Cuadratura Gaussiana.

Cambiar el integrando de la función a valores representados por raíces de polinomios ortogonales.

En general un conjunto de funciones son ortogonales $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots \phi_n(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$ si

$$\int_a^b w(x)\, \phi_m(x)\, \phi_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n$$

con $w(x)$ funciones no negativas de ponderación en $[a, b]$. Legendre de los más conocidos.

Polinomios de Legendre.

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

Grado n

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Relaciones de ortogonalidad y Normalización

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

Todas las raices de $P_n(x)=0$ son reales y distintas y están contenidas en el intervalo $[-1,1]$

$\Rightarrow$ Cuadratura $\Rightarrow$ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ y con algún Cambio de Variable Cambiar los Limites.

$\Rightarrow$ la idea es aproximar la integral como

$$\int_{-1}^{1} f(x) = W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) + \dots W_n f(x_n) = \sum_{k=0}^{n} W_k f(x_k)$$

W_n Coeficientes de ponderación

En principio no es aproximación

---

1 mostremos que los puntos $x_k (k=0,\dots n)$ Son iguales a las raices de Polinomio de Legendre.

Para eso tomemos un polinomio arbitrario de grado

$$g_n(x) = \beta_0 P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \dots + \beta_n P_n(x)$$

dado que $P_n(x)$ es base.

Por ejemplo

$$g_2(x) = 3 + 5x + x^2$$

En la base de Legendre

$$g_2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \frac{\beta_2}{2}(3x^2-1)$$

intentar resolver.

Escaneado con CamScanner

$$\left(\beta_0 - \frac{\beta_2}{2}\right) + \beta_1 x + \frac{3}{2}\beta_2 x^2$$

$$\Rightarrow \quad \beta_0 - \frac{\beta_2}{2} = 3, \quad \beta_1 = 5 \quad y \quad \frac{3}{2}\beta_2 = 1$$

Resolviendo $\beta_2 = \frac{2}{3}$

$$\beta_0 - \frac{1}{3} = 3 \Rightarrow \beta_0 = \frac{10}{3}$$

$$\beta_0 = 10/3 \quad \beta_1 = 5 \quad \beta_2 = 2/3$$

$$\Rightarrow \quad g_2(x) = \frac{10}{3} P_0(x) + 5P_1(x) + \frac{2}{3} P_2(x)$$

Ahora usemos ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} g_n(x) P_{n+1}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \beta_0 P_0(x) P_{n+1}(x) + \int_{-1}^{1} \beta_1 P_1(x) P_{n+1}(x) + \int_{-1}^{1} \beta_n P_n(x) P_{n+1}(x) = 0$$

El polinomio es de grado $2n+1$

Si comparamos con $w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots w_n f(x_n)$

Tenemos

$$0 = w_0 g_n(x_0) P_{n+1}(x_0) + w_1 g_n(x_1) P_{n+1}(x) + \dots + w_n g_n(x_n) P_{n+1}(x$$

Como g es arbitrario $g_n(x_n)$ no es cero $(k=0,\dots n)$, Por otro lado los pesos $(n+1)$ no pueden ser todos cero w_k, $(k=0,\dots n)$ (Caso trivial) por tanto, $P_{n+1}(x_k) = 0$ $(k=0,\dots n)$

Escaneado con CamScanner

la condicion $P_{n+1}(x) = 0$

$\boxed{x_0, x_1, \ldots x_n}$ son las raices del polinomio

y para $P_{n+1}(x) \in [-1, 1]$ se garantiza la existencia de dichas raices

Caso $n = 1$ $\quad P_{n+1}(x) = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$n = 2$? $\quad x = 0, \; x = \pm\sqrt{3/5}$

Como en contramos los pesos:

Nuestra hipótesis: si $f(x)$ es un polinomio de grado $n+1$

(**) $\int f(x) = \sum w_i f(x_i)$ no involucra aproximación

Podemos usar un polinomio interpolador de grado n, que pasa por $n+1$ puntos x_k $(k = 0, \ldots n)$

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} h(x_k) L_k(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} h_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} h(x_k) L_k(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} h(x_k) \int_{-1}^{1} L_k(x)$$

Comparando con (**) $\Rightarrow$

Escaneado con CamScanner

$$W_K = \int_{-1}^{+1} L_K(x) \quad \text{par} \quad K = 0, \dots, n$$

Debemos poner la base de Lagrange en términos de Polinomios de Legendre

Notar que $\dfrac{P_{n+1}(x)}{x - x_K} = 0$ ← raices

Para todo $x = x_j$ $j = 0 \dots n$ con $j \neq K$

Dim: Por Regla L'Hopital

$$\lim_{x \to x_K} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_K} = \left. \frac{\frac{d P_{n+1}(x)}{dx}}{\frac{d(x - x_K)}{dx}} \right|_{x = x_K}$$

$$= \frac{d P_{n+1}(x_K)}{dx} = P'_{n+1}(x_K)$$

⇒ El polinomio de Lagrange se puede expresar como

$$L_K = \frac{1}{P'_{n+1}(x_K)} \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_K)}$$

⇒ la función de ponderación seria

$$W_K = \frac{1}{P'_{n+1}(x_K)} \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_K)}$$

Escaneado con CamScanner

Intentar calcular $n=1$ | $\boxed{\text{formula de dos puntos}}$

$$q_{n+1} = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_2'(x) = 3X$$

raices $\quad X_{0,1} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$W_0 = \frac{1}{3X}\Big|_{X_0} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{X+1/\sqrt{3}}\,dx$$

$$W_1 = \frac{1}{3\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{X+\frac{1}{\sqrt{3}}}\,dx$$

$$W_0 = \frac{\sqrt{3}\,\cancel{3}}{\cancel{3}\times 2} \int_{-1}^{1} \frac{\cancel{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\cancel{X-\frac{1}{\sqrt{3}}}}\,dx =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{\sqrt{3}}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\right] = 1$$

$$W_1 = -\frac{\sqrt{3}(3)}{6} \int_{-1}^{1} \frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cancel{\left(x+\sqrt{3}^{-1}\right)}}{\cancel{X+1/\sqrt{3}}}\,dx =$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}} = 1$$

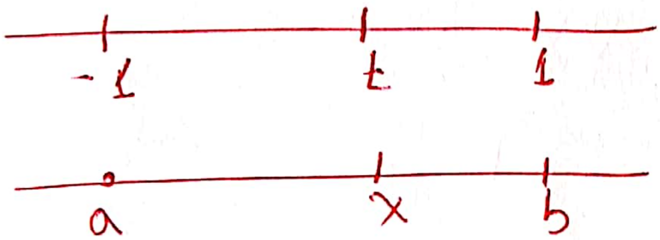
Escaneado con CamScanner

Un Ejemplo Sencillo para la formula de dos puntos $(n=1)$

$$X_k = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \int_{-1}^{1} F(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} W_i F(x_i)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} F(x)\,dx = W_0 F(X_0) + F(X_1) W_1$$

Para usar cualquier Límite de integración



la proporción

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{t-(-1)}{1-(-1)}$$

$$\Rightarrow x - a = \frac{t+1}{2}(b-a)$$

$$x = \frac{t}{2}(b-a) + \frac{(b-a)}{2} + a = \frac{1}{2}\left\{(b-a)t + b + a\right\}$$

$$dx = \frac{1}{2}(b-a)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \cancel{f(t)dt}\; f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt$$

Usando La cuadratura de Gauss-Legendre

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}\sum_{K=0}^{n} W_k\, f\left(\frac{(b-a)t_k + (b+a)}{2}\right)}$$

Escaneado con CamScanner