2021 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学乙卷

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设 $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4+6i$，则 z=( ).

A. 1-2i

B. 1+2i

C. 1+i

D. 1-i

2.已知集合 $S=\{s|s=2n+1,n\in Z\}$，$T=\{t|t=4n+1,n\in Z\}$，则 $S\cap T$=( )

A. ∅

B. S

C. T

D. Z

3.已知命题 p：$\exists x\in R$，$\sin x<1$；命题 q：$\forall x\in R$，$e^{|x|}\geqslant 1$，则下列命题中为真命题的是（ ）

A. $p\wedge q$

B. $\neg p\wedge q$

C. $p\wedge\neg q$

D. $\neg(p\vee q)$

4.设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（ ）

A. $f(x-1)-1$

B. $f(x-1)+1$

C. f(x+1)-1

D. f(x+1)+1

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为（ ）

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（ ）

A. 60 种

B. 120 种

C. 240 种

D. 480 种

7. 把函数 y=f(x) 图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的图像，则 f(x)=（ ）

A. $\sin(\frac{x}{2}-\frac{7\pi}{12})$

B. $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})$

C. $\sin(2x-\frac{7\pi}{12})$

D. $\sin(2x+\frac{\pi}{12})$

8. 在区间（0,1）与（1,2）中各随机取 1 个数，则两数之和大于$\frac{7}{4}$的概率为（ ）

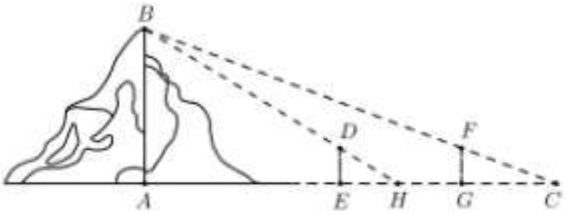
A. $\frac{7}{4}$

B. $\frac{23}{32}$

C. $\frac{9}{32}$

D. $\frac{2}{9}$

9.魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作，其中第一题是测量海盗的高。如图，点 E,H,G 在水平线 AC 上，DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”，EG 称为“表距”，GC 和 EH 都称为“表目距”，GC 与 EH 的差称为“表目距的差”。则海岛的高 AB=（ ）.



(第 9 题图)

A：$\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表高$

B：$\frac{表高\times表距}{表目距的差}-表高$

C：$\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表距$

D：$\frac{表高\times表距}{表目距的差}-表距$

10. 设 a≠0，若 x=a 为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，则（ ）.

A：a＜b

B：a＞b

C：ab＜a^2

D：ab＞a^2

11. 设 B 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的上顶点，若 C 上的任意一点 P 都满足$|PB|\le 2b$，则 C 的离心率的取值范围是（ ）.

A：$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

B：$\left[\frac{1}{2},1\right)$

C：$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

D：$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

12. 设$a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则（ ）.

A：a＜b＜c

B：b＜c＜a

C：b＜a＜c

D：c＜a＜b

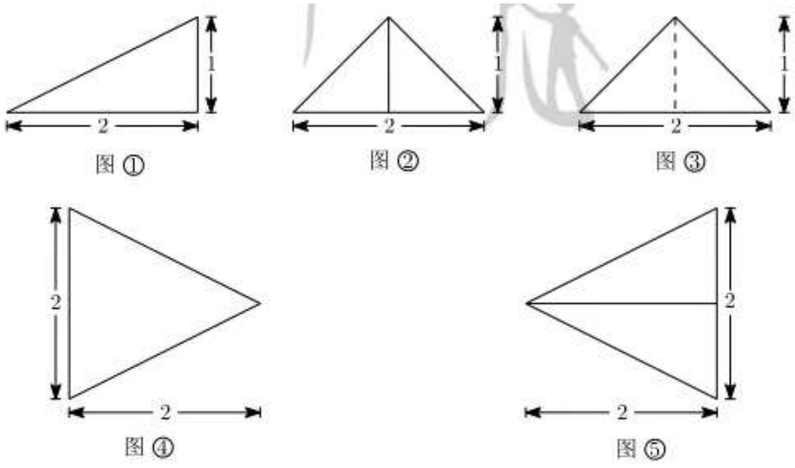
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{m}-y^2=1$（m>0）的一条渐近线为$\sqrt{3}$x+my=0，则 C 的焦距为____________.

14. 已知向量 a=（1，3），b=（3，4），若（a-λb）⊥b，则λ=____________。

15. 记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，B=60°，$a^2+c^2=3ac$，则 b=____________.

16. 以图①为正视图和俯视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某个三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为____________（写出符合要求的一组答案即可）.



(第 16 题图)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

某厂研究了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数

据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为$\bar{x}$和$\bar{y}$，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2

（1） 求$\bar{x}$，$\bar{y}$， s_1^2，s_2^2；

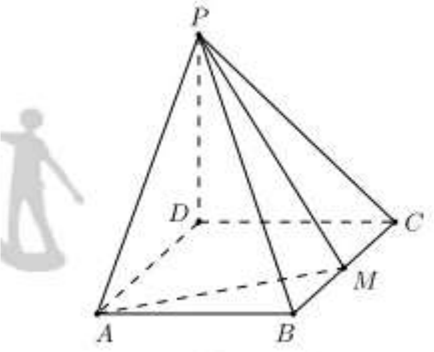
（2） 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高(如果$\bar{y}-\bar{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{2}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）.

18.(12 分)

如图，四棱锥 P-ABCD 的底面是矩形，PD⊥底面 ABCD，PD=DC=1，M 为 BC 的中点，且 PB⊥AM，

（1） 求 BC；

（2） 求二面角 A-PM-B 的正弦值。



(第 18 题图)

19. （12 分）

记 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，b_n为数列$\{S_n\}$的前 n 项和，已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1） 证明：数列$\{b_n\}$是等差数列；

（2） 求{a_n}的通项公式.

20.（12 分）

设函数 f（x）=ln（a-x），已知 x=0 是函数 y=xf（x）的极值点。

（1） 求 a；

（2） 设函数 g（x）=$\frac{x+f(x)}{xf(x)}$，证明：g（x）＜1.

21.（12 分）

已知抛物线 C：$x^2=2py$（p＞0）的焦点为 F，且 F 与圆 M：$x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

（1）求 p；

（2）若点 P 在 M 上，PA,PB 是 C 的两条切线，A,B 是切点，求ΔPAB 的最大值.

（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4 一 4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 x0y 中，⊙C 的圆心为 C（2，1），半径为 1.

（1）写出⊙C 的一个参数方程；的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）过点 F（4,1）作⊙C 的两条切线，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条直线的极坐标方程.

23.[选修 4 一 5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 f（x）=|x-a|+|x+3|.

（1）当 a=1 时，求不等式 f（x）≥6 的解集；

（2）若 f（x）≥ —a ，求 a 的取值范围.

2021 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学乙卷（参考答案）

注意事项：
1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

1-5 CCABD
6-10 CBBAD
11-12 CB
13.4
14.$\frac{3}{5}$

15.$2\sqrt{2}$

16.②⑤或③④
17.解：（1）各项所求值如下所示

$\bar{x}=\frac{1}{10}(9.8+10.3+10.0+10.2+9.9+9.8+10.0+10.1+10.2+9.7)=10.0$

$\bar{y}=\frac{1}{10}(10.1+10.4+10.1+10.0+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5)=10.3$

$s_1^2=\frac{1}{10}\times[(9.7-10.0)^2+2\times(9.8-10.0)^2+(9.9-10.0)^2+2\times(10.0-10.0)^2+(10.1-10.0)^2+2\times(10.2-10.0)^2+(10.3-10.0)^2]=0.36$,

$s_2^2=\frac{1}{10}\times[(10.0-10.3)^2+3\times(10.1-10.3)^2+(10.3-10.3)^2+2\times(10.4-10.3)^2+2\times(10.5-10.3)^2+(10.6-10.3)^2]=0.4$.

(2)由(1)中数据得$\bar{y}-\bar{x}=0.3$, $2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}\approx 0.34$

显然$\bar{y}-\bar{x}<2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$,所以不认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

18.解：（1）因为 PD⊥平面 ABCD，且矩形 ABCD 中，AD⊥DC，所以以$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DP}$分别为 x，y，z 轴正方向，D 为原点建立空间直角坐标系 D-xyz。

设 BC=t，A（t，0，0)，B（t，1，0)，M（$\frac{t}{2}$，1，0)，P(0,0,1),所以$\overrightarrow{PB}$=（t，1，

-1），$\overrightarrow{AM}$=（$-\frac{1}{2}$，1，0），

因为 PB⊥AM，所以$\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{AM}$=$-\frac{t2}{2}$+1=0，所以 t=$\sqrt{2}$，所以 BC=$\sqrt{2}$。

（2）设平面 APM 的一个法向量为 **m**=（x，y，z），由于$\overrightarrow{AP}$=（$-\sqrt{2}$，0，1），则

$$\begin{cases}\mathbf{m}\bullet\overrightarrow{AP}=-\sqrt{2}x+z=0\\ \mathbf{m}\bullet\overrightarrow{AM}=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+y=0\end{cases}$$

令 x=$\sqrt{2}$，得 **m**=（$\sqrt{2}$，1，2）。

设平面 PMB 的一个法向量为 **n**=（x^t，y^t，z^t），则

$$\begin{cases}\mathbf{n}\bullet\overrightarrow{CB}=\sqrt{2}x^t=0\\ \mathbf{n}\bullet\overrightarrow{PB}=\sqrt{2}x^t+y^t-z^t=0\end{cases}$$

令y^t=1，得 **n**=(0,1,1).

所以 cos（**m**，**n**）=$\frac{\mathbf{m}\bullet\mathbf{n}}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|}=\frac{3}{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$，所以二面角 A-PM-B 的正弦值为$\frac{\sqrt{70}}{14}$.

19.（1）由已知$\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}$=2，则$\frac{b_n}{b_{n+1}}$=$S_n$(n≥2)

⇒$\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}$=2⇒$2b_{n-1}+2=2b_n$⇒$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$(n≥2)，$b_1=\frac{3}{2}$

故{b_n}是以$\frac{3}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列。

（2）由（1）知 $b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2}$，则$\frac{2}{S_n}+\frac{2}{n+2}$=2⇒$S_n=\frac{n+2}{n+1}$

n=1 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$

n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$

故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\ -\frac{1}{n(n+1)},n\geq 2\end{cases}$

20.（1）[xf(x)]′=x′f(x)+xf′(x)

当 x=0 时，[xf(x)]′=f(0)=lna=0，所以 a=1

（2）由 f(x)=ln(1-x)，得 x<1

当 0<x<1 时，f(x)=ln(1-x)<0，xf(x)<0；当 x<0 时，f(x)=ln(1-x)>0，xf(x)<0

故即证 x+f(x)>xf(x)，x+ln(1-x)-xln(1-x)>0

令 1-x=t(t>0 且 t≠1)，x=1-t，即证 1-t+lnt-(1-t)lnt>0

令 f(t)=1-t+lnt-(1-t)lnt，则

f′(t)=$-1-\frac{1}{t}-[(-1)\ln t+\frac{1-t}{t}]=-1+\frac{1}{t}+\ln t-\frac{1-t}{t}=\ln t$

所以 f(t)在（0,1）上单调递减，在（1,+∞）上单调递增，故 f(t)＞f（1）=0,得证。

21.解：（1）焦点$F\left(0,\frac{P}{2}\right)$到$x^2+(y+4)^2=1$的最短距离为$\frac{P}{2}+3=4$，所以 p=2.

（2）抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则

$l_{PA}=y=\frac{1}{2}x_1(x-\chi_1)+y_1=\frac{1}{2}x_1X-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{1}{2}x_1x-y_1$,

$l_{PB}:y=\frac{1}{2}x_2x-y_2$, 且$x_0^2=-y_0^2-8y_0-15$.

l_{PA}，l_{PB}都过点 $P(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}y_0=\frac{1}{2}x_1x_0-y_1,\\y_0=\frac{1}{2}x_2x_0-y_2,\end{cases}$故$l_{AB}:y_0=\frac{1}{2}x_0x-y$, 即$y=\frac{1}{2}x_0x-y_0$.

联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_0x-y_0\\x^2=4y\end{cases}$，得$x^2-2x_0x+4y_0=0$，$\Delta=4x_0^2-16y_0$.

所以$|AB|=\sqrt{1+\frac{x_0^2}{4}}\cdot\sqrt{4x_0^2-16y_0}=\sqrt{4+x_0^2}\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}$ ，$d_{P\to AB}=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$, 所以

$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d_{P\to AB}=\frac{1}{2}|x_0^2-4y_0|\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}=\frac{1}{2}(x_4^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}(-{y_0}^2-12y_0-15)^{\frac{3}{2}}$.

而$y_0\in[-5,-3]$. 故当 $y_0=-5$ 时，$S_{\triangle PAB}$达到最大，最大值为$20\sqrt{5}$.

22. (1)因为⊙C 的圆心为(2,1)，半径为 1. 故⊙C 的参数方程为$\begin{cases}x=2+cos\theta\\y=1+sin\theta\end{cases}$（θ为参数).

(2)设切线 y=k（x-4)+1, 即 kx-y-4k+1=0. 故

$$\frac{|2k-1-4k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$$

即$|2k|=\sqrt{1+k^2}$, $4k^2=1+k^2$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故直线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$（x-4)+1，$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}$(x-4)+1

故两条切线的极坐标方程为$\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta-\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$ 或$\rho\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\frac{4}{3}\sqrt{3}+1$.

23.解：(1)a = 1 时，f(x) = |x-1|+|x+3|， 即求|x-1|+|x-3|≥ 6 的解集.
当 x≥1 时，2x 十 2 ≥6, 得 x≥ 2;
当-3<x<1 时, 4≥6 此时没有 x 满足条件;
当 x≤-3 时-2x-2≥6. 得 x≤-4，
综上，解集为(-∞,-4]U[2, -∞).

(2) f(x)最小值>-a,而由绝对值的几何意义，即求 x 到 a 和-3 距离的最小值.
当 x 在 a 和-3 之间时最小，此时 f(x)最小值为|a+3|,即|a+3|>-a.

A≥-3 时,2a+3>0，得 $a>-\frac{3}{2}$；a<-3 时,-a-3>-a,此时 a 不存在.

综上，$a>-\frac{3}{2}$.