Vamos a definir la discretización para nodos equi-espaciados.

$$x_j = x_0 + jh \quad , \text{ donde } h \text{ es el paso}$$

Dada la discretización, hagamos una expansión en series de Taylor alrededor de un punto x.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots \qquad h \ll 1$$

despejando la primera derivada

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \underbrace{\frac{h}{2} f''(x)}_{O(h)}$$

Para algún $x = x_j$

$$f'(x_j) \cong \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h} \qquad (1)$$

La ecuación (1) es la derivada progresiva del punto x_j.
Ahora encontremos la derivada regresiva.

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \underbrace{\frac{h^2}{2} f''(x)}_{O(h)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_j) \cong \frac{f(x_j) - f(x_j - h)}{h} \qquad (2)$$

Notar que el error en la estimación es de Orden de $\mathcal{O}(h)$

Para estimar la derivada central, comparemos ambas expanciones.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + h^2/2\, f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \dots$$

Restando las ecuaciones.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \underbrace{\frac{h^2}{6} f'''(x)}_{\mathcal{O}(h^2)}$$

En el punto x_j

$$f'(x_j) \doteq \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2h} \qquad (3)$$

Notar que el error es del Orden $\mathcal{O}(h^2)$.

<u>Error local.</u>

El error local se mide a través de la distancia con el valor real.

$$\delta_{L}(Df(x_j)) = f'(x_j) - \delta f_a(x_j)$$

Error global.

El error global se define como la propagación de errores locales en todos los puntos de la discretización.

$$d_{E}(Df(x_i)) = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{N} (f'(x_i) - df_0(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{N} (f'(x_i))^2} \right\}^{1/2}$$

Formula para segunda derivada.

$$f(x_i + h) = f(x_i) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} h + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} h^2 + \dots$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{h} h + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{h} h^2 + \dots$$

Sumando las ecuaciones.

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{h} h^2 + O(h^4)$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{h} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + O(h^2)$$

Notar que el error de la aproximación es $O(h^2)$
Para es punto $x = x_j$

$$F''(x_j) \cong \frac{f(x_{j+1}) + f(x_{j-1}) - 2f(x_j)}{h^2}$$