

# 2021 年普通高等学校招生全国统一考试

## 上海 数学试卷

(考试时间 120 分钟, 满分 150 分)

2021 . 6

一、填空题(本大题共有 12 题, 第 1~6 题每题 4 分, 第 7~12 题每题 5 分, 满分 54 分)

1、已知  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$ , 求  $z_1 + z_2 =$  \_\_\_\_\_.

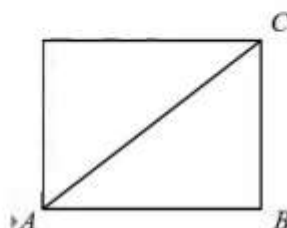
2、已知  $A = \{x | 2x \leq 1\}, B = \{-1, 0, 1\}$ , 求  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

3、若  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ , 求圆心坐标为 \_\_\_\_\_.

4、如图正方形  $ABCD$ , 求  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$  \_\_\_\_\_.

5、已知  $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ , 则  $f^{-1}(1) =$  \_\_\_\_\_.

6、若  $(x+a)^5$ , 则  $x^2$  的系数为 80, 求  $a =$  \_\_\_\_\_.



7、已知  $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$ ,  $z = x - y$ , 则  $z$  的最大值 \_\_\_\_\_.

8、已知数列  $a_1 = 3, b_n, a_n$  的各项和为 9, 则数列  $\{b_n\}$  的各项和为 \_\_\_\_\_.

9、在圆柱中, 底面圆半径为 1, 高为 2, 上顶面圆的直径为  $AB$ ,  $C$  是底面圆弧上的一个动点, 绕着底面圆周转, 则  $ABC$  的面积的范围 \_\_\_\_\_.

10、有四个不同的馆, 甲乙 2 个人每人选 2 个去参观, 求恰有一个馆相同的概率为 \_\_\_\_\_.

11、已知抛物线:  $y^2 = 2px (p > 0)$ , 若第一象限的  $A, B$  在抛物线上, 焦点为  $F$ ,  $|AF| = 2, |BF| = 4, |AB| = 3$ , 求直线  $AB$  的斜率为 \_\_\_\_\_.

12、已知  $a_i \in \mathbb{N}^* (i = 1, 2, \dots, 9)$  对  $a_k = a_{k-1} + 1$  或  $a_k = a_{k+1} - 1 (2 \leq k \leq 8)$  中有且仅有一个成立,  $a_1 = 6, a_9 = 9$ , 求  $a_1 + \dots + a_9$  的最小值 \_\_\_\_\_.

## 二、选择题（本大题共有 4 题，每题 5 分，满分 20 分）

13、以下哪个函数既是奇函数，又是减函数（ ）

- A.  $-3x$     B.  $x^3$     C.  $y = \log_3 x$     D.  $3^x$

14、已知参数方程  $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t + \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-1, 1]$ ，以下哪个图符合该方程（ ）

15、已知  $f(x) = 3\sin x + 2$ ，存在任意的  $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，都存在  $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  使得

$f(x) = 2f(x + \theta) + 2$  成立，则下列选项可行  $\theta$  的是（ ）

- A.  $\frac{3\pi}{5}$     B.  $\frac{4\pi}{5}$     C.  $\frac{6\pi}{5}$     D.  $\frac{7\pi}{5}$

16、已知  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ ， $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3, x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ ，

$x_1 y_1 + x_1 + y_1 = 2x_2 y_2$ ，以下哪个选项恒成立（ ）

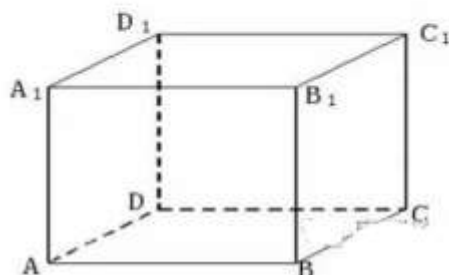
- A.  $2x_2 < x_1 + x_3$     B.  $2x_2 > x_1 + x_3$     C.  $x_2^2 < x_1 x_3$     D.  $x_2^2 > x_1 x_3$

## 三、解答题

17、如图，在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，

(1) 若  $P$  是  $A_1D_1$  的动点，求三棱锥  $V_{P-ADC}$

(2) 求  $AB_1$  与平面  $ACC_1A_1$  的夹角大小



18、在  $\triangle ABC$  中，已知  $a = 3, b = 2c$

(1) 若  $A = \frac{2\pi}{3}$ ，求  $S_{\triangle ABC}$

(2) 若  $2\sin B - \sin C = 1$ ，求  $C_{\triangle ABC}$

19、已知一企业一年营业额1.1亿元，每年增加0.05亿元，利润0.16亿元，每年增长4%

(1) 求营业额前20季度的和

(2) 请问哪年哪季度营业额是利润的18%？

20、已知  $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  ,  $F_1, F_2$  是其左右焦点,  $P(m, 0) (m < -\sqrt{2})$  , 直线  $l$  过点  $P$  交  $\Gamma$  于

$A, B$  两点, 且  $A$  在线段  $BP$  上,

(1) 若  $B$  是上顶点,  $|BF_1| = |PF_1|$  , 求  $m$  ;

(2) 若  $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$  , 且原点  $O$  到直线  $l$  的距离为, 求直线  $l$  ;

(3) 证明: 对于任意  $m < -\sqrt{2}$  , 使得  $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B} = \frac{1}{3}$  的直线有且仅有一条.

21、已知  $x_1, x_2 \in R$  , 若对任意的  $x_2 - x_1 \in S, f(x_2) - f(x_1) \in S$  , 则有定义:  $f(x)$  是在  $S$  关联的.

(1) 判断和证明  $f(x) = 2x - 1$  是否在  $[0, +\infty)$  关联? 是否有  $[0, 1]$  关联?

(2) 若  $f(x)$  是在  $[0, 1]$  关联的,  $f(x)$  在  $x \in [0, 3)$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$  , 求解不等式:

$$2 \leq f(x) \leq 3$$

(3) 证明:  $f(x)$  是在  $[0, 1]$  关联的, 且是在  $[0, +\infty)$  关联的, 当且仅当“ $f(x)$  在  $[1, 2]$  是关联的”

21. 如果对任意  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  使得  $x_1 - x_2 \in S$  都有  $f(x_1) - f(x_2) \in S$ , 则称  $f(x)$  是  $S$  关联的.

(1) 判断和证明  $f(x) = 2x - 1$  是  $\mathbb{Z}^+$  关联的吗?  
是  $[0, 1]$  关联的吗?

(2)  $f(x)$  是  $\{3\}$  关联的, 在  $[0, 3)$  上有  
 $f(x) = x^2 - 2x$ , 解不等式  $2 \leq f(x) \leq 3$ .

(3) “ $f(x)$  是  $\{1\}$  关联的, 且是  $[0, +\infty)$  关联”当且仅当“ $f(x)$  是  $[1, 2]$  关联的”.