Método de Montecarlo.

Ley débil de los grandes números:

Si tomo el promedio de unas observaciones

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} X_i$$ Suponiendo aleatorios los puntos

Al aumentar el damaño de muestra converge al Valor esperado

$$\vec{X} \xrightarrow{i} E(X)$$

Muestral $\longrightarrow$ Poblacional

$\int_0^1 f(x)\,dx$ se puede ver como el Valor esperado de $E(f(x))$ donde $x \sim \mathcal{U}(0,1)$ "General"

$\Rightarrow$ Tomemos una muestra

$X_1, \ldots X_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ Calcular la función en eso puntos

$f(X_1), \ldots f(X_n)$

Ahora

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) \xrightarrow{N \to \infty} E(f(x))$$

Si X es una variable aleatoria con densidad f y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, entonces:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

$$E[g(x)] = \sum_{i=1} g(x_i) P(x_i)$$

Ley fuerte de grandes números

Si $X_1, X_2, \ldots X_n$ es una sucesión de Variables aleatorias igualmente distribuidas, con media $\theta \Rightarrow$

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + X_2 \ldots X_n}{n} = \theta\right) = 1$$

Montecarlo

θ se desea calcular

$\theta = E[g(x)]$ $\quad x \sim$ con distribución conocida.

$\Rightarrow$ Tomar una muestra

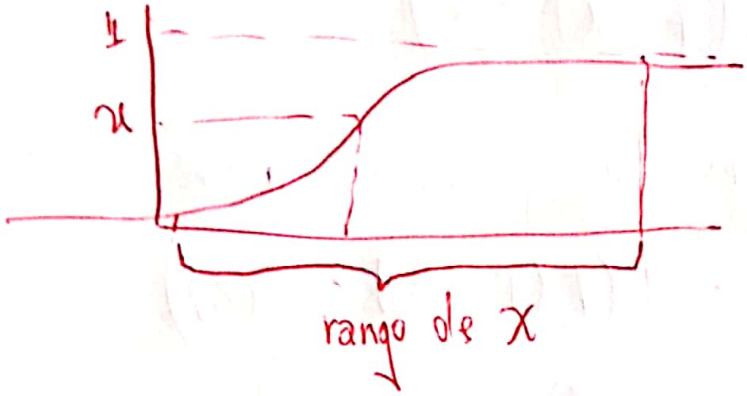
$$\frac{g(x_1) + g(x_2) + \ldots g(x_n)}{n} \simeq E[g(x_i)] = E[g(x)]$$

Por ley Fuerte $\Rightarrow$ Converge a θ

Método de Transformada inversa

X continua con f densidad $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$

Si graficamos la función acumulada "Monotona creciente"



Al ser monotona creciente, resulta ser inyectiva

$\Rightarrow$ Existe un solo valor en el rango tal que

$$F^{-1}(u) = x$$

$\Rightarrow$ Podemos generar una distribución uniforme y tomar la pre-imagen en la distribución acumulada

Demostración

$U \sim U(0,1)$ y F una distribución acumulada entonces F es inyectiva en algún intervalo pre-imagen de $(0,1)$.

Si X se define como: $X = F^{-1}(u)$
$\Rightarrow$ X tiene distribución F

Ver que la Probabilidad: by definition

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(u) \leq x)$$

Como F es inyectiva en $(0,1)$ $a<b \Rightarrow F(a)<F(b)$

$$\Rightarrow P(F^{-1}(u) \leq x) = P(F(F^{-1}(u)) \leq F(x))$$

$$= P(U \leq F(x))$$ como u es uniforme

$$= F(x)$$

Algoritmo

Generar $u \sim U(0,1)$
devolver $X = F^{-1}(u)$

Dicho de Otra forma:

$$\int_{-\infty}^{r'} g(r)\,dr = \int_{-\infty}^{x(r')} f(x')\,dx'$$

$$G(r') = F(x(r'))$$

$$r = F(x(r))$$

$$F^{-1}(r) = x$$

Incertidumbre

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i) - \langle f \rangle\right]^2$$

Notemos que: $z = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 \ldots x_n)$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{1}{N}$

$\Rightarrow \sigma_z^2 = \left(\frac{1}{N^2}\right)\sigma_1^2 + \left(\frac{1}{N^2}\right)\sigma_2^2 + \ldots \frac{1}{N^2}\sigma_n^2$

Como son mediciones independientes del mismo Parámetro

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{N}{N^2}\sigma_n^2} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{N}}$$

Metroplis hastings

Sea $D_n(x)$ la densidad de puntos x_n alrededor de x y $D_n(y)$ y es el punto que va a ser aceptado o rechazado.

El traspaso neto de puntos de la Vecindad X es

$$dD_n(x) = \underbrace{\sum_y D_n(y)P(y \to x)}_{\text{ganancia}} - \underbrace{\sum_y D_n(x)P(x \to y)}_{\text{Perdida}}$$

$$\sum_y D_n(y)\, P(x \to y) \left[\frac{P(y \to x)}{P(x \to y)} - \frac{D_n(x)}{D_n(y)} \right]$$

$P(x \to y)$ probabilidad $x \to y$

$P(y \to x)$ " $y \to x$

dos propiedades

1) Asintóticamente se alcanza el equilibrio cuando $dD = 0$

$$\frac{D_{eq}(x)}{D_{eq}(y)} = \frac{P(y \to x)}{P(x \to y)}$$

D_{eq} es un punto fijo

2) Si D está cerca D_{eq}

$$\frac{D_n(x)}{D_n(y)} > \frac{P(y \to x)}{P(x \to y)}$$

hay traspaso hacia y lo que hacerca $D(x)$ al equilibrio.

Ahora escribamos

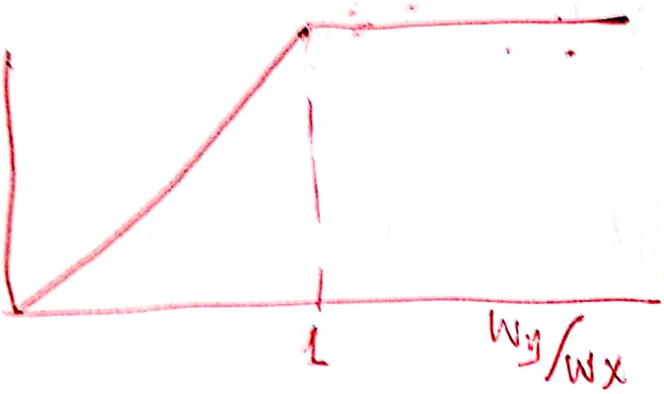
$$P(x \to y) = P_{xy} A_{xy}$$

P_{xy} probabilidad de intentar y

A_{xy} probabilidad de aceptar y si la semilla es x

Metropolis $P_{xy} = P_{yx}$ cadena simétrica

$$\Rightarrow \frac{D_{eq}(x)}{D_{eq}(y)} = \frac{A_{yx}}{A_{xy}} \quad , \; r \sim \mathcal{U}(0,1)$$



Probabilidad de aceptar Y

- Si $W_x < W_y \Rightarrow W_y/W_x > 1$ para todo r
  $X_{n+1} = Y$
- Si $W_x > W_y \Rightarrow W_y/W_x < 1$ La probabilidad de aceptar Y es $\frac{W_y}{W_x}$

	$W_x < W_y$	$W_y < W_x$
A_{xy}	1	W_y/W_x
A_{yx}	W_x/W_y	1

Se comprueba que

$$\frac{D_{eq}(x)}{D_{eq}(y)} = \frac{W_x}{W_y}$$

$\Rightarrow$ la D de equilibrio es W $\Rightarrow$ los X se distribuyen siguiendo a W(X)