绝密★启用前

2021年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项:

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题:本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合$M=\{1,2\},N=\{3,4\}$，则$ð_U(M\cup N)=$（　　）

A. $\{5\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

2. 设$\mathrm{i}z=4+3\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

A. $-3-4\mathrm{i}$　　B. $-3+4\mathrm{i}$　　C. $3-4\mathrm{i}$　　D. $3+4\mathrm{i}$

3. 已知命题$p:\exists x\in\mathbf{R},\sin x<1$；命题$q:\forall x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^{|x|}\geq 1$，则下列命题中为真命题的是（　　）

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg(p\vee q)$

4. 函数$f(x)=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}$的最小正周期和最大值分别是（　　）

A. 3π和$\sqrt{2}$　　B. 3π和2　　C. 6π和$\sqrt{2}$　　D. 6π和2

5. 若x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y\geq 4,\\ x-y\leq 2,\\ y\leq 3,\end{cases}$则$z=3x+y$的最小值为（　　）

A. 18　　B. 10　　C. 6　　D. 4

6. $\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right]$随机取 1 个数，则取到的数小于$\frac{1}{3}$的概率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{6}$

8. 下列函数中最小值为 4 的是（　　）

A. $y=x^2+2x+4$　　B. $y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$

C. $y=2^x+2^{2-x}$　　D. $y=\ln x+\frac{4}{\ln x}$

9. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（　　）

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$　　C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 B_1D_1 的中点，则直线 PB 与 AD_1 所成的角为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

11. 设 B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点，点 P 在 C 上，则 $|PB|$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

12. 设 $a\neq 0$，若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则（　　）

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<a^2$　　D. $ab>a^2$

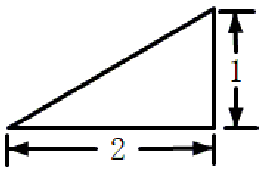
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 已知向量 $\vec{a}=(2,5),\vec{b}=(\lambda,4)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\lambda=$_________.

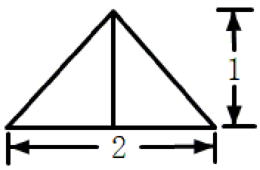
14. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点到直线 $x+2y-8=0$ 的距离为________.

15. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，面积为$\sqrt{3}$，$B=60°$，$a^2+c^2=3ac$，则$b=$________.

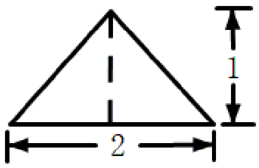
16. 以图①为正视图，在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图，组成某三棱锥的三视图，则所选侧视图和俯视图的编号依次为________（写出符合要求的一组答案即可）.



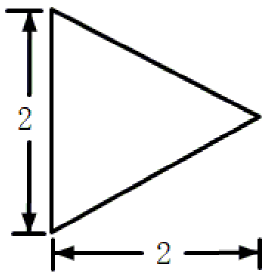
图①



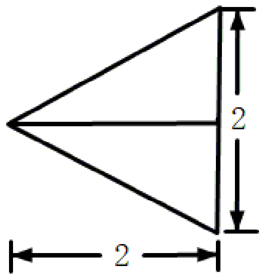
图②



图③



图④



图⑤

三、解答题．共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

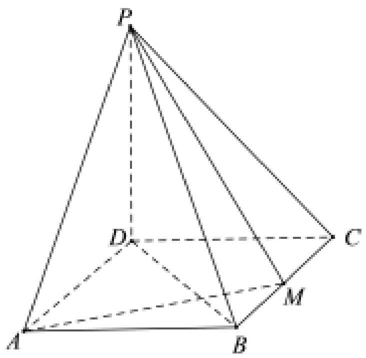
旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为$\overline{x}$和$\overline{y}$，样本方差分别记为S_1^2和S_2^2.

（1）求$\overline{x}$，$\overline{y}$，S_1^2，S_2^2；

（2）判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果

$\bar{y}-\bar{x}\geq 2\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{10}}$，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）.

18. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形， $PD\perp$ 底面 $ABCD$，M 为 BC 的中点，且 $PB\perp AM$.



（1）证明：平面 $PAM\perp$ 平面 PBD；

（2）若 $PD=DC=1$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{na_n}{3}$. 已知 a_1， $3a_2$， $9a_3$ 成等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．证明：$T_n<\frac{S_n}{2}$.

20. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

（1）求 C 的方程;

（2）已知 O 为坐标原点，点 P 在 C 上，点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$ ，求直线 OQ 斜率的最大值.

21. 已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

（二）选考题:共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做．则按所做的第一题计分．

[选修 4-4:坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中， e C 的圆心为 $C\left(2,1\right)$，半径为 1.

（1）写出 e C 的一个参数方程;

（2）过点 $F\left(4,1\right)$ 作 e C 的两条切线．以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求这两条切线的极坐标方程.

[选修 4—5:不等式选讲]

23. 已知函数 $f\left(x\right)=\left|x-a\right|+\left|x+3\right|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f\left(x\right)\geq 6$ 解集;

（2）若 $f\left(x\right)>-a$，求 a 的取值范围.

2021年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学 答案解析

一、选择题：

1. A

解析：

由题意可得：$M \cup N=\{1,2,3,4\}$，则$\complement_U(M \cup N)=\{5\}$.

故选A.

2. C

解析：

由题意可得：$z=\frac{4+3i}{i}=\frac{(4+3i)i}{i^2}=\frac{4i-3}{-1}=3-4i$.

故选C.

3. A

解析：

由于$-1 \le \sin x \le 1$，所以命题p为真命题；

由于$|x| \ge 0$，所以$\mathrm{e}^{|x|} \ge 1$，所以命题q为真命题；

所以$p \wedge q$为真命题，$\neg p \wedge q$、$p \wedge \neg q$、$\neg(p \vee q)$为假命题.

故选A.

4. C

解析：

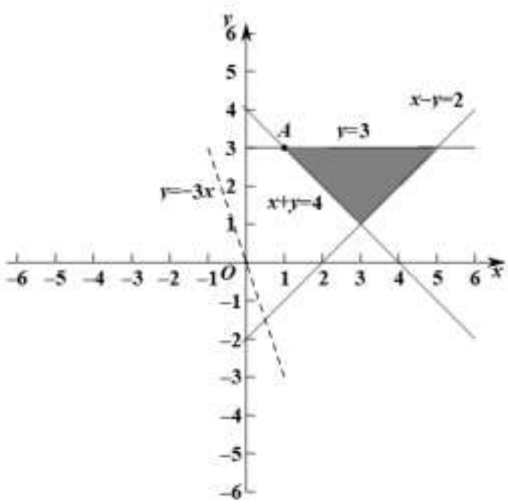
由题，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$，所以$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2p}{\frac{1}{3}}=6p$，最大值为$\sqrt{2}$.

故选C.

5. C

解析：

由题意，作出可行域，如图阴影部分所示，



由$\begin{cases} x+y=4 \\ y=3 \end{cases}$可得点$A(1,3)$,

转换目标函数$z=3x+y$为$y=-3x+z$,

上下平移直线$y=-3x+z$，数形结合可得当直线过点A时,z取最小值,

此时$z_{\min}=3\times1+3=6$.

故选C.

6. D

解析：

由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$

$=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选D.

7. B

解析：

设$\Omega=$“区间$\left(0,\frac{1}{2}\right]$随机取1个数”$=\left\{x\middle|0<x\leq\frac{1}{2}\right\}$,

$A=$“取到的数小于$\frac{1}{3}$”$=\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{3}\right\}$，所以$P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}=\frac{\frac{1}{3}-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{2}{3}$.

故选：B.

8. C

解析：

对于 A，$y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3$，当且仅当 $x=-1$ 时取等号，所以其最小值为 3，A 不符合题意；

对于 B，因为 $0<|\sin x|\leq 1$，$y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}\geq 2\sqrt{4}=4$，当且仅当 $|\sin x|=2$ 时取等号，等号取不到，所以其最小值不为 4，B 不符合题意；

对于 C，因为函数定义域为 R，而 $2^x>0$，$y=2^x+2^{2-x}=2^x+\dfrac{4}{2^x}\geq 2\sqrt{4}=4$，当且仅当 $2^x=2$，即 $x=1$ 时取等号，所以其最小值为 4，C 符合题意；

对于 D，$y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$，函数定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，而 $\ln x\in R$ 且 $\ln x\neq 0$，如当 $\ln x=-1$，$y=-5$，D 不符合题意.

故选 C.

9. B

解析：

由题意可得 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}=-1+\dfrac{2}{1+x}$，

对于 A，$f(x-1)-1=\dfrac{2}{x}-2$ 不是奇函数；

对于 B，$f(x-1)+1=\dfrac{2}{x}$ 是奇函数；

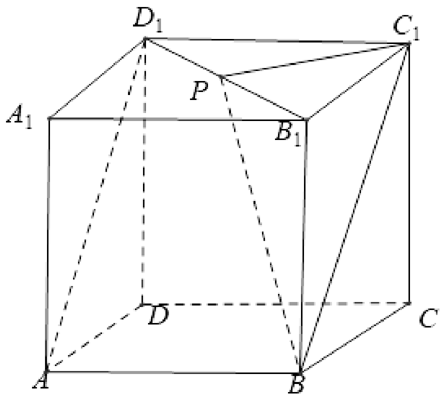
对于 C，$f(x+1)-1=\dfrac{2}{x+2}-2$，定义域不关于原点对称，不是奇函数；

对于 D，$f(x+1)+1=\dfrac{2}{x+2}$，定义域不关于原点对称，不是奇函数.

故选 B

10. D

解析：



如图，连接BC_1, PC_1, PB，因为$AD_1 \parallel BC_1$，

所以$\angle PBC_1$或其补角为直线PB与AD_1所成的角，

因为$BB_1 \perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$BB_1 \perp PC_1$，又$PC_1 \perp B_1D_1$，$BB_1 \cap B_1D_1 = B_1$，

所以$PC_1 \perp$平面PBB_1，所以$PC_1 \perp PB$，

设正方体棱长为 2，则$BC_1 = 2\sqrt{2}, PC_1 = \dfrac{1}{2}D_1B_1 = \sqrt{2}$，

$\sin\angle PBC_1 = \dfrac{PC_1}{BC_1} = \dfrac{1}{2}$，所以$\angle PBC_1 = \dfrac{\pi}{6}$.

故选 D

11. A

解析：

设点$P(x_0, y_0)$，因为$B(0,1)$，$\dfrac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1$，所以

$$|PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = 5(1 - y_0^2) + (y_0 - 1)^2 = -4y_0^2 - 2y_0 + 6 = -4\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4},$$

而$-1 \le y_0 \le 1$，所以当$y_0 = \dfrac{1}{2}$时，$|PB|$的最大值为$\dfrac{5}{2}$.

故选 A.

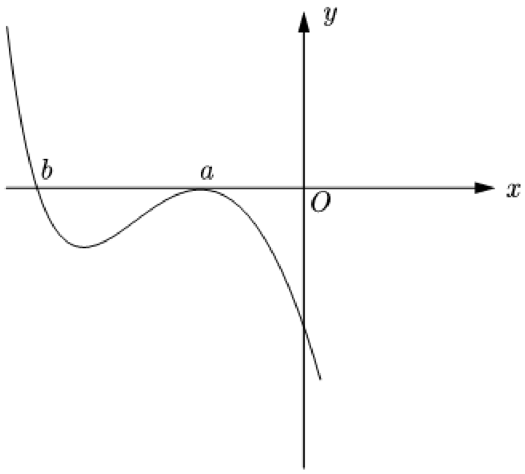
12. D

解析：

若$a = b$，则$f(x) = a(x-a)^3$为单调函数，无极值点，不符合题意，故$a \neq b$.

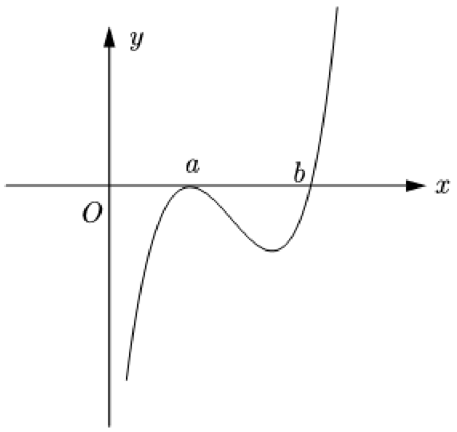
依题意，$x=a$ 为函数 $f\left(x\right)=a\left(x-a\right)^{2}\left(x-b\right)$ 的极大值点，

当 $a<0$ 时，由 $x>b$，$f\left(x\right)\le 0$，画出 $f\left(x\right)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b<a$，$a<0$，故 $ab>a^{2}$.

当 $a>0$ 时，由 $x>b$ 时，$f\left(x\right)>0$，画出 $f\left(x\right)$ 的图象如下图所示：



由图可知 $b>a$，$a>0$，故 $ab>a^{2}$.

综上所述，$ab>a^{2}$ 成立.

故选 D

二、填空题：

13.

答案： $\frac{8}{5}$

解析：

由题意结合向量平行的充分必要条件可得：$2\times4-\lambda\times5=0$，

解方程可得：$\lambda=\dfrac{8}{5}$.

故答案为$\dfrac{8}{5}$.

14.

答案：$\sqrt{5}$

解析：

由已知，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5+4}=3$，所以双曲线的右焦点为$(3,0)$，

所以右焦点$(3,0)$到直线$x+2y-8=0$ 距离为$\dfrac{|3+2\times0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

故答案为$\sqrt{5}$

15.

答案：$2\sqrt{2}$

解析：

由题意，$S_{VABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$，

所以$ac=4,a^2+c^2=12$，

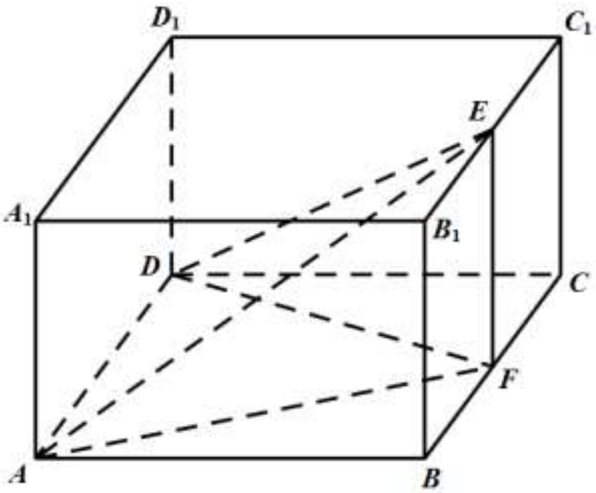
所以$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=12-2\times4\times\dfrac{1}{2}=8$，解得$b=2\sqrt{2}$（负值舍去）.

故答案为$2\sqrt{2}$.

16.③④

解析：

选择侧视图为③，俯视图为④，



如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2,BB_1=1$，

E,F 分别为棱 B_1C_1,BC 的中点，

则正视图①，侧视图③，俯视图④对应的几何体为三棱锥 $E-ADF$.

故答案为：③④.

三、解答题.

（一）必考题：

17.

答案：（1） $\overline{x}=10,\overline{y}=10.3,S_1^2=0.036,S_2^2=0.04$；（2）新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备没有显著提高.

解析：

（1） $\overline{x}=\dfrac{9.8+10.3+10+10.2+9.9+9.8+10+10.1+10.2+9.7}{10}=10$，

$\overline{y}=\dfrac{10.1+10.4+10.1+10+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5}{10}=10.3$，

$S_1^2=\dfrac{0.2^2+0.3^2+0+0.2^2+0.1^2+0.2^2+0+0.1^2+0.2^2+0.3^2}{10}=0.036$，

$S_2^2=\dfrac{0.2^2+0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.2^2+0+0.3^2+0.2^2+0.1^2+0.2^2}{10}=0.04$.

（2）依题意， $\overline{y}-\overline{x}=0.3=2\times0.15=2\sqrt{0.15^2}=2\sqrt{0.025}$， $2\sqrt{\dfrac{0.036+0.04}{2}}=2\sqrt{0.038}$，

$\bar{y}-\bar{x}<2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$，所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备没有显著提高.

18.

答案：（1）证明见解析；（2）$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

解析：

（1）因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$， $AM\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AM$， 又 $PB\perp AM$，

$PB\cap PD=P$，所以 $AM\perp$ 平面 PBD，而 $AM\subset$ 平面 PAM，所以平面 $PAM\perp$ 平面 PBD.

（2）由（1）可知，$AM\perp$ 平面 PBD，所以 $AM\perp BD$，从而 $\triangle DAB\sim\triangle ABM$，设 $BM=x$，

$AD=2x$，则 $\frac{BM}{AB}=\frac{AB}{AD}$，即 $2x^2=1$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $AD=\sqrt{2}$. 因为 $PD\perp$ 底面

$ABCD$，故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\left(1\times\sqrt{2}\right)\times1=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

19.

答案：（1） $a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}$， $b_n=\frac{n}{3^n}$；（2）证明见解析.

解析：

因为 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列且 a_1， $3a_2$， $9a_3$ 成等差数列，

所以 $6a_2=a_1+9a_3$，所以 $6a_1q=a_1+9a_1q^2$，

即 $9q^2-6q+1=0$，解得 $q=\frac{1}{3}$，所以 $a_n=(\frac{1}{3})^{n-1}$，

所以 $b_n=\frac{na_n}{3}=\frac{n}{3^n}$.

（2）证明：由（1）可得 $S_n=\frac{1\times(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})$，

$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$， ①

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$， ②

①−②得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{3^{n+1}}$，

所以$T_n=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{2\cdot 3^n}$，

所以$T_n-\frac{S_n}{2}=\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n})-\frac{n}{2\cdot 3^n}-\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3^n})=-\frac{n}{2\cdot 3^n}<0$，

所以$T_n<\frac{S_n}{2}$.

20.

答案：（1）$y^2=4x$；（2）最大值为$\frac{1}{3}$.

解析：

（1）抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，

由题意，该抛物线焦点到准线的距离为$\frac{p}{2}-\left(-\frac{p}{2}\right)=p=2$，

所以该抛物线的方程为$y^2=4x$；

（2）设$Q\left(x_0,y_0\right)$，则$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}=\left(9-9x_0,-9y_0\right)$，

所以$P\left(10x_0-9,10y_0\right)$，

由P在抛物线上可得$\left(10y_0\right)^2=4\left(10x_0-9\right)$，即$x_0=\frac{25y_0^2+9}{10}$，

所以直线OQ　斜率$k_{OQ}=\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_0}{\frac{25y_0^2+9}{10}}=\frac{10y_0}{25y_0^2+9}$，

当$y_0=0$时，$k_{OQ}=0$；

当$y_0\neq 0$时，$k_{OQ}=\frac{10}{25y_0+\frac{9}{y_0}}$，

当$y_0>0$时，因为$25y_0+\frac{9}{y_0}\geq 2\sqrt{25y_0\cdot\frac{9}{y_0}}=30$，

此时$0<k_{OQ}\le\frac{1}{3}$，当且仅当$25y_0=\frac{9}{y_0}$，即$y_0=\frac{3}{5}$时，等号成立；

当$y_0<0$时，$k_{OQ}<0$；

综上，直线OQ的斜率的最大值为$\frac{1}{3}$.

21.

答案：(1)答案见解析；(2)$(1,a+1)$.

解析：

(1)由函数的解析式可得：$f'(x)=3x^2-2x+a$，

导函数的判别式$\Delta=4-12a$，

当$\Delta=4-12a\le 0, a\ge\frac{1}{3}$时，$f'(x)\ge 0, f(x)$在R上单调递增，

当$\Delta=4-12a>0, a<\frac{1}{3}$时，$f'(x)=0$的解为：$x_1=\frac{2-\sqrt{4-12a}}{6}, x_2=\frac{2+\sqrt{4-12a}}{6}$，

当$x\in\left(-\infty,\frac{2-\sqrt{4-12a}}{6}\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增；

当$x\in\left(\frac{2-\sqrt{4-12a}}{6},\frac{2+\sqrt{4-12a}}{6}\right)$时，$f'(x)<0, f(x)$单调递减；

当$x\in\left(\frac{2+\sqrt{4-12a}}{6},+\infty\right)$时，$f'(x)>0, f(x)$单调递增；

综上可得：当$a\ge\frac{1}{3}$时，$f(x)$在R上单调递增，

当$a<\frac{1}{3}$时，$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{2-\sqrt{4-12a}}{6}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{2-\sqrt{4-12a}}{6},\frac{2+\sqrt{4-12a}}{6}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{2+\sqrt{4-12a}}{6},+\infty\right)$上单调递增.

(2)由题意可得：$f(x_0)=x_0^3-x_0^2+ax_0+1$，$f'(x_0)=3x_0^2-2x_0+a$，

则切线方程为：$y-(x_0^3-x_0^2+ax_0+1)=(3x_0^2-2x_0+a)(x-x_0)$，

切线过坐标原点，则：$0-(x_0^3-x_0^2+ax_0+1)=(3x_0^2-2x_0+a)(0-x_0)$，

整理可得：$2x_0^3 - x_0^2 - 1 = 0$，即：$(x_0 - 1)(2x_0^2 + x_0 + 1) = 0$，

解得：$x_0 = 1$，则 $f(x_0) = f(1) = 1 - 1 + a + 1 = a + 1$，

即曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标为 $(1, a+1)$.

（二）选考题:

[选修 4-4:坐标系与参数方程]

22.

答案：（1）$\begin{cases} x = 2 + \cos\alpha \\ y = 1 + \sin\alpha \end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）；（2）$2\rho\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 4 - \sqrt{3}$ 或 $2\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 4 + \sqrt{3}$.

解析：

（1）由题意，e C 的普通方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$，

所以 e C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos\alpha \\ y = 1 + \sin\alpha \end{cases}$，（$\alpha$ 为参数）

（2）由题意，切线的斜率一定存在，设切线方程为 $y - 1 = k(x - 4)$，即 $kx - y + 1 - 4k = 0$，

由圆心到直线的距离等于 1 可得 $\frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$，

解得 $k = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以切线方程为 $\sqrt{3}x - 3y + 3 - 4\sqrt{3} = 0$ 或 $\sqrt{3}x + 3y - 3 - 4\sqrt{3} = 0$，

将 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$ 代入化简得

$2\rho\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 4 - \sqrt{3}$ 或 $2\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 4 + \sqrt{3}$

[选修 4—5:不等式选讲]

23.

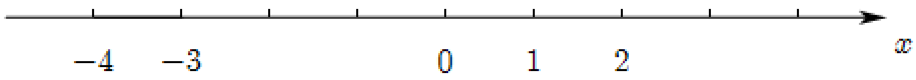
答案：（1）$(-\infty, -4]$U$[2, +\infty)$.（2）$\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

解析：

（1）当 $a = 1$ 时，$f(x) = |x-1| + |x+3|$，$|x-1| + |x+3|$ 表示数轴上的点到 1 和 -3 的距离之和，

则 $f\left(x\right)\geq 6$ 表示数轴上的点到1和-3的距离之和不小于6，故 $x\leq -4$ 或 $x\geq 2$，

所以 $f\left(x\right)\geq 6$ 的解集为$\left(-\infty,-4\right]\cup\left[2,+\infty\right)$.



（2）依题意 $f\left(x\right)>-a$，即$\left|x-a\right|+\left|x+3\right|>-a$ 恒成立，

$\left|x-a\right|+\left|x+3\right|=\left|a-x\right|+\left|x+3\right|\geq\left|a+3\right|$，故$\left|a+3\right|>-a$，

所以$a+3>-a$或$a+3<a$，

解得$a>-\dfrac{3}{2}$.

所以a的取值范围是$\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.