2021年浙江省高考数学试题

一、选择题

1. 设集合 $A=\{x|x\geq 1\}$， $B=\{x|-1<x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|x>-1\}$　　B. $\{x|x\geq 1\}$　　C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|1\leq x<2\}$

2. 已知 $a\in R$， $(1+ai)i=3+i$，（i 为虚数单位），则 $a=$（　　）

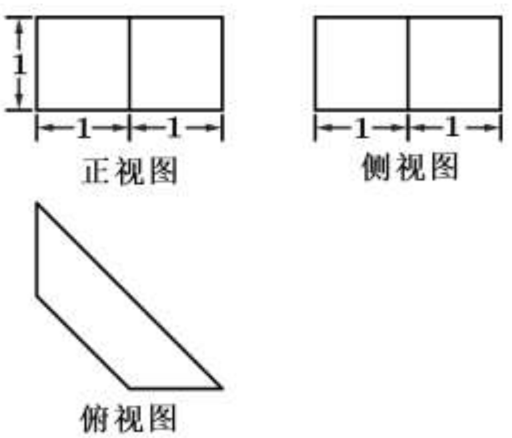
A. -1　　B. 1　　C. -3　　D. 3

3. 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，则“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（　　）

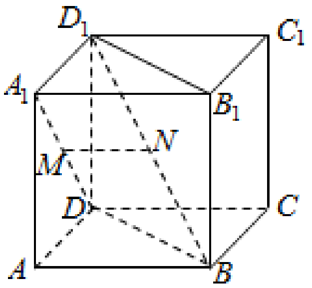


A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $3\sqrt{2}$

5. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+1\geq 0\\ x-y\leq 0\\ 2x+3y-1\leq 0\end{cases}$，则 $z=x-\frac{1}{2}y$ 最小值是（　　）

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{10}$

6. 如图已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M，N 分别是 A_1D， D_1B 的中点，则（　　）



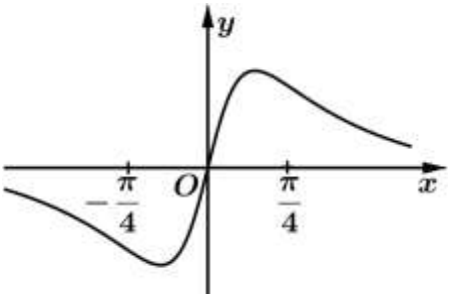
A. 直线 A_1D 与直线 D_1B 垂直，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

B. 直线 A_1D 与直线 D_1B 平行，直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1

C. 直线 A_1D 与直线 D_1B 相交，直线 $MN//$ 平面 $ABCD$

D. 直线 A_1D 与直线 D_1B 异面，直线 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1

7. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{4},g(x)=\sin x$，则图象为如图的函数可能是（　　）



A. $y=f(x)+g(x)-\dfrac{1}{4}$

B. $y=f(x)-g(x)-\dfrac{1}{4}$

C. $y=f(x)g(x)$

D. $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

8. 已知 α,β,γ 是互不相同的锐角，则在 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 三个值中，大于 $\dfrac{1}{2}$ 的个数的最大值是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 已知 $a,b\in\mathrm{R},ab>0$，函数 $f\left(x\right)=ax^2+b(x\in\mathrm{R})$.若 $f(s-t),f(s),f(s+t)$ 成等比数列，则平面上点 $\left(s,t\right)$ 的轨迹是（　　）

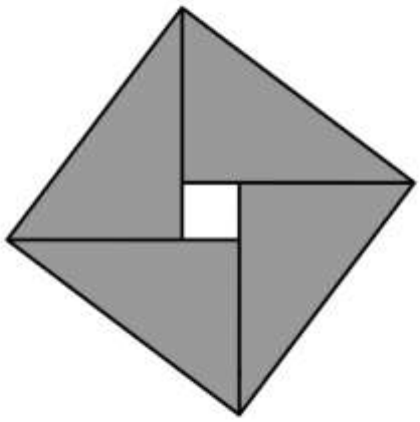
A. 直线和圆　　B. 直线和椭圆　　C. 直线和双曲线　　D. 直线和抛物线

10. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.记数列$\left\{a_n\right\}$的前$n$项和为$S_n$，则（　　）

A $\dfrac{1}{2}<S_{100}<3$　　B. $3<S_{100}<4$　　C. $4<S_{100}<\dfrac{9}{2}$　　D. $\dfrac{9}{2}<S_{100}<5$

二、填空题

11. 我国古代数学家赵爽用弦图给出了勾股定理的证明.弦图是由四个全等的直角三角形和中间的一个小正方形拼成的一个大正方形(如图所示).若直角三角形直角边的长分别是 3，4，记大正方形的面积为S_1，小正方形的面积为S_2，则$\dfrac{S_1}{S_1}=$___________.



12. 已知$a\in \mathrm{R}$，函数$f(x)=\begin{cases}x^2-4, x>2\\ |x-3|+a, x\le 2,\end{cases}$若$f\left[f\left(\sqrt{6}\right)\right]=3$，则$a=$___________.

13. 已知多项式$(x-1)^3+(x+1)^4=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$，则$a_1=$___________，$a_2+a_3+a_4=$___________.

14. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=60°, AB=2$，M是BC的中点，$AM=2\sqrt{3}$，则$AC=$___________，$\cos\angle MAC=$___________.

15. 袋中有 4 个红球m个黄球，n个绿球.现从中任取两个球，记取出的红球数为ξ，若取出的两个球都是红球的概率为$\dfrac{1}{6}$，一红一黄的概率为$\dfrac{1}{3}$，则$m-n=$___________，$E\left(\xi\right)=$___________.

16. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点 $F_1(-c,0)$， $F_2(c,0)$ $(c>0)$，若过 F_1 的直线和圆 $\left(x-\dfrac{1}{2}c\right)^2+y^2=c^2$ 相切，与椭圆在第一象限交于点 P，且 $PF_2\perp x$ 轴，则该直线的斜率是__________，椭圆的离心率是__________.

17. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},(\vec{c}\neq\vec{0})$ 满足 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=0,(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.记向量 $\vec{d}$ 在 $\vec{a},\vec{b}$ 方向上的投影分别为 x，y，$\vec{d}-\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 方向上的投影为 z，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为__________.

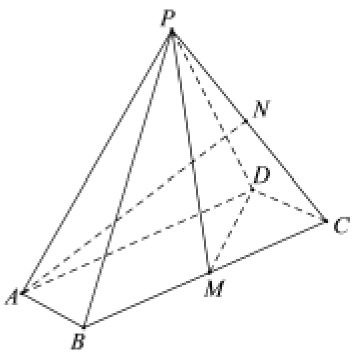
三、解答题

18. 设函数 $f(x)=\sin x+\cos x(x\in\mathrm{R})$.

（1）求函数 $y=\left[f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^2$ 的最小正周期；

（2）求函数 $y=f(x)f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=120°,AB=1,BC=4,PA=\sqrt{15}$，$M$，$N$ 分别为 BC,PC 的中点，$PD\perp DC,PM\perp MD$.



（1）证明： $AB\perp PM$ ；

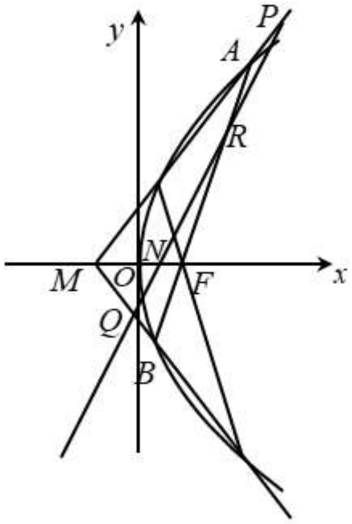
（2）求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $a_1=-\dfrac{9}{4}$， 且 $4S_{n+1}=3S_n-9$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$3b_n+(n-4)a_n=0(n\in N^*)$，记$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，若$T_n\le\lambda b_n$对任意$n\in\mathrm{N}^*$恒成立，求实数λ的取值范围.

21. 如图，已知 F 是抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点，M 是抛物线的准线与 x 轴的交点，且$\left|MF\right|=2$，



（1）求抛物线的方程；

（2）设过点 F 的直线交抛物线与 A、B 两点，斜率为 2 的直线 l 与直线MA,MB,AB，x 轴依次交于点 P，Q，R，N，且$\left|RN\right|^2=\left|PN\right|\cdot\left|QN\right|$，求直线 l 在 x 轴上截距的范围.

22. 设 a，b 为实数，且 $a>1$，函数$f\left(x\right)=a^x-bx+e^2(x\in\mathrm{R})$

（1）求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

（2）若对任意$b>2e^2$，函数$f\left(x\right)$有两个不同的零点，求 a 的取值范围；

（3）当$a=e$时，证明：对任意$b>e^4$，函数$f\left(x\right)$有两个不同的零点x_1,x_2，满足

$$x_2>\frac{b\ln b}{2e^2}x_1+\frac{e^2}{b}.$$

(注：$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数)

2021 年浙江省高考数学试题 答案解析

一、选择题

1. D

解析：

由交集的定义结合题意可得：$A\cap B=\{x|1\le x<2\}$.

故选 D.

2. C

解析：

$(1+ai)i=i+ai^2=i-a=-a+i=3+i$，

利用复数相等的充分必要条件可得：$-a=3,\therefore a=-3$.

故选 C.

3. B

解析：

如图所示，$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$，当 $AB\perp OC$ 时，$\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直，

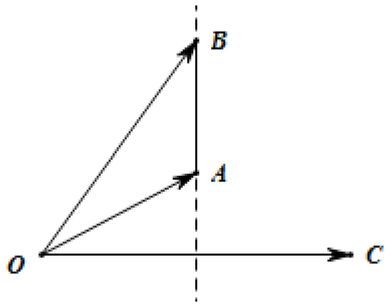
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 成立，此时 $\vec{a}\ne\vec{b}$，

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 不是 $\vec{a}=\vec{b}$ 的充分条件，

当 $\vec{a}=\vec{b}$ 时，$\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$，$\therefore(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdot\vec{c}=0$，$\therefore\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 成立，

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ 是 $\vec{a}=\vec{b}$ 的必要条件，

综上，“$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$”是“$\vec{a}=\vec{b}$”的必要不充分条件



故选 B.

4. A

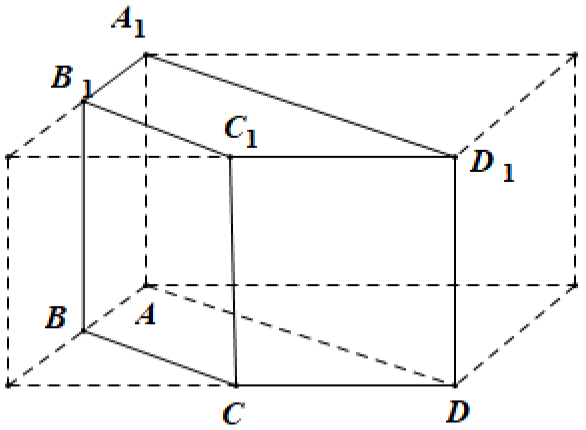
解析：

几何体为如图所示的四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其高为 1，底面为等腰梯形 $ABCD$，

该等腰梯形的上底为 $\sqrt{2}$，下底为 $2\sqrt{2}$，腰长为 1，故梯形的高为 $\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times1=\frac{3}{2}$，

故选 A.

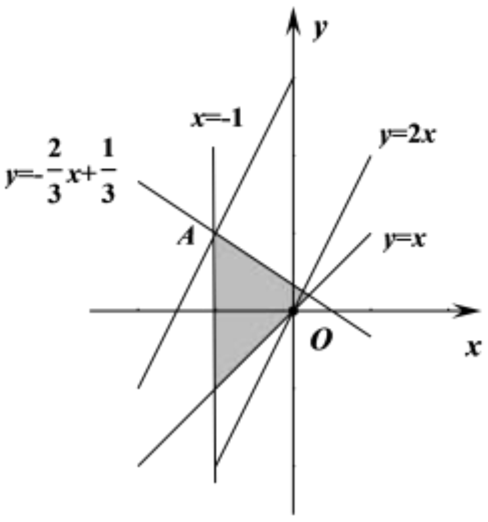


5. B

解析：

画出满足约束条件 $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x-y\leq 0 \\ 2x+3y-1\leq 0 \end{cases}$ 的可行域，

如下图所示：



目标函数 $z=x-\frac{1}{2}y$ 化为 $y=2x-2z$，

由 $\begin{cases}x=-1\\2x+3y-1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，设 $A(-1,1)$，

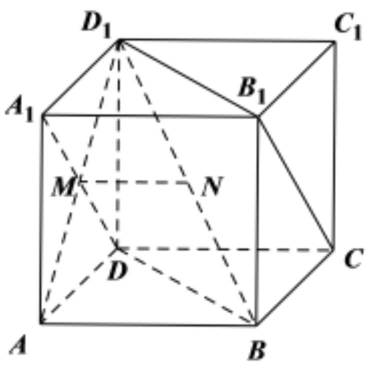
当直线 $y=2x-2z$ 过 A 点时，

$z=x-\frac{1}{2}y$ 取得最小值为 $-\frac{3}{2}$.

故选 B

6. A

解析：



连 AD_1，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

M 是 A_1D 的中点，所以 M 为 AD_1 中点，

又 N 是 D_1B 的中点，所以 $MN//AB$，

$MN\not\subset$ 平面 $ABCD, AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $MN//$ 平面 $ABCD$.

因为 AB 不垂直 BD，所以 MN 不垂直 BD

则 MN 不垂直平面 BDD_1B_1，所以选项 B,D 不正确；

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD_1\perp A_1D$，

$AB\perp$ 平面 AA_1D_1D，所以 $AB\perp A_1D$，

$AD_1\cap AB=A$，所以 $A_1D\perp$ 平面 ABD_1，

$D_1B\subset$ 平面 ABD_1，所以 $A_1D\perp D_1B$，

且直线 A_1D, D_1B 是异面直线，

所以选项 C 错误，选项 A正确.

故选 A.

7. D

解析：

对于 A，$y=f\left(x\right)+g\left(x\right)-\frac{1}{4}=x^2+\sin x$，该函数　非奇非偶函数，与函数图象不符，

排除 A；

对于 B，$y=f\left(x\right)-g\left(x\right)-\frac{1}{4}=x^2-\sin x$，该函数为非奇非偶函数，与函数图象不符，排除 B；

对于 C，$y=f\left(x\right)g\left(x\right)=\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\sin x$，则 $y'=2x\sin x+\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\cos x$，

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$y'=\frac{\pi}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，与图象不符，排除 C.

故选 D.

8. C

解析：

法 1：由基本不等式有 $\sin\alpha\cos\beta\le\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta}{2}$，

同理 $\sin\beta\cos\gamma\le\frac{\sin^2\beta+\cos^2\gamma}{2}$，$\sin\gamma\cos\alpha\le\frac{\sin^2\gamma+\cos^2\alpha}{2}$，

故 $\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\le\frac{3}{2}$，

故 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 不可能均大于 $\frac{1}{2}$.

取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{\pi}{4}$，

则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}<\frac{1}{2},\sin\beta\cos\gamma=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2},\sin\gamma\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2}$，

故三式中大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值为 2，

故选：C.

法 2：不妨设 $\alpha<\beta<\gamma$，则 $\cos\alpha>\cos\beta>\cos\gamma,\sin\alpha<\sin\beta<\sin\gamma$，

由排列不等式可得：

$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\le\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\alpha$，

而 $\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\alpha=\sin\left(\gamma+\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin2\beta\le\frac{3}{2}$，

故 $\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$ 不可能均大于 $\frac{1}{2}$.

取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{\pi}{4}$，

则 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}<\frac{1}{2},\sin\beta\cos\gamma=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2},\sin\gamma\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}>\frac{1}{2}$，

故三式中大于 $\frac{1}{2}$ 的个数的最大值为 2，

故选 C.

9. C

解析：

由题意得 $f(s-t)f(s+t)=[f(s)]^2$，即 $\left[a(s-t)^2+b\right]\left[a(s+t)^2+b\right]=\left(as^2+b\right)^2$，

对其进行整理变形：

$\left(as^2+at^2-2ast+b\right)\left(as^2+at^2+2ast+b\right)=\left(as^2+b\right)^2$，

$\left(as^2+at^2+b\right)^2-(2ast)^2-\left(as^2+b\right)^2=0$，

$\left(2as^2+at^2+2b\right)at^2-4a^2s^2t^2=0$，

$-2a^2s^2t^2+a^2t^4+2abt^2=0$，

所以 $-2as^2+at^2+2b=0$ 或 $t=0$，

其中 $\frac{s^2}{\frac{b}{a}}-\frac{t^2}{\frac{2b}{a}}=1$ 为双曲线，$t=0$ 为直线.

故选 C.

10. A

解析：

因为$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，所以$a_n>0$，$S_{100}>\dfrac{1}{2}$.

由$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\dfrac{1}{a_{n+1}}<\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}+\dfrac{1}{2}\right)^2\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}<\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}+\dfrac{1}{2}$ ，即$\dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}<\dfrac{1}{2}$

根据累加法可得，$\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\le 1+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$，当且仅当$n=1$时取等号，

$\therefore a_n\ge\dfrac{4}{(n+1)^2}$ $\therefore a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\le\dfrac{a_n}{1+\dfrac{2}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n+3}a_n$

$\therefore\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{n+1}{n+3}$,

由累乘法可得$a_n\le\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$，当且仅当$n=1$时取等号，

由裂项求和法得：

所以$S_{100}\le 6\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{101}-\dfrac{1}{102}\right)=6\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{102}\right)<3$, 即$\dfrac{1}{2}<S_{100}<3$.

故选 A.

二、填空题

11.

答案：25

解析：

由题意可得，大正方形的边长为：$a=\sqrt{3^2+4^3}=5$，

则其面积为：$S_1=5^2=25$，

小正方形的面积：$S_2=25-4\times\left(\dfrac{1}{2}\times3\times4\right)=1$，

从而$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{25}{1}=25$.

故答案为25.

12.

答案：2

解析：

$f\left[f\left(\sqrt{6}\right)\right]=f\left(6-4\right)=f\left(2\right)=|2-3|+a=3$，故$a=2$，

故答案为2.

13.

答案： (1). 5； (2). 10.

解析：

$(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$，

$(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$，

所以$a_1=1+4=5,a_2=-3+6=3$，

$a_3=3+4=7,a_4=-1+1=0$，

所以$a_2+a_3+a_4=10$.

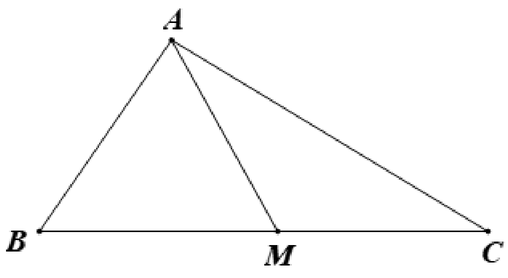
故答案为：$5,10$.

14.

答案： (1). $2\sqrt{13}$ (2). $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

解析：

由题意作出图形，如图，



在$\triangle ABM$ 中，由余弦定理得 $AM^2=AB^2+BM^2-2BM\cdot BA\cdot\cos B$，

即$12=4+BM^2-2BM\times2\times\frac{1}{2}$，解得 $BM=4$（负值舍去），

所以 $BC=2BM=2CM=8$，

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=4+64-2\times2\times8\times\frac{1}{2}=52,$$

所以 $AC=2\sqrt{13}$；

在$\triangle AMC$ 中，由余弦定理得

$$\cos\angle MAC=\frac{AC^2+AM^2-MC^2}{2AM\cdot AC}=\frac{52+12-16}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

故答案为：$2\sqrt{13}$；$\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

15.

答案： (1). 1 (2). $\frac{8}{9}$

解析：

$P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_{m+n+4}^2}=\frac{6}{C_{m+n+4}^2}=\frac{1}{6}\Rightarrow C_{m+n+4}^2=36$，所以 $m+n+4=9$，

$P\left(\text{一红一黄}\right)=\frac{C_4^1\cdot C_m^1}{C_{m+n+4}^2}=\frac{4m}{36}=\frac{m}{9}=\frac{1}{3}\Rightarrow m=3$，所以 $n=2$，则 $m-n=1$.

由于 $P(\xi=2)=\frac{1}{6},P(\xi=1)=\frac{C_4^1\cdot C_5^1}{C_9^2}=\frac{4\times5}{36}=\frac{5}{9},P(\xi=0)=\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

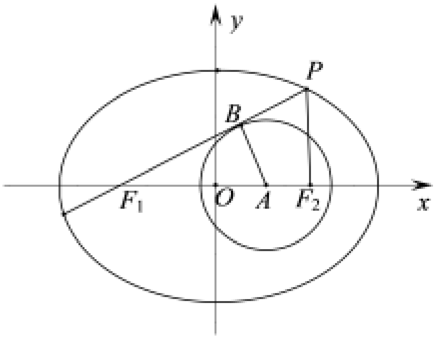
$\therefore E(\xi)=\frac{1}{6}\times2+\frac{5}{9}\times1+\frac{5}{18}\times0=\frac{1}{3}+\frac{5}{9}=\frac{8}{9}$.

故答案为：1；$\frac{8}{9}$.

16.

答案： (1). $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2). $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解析：



如图所示：不妨假设 $c=2$，设切点为 B，

$$\sin\angle PF_1F_2=\sin\angle BF_1A=\frac{|AB|}{|F_1A|}=\frac{2}{3},\quad \tan\angle PF_1F_2=\frac{2}{\sqrt{3^2-2^2}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

所以 $k=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，由 $k=\dfrac{|PF_2|}{|F_1F_2|},|F_1F_2|=2c=4$，所以 $|PF_2|=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$，

$$|PF_1|=|PF_2|\times\frac{1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{12\sqrt{5}}{5},$$

于是 $2a=|PF_1|+|PF_2|=4\sqrt{5}$，即 $a=2\sqrt{5}$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$；$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

17.

答案： $\dfrac{2}{5}$

解析：

由题意，设 $\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,2),\vec{c}=(m,n)$，

则 $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=m-2n=0$，即 $m=2n$，

又向量 $\vec{d}$ 在 $\vec{a},\vec{b}$ 方向上的投影分别为 x，y，所以 $\vec{d}=\left(x,y\right)$，

所以 $\vec{d}-\vec{a}$ 在 $\vec{c}$ 方向上的投影 $z=\dfrac{(\vec{d}-\vec{a})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=\dfrac{m\left(x-1\right)+ny}{\sqrt{m^2+n^2}}=\dfrac{2x-2+y}{\pm\sqrt{5}}$，

即 $2x+y\mp\sqrt{5}z=2$，

所以 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{10}\left[2^2+1^2+\left(\pm\sqrt{5}\right)^2\right]\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\dfrac{1}{10}\left(2x+y\mp\sqrt{5}z\right)^2=\dfrac{2}{5}$，

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{m\sqrt{5}}\\ 2x+y\,m\sqrt{5}z=2\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\ y=\dfrac{1}{5}\\ z=m\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 时，等号成立，

所以$x^2+y^2+z^2$的最小值为$\dfrac{2}{5}$.

故答案为：$\dfrac{2}{5}$.

三、解答题

18.

答案：（1）π；（2）$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

解析：

（1）由辅助角公式得 $f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,

则

$$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2=2\sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-\sin 2x$$

,

所以该函数的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$;

（2）由题意，$y=f(x)f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin x=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin x$

$$=2\sin x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x\cos x$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

由$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$可得$2x-\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$,

所以当$2x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$即$x=\dfrac{3\pi}{8}$时，函数取最大值$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

19.

答案：（1）证明见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

解析：

（1）在$\triangle DCM$中，$DC=1$，$CM=2$，$\angle DCM=60^{\circ}$，由余弦定理可得$DM=\sqrt{3}$，

所以$DM^2+DC^2=CM^2$，$\therefore DM\perp DC$．由题意$DC\perp PD$且$PD\cap DM=D$，$\therefore DC\perp$平面PDM，而$PM\subset$平面PDM，所以$DC\perp PM$，又$AB//DC$，所以$AB\perp PM$．

（2）由$PM\perp MD$，$AB\perp PM$，而AB与DM相交，所以$PM\perp$平面$ABCD$，因为$AM=\sqrt{7}$，所以$PM=2\sqrt{2}$，取AD中点E，连接ME，则ME,DM,PM两两垂直，

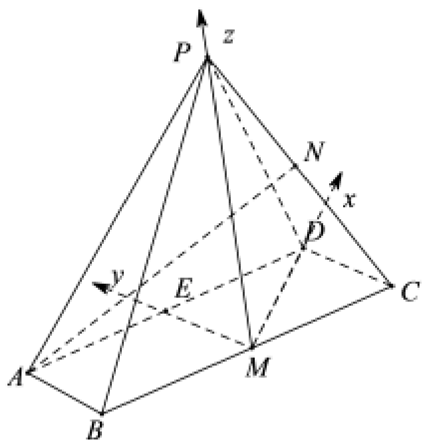
以点M为坐标原点，如图所示，建立空间直角坐标系，

则$A(-\sqrt{3},2,0),P(0,0,2\sqrt{2}),D(\sqrt{3},0,0)$，$M(0,0,0),C(\sqrt{3},-1,0)$

又N为PC中点，所以$N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{5}{2},\sqrt{2}\right)$.

由（1）得$CD\perp$平面PDM，所以平面PDM的一个法向量$\vec{n}=(0,1,0)$

从而直线AN与平面PDM所成角的正弦值为$\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}||\vec{n}|}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{25}{4}+2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.



20.

答案：（1）$a_n=-3\cdot(\dfrac{3}{4})^n$；（2）$-3\le\lambda\le1$.

解析：

（1）当 $n=1$ 时，$4(a_1+a_2)=3a_1-9$，

$$4a_2=\frac{9}{4}-9=-\frac{27}{4},\therefore a_2=-\frac{27}{16},$$

当 $n\geq 2$ 时，由 $4S_{n+1}=3S_n-9$①，

得 $4S_n=3S_{n-1}-9$②，①−②得 $4a_{n+1}=3a_n$

$$a_2=-\frac{27}{16}\neq 0,\therefore a_n\neq 0,\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4},$$

又 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{4},\therefore \{a_n\}$ 是首项为 $-\frac{9}{4}$，公比为 $\frac{3}{4}$ 的等比数列，

$$\therefore a_n=-\frac{9}{4}\cdot(\frac{3}{4})^{n-1}=-3\cdot(\frac{3}{4})^n;$$

（2）由 $3b_n+(n-4)a_n=0$，得 $b_n=-\frac{n-4}{3}a_n=(n-4)(\frac{3}{4})^n$，

所以 $T_n=-3\times\frac{3}{4}-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+0\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

$$\frac{3}{4}T_n=-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3-1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-5)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n+(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1},$$

两式相减得 $\frac{1}{4}T_n=-3\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\cdots\left(\frac{3}{4}\right)^n-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{\frac{9}{16}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{3}{4}}-(n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$=-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}-4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-(n-4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=-n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1},$$

所以 $T_n=-4n\cdot(\frac{3}{4})^{n+1}$，

由$T_n \le \lambda b_n$得$-4n\cdot(\frac{3}{4})^{n+1} \le \lambda(n-4)\cdot(\frac{3}{4})^n$恒成立，

即$\lambda(n-4)+3n \ge 0$恒成立，

$n=4$时不等式恒成立；

$n<4$时，$\lambda \le -\frac{3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$，得$\lambda \le 1$；

$n>4$时，$\lambda \ge -\frac{3n}{n-4}=-3-\frac{12}{n-4}$，得$\lambda \ge -3$；

所以$-3 \le \lambda \le 1$.

21.

答案：（1）$y^2=4x$；（2）$\left(-\infty,-7-4\sqrt{3}\right]\cup\left[-7+4\sqrt{3},1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

解析：

（1）因为$|MF|=2$，故$p=2$，故抛物线的方程为：$y^2=4x$.

（2）设$AB: x=ty+1$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，$N\left(n,0\right)$，

所以直线$l: x=\frac{y}{2}+n$，由题设可得$n\ne 1$且$t\ne\frac{1}{2}$.

由$\begin{cases} x=ty+1 \\ y^2=4x \end{cases}$可得$y^2-4ty-4=0$，故$y_1y_2=-4, y_1+y_2=4t$，

因为$|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$，故$\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_R|\right)^2=\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_P|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}|y_Q|$，故$y_R^2=|y_P|\cdot|y_Q|$.

又$MA: y=\frac{y_1}{x_1+1}\left(x+1\right)$，由$\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+1}\left(x+1\right) \\ x=\frac{y}{2}+n \end{cases}$可得$y_P=\frac{2\left(n+1\right)y_1}{2x_1+2-y_1}$，

同理$y_Q=\frac{2\left(n+1\right)y_2}{2x_2+2-y_2}$，

由$\begin{cases} x=ty+1 \\ x=\frac{y}{2}+n \end{cases}$可得$y_R=\frac{2\left(n-1\right)}{2t-1}$，

所以$\left[\dfrac{2(n-1)}{2t-1}\right]^2=\left|\dfrac{2(n+1)y_2}{2x_2+2-y_2}\times\dfrac{2(n+1)y_1}{2x_1+2-y_1}\right|$，

整理得到$\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2=(2t-1)^2\left|\dfrac{y_1y_2}{(2x_2+2-y_2)(2x_1+2-y_1)}\right|$，

$$=\frac{4(2t-1)^2}{\left|\left(\dfrac{y_2^2}{2}+2-y_2\right)\left(\dfrac{y_1^2}{2}+2-y_1\right)\right|}$$

$$=\frac{4(2t-1)^2}{\left|\dfrac{y_2^2y_1^2}{4}+(y_2+y_1)^2-y_2y_1-\dfrac{y_2+y_1}{2}\times y_1y_2-2(y_2+y_1)+4\right|}=\frac{(2t-1)^2}{3+4t^2}$$

故$\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^2=\dfrac{3+4t^2}{(2t-1)^2}$，

令$s=2t-1$，则$t=\dfrac{s+1}{2}$且$s\neq 0$，

故$\dfrac{3+4t^2}{(2t-1)^2}=\dfrac{s^2+2s+4}{s^2}=1+\dfrac{2}{s}+\dfrac{4}{s^2}=4\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$，

故$\begin{cases}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^2\geq\dfrac{3}{4}\\ n\neq 1\end{cases}$即$\begin{cases}n^2+14n+1\geq 0\\ n\neq 1\end{cases}$，

解得$n\leq -7-4\sqrt{3}$或$-7+4\sqrt{3}\leq n<1$或$n>1$.

故直线l在x轴上的截距的范围为$n\leq -7-4\sqrt{3}$或$-7+4\sqrt{3}\leq n<1$或$n>1$.

22.

答案：(1)$b\leq 0$时，$f(x)$在R上单调递增；$b>0$时，函数的单调减区间为$\left(-\infty,\log_a\dfrac{b}{\ln a}\right)$，

单调增区间为$\left(\log_a\dfrac{b}{\ln a},+\infty\right)$；

(2)$\left(1,e^2\right]$；

(3)证明见解析.

解析：

(1) $f(x)=a^x-bx+e^2$, $f'(x)=a^x\ln a-b$，

①若$b\le 0$，则$f'(x)=a^x\ln a-b\ge 0$，所以$f(x)$在R上单调递增；

②若$b>0$，

当$x\in\left(-\infty,\log_a\dfrac{b}{\ln a}\right)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减，

当$x\in\left(\log_a\dfrac{b}{\ln a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增.

综上可得，$b\le 0$时，$f(x)$在R上单调递增；

$b>0$时，函数的单调减区间为$\left(-\infty,\log_a\dfrac{b}{\ln a}\right)$，单调增区间为$\left(\log_a\dfrac{b}{\ln a},+\infty\right)$.

(2) $f(x)$有2个不同零点$\Leftrightarrow a^x-bx+e^2=0$有2个不同解$\Leftrightarrow e^{x\ln a}-bx+e^2=0$有2个不同的解，

令$t=x\ln a$，则$e^t-\dfrac{bt}{\ln a}+e^2=0\Rightarrow\dfrac{b}{\ln a}=\dfrac{e^t+e^2}{t},t>0$，

记$g(t)=\dfrac{e^t+e^2}{t},g'(t)=\dfrac{e^t\cdot t-\left(e^t+e^2\right)}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$，

记$h(t)=e^t(t-1)-e^2,h'(t)=e^t(t-1)+e^t\cdot 1=e^t\cdot t>0$，

又$h(2)=0$，所以$t\in(0,2)$时，$h(t)<0$，$t\in(2,+\infty)$时，$h(t)>0$，

则$g(t)$在$(0,2)$单调递减，$(2,+\infty)$单调递增，$\therefore\dfrac{b}{\ln a}>g(2)=e^2,\therefore\ln a<\dfrac{b}{e^2}$，

Q $b>2e^2,\therefore\dfrac{b}{e^2}>2,\therefore\ln a\le 2\Rightarrow 1<a\le e^2$.

即实数a的取值范围是$\left(1,e^2\right]$.

(3) $a=e, f(x)=e^x-bx+e^2$有2个不同零点，则$e^x+e^2=bx$，故函数的零点一定为正数.

由(2)可知有2个不同零点，记较大者为x_2，较小者为x_1，

$$b=\frac{e^{x_1}+e^2}{x_1}=\frac{e^{x_2}+e^2}{x_2}>e^4,$$

注意到函数$y=\dfrac{e^x+e^2}{x}$在区间$(0,2)$上单调递减，在区间$(2,+\infty)$上单调递增，

故 $x_1<2<x_2$，又由 $\dfrac{e^5+e^2}{5}<e^4$ 知 $x_2>5$，

$b=\dfrac{e^{x_1}+e^2}{x_1}<\dfrac{2e^2}{x_1}\Rightarrow x_1<\dfrac{2e^2}{b}$，

要证 $x_2>\dfrac{b\ln b}{2e^2}x_1+\dfrac{e^2}{b}$，只需 $x_2>\ln b+\dfrac{e^2}{b}$，

$b=\dfrac{e^{x_2}+e^2}{x_2}<\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}$ 且关于 b 的函数 $g\left(b\right)=\ln b+\dfrac{e^2}{b}$ 在 $b>e^4$ 上单调递增，

所以只需证 $x_2>\ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}+\dfrac{e^2x_2}{2e^{x_2}}\left(x_2>5\right)$，

只需证 $\ln e^{x_2}-\ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^2x_2}{2e^{x_2}}>0$，

只需证 $\ln x-\dfrac{e^2x}{2e^x}-\ln 2>0$，

$\because \dfrac{e^2}{2}<4$，只需证 $h(x)=\ln x-\dfrac{4x}{e^x}-\ln 2$ 在 $x>5$ 时为正，

由于 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+4xe^{-x}-4e^{-x}=\dfrac{1}{x}+4e^{-x}\left(x-1\right)>0$，故函数 $h\left(x\right)$ 单调递增，

又 $h(5)=\ln 5-\dfrac{20}{e^5}-\ln 2=\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{20}{e^4}>0$，故 $h(x)=\ln x-\dfrac{4x}{e^x}-\ln 2$ 在 $x>5$ 时为正，

从而题中的不等式得证.