2021年普通高等学校招生全国统一考试

北京卷 • 数学

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{x|0\le x<1\}$　　B. $\{x|-1<x\le 2\}$　　C. $\{x|1<x\le 2\}$　　D. $\{x|0<x<1\}$

2. 在复平面内，复数 z 满足 $(1-i)z=2$，则 $z=$（　　）

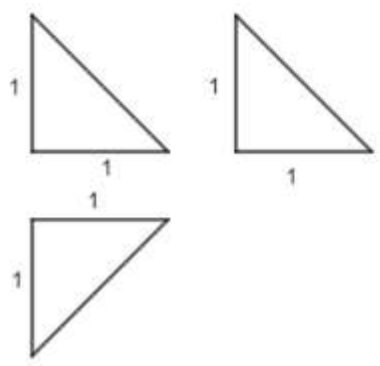
A. 1　　B. i　　C. $1-i$　　D. $1+i$

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增”是“函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为（　　）



A. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，离心率为 2，则该双曲线的标准方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$

6.已知$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，且$\frac{a_k}{b_k}(1\le k\le 5)$是常值，若$a_1=288$，$a_5=96$，$b_1=192$，则$b_3$的值为（　　）

A. 64　　B. 100　　C. 128　　D. 132

7.已知函数$f(x)=\cos x-\cos 2x$，则该函数（　　）

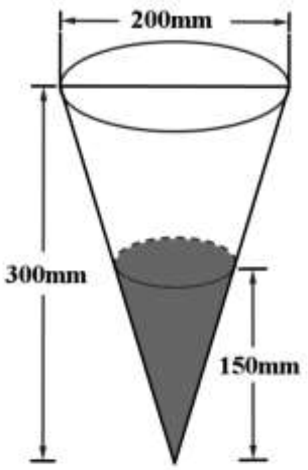
A. 奇函数，最大值为2　　B. 偶函数，最大值为2

C. 奇函数，最大值为$\frac{9}{8}$　　D. 偶函数，最大值为$\frac{9}{8}$

8.对24小时内降水在平地上的积水厚度（mm）进行如下定义：

$0\sim10$	$10\sim25$	$25\sim50$	$50\sim100$
小雨	中雨	大雨	暴雨

小明用一个圆锥形容器接了24小时的雨水，则这一天的雨水属于哪个等级（ ）



A. 小雨　　B. 中雨　　C. 大雨　　D. 暴雨

9. 已知圆$C:x^2+y^2=4$，直线$L:y=kx+m$，则当k的值发生变化时，直线被圆C所截的弦长的最小值为1，则m的取值为（　　）

A. ±2　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. ±3

10. 数列$\{a_n\}$是递增的整数数列，且$a_1\ge3$，$a_1+a_2++a_3\cdots+a_n=100$，则$n$的最大值为（　　）

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

第二部分（非选择题共110分）

二、填空题5小题，每小题5分，共25分．

11. $(x^3-\frac{1}{x})^4$ 的展开式中常数项为__________.

12. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ ，C 焦点为 F ，点 M 在 C 上，且 $|FM|=6$ ，则 M 的横坐标是_______；作 $MN\perp x$ 轴于 N ，则 $S_{\triangle FMN}=$_______.

13. $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(2,-1)$，$\vec{c}=(0,1)$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$_______； $\vec{a}\cdot\vec{b}=$_______.

14. 若点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 与点 $Q(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$ 关于 y 轴对称，写出一个符合题意的 θ 值___.

15. 已知 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若 $k=0$，则 $f(x)$ 有两个零点；

② $\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有一个零点；

③ $\exists k<0$，使得 $f(x)$ 有三个零点；

④ $\exists k>0$，使得 $f(x)$ 有三个零点.

以上正确结论的序号是_______.

三、解答题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

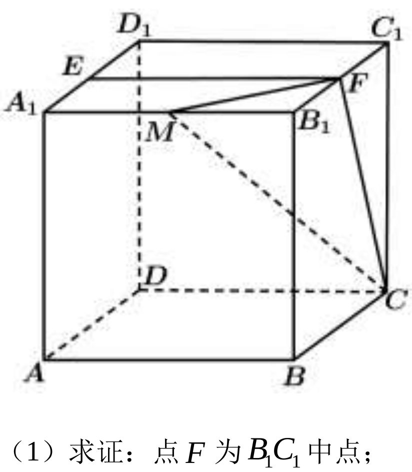
16. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $c=2b\cos B$， $C=\frac{2\pi}{3}$.

（1）求 B 的大小；

（2）在三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求出 BC 边上的中线的长度.

① $c=\sqrt{2}b$；②周长为 $4+2\sqrt{3}$；③面积为 $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

17. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E 为 A_1D_1 中点，直线 B_1C_1 交平面 CDE 于点 F .



（1）求证：点 F 为 B_1C_1 中点；

（2）若点 M 为棱 A_1B_1 上一点，且二面角 $M-CF-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值．

18. 为加快新冠肺炎检测效率，某检测机构采取“k 合 1 检测法”，即将 k 个人的拭子样本合并检测，若为阴性，则可确定所有样本都是阴性的；若为阳性，则还需要对本组的每个人再做检测．现有 100 人，已知其中 2 人感染病毒．

（1）①若采用“10 合 1 检测法”，且两名患者在同一组，求总检测次数；

②已知 10 人分成一组，分 10 组，两名感染患者在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$，定义随机变量 X 为总检测次数，求检测次数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（2）若采用“5 合 1 检测法”，检测次数 Y 的期望为 $E(Y)$，试比较 $E(X)$和 $E(Y)$的大小(直接写出结果)．

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\frac{3-2x}{x^2+a}$．

（1）若 $a=0$，求 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间，以及最大值和最小值．

20. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为 $4\sqrt{5}$．

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）过点 P(0，-3)的直线 l 斜率为 k，交椭圆 E 于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 交 y=-3 于点 M、N，若 $|PM|+|PN|\leqslant 15$，求 k 的取值范围．

21. 定义 R_p 数列 $\left\{a_n\right\}$：对 $p\in\mathrm{R}$，满足：① $a_1+p\geq 0$，$a_2+p=0$；② $\forall n\in N^*,a_{4n-1}<a_{4n}$；③ $\forall m,n\in N^*$，

$a_{m+n}\in\left\{a_m+a_n+p,a_m+a_n+p+1\right\}$．

（1）对前 4 项 2，-2，0，1 的数列，可以是 R_2 数列吗？说明理由；

（2）若 $\left\{a_n\right\}$ 是 R_0 数列，求 a_5 的值；

（3）是否存在 $p\in\mathrm{R}$，使得存在 R_p 数列 $\left\{a_n\right\}$，对任意 $n\in N^*$,满足 $S_n\geq S_{10}$？若存在，求出所有这样的 p；若不存在，说明理由．

参考答案

一、选择题

1.B 2.D 3.A 4.A 5.A 6.B 7.D 8.B 9.C 10.C

二、填空题

11. -4

12. (1). 5　　(2). $4\sqrt{5}$

13. (1). 0　　(2). 3

14. $\frac{5\pi}{12}$（满足 $\theta=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$ 即可）

15. ①②④

三、解答题

16. （1）$\frac{\pi}{6}$；

（2）答案不唯一

由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为：

$$\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\times2\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{7}\text{；}$$

则由余弦定理可得 BC 边上的中线的长度为：

$$\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\times b\times\frac{a}{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

17. （1）证明见解析；（2）$\frac{A_1M}{A_1B_1}=\frac{1}{2}$.

18. （1）①20 次；②分布列见解析；期望为 $\frac{320}{11}$

（2）若 $p=\frac{2}{11}$ 时，$E\left(X\right)=E\left(Y\right)$；

若 $p>\frac{2}{11}$ 时，$E\left(X\right)>E\left(Y\right)$；

若 $p<\frac{2}{11}$ 时，$E\left(X\right)<E\left(Y\right)$.

19. （1）$4x+y-5=0$；（2）函数 $f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left(-\infty,-1\right)$、$\left(4,+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(-1,4\right)$，最大值为 1，最小值为 $-\frac{1}{4}$.

20. （1）$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$；（2）$[-3,-1)\cup(1,3]$.

21.（1）不可以是 R_2 数列；理由见解析；（2）$a_5=1$；（3）存在；$p=2$．