\sqrt{3}$

解析：

$$\text{由题意可得：} \frac{3}{4}T = \frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}, \therefore T = \pi, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

$$\text{当 } x = \frac{13\pi}{12} \text{ 时, } \omega x + \varphi = 2 \times \frac{13\pi}{12} + \varphi = 2k\pi, \therefore \varphi = 2k\pi - \frac{13}{6}\pi (k \in \mathbb{Z}),$$

$$\text{令 } k=1 \text{ 可得: } \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\text{据此有: } f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

故答案为 $-\sqrt{3}$.

16.

答案：8

解析：

因为 P, Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，

且 $|PQ| = |F_1F_2|$ ，所以四边形 PF_1QF_2 为矩形，

设 $|PF_1| = m, |PF_2| = n$ ，则 $m + n = 8, m^2 + n^2 = 48$ ，

所以 $64 = (m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2 = 48 + 2mn$ ，

$mn = 8$ ，即四边形 PF_1QF_2 面积等于 8.

故答案为 8.

三、解答题：

(一)必考题：

17.

答案：(1) 75%；60%；

(2) 能.

解析：

(1) 甲机床生产的产品中的一级品的频率为 $\frac{150}{200} = 75\%$ ，

乙机床生产的产品中的一级品的频率为 $\frac{120}{200} = 60\%$.

$$(2) K^2 = \frac{400(150 \times 80 - 120 \times 50)^2}{270 \times 130 \times 200 \times 200} = \frac{400}{39} > 10 > 6.635,$$

故能有 99% 的把握认为甲机床的产品与乙机床的产品质量有差异.

18.

答案：证明见解析.

解析：

\because 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 等差数列，设公差为 $d = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_2 + a_1} - \sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}$

$\therefore \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)\sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1}$ ， $(n \in \mathbf{N}^*)$

$$\therefore S_n = a_1 n^2, (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = a_1 n^2 - a_1 (n-1)^2 = 2a_1 n - a_1$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 2a_1 \times 1 - a_1 = a_1, \text{ 满足 } a_n = 2a_1 n - a_1,$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2a_1 n - a_1, (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = (2a_1 n - a_1) - [2a_1 (n-1) - a_1] = 2a_1$$

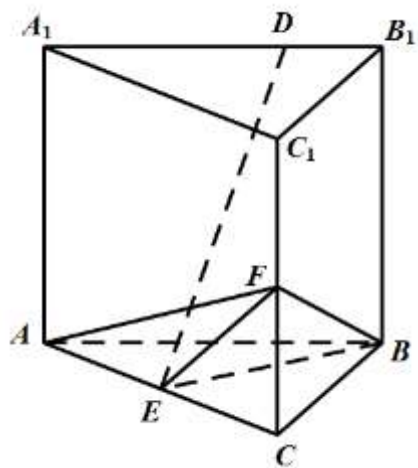
$$\therefore \{a_n\} \text{ 是等差数列.}$$

19.

答案: (1) $\frac{1}{3}$; (2) 证明见解析.

解析:

(1) 如图所示, 连结 AF ,



$$\text{由题意可得: } BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$$

由于 $AB \perp BB_1$, $BC \perp AB$, $BB_1 \cap BC = B$, 故 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

而 $BF \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 故 $AB \perp BF$,

$$\text{从而有 } AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{4+5} = 3,$$

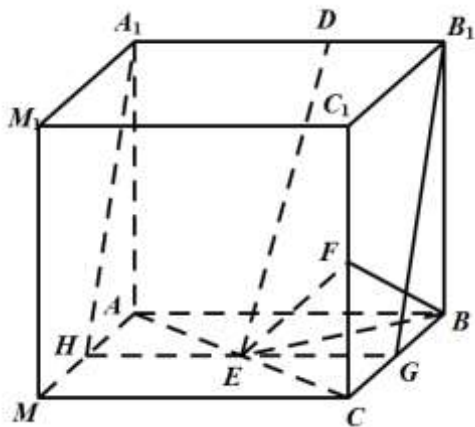
$$\text{从而 } AC = \sqrt{AF^2 - CF^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2},$$

则 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $\therefore AB \perp BC$, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 1, \quad V_{F-EBC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCE} \times CF = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}.$$

(2)由(1) 结论可将几何体补形为一个棱长为 2 的正方体 $ABCM - A_1B_1C_1M_1$ ，如图所示，

取棱 AM, BC 的中点 H, G ，连结 A_1H, HG, GB_1 ，



正方形 BCC_1B_1 中， G, F 为中点，则 $BF \perp B_1G$ ，

又 $BF \perp A_1B_1, A_1B_1 \cap B_1G = B_1$ ，

故 $BF \perp$ 平面 A_1B_1GH ，而 $DE \subset$ 平面 A_1B_1GH ，

从而 $BF \perp DE$ 。

20.

答案：(1) $f(x)$ 的减区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ ，增区间为 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ ；(2) $a > \frac{1}{e}$ 。

解析：

(1) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\text{又 } f'(x) = \frac{(2ax+3)(ax-1)}{x},$$

因为 $a > 0, x > 0$ ，故 $2ax+3 > 0$ ，

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x > \frac{1}{a}$ 时， $f'(x) > 0$ ；

所以 $f(x)$ 的减区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ ，增区间为 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 。

(2) 因为 $f(1) = a^2 + a + 1 > 0$ 且 $y = f(x)$ 的图与 x 轴没有公共点,

所以 $y = f(x)$ 的图象在 x 轴的上方,

由 (1) 中函数的单调性可得 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = 3 - 3\ln \frac{1}{a} = 3 + 3\ln a$,

故 $3 + 3\ln a > 0$ 即 $a > \frac{1}{e}$.

21.

答案: (1) 抛物线 $C: y^2 = x$, $\odot M$ 方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$; (2) 相切, 理由见解析

解析:

(1) 依题意设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, $P(1, y_0), Q(1, -y_0)$,

$$\overrightarrow{QOP} \perp \overrightarrow{OQ}, \therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 - y_0^2 = 1 - 2p = 0, \therefore 2p = 1,$$

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = x$,

$M(0, 2)$, $\odot M$ 与 $x = 1$ 相切, 所以半径为 1,

所以 $\odot M$ 的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$;

(2) 设 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$

若 A_1A_2 斜率不存在, 则 A_1A_2 方程为 $x = 1$ 或 $x = 3$,

若 A_1A_2 方程为 $x = 1$, 根据对称性不妨设 $A_1(1, 1)$,

则过 A_1 与圆 M 相切的另一条直线方程为 $y = 1$,

此时该直线与抛物线只有一个交点, 即不存在 A_3 , 不合题意;

若 A_1A_2 方程为 $x = 3$, 根据对称性不妨设 $A_1(3, \sqrt{3}), A_2(3, -\sqrt{3})$,

则过 A_1 与圆 M 相切的直线 A_1A_3 为 $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$,

$$\text{又 } k_{A_1A_3} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{1}{y_1 + y_3} = \frac{1}{\sqrt{3} + y_3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore y_3 = 0,$$

$x_3 = 0, A_3(0, 0)$, 此时直线 A_1A_3, A_2A_3 关于 x 轴对称,

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

若直线 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 斜率均存在，

$$\text{则 } k_{A_1A_2} = \frac{1}{y_1 + y_2}, k_{A_1A_3} = \frac{1}{y_1 + y_3}, k_{A_2A_3} = \frac{1}{y_2 + y_3},$$

$$\text{所以直线 } A_1A_2 \text{ 方程为 } y - y_1 = \frac{1}{y_1 + y_2}(x - x_1),$$

$$\text{整理得 } x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0,$$

$$\text{同理直线 } A_1A_3 \text{ 的方程为 } x - (y_1 + y_3)y + y_1y_3 = 0,$$

$$\text{直线 } A_2A_3 \text{ 的方程为 } x - (y_2 + y_3)y + y_2y_3 = 0,$$

$$\text{Q } A_1A_2 \text{ 与圆 } M \text{ 相切, } \therefore \frac{|2 + y_1y_2|}{\sqrt{1 + (y_1 + y_2)^2}} = 1$$

$$\text{整理得 } (y_1^2 - 1)y_2^2 + 2y_1y_2 + 3 - y_1^2 = 0,$$

$$A_1A_3 \text{ 与圆 } M \text{ 相切, 同理 } (y_1^2 - 1)y_3^2 + 2y_1y_3 + 3 - y_1^2 = 0$$

所以 y_2, y_3 为方程 $(y_1^2 - 1)y^2 + 2y_1y + 3 - y_1^2 = 0$ 的两根，

$$y_2 + y_3 = -\frac{2y_1}{y_1^2 - 1}, y_2 \cdot y_3 = \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1},$$

M 到直线 A_2A_3 的距离为：

$$\begin{aligned} \frac{|2 + y_2y_3|}{\sqrt{1 + (y_2 + y_3)^2}} &= \frac{|2 + \frac{3 - y_1^2}{y_1^2 - 1}|}{\sqrt{1 + (-\frac{2y_1}{y_1^2 - 1})^2}} \\ &= \frac{|y_1^2 + 1|}{\sqrt{(y_1^2 - 1)^2 + 4y_1^2}} = \frac{y_1^2 + 1}{y_1^2 + 1} = 1, \end{aligned}$$

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

综上若直线 A_1A_2, A_1A_3 与圆 M 相切，则直线 A_2A_3 与圆 M 相切

(二)选考题：

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22.

答案: (1) $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$; (2) P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为

参数), C 与 C_1 没有公共点.

解析:

(1) 由曲线 C 的极坐标方程 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$ 可得 $\rho^2 = 2\sqrt{2}\rho\cos\theta$,

将 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ 代入可得 $x^2 + y^2 = 2\sqrt{2}x$, 即 $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$,

即曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-\sqrt{2})^2 + y^2 = 2$;

(2) 设 $P(x, y)$, 设 $M(\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$

$$Q \overrightarrow{AP} = \sqrt{2} \overrightarrow{AM},$$

$$\therefore (x-1, y) = \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\theta - 1, \sqrt{2}\sin\theta) = (2 + 2\cos\theta - \sqrt{2}, 2\sin\theta),$$

$$\text{则} \begin{cases} x-1 = 2 + 2\cos\theta - \sqrt{2} \\ y = 2\sin\theta \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases},$$

故 P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)

Q 曲线 C 的圆心为 $(\sqrt{2}, 0)$, 半径为 $\sqrt{2}$, 曲线 C_1 的圆心为 $(3 - \sqrt{2}, 0)$, 半径为 2,

则圆心距为 $3 - 2\sqrt{2}$, Q $3 - 2\sqrt{2} < 2 - \sqrt{2}$, \therefore 两圆内含,

故曲线 C 与 C_1 没有公共点.

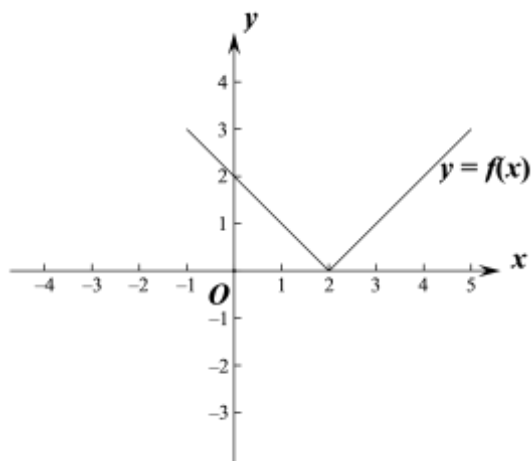
[选修 4-5: 不等式选讲]

23.

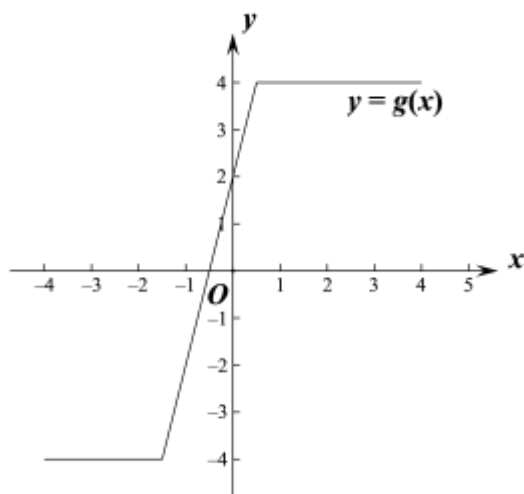
答案: (1) 图像见解析; (2) $a \geq \frac{11}{2}$

解析:

(1) 可得 $f(x) = |x-2| = \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$, 画出图像如下:



$$g(x) = |2x+3| - |2x-1| = \begin{cases} -4, & x < -\frac{3}{2} \\ 4x+2, & -\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 画出函数图像如下:}$$



(2) $f(x+a) = |x+a-2|$,

如图， 同一个坐标系里画出 $f(x), g(x)$ 图像，

$y = f(x+a)$ 是 $y = f(x)$ 平移了 $|a|$ 个单位得到，

则要使 $f(x+a) \geq g(x)$ ， 需将 $y = f(x)$ 向左平移， 即 $a > 0$ ，

当 $y = f(x+a)$ 过 $A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 时， $|\frac{1}{2}+a-2| = 4$ ， 解得 $a = \frac{11}{2}$ 或 $-\frac{5}{2}$ (舍去)，

则数形结合可得需至少将 $y = f(x)$ 向左平移 $\frac{11}{2}$ 个单位, $\therefore a \geq \frac{11}{2}$.

