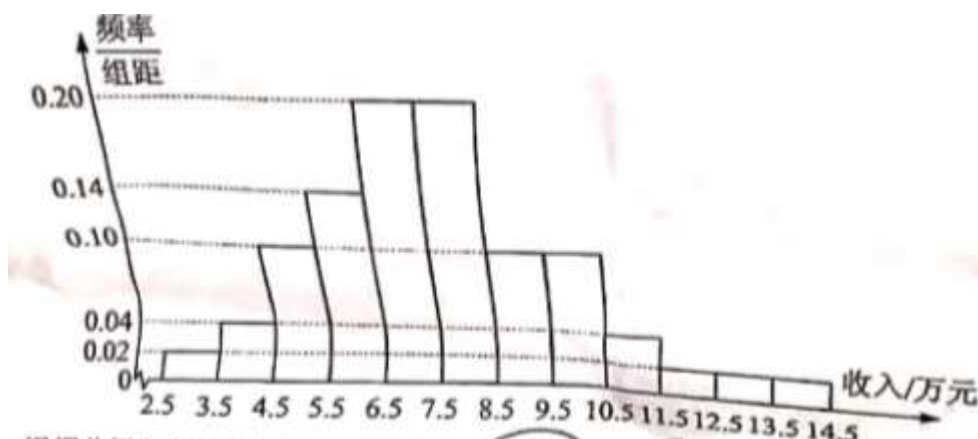


1. 设集合  $M = \{x | 0 < x < 4\}$ ,  $N = \{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{3}\}$
- B.  $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$
- C.  $\{x | 4 \leq x < 5\}$
- D.  $\{x | 0 < x \leq 5\}$

2. 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是

- A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
- B. 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
- C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
- D. 估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

3. 已知  $(1-i)^2 z = 3+2i$ , 则  $z =$

- A.  $-1-\frac{3}{2}i$
- B.  $-1+\frac{3}{2}i$
- C.  $-\frac{3}{2}+i$
- D.  $-\frac{3}{2}-i$

4. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量, 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据  $L$  和小数记录法的数据  $V$  满足  $L=5+\lg V$ 。已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为 ( $\sqrt[10]{10} \approx 1.259$ )

A. 1.5    B. 1.2    C. 0.8    D. 0.6

5. 已知  $F_1, F_2$  是双曲线  $C$  的两个焦点,  $P$  为  $C$  上一点, 且  $\angle F_1PF_2=60^\circ$ ,  $|PF_1|=3|PF_2|$ , 则  $C$  的离心率为

A.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{13}}{2}$

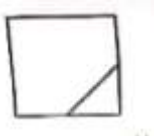
C.  $\sqrt{7}$

D.  $\sqrt{13}$

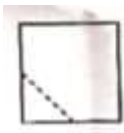
6. 在一个正方体中, 过顶点  $A$  的三条棱的中点分别为  $E, F, G$ . 该正方体截去三棱锥  $A-EFG$  后, 所得多面体的三视图中, 正视图如右图所示, 则相应的侧视图是



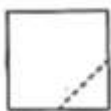
A.



B.



C.



D.



7. 等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ , 设甲:  $q>0$ , 乙:  $\{S_n\}$  是递增数列, 则

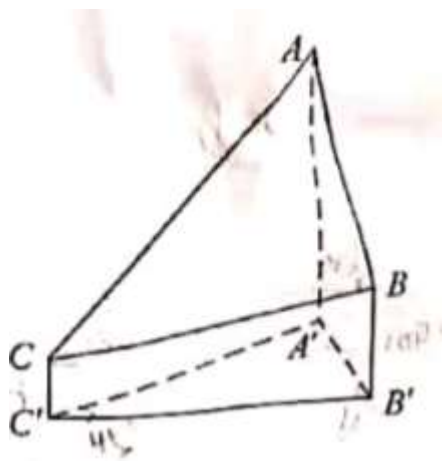
A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86 (单位: m), 三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 右图是三角高程测量法的一个示意图, 现有以 A, B, C 三点, 且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足  $\angle A'C'B = 45^\circ$ ,  $\angle A'B'C' = 60^\circ$ . 由 c 点测得 B 点的仰角为  $15^\circ$ , 由 B 点测得 A 点的仰角为  $45^\circ$ , 则 A, C 两点到水平面 A'B'C' 的高度差  $AA' - CC'$  约为 ( $\sqrt{3} \approx 1.732$ )



A. 346      B. 373      C. 446      D. 473

9. 若  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ , 则  $\tan \alpha =$

A.  $\frac{\sqrt{15}}{15}$       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为

A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{4}{5}$

11. 已知 A, B, C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点, 且  $AC \perp BC$ ,  $AC=BC=1$ , 则三棱锥 O-ABC 的体积为

A.  $\frac{\sqrt{2}}{12}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(x+1)$  为奇函数,  $f(x+2)$  为偶函数, 当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) = ax^2 + b$ . 若  $f(0) + f(3) = 6$ , 则  $f(\frac{9}{2}) =$

A.  $-\frac{9}{4}$       B.  $-\frac{3}{2}$       C.  $\frac{7}{4}$       D.  $\frac{5}{2}$

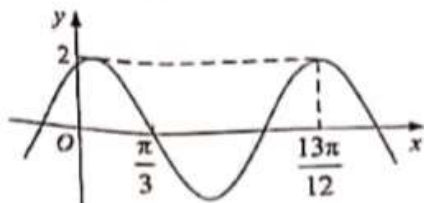
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 曲线  $y = \frac{2x-1}{x+2}$  在点  $(-1, -3)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_。

14. 已知向量  $a=(3, 1)$ ,  $b=(1, 0)$ ,  $c = a + kb$ , 若  $a \perp c$ , 则  $k=$ \_\_\_\_\_。

15. 已知  $F_1, F_2$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  的两个焦点,  $P, Q$  为  $C$  上关于坐标原点堆成的两点, 且  $|PQ| = |F_1F_2|$ , 则四边形  $PF_1QF_2$  的面积为\_\_\_\_\_。

16. 已知函数  $f(x) = 2 \cos(\omega x + \varphi)$  的部分图像如图所示, 则满足条件  $(f(x) - f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x) - f(\frac{4\pi}{3})) > 0$  的最小正整数  $x$  为\_\_\_\_\_。



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

甲、乙两台机床生产同种产品,产品按质量分为一级品和二级品,为了比较两台机床产品的质量,分别用两台机床各生产了 200 件产品,产品的质量情况统计如下表:

|     | 一级品 | 二级品 | 合计  |
|-----|-----|-----|-----|
| 甲机床 | 150 | 50  | 200 |
| 乙机床 | 120 | 80  | 200 |
| 合计  | 270 | 130 | 400 |

(1)甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

(2)能否有 99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

|                 |       |       |        |
|-----------------|-------|-------|--------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001  |
| $K$             | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

① 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；② 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列；③  $a_2 = 3a_1$

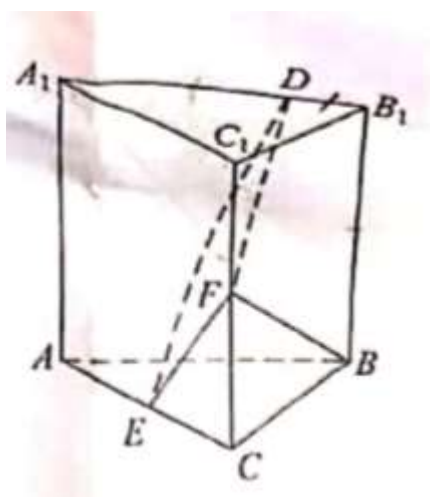
注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

19. (12 分)

已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $AA_1B_1B$ 为正方形， $AB = BC = 2$ ， $E, F$ 分别为 $AC$ 和 $CC_1$ 的中点， $D$ 为棱 $A_1B_1$ 上的点， $BF \perp A_1B_1$ .

(1) 证明： $BF \perp DE$ ；

(2) 当 $B_1D$ 为何值时，面 $BB_1C_1C$ 与面 $DFE$ 所成的二面角的正弦值最小？



20. (12 分)

抛物线 $C$ 的顶点为坐标原点 $O$ ，焦点在 $x$ 轴上，直线 $L: x = 1$ 交 $C$ 于 $P, Q$ 两点，且 $OP \perp OQ$ . 已知点 $M(2, 0)$ ，且 $\odot M$ 与 $L$ 相切，

- (1) 求  $C$ ,  $\odot M$  的方程;
- (2) 设  $A_1, A_2, A_3$  是  $C$  上的三个点, 直线  $A_1 A_2, A_1 A_3$  均与  $\odot M$  相切, 判断  $A_2 A_3$  与  $\odot M$  的位置关系, 并说明理由.

21. (12 分)

已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 函数  $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$ ,

- (1) 当  $a=2$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;
- (2) 若曲线  $y=f(x)$  与直线  $y=1$  有且仅有两个交点, 求  $a$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ .

- (1) 将  $C$  的极坐标方程化为直角坐标方程;
- (2) 设点  $A$  的直角坐标为  $(1,0)$ ,  $M$  为  $C$  上的动点, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ , 写出  $P$  的轨迹  $C_1$  的参数方程, 并判断  $C$  与  $C_1$  是否有公共点.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x-2|$ ,  $g(x) = |2x+3| - |2x-1|$ .

- (1) 画出  $f(x)$  和  $y=g(x)$  的图像;
- (2) 若  $f(x+a) \geq g(x)$ , 求  $a$  的取值范围.

