Metropolis hasting algorithm

Suppose you wish to sample $X \sim f(x)$, but cannot use:

✓ direct Simulation

✓ inverse cdf method

✓ accept - reject method

But you can evaluate $f(x)$ at least up to a proportionality Constant, then you can use the Metropolis hasting algorithm

Let $f(x)$ be the (possibly unnormalized) target density, x^i be a current value and $q(x/x^i)$ be a proposal distribution, the proposal might depend on the Current value x^i

first step

- Sample $x^* \sim q(x/x^i)$
- Calculate the acceptance propability:

$$\rho(x^{(i)}, x^*) = \min\left\{1, \frac{f(x^*)\, q(x^i/x^*)}{f(x^i)\, q(x^*/x^i)}\right\}$$

- Se $x^{i+1} = x^*$ with probability $\rho(x^i, x^*)$, otherwise set $x^{i+1} = x^i$

Notes. $x^{(i)} \xrightarrow{d} X$ where $X \sim f(x)$

- The sequence $x^{(i)}$ is not independent.

The Central Limit.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(x^{i}) \to E_f[h(x)] = \int_x h(x)f(x)dx$$

Example:

Random walk Metropolis

Suppose $q(x/x^{(i)}) = q(x^{(i)}/x)$, then we call q symmetric

$$\Rightarrow \quad P(x^{(i)}, x^{*}) = \min\left\{1, \frac{f(x^{*})}{f(x^{i})}\right\}$$

How this algorithm work?

Sea $D_n(x)$ la densidad de puntos X_n alrededor de X y $D_n(y)$ la densidad alrededor de y, dicho punto va a ser aceptado o rechazado.

Podemos cuantificar el flujo de puntos de la vecindad X

$$d D_n(x) = \underbrace{\sum_{y} D_n(y) P(y \to x)}_{\text{ganancia}} - \underbrace{\sum_{y} D_n(x) P(x \to y)}_{\text{Perdida}}$$

$$\sum_y D_n(y)P(x\to y)\left\{\frac{P(y\to x)}{P(x\to y)}-\frac{D_n(x)}{D_n(y)}\right\}$$

$P(y\to x)$ means the probability $y\to x$
$P(x\to y)$ $x\to y$

Tenemos dos propiedades

1) Asintóticamente se alcanza el equilibrio cuando $dD=0$

$$\Rightarrow \quad \frac{D_{eq}(x)}{D_{eq}(y)}=\frac{P(y\to x)}{P(x\to y)}$$

2) Si estamos cerca del equilibrio

$$\frac{D_n(x)}{D_n(y)}>\frac{P(y\to x)}{P(x\to y)}$$

hay traspaso de puntos hacia y lo que acerca $D_n(x)$ al equilibrio

---

Ahora escribamos

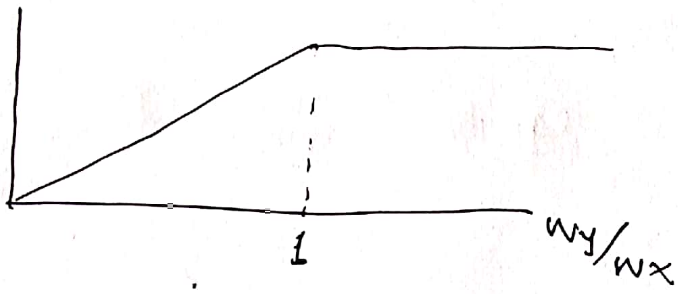
$$P(x\to y)=P_{xy}A_{xy}$$

P_{xy} probabilidad de intentar y
A_{xy} probabilidad de aceptar y si la semilla es x

Para el caso de la Cadena Simétrico $P_{xy} = P_{yx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{D_{eq}(x)}{D_{eq}(y)} = \frac{A_{yx}}{A_{xy}} \quad , \quad r \sim \mathcal{U}(0,1)$$

Podemos escribir la probabilidad de Aceptar Y



Notemos lo siguiente

- Si $W_x < W_y \Rightarrow W_y/W_x > 1$ para todo r

$\Rightarrow X_{n+1} = y$ se acepta

- Si $W_y < W_x \Rightarrow W_y/W_x < 1$

$\Rightarrow$ La probabilidad de aceptar y es W_y/W_x

- Simétrico para A_{xy} y A_{yx}

$\Rightarrow$

A_{xy}	1	W_y/W_x
A_{yx}	W_x/W_y	1
	$W_x < W_y$	$W_x > W_y$

$$\Rightarrow \quad \frac{D_{eq}(x)}{D_{eq}(y)} = W_x/W_y$$

En el equilibrio los x se distribuyen siguiendo W_x.