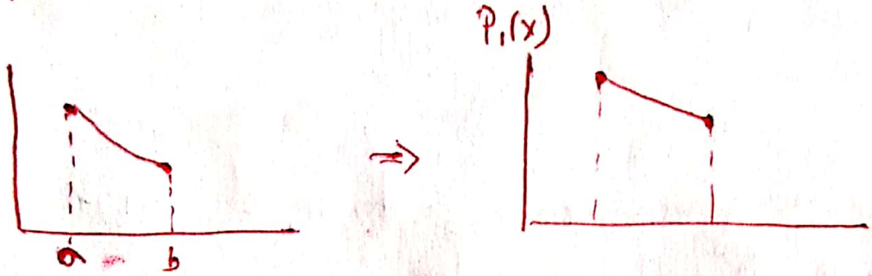
Método del Trapecio.

El método del Trapecio esta basado en la interpolación Lineal.



$$f(x) = P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{(x-a)}{b-a} f(b) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_1(x)\,dx = \int \frac{(x-b)}{a-b} f(a) + \frac{(x-a)}{b-a} f(b)\,dx$$

$$I \simeq \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right) \qquad \text{Área del Trapecio.}$$

Método Compuesto.

Tomar una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$
$x_0 = a$ y $x_n = b$, el cuál es espaciado $x_{i+1} - x_i = h \ \forall i = 1, \dots n$
$\Rightarrow$ el paso está dado por $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Aplicamos a Cada sub-integral el método Simple

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}\right) + f(x_n)\right)$$

- El método de Trapecio generalizado

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Error del método:

Tenemos una formula general para estimar el error del Polinomio interpolador de cualquier orden.

$$\epsilon = f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$\exists \xi_x$ que pertenece a la partición $\{x_0, \dots x_n\}$

Demostracion:

Tomemos una función auxiliar $F = F(t)$

$F(t) = f(t) - p(t) - cL(t)$ donde

$$C = \frac{f(x) - p(x)}{L(x)} \qquad L(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Tenemos las siguientes propiedades

$$F(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - cL(x_k) = y_k - y_k = 0$$

Para todo k en la partición

y tambien por definición de C

$$P(x) = f(x) - p(x) - cL(x) = 0$$

2)

Notemos que la función F tiene al menos $n+2$ ceros distintos
F' tiene " " $n+1$ " "
F'' " n ceros "

la $(n+1)$-ésima derivada debe tener al menos un cero

$\Rightarrow$ Derivando $n+1$ veces:

$$F^{n+1}(\xi_n)=0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - C(n+1)!$$

la derivada $(n+1)$-ésima es cero porque $P(x)$ es de grado n

$$\Rightarrow \; C\,L(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) L(x)$$

Volviendo al error en la integral

$$f(x) = P_1(x) + \epsilon(x) \quad \text{con}$$

$$\epsilon(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) \qquad a < \xi < b$$

$$\Rightarrow \; I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + E$$

$$E = \int_a^b \epsilon(x)\,dx = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\left\{ \frac{(x-a)(x-b)^2}{2} - \int \frac{(x-b)^2}{2}\,dx \right\}$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{2} \times \frac{(x-b)^3}{6}\Big|_a^b = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \text{ con } b-a=h$$

$$\Rightarrow E = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \leq \left| \frac{h^3}{12} \max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi) \right|$$

Para la regla del Trapecio compuesta

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_2) - \dots \frac{h^3}{12} f''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow E \leq \left| \frac{h^3}{12} n \max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi) \right|$$

Como $h = \frac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow E \leq \left| \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \leq \xi \leq b} f''(\xi) \right|$$

Otro camino es el valor medio de cada intervalo

$$\overline{f''} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f''(x)\, dx \simeq \frac{f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)}{n}$$

$$= n \overline{f''(\xi)} \simeq f''(\xi_1) + \dots + f''(\xi_n)$$

Regla de Simpson.

Es un método de integración de segundo orden, es decir, integrar un polinomio interpolador de segundo grado.
Dada la función $f(x)$ en $[a,b]$, se toma como tercer punto de la interpolación el punto medio de dicho intervalo. $x_m = \frac{a+b}{2}$, donde el paso es $h = \frac{b-a}{2}$
Entonces, el polinomio interpolador pasa por los puntos $(a,f(a))$, $(x_m, f(x_m))$, $(b, f(b))$.

$$\int_a^b \frac{(x-x_m)(x-b)}{(a-b)(a-x_m)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} f(x_m) + \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)} f(b)\, dx$$

Trabajamos sobre la primera integral.

$$\frac{(x-x_m)(x-b)^2}{2} - \int \frac{(x-b)^2}{2} dx \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{(a-b)^3}{12(a-b)(a-x_m)} f(a)$$

$$\left.\frac{(x-x_m)(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6}\right|_a^b \qquad = \qquad \frac{b-a}{6} f(a)$$

$$= -\frac{(a-x_m)(a-b)^2}{2} + \frac{(a-b)^3}{6} \qquad = \qquad \frac{h}{3} f(a)$$

$$= -\frac{(a-b)^2}{6}\{3a-3x_m - a+b\}$$

$$= -\frac{(a-b)^2}{12}\{4a+2b-3a-3b\} = -\frac{(a-b)^3}{12}$$

Trabajando sobre las otras dos integrales (Tarea)

$$\int_a^b f(x)dx \doteq \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right)$$

Método de Simpson Compuesto.

Se parte el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos de anchura $h = \frac{b-a}{n}$ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. n debe ser par.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Con los puntos $x_1, x_3, \dots x_{n-1}$ los puntos medios de cada Sub-intervalo.

de forma explícita

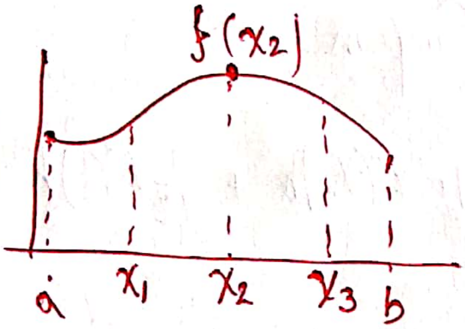
$$\int_a^b f(x)dx \doteq \frac{h}{3}\left(f(a) + 4I + 2P + f(b)\right)$$

$$I = \sum_{i=1,\,impares}^{N-1} f(x_i) = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})$$

$$P = \sum_{i=2,\,pares}^{N-2} f(x_i) = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})$$

Por claridad:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^b f(x)\,dx$$



$$\simeq \frac{h}{3}\left\{ f(a) + 4f(x_1) + f(x_2) \right\} + \frac{h}{3}\left\{ f(x_2) + 4f(x_3) + f(b) \right\}$$

$$\simeq \frac{h}{3}\left\{ f(a) + 4\left(f(x_1) + f(x_3)\right) + 2f(x_2) + f(b) \right\}$$

Error en la regla de Simpson.

Formula de Taylor $f(x)$ en x_m

$$f(x) = P_3(x) + R_4(x) =$$

$$f(x_m) + f'(x_m)(x - x_m) + \frac{f''(x_m)}{2}(x - x_m)^2 + \frac{f'''(x_m)}{3!}(x - x_m)^3 + R_4(x)$$

$$R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_m)^4$$

Podemos usar el desarrollo para encontrar $f(a)$ y $f(b)$

$$f(a) = f(x_m) + f'(x_m)(-h) + \frac{f''(x_m)}{2}(-h)^2 + \frac{f'''(x_m)}{3!}(-h)^3 + \frac{f^4(\xi)}{4!}(-h)^4$$

$$f(b) = f(x_m) + f'(x_m)h + \frac{f''(x_m)}{2}h^2 + \frac{f'''(x_m)}{3!}h^3 + \frac{f^4(\xi)}{4!}h^4$$

$\Rightarrow$ la Integral Aproximado por Simpson.

$$\frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right) = \frac{h}{3}\left(6f(x_m) + f''(x_m)h^2 + \frac{1}{12}f^4(\xi)h^4\right) \quad (3)$$

Tambien Podemos integrar el desarrollo de Taylor (Tarea)

$$\int_a^b f(x_m) + f'(x_m)(x - x_m) + \frac{f''(x_m)}{2}(x - x_m)^2 + \frac{f'''(x_m)}{3!}(x - x_m)^3 + R_4(x)\, dx$$

$$= 2hf(x_m) + \frac{f''(x_m)}{3}h^3 + \frac{f^4(\xi)}{60}h^5 \quad (4)$$

$\Rightarrow$ Tomemos la diferencia entre (3) y (4)

$$E = \left| \int_a^b f(x)\,dy - \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right)\right|$$

$$= \left| \frac{f^4(\xi)h^5}{60} - \frac{f^4(\xi)}{36}h^3 \right| = -\frac{1}{90}f^4(\xi)h^5$$

La Cota máxima es:

$$E \leq \left| \frac{h^5}{90} \max_{a \leq \xi < b} f^4(\xi) \right|$$

El error para el método compuesto

$$E \leq \left| \frac{h^5}{90} \left(E^1 + E^2 + \dots E^{n/2} \right| \leq \left| \frac{h^5}{90} \frac{n}{2} E \right|$$

$$\Rightarrow \quad E \leq \left| \frac{(b-a)}{180} h^4 \max_{a \leq \xi \leq b} f^{4}(\xi) \right|$$