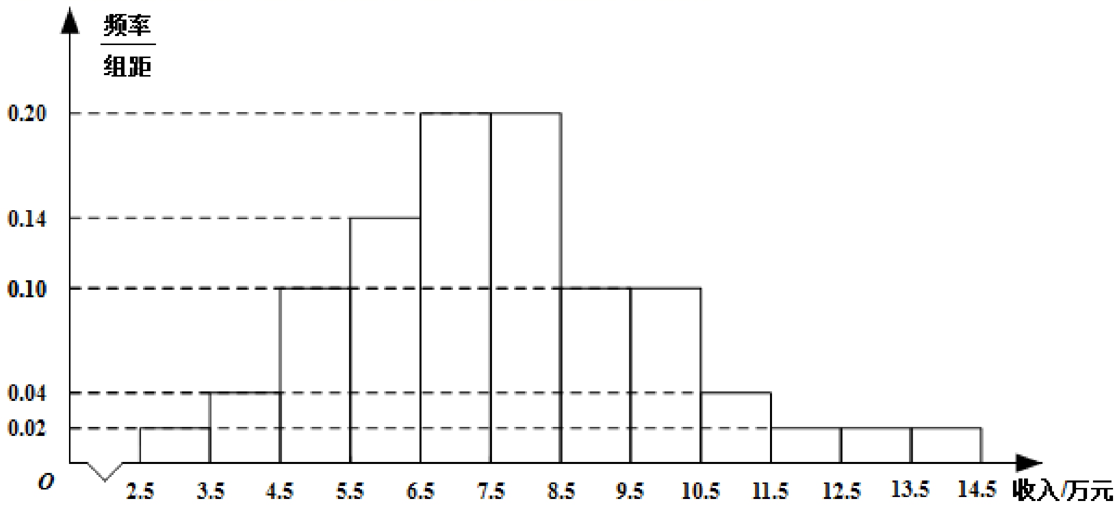
2021 年高考真题——数学（理）（全国甲卷）

1. 设集合 $M=\{x|0<x<4\}, N=\left\{x\middle|\frac{1}{3}\le x\le 5\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\left\{x\middle|0<x\le\frac{1}{3}\right\}$　　　　B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\le x<4\right\}$

C. $\{x|4\le x<5\}$　　　　D. $\{x|0<x\le 5\}$

2. 为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是（　　）

A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

B. 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%

C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

D. 估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

3. 已知 $(1-i)^2 z=3+2i$，则 $z=$（　　）

A. $-1-\frac{3}{2}i$　　B. $-1+\frac{3}{2}i$　　C. $-\frac{3}{2}+i$　　D. $-\frac{3}{2}-i$

4. 青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量．通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录表的数据 V 的满足

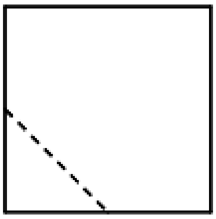
$L=5+\lg V$．已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据为（　　）（$\sqrt[10]{10}\approx 1.259$）

A. 1.5　　　　B. 1.2　　　　C. 0.8　　　　D. 0.6

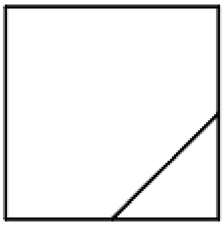
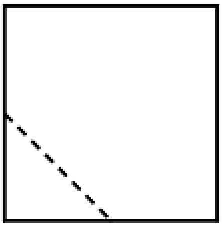
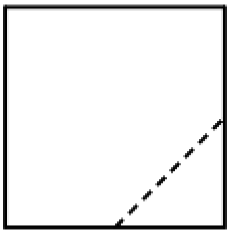
5. 已知 F_1,F_2 是双曲线 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=60°,|PF_1|=3|PF_2|$，则 C 的离心率为（　　）

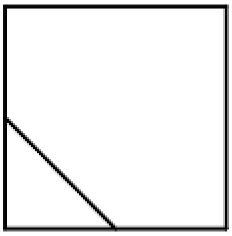
A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　　　C. $\sqrt{7}$　　　　D. $\sqrt{13}$

6. 在一个正方体中，过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E,F,G. 该正方体截去三棱锥 $A-EFG$ 后，所得多面体的三视图中，正视图如图所示，则相应的侧视图是（ ）



正视图

A. 　B. 　C. 　D.



7. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n，设甲：$q>0$，乙：$\{S_n\}$ 是递增数列，则（　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

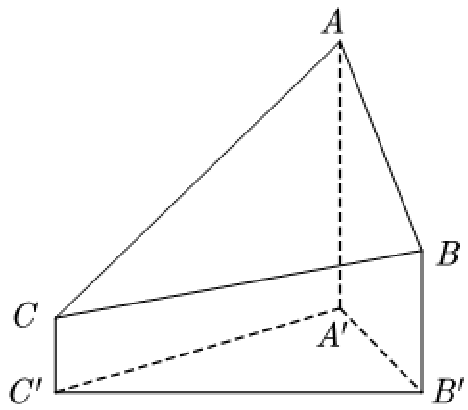
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 2020 年 12 月 8 日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86（单位：m），

三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一．如图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A，B，C 三点，且 A，B，C 在同一水平面上的投影 A',B',C' 满足 $\angle A'C'B'=45°$，$\angle A'B'C'=60°$．由 C 点测得 B 点的仰角为 $15°$，BB' 与 CC' 的差为 100；由 B 点测得 A 点的仰角为 $45°$，则 A，C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为（$\sqrt{3}\approx 1.732$）（　　）



A．346　　B．373　　C．446　　D．473

9. 若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),\tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

11. 已如 A，B，C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC\perp BC,AC=BC=1$，则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$．若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f\left(\dfrac{9}{2}\right)=$（　　）

A．$-\dfrac{9}{4}$　　B．$-\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{7}{4}$　　D．$\dfrac{5}{2}$

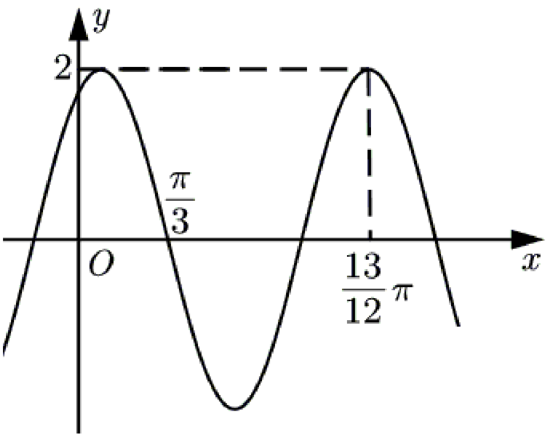
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．曲线 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为__________．

14．已知向量 $\vec{a}=(3,1),\vec{b}=(1,0),\vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}$．若 $\vec{a}\perp\vec{c}$，则 $k=$________．

15．已知 F_1,F_2 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P，Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为________．

16．已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图所示，则满足条件 $\left(f(x)-f\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)\left(f(x)-f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)>0$ 的最小正整数 x 为________．



三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了 200 件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

（1）甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

（2）能否有 99%　把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

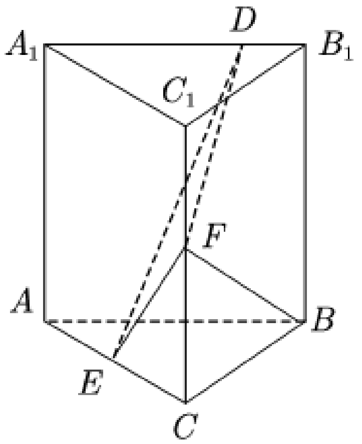
$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记S_n为$\{a_n\}$的前 n 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①数列$\{a_n\}$是等差数列：②数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列；③$a_2=3a_1$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

19. 已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面AA_1B_1B为正方形，$AB=BC=2$，E，F分别为AC和CC_1的中点，D为棱A_1B_1上的点．$BF\perp A_1B_1$



（1）证明：$BF\perp DE$；

（2）当B_1D为何值时，面BB_1C_1C与面DFE所成的二面角的正弦值最小?

20. 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O．焦点在 x 轴上，直线 l：$x=1$交 C 于 P，Q 两点，且$OP\perp OQ$．已知点$M\left(2,0\right)$，且e M 与 l 相切.

（1）求 C，e M 的方程；

（2）设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点，直线 A_1A_2，A_1A_3 均与 $\odot M$ 相切．判断直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 的位置关系，并说明理由．

21．已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}(x>0)$．

（1）当 $a=2$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 取值范围．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

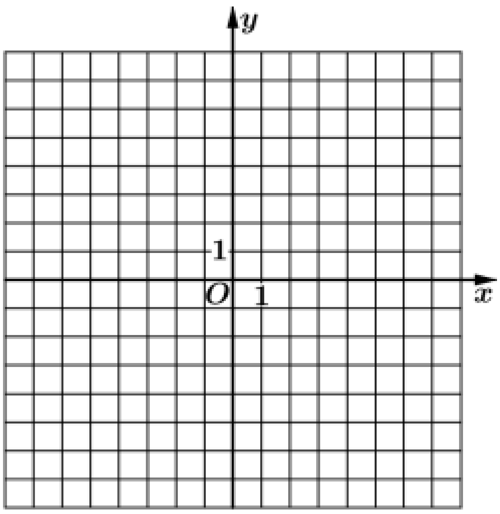
22．在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$．

（1）将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）设点 A 的直角坐标为 $\left(1,0\right)$，M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{AM}$，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 C 与 C_1 是否有公共点．

[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

23．已知函数 $f(x)=|x-2|, g(x)=|2x+3|-|2x-1|$．



（1）画出 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=g\left(x\right)$ 的图像；

（2）若 $f\left(x+a\right)\geq g\left(x\right)$，求 a 的取值范围．

2021 年高考真题——数学（理）（全国甲卷） 答案解析

1. B

解析：

因为$M=\{x\mid 0<x<4\}, N=\{x\mid \frac{1}{3}\le x\le 5\}$，所以$M\cap N=\left\{x\middle|\frac{1}{3}\le x<4\right\}$,故选：B.

2. C

解析：

因为频率直方图中的组距为 1，所以各组的直方图的高度等于频率.样本频率直方图中的频率即可作为总体的相应比率的估计值.

该地农户家庭年收入低于 4.5 万元　农户的比率估计值为$0.02+0.04=0.06=6\%$,故 A 正确；

该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计值为$0.04+0.02\times 3=0.10=10\%$,故 B 正确；

该地农户家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间的比例估计值为

$0.10+0.14+0.20\times 2=0.64=64\%>50\%$,故 D 正确；

该地农户家庭年收入的平均值的估计值为

$3\times 0.02+4\times 0.04+5\times 0.10+6\times 0.14+7\times 0.20+8\times 0.20+9\times 0.10+10\times 0.10+11\times 0.04+12\times 0.02+13\times 0.02+14\times 0.02=7.68$

(万元)，超过 6.5 万元，故 C 错误.

综上，给出结论中不正确的是 C.

故选：C.

3. B

解析：

由已知得$z=\frac{3+2i}{-2i}$，根据复数除法运算法则，即可求解.

$(1-i)^2 z=-2iz=3+2i$，

$z=\frac{3+2i}{-2i}=\frac{(3+2i)\cdot i}{-2i\cdot i}=\frac{-2+3i}{2}=-1+\frac{3}{2}i$.故选 B.

4. C

解析：

根据L,V关系，当$L=4.9$时，求出$\lg V$，再用指数表示V，即可求解.

由$L=5+\lg V$，当$L=4.9$时，$\lg V=-0.1$，

则$V=10^{-0.1}=10^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\approx\frac{1}{1.259}\approx 0.8$. 故选 C.

5. A

解析：

根据双曲线的定义及条件，表示出$|PF_1|,|PF_2|$，结合余弦定理可得答案.

因为$|PF_1|=3|PF_2|$，由双曲线的定义可得$|PF_1|-|PF_2|=2|PF_2|=2a$，

所以$|PF_2|=a$，$|PF_1|=3a$；

因为$\angle F_1PF_2=60°$,由余弦定理可得$4c^2=9a^2+a^2-2\times 3a\cdot a\cdot\cos 60°$，

整理可得$4c^2=7a^2$，所以$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{4}$，即$e=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

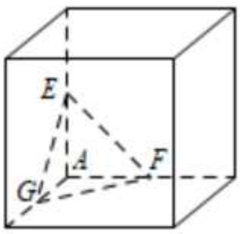
故选 A

6. D

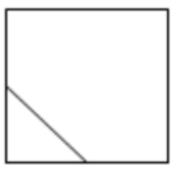
解析：

根据题意及题目所给的正视图还原出几何体的直观图，结合直观图进行判断.

由题意及正视图可得几何体的直观图，如图所示，



所以其侧视图为



故选 D

7. B

解析：

当 $q>0$ 时，通过举反例说明甲不是乙的充分条件；当 $\{S_n\}$ 是递增数列时，必有 $a_n>0$ 成立即可说明 $q>0$ 成立，则甲是乙的必要条件，即可选出答案.

由题，当数列为 $-2,-4,-8,\cdots$ 时，满足 $q>0$，

但是 $\{S_n\}$ 不是递增数列，所以甲不是乙的充分条件.

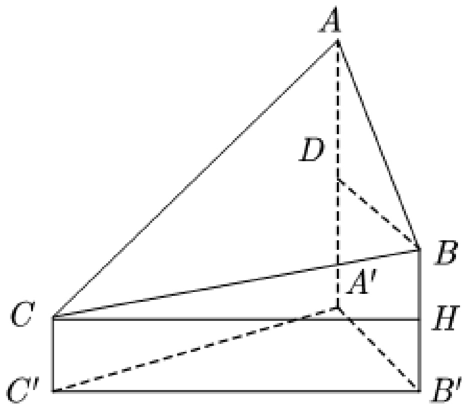
若 $\{S_n\}$ 是递增数列，则必有 $a_n>0$ 成立，若 $q>0$ 不成立，则会出现一正一负的情况，是矛盾的，则 $q>0$ 成立，所以甲是乙的必要条件.

故选 B.

8. B

解析：

通过做辅助线，将已知所求量转化到一个三角形中，借助正弦定理，求得 $A'B'$，进而得到答案.



过 C 作 $CH\perp BB'$，过 B 作 $BD\perp AA'$，

故 $AA'-CC'=AA'-(BB'-BH)=AA'-BB'+100=AD+100$，

由题，易知 $\triangle ADB$ 为等腰直角三角形，所以 $AD=DB$.

所以 $AA'-CC'=DB+100=A'B'+100$.

因为 $\angle BCH=15°$，所以 $CH=C'B'=\dfrac{100}{\tan 15°}$

在$VA'B'C'$中，由正弦定理得：

$$\frac{A'B'}{\sin 45^\circ}=\frac{C'B'}{\sin 75^\circ}=\frac{100}{\tan 15^\circ \cos 15^\circ}=\frac{100}{\sin 15^\circ},$$

而$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以 $A'B'=\dfrac{100\times 4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=100(\sqrt{3}+1)\approx 273,$

所以$AA'-CC'=A'B'+100\approx 373$.

故选 B.

9. A

解析：

由二倍角公式可得$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$，再结合已知可求得$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，利用同角三角函数　基本关系即可求解.

$Q\ \tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$

$\therefore \tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$,

$Q\ \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos\alpha\neq 0$，$\therefore \dfrac{2\sin\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{2-\sin\alpha}$，解得$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

故选 A.

10. C

解析：

采用插空法，4 个 1 产生 5 个空，分 2 个 0 相邻和 2 个 0 不相邻进行求解.

将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，可利用插空法，4 个 1 产生 5 个空，

若 2 个 0 相邻，则有$C_5^1=5$种排法，若 2 个 0 不相邻，则有$C_5^2=10$种排法，

所以 2 个 0 不相邻的概率为$\dfrac{10}{5+10}=\dfrac{2}{3}$.

故选 C.

11. A

解析：

由题可得$VABC$为等腰直角三角形，得出$VABC$外接圆的半径，则可求得O到平面ABC的距离，进而求得体积.

Q $AC \perp BC, AC = BC = 1$，$\therefore VABC$ 为等腰直角三角形，$\therefore AB = \sqrt{2}$，

则$VABC$外接圆的半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，又球的半径为 1，

设O到平面ABC的距离为d，

则$d = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$V_{O-ABC} = \frac{1}{3} S_{VABC} \cdot d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

故选 A.

12. D

解析：

通过 $f(x+1)$ 是奇函数和 $f(x+2)$ 是偶函数条件，可以确定出函数解析式 $f(x) = -2x^2 + 2$，进而利用定义或周期性结论，即可得到答案.

因为$f(x+1)$是奇函数，所以$f(-x+1) = -f(x+1)$①；

因为$f(x+2)$是偶函数，所以$f(x+2) = f(-x+2)$②.

令$x = 1$，由①得：$f(0) = -f(2) = -(4a+b)$，由②得：$f(3) = f(1) = a+b$，

因为$f(0) + f(3) = 6$，所以$-(4a+b) + a + b = 6 \Rightarrow a = -2$，

令$x = 0$，由①得：$f(1) = -f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow b = 2$，所以$f(x) = -2x^2 + 2$.

思路一：从定义入手.

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}+2\right) = f\left(-\frac{5}{2}+2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}+1\right) = -f\left(\frac{3}{2}+1\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right)$$

$-f\left(\frac{5}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}+2\right)=-f\left(-\frac{1}{2}+2\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)$

所以 $f\left(\frac{9}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

思路二：从周期性入手

由两个对称性可知，函数 $f\left(x\right)$ 的周期 $T=4$.

所以 $f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

故选 D.

二、填空题：

13.

答案： $5x-y+2=0$

解析：

先验证点在曲线上，再求导，代入切线方程公式即可.

由题，当 $x=-1$ 时， $y=-3$，故点在曲线上.

求导得： $y'=\frac{2\left(x+2\right)-\left(2x-1\right)}{\left(x+2\right)^2}=\frac{5}{\left(x+2\right)^2}$， 所以 $y'|_{x=-1}=5$.

故切线方程为 $5x-y+2=0$.

故答案为： $5x-y+2=0$.

14.

答案： $-\frac{10}{3}$.

解析：

利用向量的坐标运算法则求得向量 $\vec{c}$ 的坐标，利用向量的数量积为零求得 k 的值

$\because \vec{a}=\left(3,1\right),\vec{b}=\left(1,0\right),\therefore \vec{c}=\vec{a}+k\vec{b}=\left(3+k,1\right)$,

$\because \vec{a}\perp\vec{c},\therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=3\left(3+k\right)+1\times1=0$， 解得 $k=-\frac{10}{3}$,

故答案为： $-\frac{10}{3}$.

15.

答案：8

解析：

根据已知可得 $PF_1 \perp PF_2$，设 $|PF_1|=m,|PF_2|=n$，利用勾股定理结合 $m+n=8$，求出 mn，四边形 PF_1QF_2 面积等于 mn，即可求解.

因为 P,Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，

且 $|PQ|=|F_1F_2|$，所以四边形 PF_1QF_2 为矩形，

设 $|PF_1|=m,|PF_2|=n$，则 $m+n=8,m^2+n^2=48$，

所以 $64=(m+n)^2=m^2+2mn+n^2=48+2mn$，

$mn=8$，即四边形 PF_1QF_2 面积等于 8.

故答案为 8.

16.

答案：2

解析：

先根据图象求出函数 $f(x)$ 的解析式，再求出 $f(-\frac{7\pi}{4}),f(\frac{4\pi}{3})$ 的值，然后求解三角不等式可得最小正整数或验证数值可得.

由图可知 $\frac{3}{4}T=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，即 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$；

由五点法可得 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$；

所以 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $f(-\frac{7\pi}{4})=2\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)=1$，$f(\frac{4\pi}{3})=2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)=0$；

所以由 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(\frac{4\pi}{3}))>0$ 可得 $f(x)>1$ 或 $f(x)<0$；

因为 $f(1)=2\cos\left(2-\dfrac{\pi}{6}\right)<2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，所以，

方法一：结合图形可知，最小正整数应该满足 $f(x)<0$，即 $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$，

解得 $k\pi+\dfrac{\pi}{3}<x<k\pi+\dfrac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，可得 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5\pi}{6}$，

可得 x 的最小正整数为 2.

方法二：结合图形可知，最小正整数应该满足 $f(x)<0$，又 $f(2)=2\cos\left(4-\dfrac{\pi}{6}\right)<0$，符合题意，可得 x 的最小正整数为 2.

故答案为：2.

三、解答题：

（一）必考题：

17.

答案：（1）75%；60%；

（2）能.

解析：

根据给出公式计算即可

（1）甲机床生产的产品中的一级品的频率为 $\dfrac{150}{200}=75\%$，

乙机床生产的产品中的一级品的频率为 $\dfrac{120}{200}=60\%$.

（2）$K^2=\dfrac{400(150\times80-120\times50)^2}{270\times130\times200\times200}=\dfrac{400}{39}>10>6.635$，

故能有 99%的把握认为甲机床的产品与乙机床的产品质量有差异.

18.

答案：答案见解析

解析：

选①②作条件证明③时，可设出$\sqrt{S_n}$，结合a_n,S_n的关系求出a_n，利用$\{a_n\}$是等差数列可证$a_2=3a_1$；

选①③作条件证明②时，根据等差数列的求和公式表示出$\sqrt{S_n}$，结合等差数列定义可证；

选②③作条件证明①时，设出$\sqrt{S_n}=an+b$，结合a_n,S_n的关系求出a_n，根据$a_2=3a_1$可求b，然后可证$\{a_n\}$是等差数列.

选①②作条件证明③：

设$\sqrt{S_n}=an+b(a>0)$，则$S_n=\left(an+b\right)^2$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=\left(a+b\right)^2$；

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(an+b\right)^2-\left(an-a+b\right)^2=a\left(2an-a+2b\right)$；

因为$\{a_n\}$也是等差数列，所以$\left(a+b\right)^2=a\left(2a-a+2b\right)$，解得$b=0$；

所以$a_n=a^2\left(2n-1\right)$，所以$a_2=3a_1$.

选①③作条件证明②：

因为$a_2=3a_1$，$\{a_n\}$是等差数列，

所以公差$d=a_2-a_1=2a_1$，

所以$S_n=na_1+\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}d=n^2a_1$，即$\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}n$，

因为$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}\left(n+1\right)-\sqrt{a_1}n=\sqrt{a_1}$，

所以$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.

选②③作条件证明①：

设$\sqrt{S_n}=an+b(a>0)$，则$S_n=\left(an+b\right)^2$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=\left(a+b\right)^2$；

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(an+b\right)^2-\left(an-a+b\right)^2=a\left(2an-a+2b\right)$；

因为$a_2=3a_1$，所以$a\left(3a+2b\right)=3\left(a+b\right)^2$，解得$b=0$或$b=-\dfrac{4a}{3}$；

当$b=0$时，$a_1=a^2, a_n=a^2(2n-1)$，当$n\geq 2$时，a_n-$a_{n-1}=2a^2$满足等差数列的定义，此时$\{a_n\}$为等差数列；

当$b=-\dfrac{4a}{3}$时，$\sqrt{S_n}=an+b=an-\dfrac{4}{3}a$，$\sqrt{S_1}=-\dfrac{a}{3}<0$不合题意，舍去.

综上可知$\{a_n\}$为等差数列.

19.

答案：（1）见解析；（2）$B_1D=\dfrac{1}{2}$

解析：

通过已知条件，确定三条互相垂直的直线，建立合适的空间直角坐标系，借助空间向量证明线线垂直和求出二面角的平面角的余弦值最大，进而可以确定出答案.

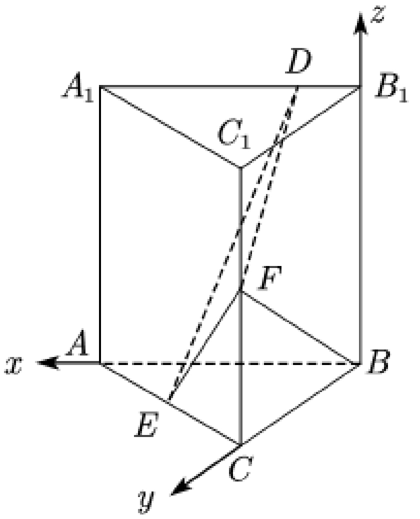
因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，所以$BB_1\perp$底面ABC，所以$BB_1\perp AB$

因为$A_1B_1//AB$，$BF\perp A_1B_1$，所以$BF\perp AB$，

又$BB_1\cap BF=B$，所以$AB\perp$平面BCC_1B_1.

所以BA, BC, BB_1两两垂直.

以B为坐标原点，分别以BA, BC, BB_1所在直线为x, y, z轴建立空间直角坐标系，如图.



所以$B(0,0,0), A(2,0,0), C(0,2,0), B_1(0,0,2), A_1(2,0,2), C_1(0,2,2)$，

$E(1,1,0), F(0,2,1)$.

由题设$D(a,0,2)$（$0\leq a\leq 2$）.

（1）因为 $\overrightarrow{BF}=(0,2,1),\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，

所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0\times(1-a)+2\times1+1\times(-2)=0$，所以 $BF\perp DE$.

（2）设平面 DFE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,1),\overrightarrow{DE}=(1-a,1,-2)$，

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+y+z=0\\ (1-a)x+y-2z=0\end{cases}$.

令 $z=2-a$，则 $\vec{m}=(3,1+a,2-a)$

因为平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\overrightarrow{BA}=(2,0,0)$，

设平面 BCC_1B_1 与平面 DEF 的二面角的平面角为 θ，

则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\dfrac{6}{2\times\sqrt{2a^2-2a+14}}=\dfrac{3}{\sqrt{2a^2-2a+14}}$.

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$2a^2-2a+4$ 取最小值为 $\dfrac{27}{2}$，

此时 $\cos\theta$ 取最大值为 $\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{27}{2}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $(\sin\theta)_{\min}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

此时 $B_1D=\dfrac{1}{2}$.

20.

答案：（1）抛物线 $C:y^2=x$，e M 方程为 $(x-2)^2+y^2=1$；（2）相切，理由见解析

解析：

（1）根据已知抛物线与 $x=1$ 相交，可得出抛物线开口向右，设出标准方程，再利用对称性设出 P,Q 坐标，由 $OP\perp OQ$，即可求出 p；由圆 M 与直线 $x=1$ 相切，求出半径，即可得出结论；

（2）先考虑 A_1A_2 斜率不存在，根据对称性，即可得出结论；若 A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3 斜率存在，由 A_1,A_2,A_3 三点在抛物线上，将直线 A_1A_2,A_1A_2,A_2A_3 斜率分别用纵坐标表示，再由

A_1A_2, A_1A_2 与圆 M 相切，得出 $y_2+y_3, y_2\cdot y_3$ 与 y_1 的关系，最后求出 M 点到直线 A_2A_3 的距离，即可得出结论.

（1）依题意设抛物线 $C: y^2=2px(p>0), P(1,y_0), Q(1,-y_0)$，

$\because OP\perp OQ, \therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1-y_0^2=1-2p=0, \therefore 2p=1$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=x$，

$M(0,2)$，$\odot M$ 与 $x=1$ 相切，所以半径为 1，

所以 $\odot M$ 的方程为 $(x-2)^2+y^2=1$；

（2）设 $A_1(x_1y_1), A_2(x_2,y_2), A_3(x_3,y_3)$

若 A_1A_2 斜率不存在，则 A_1A_2 方程为 $x=1$ 或 $x=3$，

若 A_1A_2 方程为 $x=1$，根据对称性不妨设 $A_1(1,1)$，

则过 A_1 与圆 M 相切　另一条直线方程为 $y=1$，

此时该直线与抛物线只有一个交点，即不存在 A_3，不合题意；

若 A_1A_2 方程为 $x=3$，根据对称性不妨设 $A_1(3,\sqrt{3}), A_2(3,-\sqrt{3})$，

则过 A_1 与圆 M 相切的直线 A_1A_3 为 $y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$，

又 $k_{A_1A_3}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\dfrac{1}{y_1+y_3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+y_3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \therefore y_3=0$，

$x_3=0, A_3(0,0)$，此时直线 A_1A_3, A_2A_3 关于 x 轴对称，

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

若直线 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 斜率均存在，

则 $k_{A_1A_2}=\dfrac{1}{y_1+y_2}, k_{A_1A_3}=\dfrac{1}{y_1+y_3}, k_{A_2A_3}=\dfrac{1}{y_2+y_3}$，

所以直线 A_1A_2 方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{y_1+y_2}(x-x_1)$，

整理得 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，

同理直线 A_1A_3 的方程为 $x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$，

直线 A_2A_3 的方程为 $x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$，

$\because$ A_1A_2 与圆 M 相切，$\therefore \dfrac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$

整理得 $(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$，

A_1A_3 与圆 M 相切，同理 $(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$

所以 y_2,y_3 为方程 $(y_1^2-1)y^2+2y_1y+3-y_1^2=0$ 的两根，

$y_2+y_3=-\dfrac{2y_1}{y_1^2-1},y_2\cdot y_3=\dfrac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$，

M 到直线 A_2A_3 的距离为：

$$\frac{|2+y_2y_3|}{\sqrt{1+(y_2+y_3)^2}}=\frac{|2+\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}|}{\sqrt{1+(-\frac{2y_1}{y_1^2-1})^2}}$$

$$=\frac{|y_1^2+1|}{\sqrt{(y_1^2-1)^2+4y_1^2}}=\frac{y_1^2+1}{y_1^2+1}=1,$$

所以直线 A_2A_3 与圆 M 相切；

综上若直线 A_1A_2,A_1A_3 与圆 M 相切，则直线 A_2A_3 与圆 M 相切.

21.

答案：（1）$\left(0,\dfrac{2}{\ln 2}\right]$ 上单调递增；$\left[\dfrac{2}{\ln 2},+\infty\right)$ 上单调递减；（2）$(1,e)\cup(e,+\infty)$.

解析：

（1）求得函数的导函数，利用导函数的正负与函数的单调性的关系即可得到函数的单调性；

（2）利用指数对数的运算法则，可以将曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点等价转化为方程 $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln a}{a}$ 有两个不同的实数根，即曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=\dfrac{a}{\ln a}$ 有两个交点，

利用导函数研究$g(x)$的单调性，并结合$g(x)$的正负，零点和极限值分析$g(x)$的图象，进而得到$0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$，发现这正好是$0<g(a)<g(e)$，然后根据$g(x)$的图象和单调性得到$a$的取值范围.

（1）当$a=2$时，$f(x)=\frac{x^2}{2^x}$, $f'(x)=\frac{2x\cdot 2^x-x^2\cdot 2^x\ln 2}{(2^x)^2}=\frac{x\cdot 2^x(2-x\ln 2)}{4^x}$,

令$f'(x)=0$得$x=\frac{2}{\ln 2}$,当$0<x<\frac{2}{\ln 2}$时，$f'(x)>0$,当$x>\frac{2}{\ln 2}$时，$f'(x)<0$,

$\therefore$函数$f(x)$在$\left(0,\frac{2}{\ln 2}\right]$上单调递增；$\left[\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$上单调递减；

（2）$f(x)=\frac{x^a}{a^x}=1\Leftrightarrow a^x=x^a\Leftrightarrow x\ln a=a\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$,设函数$g(x)=\frac{\ln x}{x}$,

则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,令$g'(x)=0$，得$x=e$,

在$(0,e)$内$g'(x)>0$, $g(x)$单调递增；

在$(e,+\infty)$上$g'(x)<0$, $g(x)$单调递减；

$\therefore g(x)_{max}=g(e)=\frac{1}{e}$,

又$g(1)=0$，当x趋近于$+\infty$时，$g(x)$趋近于0,

所以曲线$y=f(x)$与直线$y=1$有且仅有两个交点，即曲线$y=g(x)$与直线$y=\frac{a}{\ln a}$有两个交点的充分必要条件是$0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$, 这即是$0<g(a)<g(e)$,

所以a的取值范围是$(1,e)\cup(e,+\infty)$.

（二）选考题：

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22.

答案：（1）$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$；（2）$P$的轨迹$C_1$的参数方程为$\begin{cases}x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），$C$与$C_1$没有公共点.

解析：

（1）将曲线 C 的极坐标方程化为 $\rho^2=2\sqrt{2}\rho\cos\theta$，将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入可得；

（2）设 $P(x,y)$，设 $M\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$，根据向量关系即可求得 P 的轨迹 C_1 的参数方程，求出两圆圆心距，和半径之差比较可得.

（1）由曲线 C 的极坐标方程 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ 可得 $\rho^2=2\sqrt{2}\rho\cos\theta$，

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入可得 $x^2+y^2=2\sqrt{2}x$，即 $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$，

即曲线 C 的直角坐标方程为 $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=2$；

（2）设 $P(x,y)$，设 $M\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta\right)$

Q $\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$，

$\therefore (x-1,y)=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\theta-1,\sqrt{2}\sin\theta\right)=\left(2+2\cos\theta-\sqrt{2},2\sin\theta\right)$，

则 $\begin{cases} x-1=2+2\cos\theta-\sqrt{2} \\ y=2\sin\theta \end{cases}$，即 $\begin{cases} x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$，

故 P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）

Q 曲线 C 的圆心为 $\left(\sqrt{2},0\right)$，半径为 $\sqrt{2}$，曲线 C_1 的圆心为 $\left(3-\sqrt{2},0\right)$，半径为 2，

则圆心距为 $3-2\sqrt{2}$，Q $3-2\sqrt{2}<2-\sqrt{2}$，$\therefore$ 两圆内含，

故曲线 C 与 C_1 没有公共点.

[选修 4-5：不等式选讲]

23.

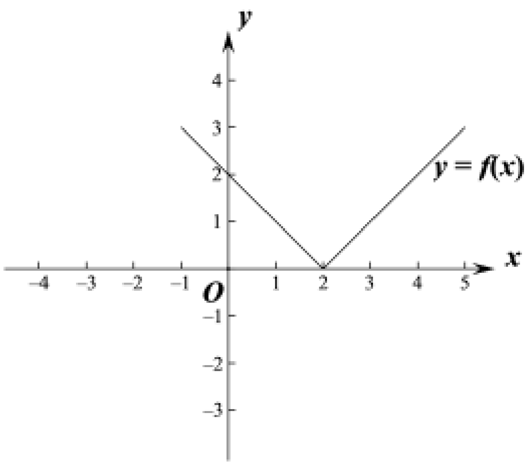
答案：（1）图像见解析；（2）$a\geq\dfrac{11}{2}$

解析：

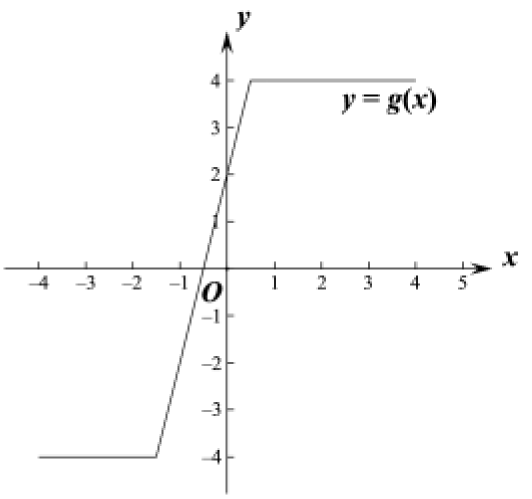
（1）分段去绝对值即可画出图像；

（2）根据函数图像数形结和可得需将 $y=f(x)$ 向左平移可满足同角，求得 $y=f(x+a)$ 过 $A\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 时 a 的值可求.

（1）可得 $f(x)=|x-2|=\begin{cases}2-x, x<2\\ x-2, x\ge 2\end{cases}$，画出图像如下：



$g(x)=|2x+3|-|2x-1|=\begin{cases}-4, x<-\dfrac{3}{2}\\ 4x+2, -\dfrac{3}{2}\le x<\dfrac{1}{2}\\ 4, x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$，画出函数图像如下：



（2）$f(x+a)=|x+a-2|$，

如图，在同一个坐标系里画出 $f\left(x\right), g\left(x\right)$ 图像，

$y=f\left(x+a\right)$ 是 $y=f\left(x\right)$ 平移了 $|a|$ 个单位得到，

则要使 $f(x+a)\ge g(x)$，需将 $y=f\left(x\right)$ 向左平移，即 $a>0$，

当$y=f\left(x+a\right)$过$A\left(\dfrac{1}{2},4\right)$时，$|\dfrac{1}{2}+a-2|=4$，解得$a=\dfrac{11}{2}$或$-\dfrac{5}{2}$（舍去），

则数形结合可得需至少将$y=f\left(x\right)$向左平移$\dfrac{11}{2}$个单位，$\therefore a\geq\dfrac{11}{2}$.