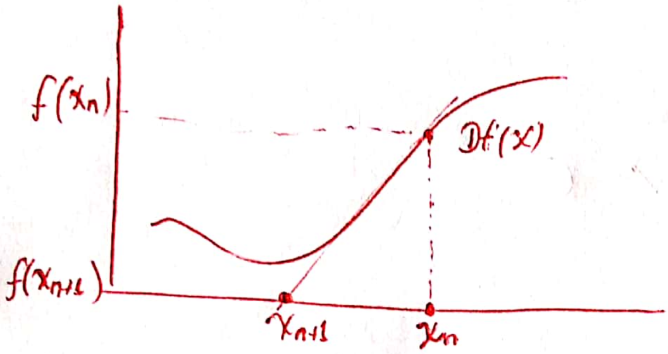
Método de Newton-Raphson.

Es un método iterativo para encontrar la(s) raíces de polinomios usando conceptos de Cálculo diferencial.

Tomemos un punto y su derivada para una función $f(x)$



Se tiene $f(x_{n+1})=0$. Usemos la ecuación de punto pendiente.

$$m = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \quad ; \quad m = Df(x_n)$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (1)$$

Tambien podemos suponer válida la expansión en series de Taylor alrededor de x_n

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{(x-x_n)^2 f''(x_n)}{2!}$$

Truncamos la función a segundo orden y evaluamos en x_{n+1}.

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \Rightarrow f(x_{n+1}) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n+1})}$$

Notar que tiene convergencia local cuadrática.

Podemos usar el error relativo entre aproximaciones para detener el método.

$$E = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon$$

Taller: Revisar los polinomios con varias raíces.

Interpolación de Lagrange.

Tenemos un conjunto de $n+1$ puntos.
$(x_0, y_0), \ldots (x_n, y_n)$

El polinomio interpolador está dado por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

donde $L_i(x)$ es la base de Lagrange.

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Este polinomio cumple que $P(x_k) = y_k$ para cada k en $\{0, \dots, n\}$.

Ejemplo: Interpolación Lineal

$$(x_0, y_0)(x_1, y_1) = (5,10)(10,15)$$

$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

$$= \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$$

$$= \left(\frac{x - 10}{5 - 10}\right) 10 + \left(\frac{x - 5}{10 - 5}\right) 15$$

$$= -2(x - 10) + (3)(x - 5)$$

$$= -2x + 20 + 3x - 15$$

$$P(x) = x + 5 \quad \blacksquare$$