Studio delle oscillazioni solari

14 settembre 2016

Indice

Sommario

Il sole é una massa di gas autogravitante che supporta numerosissimi modi di oscillazione attorno alla sua posizione di equilibrio. Il loro studio fornisce uno strumento per determinare caratteristiche essenziali della struttura solare. In seguito alla comprensione della struttura spettrale delle oscillazioni solari sono state identificate altre stelle che mostrano oscillazioni con analoga struttura.

La rivelazione dei moti periodici della fotosfera solare (oscillazione dei 5 minuti: Leighton et al., 1962) e la scoperta, in misure in cui la superficie solare é risolta spazialmente (Deubner, 1975) e in misure integrate sull'intero disco solare (Claverie et al., 1979), che tali moti periodici sono la sovrapposizione di modi discreti, sono le basi osservative dell'eliosismologia: quest'ultima studia le oscillazioni della superficie solare e le informazioni sulla struttura interna in esse contenuta (stratificazione e dinamica delle regioni in cui l'ampiezza é apprezzabile).

Scrivo le leggi di conservazione che determinano la struttura stellare e la sua evoluzione: le oscillazioni di periodo attorno a 5 minuti sono descritte come piccole perturbazioni adiabatiche dello stato di equilibrio. Considero le problematiche generali che riguardano la costruzione di un modello solare con particolare riferimento alla determinazione dell'abbondanza iniziale di ^{4}He e dell'efficienza del trasporto convettivo.

Descrivo brevemente le osservazioni relative alle oscillazioni con periodo 5 minuti e la loro struttura modale, che sará giustificata tramite il modello proposto da Ulrich (1970) e Leibacher e Stein (1971), quindi descrivo le tecniche di analisi del campo di velocitá della superficie solare.

Introduco le perturbazioni lineari adiabatiche attorno allo stato di equilibrio idrostatico descrivendo le perturbazioni della densitá, pressione ed energia potenziale gravitazionale tramite una pulsazione ω e, per la dipendenza spaziale, tramite ampiezza radiale e armonica sferica $Y_{lm}(\theta, \phi)$: ottengo le equazioni che determinano i modi di oscillazione discreti ordinati, per l fissato, tramite l'ordine n, crescente con frequenza e numero di nodi radiali, e l'ampiezza della perturbazione.

É possibile trascurare la perturbazione del potenziale gravitazionale entro un'accuratezza delle frequenze dei modi $\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 0.01$: ottengo, nel limite di alte e basse frequenze, la relazione di dispersione per onde acustiche e di gravitá e un'espressione analitica per le frequenze dei modi di oscillazione.

La soluzione numerica delle equazioni delle oscillazioni esatte é limitata dall'accuratezza del modello solare usato: il confronto fra frequenze osservate e calcolate al variare dei parametri del modello solare discrimina l'accuratezza del modello; inoltre sono state sviluppate tecniche per analizzare il problema inverso e valutare le lacune del modello solare dalla differenza tra frequenze predette e osservate.

Ricavo il profilo radiale della velocitá del suono in maniera analitica ma afflitta da errori sistematici che é possibile mitigare considerando invece le differenze tra frequenze calcolate tramite un modello solare e osservate: in quest'ultimo caso é possibile correggere la profonditá della zona convettiva.

Introduco le tecniche di inversione non asintotica da cui ottengo correzioni al profilo radiale di ρ e c_s e la velocitá di rotazione del Sole supposta a simmetria sferica, e come sia possibile determinare il range dei parametri del modello solare compatibili con le osservazioni sismologiche.

I Il modello solare standard: importanza osservabili sismologiche.

SI osservano fenomeni periodici, tramite tecniche fotometriche o spettroscopiche, tramite effetto doppler, in numerose regioni del diagramma di Hertzsprung-Russel: l'osservazione di fenomeni periodici nelle stelle permette di dedurre informazione sulla loro struttura interna e di ridurre le incertezze nello spazio dei parametri del modello stellare.

Le stelle in sequenza principale, in cui la fusione dei nuclei di H in $^4\mathrm{He}$ bilancia il flusso di energia irradiata verso l'esterno, sono caratterizzate da numerosi modi di oscillazione di piccola ampiezza: onde gravo-acustiche stazionarie le cui caratteristiche sono determinate dal profilo radiale di P e ρ, legate dalla condizione di equilibrio idrostatico, dal profilo radiale della velocitá del suono e dalla geometria della stella.

Lo studio delle oscillazioni della superficie solare e l'estrapolazione delle informazioni sulla struttura interna in esse contenuta é detta eliosismologia: le frequenze sono determinate principalmente dalla stratificazione e dinamica della regione in cui le ampiezze delle oscillazioni sono apprezzabili.

É possibile calcolare numericamente le frequenze di oscillazione attese sulla base di un modello stellare e al variare di uno o piú parametri del modello analizzare la corrispondenza con quelle osservate inoltre sono state sviluppate tecniche per analizzare il problema inverso e valutare le discrepanze modello solare/Sole dalla differenza tra frequenze predette dal modello e osservate.

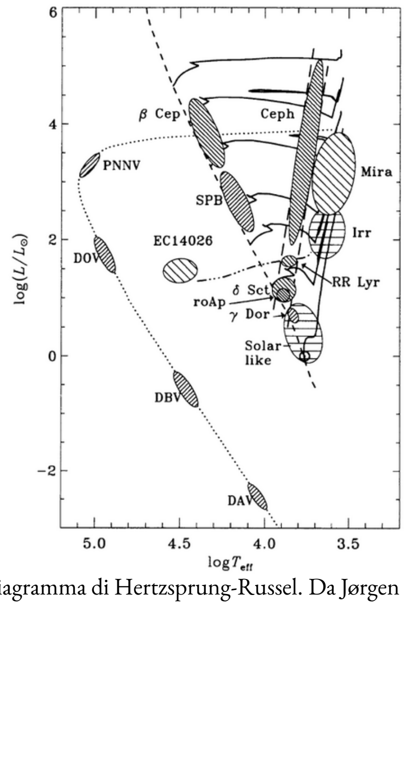


Figura 1: Stelle pulsanti nel diagramma di Hertzsprung-Russel. Da Jørgen Christensen-Dalsgaard, 1997

I. Strutture autogravitanti in equilibrio

I.I: Condizione di equilibrio idrostatico.

La distribuzione di massa del Sole é determinata dall'equilibrio tra la forza di attrazione gravitazionale e il gradiente della pressione del gas. Considero una distribuzione di massa sferica con densitá $\rho(r,t)$, la variazione della massa presente entro il raggio r é descritta da:

$$dm = 4\pi r^2 \rho\, dr - 4\pi r^2 \rho v\, dt \tag{1.1}$$

e $v(r,t)$ é il campo di velocitá della distribuzione di massa a distanza r dal centro e tempo t.

Per una configurazione di equilibrio statico la velocitá radiale del guscio sferico é $v = 0$ quindi:

$$dm = 4\pi r^2 \rho\, dr \tag{1.2}$$

Differenziando (1.1) rispetto alle variabili indipendenti r e t ricavo l'equazione di continuitá in coordinate sferiche

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v) \tag{1.3}$$

Per un elemento di fluido qualsiasi, si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{1.4}$$

Per un gas di particelle debolmente interagenti considero la condizione di equilibrio idrostatico $\ddot{\vec{r}} = 0$ nella situazione in cui il moto termico delle particelle é l'unico contributo al flusso di momento e la forza agente per unitá di massa $\vec{f}$ ha solo componente radiale: la conservazione della quantitá di moto richiede

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \rho \vec{f} \tag{1.5}$$

da cui ottengo la condizione di equilibrio

$$\nabla P = \rho \vec{f} \tag{1.6}$$

Nel caso di una stella la forma della forza per unitá di massa f é determinata dall'attrazione gravitazionale:

$$g = \frac{Gm(r)}{r^2} \tag{1.7}$$

diretta verso il centro di massa.

Definendo il potenziale gravitazionale Φ, soluzione dell'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \tag{1.8}$$

risulta:

$$\vec{g} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\hat{r} \tag{1.9}$$

La condizione di equilibrio idrostatico diventa:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \tag{1.10}$$

I.I.I Tempo di evoluzione dinamico. Scrivo l'equazione del moto per la massa dm racchiusa da un guscio sferico di raggio r:

$$\frac{dm}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = f_P + f_g \tag{1.11}$$

dove il primo termine sulla destra é il contributo dovuto alla differenza di pressione fra i due bordi del guscio, mentre il secondo é il contributo della forza di gravitá. Esplicitando gli addendi sulla destra e differenziando rispetto a m si ha:

$$\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial m} - \frac{Gm}{4\pi r^4} \tag{1.12}$$

Per giustificare l'ipotesi di equilibrio idrostatico stimo i tempi caratteristici di evoluzione della struttura solare nel caso la forza dovuta alla pressione o la forza di gravitá non fossero bilanciate, approssimando il valore caratteristico della derivata di due variabili con il rapporto del loro valore caratteristico:

$$\tau_{ff} \approx \sqrt{\frac{R_\odot}{g}} \tag{1.13}$$

tempo caratteristico di una distribuzione sferica di materia in caduta libera cioé considerando solo il secondo termine in (1.12),

$$\tau_{esp} \approx R_\odot \sqrt{\frac{\rho}{P}} \tag{1.14}$$

tempo caratteristico di espansione dovuta al termine di pressione esclusivamente.

Per i valori

$$GM_\odot = 132\,712\,440\,018(8)10^9\,\mathrm{m^3\,s^{-2}} \tag{1.15}$$

$$R_\odot = 6.9626(7)\,\mathrm{m} \tag{1.16}$$

ottengo valori di circa 27 min.: quindi la costanza delle caratteristiche solari su tempi molto maggiori giustifica l'ipotesi di equilibrio idrostatico, quindi riscrivo il tempo scala di evoluzione dinamica come

$$\tau_{idro}^{\odot} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{1}{2}(G\overline{\rho})^{-\frac{1}{2}} \approx 27\,\mathrm{min} \tag{1.17}$$

1.1.2 Sedimentazione: modello di drude ???

1.2: Teorema del viriale.

Il teorema del viriale esprime una proprietá statistica di particelle interagenti: si trova una relazione tra energia interna, dovuta al moto traslazionale degli atomi, ed energia potenziale gravitazionale, sottointendendo una residua interazione tra le particelle in modo da poter considerare il sistema localmente in equilibrio termodinamico. Stimo dall'energia potenziale gravitazionale il valore caratteristico per la velocitá del suono all'interno del Sole di circa $400\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

L'energia potenziale gravitazionale della stella é

$$\Omega = -\int_0^M \frac{Gm(r)}{r}\,dm \tag{1.18}$$

Il gas solare é approssimabile come un gas perfetto monoatomico essendo composto in gran parte da H e ^{4}He completamente ionizzati quindi l'energia interna é costituita dalla somma delle energie traslazionali delle particelle pesate secondo la distribuzione di equilibrio di Maxwell-Boltzmann

$$K = \int_M \frac{1}{\rho} \int n(\vec{p}) \frac{p^2}{2m}\,d\vec{p}\,dm = \frac{3}{2}\int_M \frac{P}{\rho}\,dm \tag{1.19}$$

$$K = E_i = \int_0^M u\,dm \tag{1.20}$$

dove $n(\vec{p})$ é il numero di particelle per unitá di volume con impulso in $[\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}]$ e u é l'energia interna per unitá di massa.

Il teorema del viriale

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2K + \Omega \tag{1.21}$$

con K energia cinetica e $I = \int r^2\,dm$, implica, dato che all'equilibrio $\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 0$:

$$0 = \int_M \frac{3P}{\rho}\,dm(r) + \Omega \tag{1.22}$$

Detta $W = E_i + \Omega$ l'energia totale della stella,

$$\Omega = -2E_i \tag{1.23}$$

e dalla conservazione dell'energia $\frac{dW}{dt} + L = 0$ segue che durante la fase di collasso prima dell'inizio della sequenza principale metá dell'energia gravitazionale viene spesa per aumentare l'energia interna e metá in luminositá:

$$L = -\frac{1}{2}\dot{\Omega} = \dot{E}_i \tag{1.24}$$

1.2.1 Onde stazionarie: modo fondamentale. Le oscillazioni solari sono in prevalenza dovute ad onde acustiche, in cui la forza di richiamo é prodotta dal gradiente di pressione: il profilo radiale della velocitá del suono determina il loro comportamento all'interno del Sole.

I modi puramente acustici di un corpo finito o comunque con condizioni ai bordi sono onde stazionarie la cui parte reale é del tipo $f(x, y, z)\cos(\omega t + \alpha)$: in assenza di effetti dissipativi la velocitá di fase é nulla e la velocitá di gruppo infinita, velocitá e pressione sono sfasati di $\frac{\pi}{2}$.

Per un corpo in equilibrio idrostatico ricavo il valore medio della velocitá del suono utilizzando il teorema del viriale

$$-\Omega = 3\int_V P\,dV = 3\int_M \frac{P}{\rho}\,dm = 3\int_M \frac{c_s^2}{\Gamma_1}\,dm = 3\langle\frac{c_s^2}{\Gamma_1}\rangle M \approx 3\frac{\overline{c}_s^2}{\Gamma_1}M \tag{1.25}$$

Se scrivo $\Omega = -q\frac{GM^2}{R}$, per stelle di sequenza principale ho che $q \approx 1.5$: per il modo fondamentale di oscillazione radiale si ha:

$$\lambda_1 \approx 2R_\odot,\ \omega_1 \approx \frac{c_s}{\lambda_1},\ \Pi_1 \approx 1\,\mathrm{h}$$

2. Costruzione del modello solare

La luminositá e la temperatura efficace sono le coordinate nel diagramma di Hertzsprung-Russel di una stella. Un modello stellare deve riprodurre la posizione di una stella nel diagramma entro le incertezze sulle osservabili sperimentali disponibili: luminosiá, massa, raggio, spettro della luce emessa dalla superficie (temperatura efficace, composizione chimica superficiale, accelerazione di gravitá) ed etá.

Un modello stellare é determinato, almeno nella parte in sequenza principale, da massa e composizione chimica della stella ad inizio sequenza: la struttura interna di una stella é regolata dalle condizioni di equilibrio idrostatico e termico locale.

I modelli stellari contengo dei parametri per descrivere incertezze nella descrizione dei fenomeni fisici: i parametri vengono scelti in maniera da riprodurre piú accuratamente possibile la posizione della stella nel diagramma di Hertzsprung-Russel.

I parametri del modello solare standard (MSS) sono α, che descrive il trasporto convettivo, e l'abbondanza di ^{4}He.

Le osservabili sperimentali che contengono informazioni dirette sull'interno stellare sono legate al flusso di neutrini prodotti nelle reazioni nucleari e all'osservazione dei modi normali di oscillazione caratteristici di una determinata classe stellare.

Per quanto riguarda il Sole é possibile determinare sperimentalmente il prodotto $GM_\odot$, la distanza, la luminositá, la composizione chimica al livello della fotosfera ad eccezione dell'abbondanza di ^{4}He e il raggio.

2.1: Meccanismi di trasporto dell'energia

2.1.1 Conservazione dell'energia. La prima legge della termodinamica esprime la conservazione dell'energia interna, ovvero mette in relazione il flusso di calore dq per unitá di massa in un elemento di gas nell'intervallo di tempo dt con la variazione di energia interna per unitá di massa du e di volume specifico dV:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{du}{dt} + P\frac{d}{dt}(\frac{1}{\rho}) = 0 = \frac{du}{dt} + P\frac{dV}{dt} \tag{2.1}$$

che posso riscrivere come

$$\frac{d\ln T}{dt} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{d\ln P}{dt} + \frac{\frac{dq}{dt}}{c_P T} \tag{2.2}$$

$$\frac{d\ln P}{dt} = \Gamma_1\frac{d\ln\rho}{dt} + \frac{\rho(\Gamma_3 - 1)}{P}\frac{dq}{dt} \tag{2.3}$$

dove ho introdotto gli esponenti adiabatici Γ_i

$$\Gamma_1 = \left(\frac{d\ln P}{d\ln \rho}\right)_{Ad}, \Gamma_3 - 1 = \left(\frac{d\ln T}{d\ln \rho}\right)_{Ad}, \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{Ad} \tag{2.4}$$

Quando il contributo delle reazioni di fusione o di ionizzazione parziale non é trascurabile aggiungo al lato di destra di (2.1) il termine contenente il potenziale chimico $-\mu_i dN_i$ con $\mu_i = \left(\frac{\partial u}{\partial N_i}\right)_{S,V}$:

tenendo conto del contributo cinetico e dell'energia di ionizzazione l'energia interna per unitá di massa si scrive

$$u(T,P) = \frac{3\mathscr{R}T}{2\mu} + \frac{1}{\rho}[n_{H^+}\chi_H + n_{He^+}\chi_{He} + n_{He^{++}}(\chi_{He} + \chi_{He^+})] \tag{2.5}$$

con χ_x energia di ionizzazione dell'atomo x e $n(x^i)$ densitá dell'atomo x ionizzato i volte calcolato tramite l'equazione di Saha.

Il tempo caratteristico che regola il collasso gravitazionale di una massa gassosa in equilibrio idrostatico é il tempo di Kelvin-Helmholtz

$$\tau_{KH} = \frac{\Omega}{L} \approx \frac{GM^2}{2RL} \tag{2.6}$$

sostituendo i valori solari con $\mathscr{L}_\odot = 3.846 \times 10^{33}$ erg s^{-1} si ha $\tau_{KH} \approx 1.6 \times 10^7$ yr.

Scrivo il bilancio di calore per un elemento di massa unitaria di gas:

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \vec{F} \tag{2.7}$$

dove ϵ é l'energia prodotta per unitá di tempo e massa dalle reazioni nucleari e $\vec{F}$ é il flusso di energia verso l'esterno che in situazioni di stabilitá dinamica é dovuto alla diffusione di fotoni dalla zona piú calda verso la superficie; sostituendo in (2.1) si ha

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2[\rho(\epsilon - \epsilon_\nu) - \rho\frac{d}{dt}u + \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt}] \tag{2.8}$$

Tiengo conto dell'energia generata sotto forma di neutrini, che, alle densitá tipiche dell'interno solare, hanno interazioni trascurabili con la materia e quindi non danno luogo a un flusso di calore nel sistema, aggiungendo un termine negativo ϵ_ν tale che $L_\nu = \int_0^M \epsilon_\nu\, dm$.

Nel caso stazionario

$$\frac{dq}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; dL = 4\pi r^2 \rho\epsilon\, dr \tag{2.9}$$

e i processi nucleari che avvengono nella parte centrale forniscono il calore per bilanciare il flusso di energia uscente, in particolare le reazioni delle catene pp contribuiscono per il 99.9% all'energia generata da reazioni nucleari nel Sole.

Stimo il tempo trascorso da una stella di massa solare in sequenza principale considerando il tempo necessario per la massa di idrogeno nel core di fusione (le temperature necessarie perché il rate di reazione sia apprezzabile si raggiungono nella regione piú interna che costituisce una frazione f pari al 15% della massa solare) a trasformarsi in elio:

$$\tau_n \approx \frac{E_n}{L} = \frac{fXM_\odot Q}{\mathscr{L}_\odot} \approx 10^{10}\ \mathrm{yr} \tag{2.10}$$

con $Q = 6.3 \times 10^{18}$ erg g^{-1}.

2.1.2 Trasporto radiativo dell'energia.

Nell'interno stellare il cammino libero medio dei fotoni é molto corto $\frac{1}{\kappa\rho} \ll R_\odot$, con l'opacitá κ che descrive l'assorbimento per unitá di massa, quindi considero la radiazione localmente in equilibrio con la materia: il flusso di energia verso la superficie é generato da una piccola anisotropia nell'intensitá descritta al prim'ordine tramite

$$I_\nu = B(\nu,T) - \frac{1}{\kappa'_\nu\rho}\nabla B(\nu,T) \tag{2.11}$$

integrando sull'angolo solido, il flusso di energia risulta

$$\vec{F}_\nu = -\frac{4\pi}{3\kappa_\nu \rho}\nabla B(\nu, T) \tag{2.12}$$

e integrando sulle frequenze

$$\vec{F} = -[\frac{4\pi}{3\rho}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B(\nu,T)}{\partial T}\,d\nu]\nabla T \tag{2.13}$$

Definisco l'opacitá media di Rosseland

$$\frac{1}{\kappa} = (\int_0^{+\infty}\frac{\partial B(\nu,T)}{\partial T})^{-1}\int_0^{+\infty}d\nu\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B(\nu,T)}{\partial T} = (\frac{acT^3}{\pi})^{-1}\int_0^{+\infty}d\nu\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B(\nu,T)}{\partial T} \tag{2.14}$$

quindi riscrivo (2.13) utilizzando la pressione di radiazione $p_{rad} = \int\, d\nu\frac{4\pi}{3c}B_\nu = \frac{1}{3}aT^4$

$$\vec{F} = -\frac{4\pi}{3\kappa\rho}\nabla B = -\frac{4\pi}{3\kappa\rho}\nabla B = -\frac{c}{\kappa\rho}\nabla P_{rad} \tag{2.15}$$

che per una distribuzione sferica di materia diventa

$$F_r = -\frac{c}{\kappa\rho}\frac{d}{dr}(\frac{1}{3}aT^4) = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dr} \tag{2.16}$$

Definisco il gradiente radiativo a partire da (2.16)

$$\nabla_{rad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{rad} = \frac{3}{16\pi acG}\frac{\kappa l(r)P}{m(r)T^4} \tag{2.17}$$

con $l(r) = 4\pi r^2 F$ luminositá totale in funzione di r.

2.1.3 Condizione di stabilitá dinamica: equilibrio radiativo

Considero sotto quali condizioni una perturbazione radiale infinitesima di un elemento di fluido cresce esponenzialmente a causa della forza di galleggiamento

$$\rho\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial t^2} = -g\Delta\rho = -g[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_e - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{amb}]\Delta r \tag{2.18}$$

La forza di archimede ha direzione opposta alla perturbazione se $\Delta\rho > 0$.

Considero un'equazione di stato generica $\rho(P, T, \mu)$ e definisco i coefficienti α, δ, ϕ tramite:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha\frac{dP}{P} - \delta\frac{dT}{T} + \phi\frac{d\mu}{\mu} \tag{2.19}$$

Considero il moto dell'elemento in equilibrio di pressione con l'ambiente e, definiti i gradienti termici per il blob e l'ambiente e il gradiente di composizione chimica

$$\nabla = \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{amb},\ \nabla_e = \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{blob},\ \nabla_\mu = \left(\frac{d\ln \mu}{d\ln P}\right)_{amb} \tag{2.20}$$

riscrivo l'equazione del moto

$$\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial t^2} = -g\frac{\delta}{H_P}[\nabla_e - \nabla - \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu]\Delta r \tag{2.21}$$

Suppongo adesso un moto del blob adiabatico $\nabla_e = \nabla_{ad} = \frac{P\delta}{T\rho c_P}$ e introduco la frequenza di Brunt-Väisälä:

$$N^2 = g(\frac{1}{\Gamma_1 P}\frac{dP}{dr} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}) \tag{2.22}$$

$$N^2 = g(\frac{1}{H_\rho} - \frac{g}{c_s^2}) \tag{2.23}$$

ho definito le lunghezze caratteristiche per variazione di densitá e pressione:

$$H_\rho = -\frac{dr}{d\ln\rho},\ H_P = -\frac{dr}{dP} \tag{2.24}$$

N^2 rappresenta la massima frequenza sotto cui puó oscillare una particella di fluido sottoposta a onde di gravitá mantenendo l'equilibrio di pressione con l'ambiente.

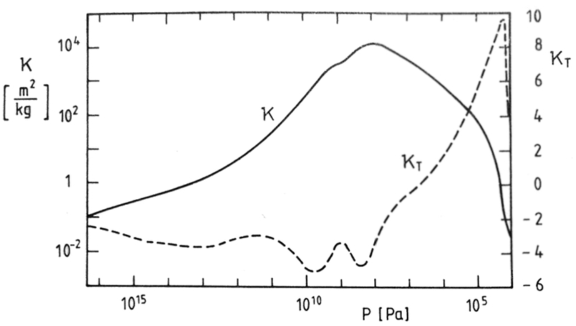
La variazione di composizione ambientale puó essere descritta tramite H_ρ in (2.23), quindi riscrivo l'equazione (2.21)

$$\frac{\partial^2(\Delta r)}{\partial t^2} = -N^2\Delta r \tag{2.25}$$

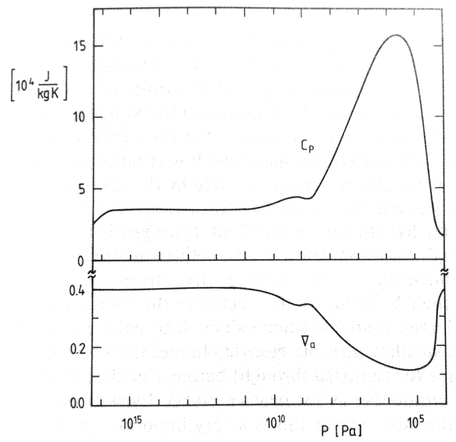
che descrive un comportamento oscillatorio per $N^2 > 0$, cioé uno strato di gas del Sole é stabile per convezione se

$$\nabla_{rad} < \nabla_{Ad} + \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu \tag{2.26}$$

dove ho usato $\nabla_{amb} = \nabla_{rad}$ definito in (2.17), cioé il gradiente che si ha nel caso la luminositá si trasportata dai fotoni.



(2.1) Profilo radiale di κ e $\frac{\partial \ln\kappa}{\partial \ln T}$. Da Stix, 1991.



(2.2) Profilo radiale di c_P e ∇_a. Da Stix, 1991.

2.1.4 Teoria della mixing-length La zona convettiva occupa il 29% piú esterno del raggio solare e il 2% della massa: questa regione é chimicamente omogenea a cousa dei moti convettivi. Le basse temperature causano un aumento dell'opacitá e il gradiente termico necessario per trasportare la luminositá solare é superiore al gradiente adiabatico, il cui valore é diminuito dal calore latente dell'idrogeno solo parzialmente ionizzato.

Una maggiore efficienza del trasporto convettivo di energia si riflette in una minore differenza tra il gradiente di temperature adiabatico ed effettivo: per determinare lo scostamento dalla stratificazione adiabatica dovuto alle perdite radiative utilizzo la teoria della mixing-length.

Il flusso di energia complessivo é determinato da

$$F_{con} + F_{rad} = \frac{4acG}{3}\frac{T^4 m}{\kappa P r^2}\nabla_{rad} \tag{2.27}$$

Per determinare il gradiente di temperatura effettivo ∇ uso la teoria della mixing-length (Prandtl, 1925 e Vitense, 1953): si considera l'eccesso di calore trasportato dai blob di gas nel moto convettivo $c_P\Delta T$ rispetto all'ambiente, il cui cammino libero medio é la mixing-length $l_m = \alpha H_P$, che da luogo al flusso di energia

$$F_{con} = \langle \rho v c_P \Delta T\rangle \tag{2.28}$$

dove $\langle\rangle$ indica una media opportuna sul guscio sferico di raggio r. Determino il valor medio della differenza di temperatura prendendo come valore caratteristico dello spostamento del blob di gas $\Delta r \approx \frac{l_m}{2}$:

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{T}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial r}\frac{l_m}{2} = (\nabla - \nabla_e)\frac{l_m}{2}\frac{1}{H_P} \tag{2.29}$$

Assumo il lavoro medio fatto dalla forza di galleggiamento per unitá di massa $-g\frac{\Delta\rho}{\rho}$ uguale al valore medio della forza, cioé la metá di quello al guscio sferico dato, moltiplicato lo spostamento medio $\frac{l_m}{2}$ quindi, assumendo in oltre che in media metá del lavoro fatto dalla forza di galleggiamento sia trasformato in energia cinetica del blob si ottiene

$$v^2 = g\delta(\nabla - \nabla_e)\frac{l_m^2}{8H_P} \tag{2.30}$$

Infine determino gli scambi radiative del blob: il modulo del flusso radiativo é proporzionale al gradiente termico in direzione normale alla superficie del blob

$$f = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}|\frac{\partial T}{\partial n}| \tag{2.31}$$

quindi l'energia scambiata dall'intera superficie S del blob é $\lambda = Sf$ che determina, per la prima legge della termodinamica, una variazione di temperatura per unitá di tempo, indicato con V il volume, $\frac{\partial T_e}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\rho V c_P}$.

La variazione della temperatura del blob per unitá distanza percorsa é quindi

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_e = \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} - \frac{\lambda}{\rho V c_P v} \tag{2.32}$$

esplicitando λ approssimando il gradiente normale alla superficie con $\langle \Delta T \rangle$ ed usando le definizioni (2.20) si ottiene

$$\frac{\nabla_e - \nabla_{Ad}}{\nabla - \nabla_e} = \frac{6acT^3}{\kappa\rho^2 c_P l_m v} \tag{2.33}$$

Le 5 equazioni (2.27),(2.17), (2.28), (2.30), (2.20) determinano completamente le variabili $F_{rad}, F_{con}, v, \nabla_e, \nabla$ in funzione di $P, T, l(r), m(r), c_P, \nabla_{Ad}, \nabla_{rad}, g$.

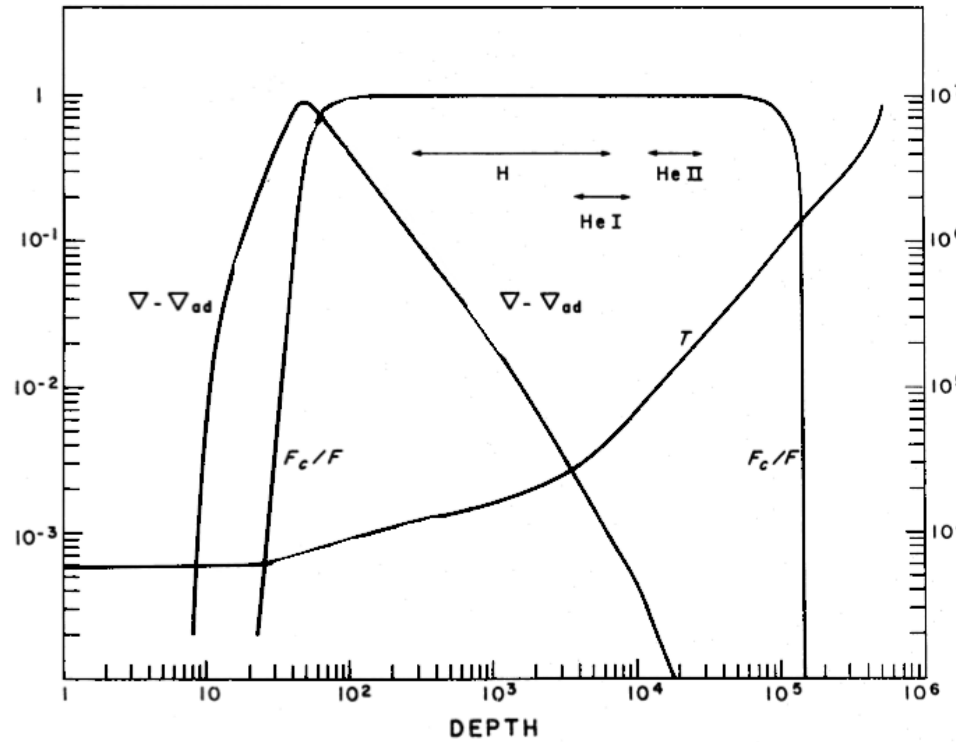


Figura 3: Da DO Gough et al., 1976

2.2: Descrizione dello stato del gas solare

Per determinare l'equazione di stato esistono due approcci: lo schema chimico considera atomi e molecole, ricava l'energia libera del sistema, e minimizzando l'energia libera si ottengono relazioni termodinamiche ed equazione di stato, utilizzando questo approccio é stata ricavata l'equazione di stato MHD; lo schema fisico considera nuclei ed elettroni come costituenti fondamentali interagenti tramite potenziale Coulombiano e trova le soluzione dell'equazione di Schröedinger per un problema a molti corpi, questo approccio, usato per ricavare l'equazione di stato OPAL, é piú adatto per trattare le regioni interne del Sole.

In questa tesi scrivo un'espressione approssimata tenendo conto delle correzioni all'equazione di stato dei gas perfetti per l'interazione Coulombiana e la degenerazione degli elettroni, illustro i processi che causano l'evoluzione chimica, e determinano il tempo di vita in sequenza principale del Sole mentre non considero i i meccanismi responsabili dell'opacitá e gli effetti della pressione di radiazione sulla diffusione degli ioni.

2.2.1 Equazione di stato Considero il contributo alla pressione degli ioni, degli elettroni degeneri nella parte interna del Sole, e dei fotoni, $P = P_I + P_R + P_e$, dove ho

$$P_I = \rho\mathscr{R}T(X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{\langle A_Z \rangle}) \tag{2.34}$$

dove ho usato il peso molecolare medio per i soli ioni μ_0,

$$P_R = \frac{a}{3}T^4 \tag{2.35}$$

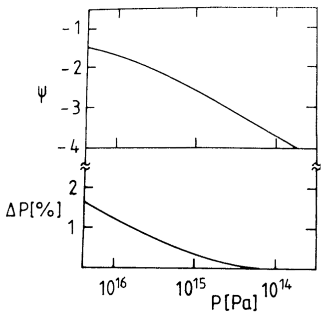
definisco il parametro β

$$P_R = (1-\beta)P \tag{2.36}$$

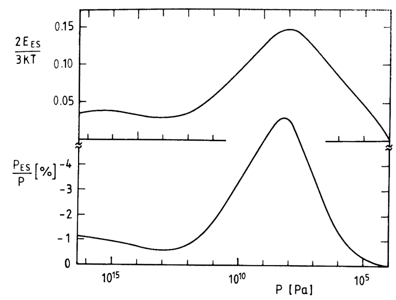
Il peso molecolare medio, definito come massa media in amu per particella libera é

$$\mu = \frac{1}{\bar{n}_H X + \bar{n}_{He} Y + \bar{n}_Z Z} \tag{2.37}$$

con $\bar{n}_i = \frac{1+f_i}{A_i}$ numero medio di particelle libere per unitá di massa atomica dovute alla specie i di peso atomico A_i con f_i numero medio di elettroni liberati da specie i.



(4.1) Parametro di degenerazione Ψ e correzioni alla pressione dovute alla degenerazione degli elettroni nell'interno solare.



(4.2) Rapporto fra energia termica e coulombiana la prima e fra pressione e correzione coulombiana la seconda.

Il contributo degli elettroni, detta n_e la densitá numerica, ψ il parametro di degenerazione, funzinione P e T, tale che per $\psi \to -\infty$ si abbia la distribuzione di Boltzmann e per $\psi \to +\infty$ completa degenerazione, e u_k energia cinetica dell'elettrone, é determinato da

$$\rho N_A \frac{1+X}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi p^2\, dp}{h^3(e^{\frac{u_k}{KT}-\psi}+1)},\ \beta P - \rho\mathscr{R}(X + \frac{Y}{4} + \frac{Z}{\langle A_Z \rangle}) = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} p n_e \frac{du_k}{dp}\, dp \tag{2.38}$$

dove ho introdotto il peso atomico medio per elettrone libero (ionizzato) μ_e con

$$\frac{1}{\mu_e} \approx X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(1-X-Y) = \frac{1+X}{2}$$

Introduco una correzione duvuta all'interazione Coulombiana seguendo Debye-Hückel: il potenziale $V_i(r)$ dovuto allo ione Z_i é schermato dagli elettroni quindi, per la formula di Boltzmann, la densitá degli ioni con carica Z é $n_Z = \overline{n}_Z e^{-\frac{ZeV_i}{kT}}$, con $\overline{n}_Z$ densitá numerica dello ione Z imperturbata. Assumendo l'energia coulombiana molto minore dell'energia termica espando n_Z al prim'ordine nell'equazione di Poisson per V_i

$$\nabla^2 V_i = -4\pi e \sum Z n_Z \approx \frac{1}{r_D^2} V_i \tag{2.39}$$

da cui ottengo il potenziale generato dalla nube di cariche attorno a Z

$$\phi_Z = -\frac{eZ}{r_D} \tag{2.40}$$

dove

$$\frac{1}{r_D^2} = \frac{4\pi e^2}{kT}\sum Z^2\overline{n}_Z = \frac{4\pi e^2}{kT}\zeta,\ \zeta = \sum_i (Z_i^2 + Z_i)\frac{\rho X_i}{A_i}N_A \tag{2.41}$$

Le correzioni dovute alle interazioni coulombiane sono

$$u = \frac{3}{2}\frac{\mathscr{R}T}{\mu} + u_c,\ P = \frac{\rho}{\mu}kT + P_c \tag{2.42}$$

con

$$u_c = \frac{1}{2}\sum_Z eZ\overline{n}_Z\phi_Z = -e^3\sqrt{\frac{\pi\rho}{kT}}(N_A\zeta)^{\frac{3}{2}},\ P_c = \frac{1}{3}u_c \tag{2.43}$$

2.2.2 Mutamenti della composizione chimica: reazioni nucleari e processi di diffusione.

La composizione chimica é modificata dalle reazioni di fusione che per gli elementi principali, assumendo condizione di equilibrio secolare, riassumo

$$\dot{X} = \frac{m_p}{N_A}(-3r_{pp} + 2r_{33} - r_{34} - 4r_{p14}) \tag{2.44a}$$

$$\dot{Y}_3 = \frac{m_{He3}}{N_A}(r_{pp} - 2r_{33} - r_{34}) \tag{2.44b}$$

$$\dot{Y} = \frac{m_{He4}}{N_A}(r_{33} + r_{34} + r_{p14}) \tag{2.44c}$$

con r_{ik} rate di reazione per unitá di massa:

$$r_{ik} = \frac{\rho N_A^2 X_i X_k}{(1+\delta_{ik})A_i A_k}\lambda_{ik} \tag{2.45}$$

dove, introducendo il fattore astrofisico $S(E)$, la massa ridotta dei due reagenti m_{ik}

$$\lambda_{ik} = \sqrt{\frac{8}{m_{ik}\pi}}\frac{S_{ik}|_{E=0}}{(kT)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty} e^{\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right)}\,dE,\ b = 31.28 Z_1 Z_2\sqrt{\frac{m_{ik}}{m_u}}\,(KeV)^{-1} \tag{2.46}$$

Oltre alle reazioni di fusioni anche i processi di diffusione modificano l'abbondanza degli elementi, il peso molecolare medio e l'opacitá. Sebbene il tempo caratteristico per percorre un raggio solare sia lungo $\tau_{diff} \approx 6 \times 10^{13}$ yr i processi di diffusione producono effetti misurabili sulle frequenze dei modi di oscillazione: la loro inclusione nei modello solare standard produce un miglior accordo con le osservazioni.

I processi di diffusione inglobano diversi effetti: la gravitá tende a concentrare gli elementi piú pesanti verso il centro, le interazioni elettromagnetiche mantengono gli elettroni ancorati ai nuclei, la diffusione termica concentra le particelle piú cariche e piú pesanti nelle zone piú calde, mentre la presenza di gradiente di concentrazione $C_s = \frac{n_s}{n_e}$ produce diffusione in senso opposto. Si tiene conto del flusso di massa, momento ed energia nelle equazioni di conservazione attraverso le equazioni sviluppate da Burgers (1969), per la concentrazione numerica della specie s ho un l'equazione di continuitá.

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 n_s w_s) = \left(\frac{\partial n_s}{\partial t}\right)_{Nucl} \tag{2.47}$$

con w_s velocitá di diffusione specie s.

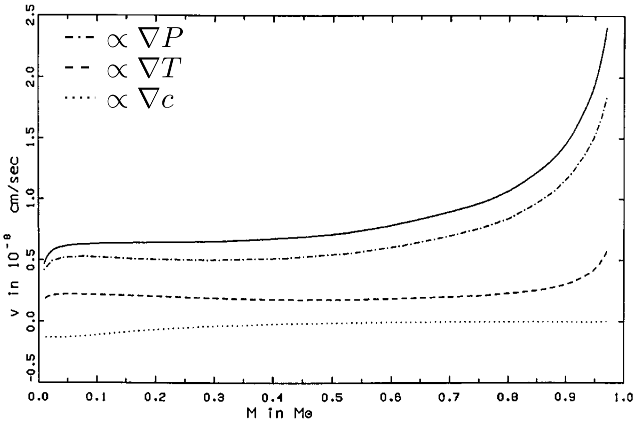


Figura 5: Contributi alla velocitá di diffusione di H-He in modello di $1M_\odot$ a 4.65×10^9 yr. Da Wambsganss, 1988.

2.3: Parametri del modello e condizioni al bordo.

Un modello del Sole attuale si ottiene integrando numericamente le equazioni fondamentali della struttura stellare (2.48) per ottenere il profilo radiale delle grandezze $\{P, m, T, L, X_i\}$, note l'equazione di stato $P(\rho, T, X_i)$ (e l'energia interna $u(P, T, X_i)$), l'opacitá κ, il rate di produzione di energia nucleare $\epsilon(P, T, X_i)$.

Descrivo le caratteristiche del trasporto di energia verso la superficie attraverso la relazione

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{2.48a}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \tag{2.48b}$$

$$\frac{dT}{dr} = \nabla \frac{T}{p}\frac{dp}{dr} \tag{2.48c}$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 [\rho(\epsilon - \epsilon_\nu) - \rho \frac{d}{dt} u + \frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt}] \tag{2.48d}$$

I meccanismi di trasporto di energia determinano il gradiente di temperatura $\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}$ fissata la luminositá alla superficie.

Le condizioni al bordo sono

- La superficie é definita da $T = T_{eff}$ e si ha la condizione $L = 4\pi r^2 \sigma T^4$. La pressione alla superficie é legata alla struttura di equilibrio dell'atmosfera.
- In $r = 0$ deve essere $L = 0$, $M = 0$.

per $X_i(r)$ e M fissati, e costruendo una sequenza evolutiva del Sole in sequenza principale fino ad ottenere un modello solare con le caratteristiche del Sole attuale:

l'aumento del peso molecolare medio μ, determinato tramite (2.47), dovuto principalmente alle reazioni di fusione (2.44), deve essere compensato da un'aumento di temperatura con conseguente incremento dell'energia generata e della luminositá.

L'incertezza sull'abbondanza iniziale di He e sui meccanismi del trasporto convettivo rendono necessaria una calibrazione in funzione della luminositá e raggio attuali.

L'etá del sistema solare é nota grazie modelli di formazione e analisi dei meteoriti che determinano $t_\odot = 4.9(1) \times 10^9$ yr con incertezza dovuta al periodo di solidificazione dei meteoriti. La luminositá dipende fortemente dal valore di Y_0, mentre il raggio da α, parametro che regola l'efficienza del trasporto convettivo nella regione esterna caratterizzata fisicamente dall'entropia il cui valore é determinato, a meno di una costante additiva, dalla zona superadiabatica vicino alla superficie.

Scelgo Y_0 e α che forniscono luminositá e raggio $R_\odot = 6.96 \times 10^8$ m attuali del Sole: risulta $\frac{R_b}{R_\odot} \approx 0.710$ e il valore di $Y_0 = 0.250$.

II Oscillazioni lineari adiabatiche.

In questa sezione ricavo l'equazione del moto perturbato che descrive i modi normali del Sole: considero piccole perturbazioni dello stato di equilibrio e adiabatiche cioé molto piú rapide del tempo scala per scambio di calore dovuto al flusso radiativo o alle reazioni nucleari. Le frequenze delle oscillazioni adiabatiche sono determinate dalla struttura interna del Sole attraverso i coefficienti che compaiono nelle equazioni che descrivono i modi normali: dato che $P,\ \rho,\ g$ non sono indipendenti é sufficiente specificare $\rho(r)$ e $\Gamma_1(r)$. Un confronto con le frequenze osservate necessita che la precisione numerica sia dei parametri ricavati dal modello sia delle tecniche numeriche usate per ricavare le frequenze dei modi di oscillazione sia maggiore dell'accuratezza delle misure.

3. Introduzione alle oscillazioni solari.

3.1: Oscillazioni dei 5 minuti.

In Leighton et al. (1962) si osserva che la superficie solare ha scale spazio-temporali privilegiate: in particolare é presente un comportamento periodico nell'atmosfera a tutte le altezze rilevato tramite effetto doppler. Il periodo é di circa 300 secondi e la lunghezza caratteristica di qualche Mm.

Il modello proposto da Ulrich (1970) e Leibacher e Stein (1971) considera le proprietá dei modi normali non radiali di oscillazione del Sole, in particolare usando la relazione di dispersione per onde acustiche, si ha la definizione di cavitá risonanti all'interno del Sole: la variazione delle proprietá del gas delimita le regioni di propagazione a diverse profonditá a seconda delle caratteristiche trasversali del moto.

Le oscillazioni osservate hanno $\nu \geq 500\,\mu\mathrm{Hz}$, sono causate da modi p, onde stazionarie che si propagano come onda evanascente nell'atmosfera solare, e modi f, onde di superficie, osservabili ad alto grado angolare l.

Sono possibili onde stazionarie per determinati valori di (k_h, ω), dove la perturbazione della densitá, pressione e potenziale gravitazionale sono descritte approssimativamente da un'onda piana dove $k_h = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ é il numero d'onda orizzontale e $\vec{k} = k_r\hat{r} + \vec{k}_h$.

La simmetria sferica del modello solare rende naturale una descrizione delle perturbazioni in funzione di $Y_l{}^m(\theta, \phi)$, l é l'ordine angolare: nell'approssimazione di onda piana si ha $k_h^2 \approx \frac{l(l+1)}{r^2}$ (vedere (4.6)).

Le osservazione del disco solare risolto spazialmente permettono di individuare i modi di alto grado angolare: l'analisi tramite FFT (frequenza e k_h) delle osservazioni della superficie solare riportate in Deubner (1975) (CI 538 nm) confermano che la potenza delle oscillazioni (con numero d'onda $k_h = \frac{2\pi}{\lambda} < 1\,\mathrm{Mm}^{-1}$) si distribuisce in linee determinate nel diagramma (k_h, ω) predette dal modello e quindi conferma che sono provocate da modi acustici non radiali degli strati interni alla fotosfera.

Le osservazioni della luce integrata sull'intero disco selezionano modi di basso grado angolare: Claverie et al. (1979) osservano nello spettro Doppler (linee di assorbimento di K neutro: 769.9 nm) della luce integrata sull'intero disco solare dei picchi equi-spaziati circa 68 μHz interpretate come modi p di alto ordine n e basso grado l. I modi di basso ordine radiale l penetrano in profonditá e quindi portano informazioni sulle regioni di fusione e la loro evoluzione.

3.2: Analisi del campo di velocitá della superficie solare.

In linea di principio:

- Dall'andamento di un modo sulla superficie solare si ricava (l, m).
- L'ordine radiale n si ricava dalla distribuzione delle frequenze di oscillazione.

e, considerando che deviazioni dalla simmetria sferica causano uno splitting delle frequenze, un multipletto di frequenze si rappresenta come

$$\nu_{nlm} = \nu_{nl0} + \sum_{j=1}^{j_{\max}} a_j(n,l)\,\mathrm{Pol}_j^{(l)}(m) \tag{3.1}$$

i coefficienti dispari contengono il contributo della rotazione al termine lineare, i coefficienti pari effetti delle asfericitá nella struttura solare e effetti quadratici della rotazione.

Una parte basilare dell'informazione contenuta nei modi di oscillazione é ricavata analizzando lo spostamento doppler delle righe di assorbimento dei metalli presenti negli strati visibili piú esterni del sole. I modi relativi alle oscillazioni dei 5 minuti di grado l non elevato causano uno spostamento quasi totalmente radiale: il segnale é proporzionale alla velocitá proiettata lungo la linea di vista. Prendendo l'asse delle armoniche sferiche sul piano del cielo ortogonale alla linea di vista, il segnale Doppler osservato é proporzionale a

$$V_D(\theta,\phi,t) = \sin\theta\cos\phi \sum_{n,l,m} A_{nlm} c_{lm} P_l^m(\cos\theta)\cos\left(m\phi - \omega_{nlm}t - \beta_{nlm}\right) \tag{3.2}$$

il fattore $\sin\theta\cos\phi$ deriva dalla proiezione della velocitá radiale sulla linea di vista.

Per isolare il contributo di una singola $Y_{l_0 m_0}$ considero

$$V_{l_0 m_0}(t) = \int_A V_D(\theta,\phi,t) W_{l_0 m_0}(\theta,\phi)\,dA = \sum_{n,l,m} S_{l_0 m_0, lm} A_{nlm}\cos\left(\omega_{nlm}t + \beta_{nlm,L_0 m_0}\right) \tag{3.3}$$

e ho integrato sul disco solare con $W_{l_0 m_0} \approx Y_{l_0 m_0}$. La funzione di risposta $S_{l_0 m_0, lm} \propto \delta_{l l_0}\delta_{m m_0}$ poiché le armoniche sferiche sono ortogonali sull'intera sfera $V_{l_0 m_0}(t)$ contiene contributi da valori di (l, m) vicini.

La trasformata di Fourier di $V_{l_0 m_0}(t)$ permette di isolare i singoli modi caratterizzati dall'ordine radiale n.

Un segnale di durata T permette una risoluzione $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$: se devo risolvere due frequenze ω e $\omega + \Delta\omega$ devo osservare per un tempo $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ e la frequenza piú bassa osservabile é $\Delta\omega$. Il limite superiore delle frequenze osservate é dato dalla frequenza di Nyquist $\omega_{Ny} = \frac{\pi}{\Delta t}$ con Δt risoluzione temporale, e analogamente per le variabili spaziali e vettore d'onda associato, quindi

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \le \omega \le \frac{\pi}{\Delta t} \tag{3.4}$$

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x} \le k_x \le \frac{\pi}{\Delta x} \tag{3.5}$$

3.3: Eccitazione e tempo di vita dei modi.

La presenza di modi osservabili pone il problema del bilancio energetico dei modi: si deve capire se esistono modi instabili, cioé modi per cui l'ampiezza delle oscillazioni lineari cresce

[Si ipotizza che le oscillazioni siano eccitate in maniera stocastica dai moti convettivi: la larghezza delle frequenze risonanti é determinata dal tempo di smorzamento.]

[Thermal over-stability: ulrich70, stein leibacher71]

[Extensive turbolent layers: stars lose all hint of vibrational instability]

[Not self excited: driven to observable amplitude by external process]

[Turbolent convection: source of pulsational energy, emit acustic radiation]

[Stable pulsation: spectrum as that of an ensemble of harmonic oscillator stocastically driven and damped]

[Power spectrum indipendent of l for $l < 100$: low degree modes are not influenced by k_h. Vertical propagation: superficial layers (low l modes are generated in these strata)]

[Oscillations are intrinsically over-stable?]

[Interaction with turbolent convection]

[Radiative transfer (as frequencies rise modes became more sensitive to rapid relaxation time in solar atmosphere)]

[La stabilitá dei modi g é determinata dalla stabilitá convettiva: se non sono presenti regioni di instabilitá convettiva i modi g sono stabili (g_+), se esistono zone convettivamente instabili esistono anche modi g instabili (g_-).]

[Excitation p-modes: fluctuating turbolent pressure (Raynold stresses). Excitation g-modes: nuclear burning instabilities. Damping: radiative losses, viscosity, nonlinear interaction between modes.]

[Low l p-modes exponential decay with e-folding time several days.]

4. Perturbazioni lineari adiabatiche.

4.1: Perturbazione dello stato di equilibrio.

Descrivo le oscillazioni come piccole perturbazioni attorno allo stato di equilibrio stazionario (gli effetti non lineari sono dell'ordine di $\frac{v}{c_s}$ dove v é l'ampiezza dell'oscillazione). Indico con $P'(\vec{r},t)$ la perturbazione euleriana, con $\delta\vec{r} = \vec{\xi}$ lo spostamento della particella di fluido a causa della perturbazione e con $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}(\delta\vec{\xi})$ la sua velocitá

$$P(\vec{r},t) = P_0(\vec{r}) + P'(\vec{r},t) \tag{4.1}$$

e in termini della variazione lagrangiana

$$\delta P(\vec{r}) = P(\vec{r}+\delta\vec{r}) - P_0(\vec{r}) = P'(\vec{r}) + \delta\vec{r}\cdot\nabla P_0$$

Ricavo l'equazione del moto perturbato sostituendo (4.1) nell'equazione del moto $\rho\frac{d}{dt}v_i = \rho(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\partial_j v_i) = -\partial_i P + \rho\vec{g}_i$ e considerando solo i termini lineari nelle perturbazioni risulta:

$$\rho_0\frac{\partial^2\delta\vec{r}}{\partial t^2} = \rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -\nabla P' + \rho_0\vec{g}' + \rho'\vec{g}_0 \tag{4.2}$$

con $\vec{g}' = -\nabla\Phi', \nabla^2\Phi' = 4\pi G\rho'$.

Analogamente per l'equazione di continuitá ottengo

$$\rho' + \mathrm{Div}\,(\rho_0\delta\vec{r}) = 0 \tag{4.3}$$

4.1.1 Approssimazione adiabatica.

I tempi caratteristici per scambio di calore sono molto maggiori del periodo delle pulsazioni. Considero i termini a destra dell'equazione di conservazione dell'energia interna (2.2), dove ho esplicitato il bilancio di calore usando (2.7),

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}\frac{T}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{c_P}(\epsilon - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$$

Stimo il tempo caratteristico τ_R per flusso radiativo (2.16):

$$\frac{1}{\rho c_P}\nabla\cdot(\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\nabla T) \approx \frac{4acT^4}{3\kappa\rho^2 c_P H} = \frac{T}{\tau_R}$$

H lunghezza caratteristica, in cgs:

$$\tau_R = 10^{12}\frac{\kappa\rho^2 H^2}{T^3}$$

Per valori caratteristici dell'intero Sole ho ($\kappa = 1, \rho = 1, T = 10^6, H = 10^{10}$) ho $\tau_R \approx 10^7$ yr $\approx \tau_{KH}$, per valori caratteristici della zona convettiva ($\kappa = 100, \rho = 10^{-5}, T = 10^4, H = 10^9$) ho $\tau_R \approx 10^3$ yr, in cgs.

Nella parte interna il termine dovuto alle reazioni nucleari é caratterizzato da un tempo $\tau_\epsilon \approx \frac{c_P T}{\epsilon} \approx \tau_{KH}$.

Confronto $\frac{T}{\tau_R}, \frac{T}{\tau_\epsilon}$ con $\frac{dT}{dt} \approx \frac{T}{\Pi_{osc}}$ con $\Pi_{osc} \approx \mathrm{min} - \mathrm{h}$: i termini dovuti allo scambio di calore sono trascurabili rispetto alla derivata temporale di T.

Il moto di una elemento di fluido é descritto dalla relazione adiabatica

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\Gamma_1 P}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

Approssimazione adiabatica non piú valida vicino alla superficie solare dove i tempi per lo scambio di calore sono piú brevi.

La condizione di perturbazione adiabatica linearizzata é

$$\frac{\partial \delta P}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = 0$$

che integrata rispetto a t ed in funzione della variazione euleriana diventa

$$P' + \delta\vec{\xi} \cdot \nabla P_0 = \frac{\Gamma_{1,0} P_0}{\rho} (\rho' + \delta\vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0) \tag{4.4}$$

4.2: Modi di oscillazione.

4.2.1 Separazione variabili spaziali e temporali. Dall'equazione del moto (4.2) si vede che

$$\hat{r} \cdot (\mathrm{Rot} \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \xi_\phi) - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \phi} = 0$$

quindi é possibile ricavare la componente tangenziale della perturbazione da una funzione scalare.

Descrivo i modi normali di oscillazione introducendo la dipendenza temporale da $e^{i\omega t}$ e angolare dalle funzioni armoniche sferiche $Y_{lm}(\theta, \phi)$

$$\vec{\xi} = e^{i\omega t}(\xi_r(r), \xi_h(r)\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\xi_h(r)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}) Y_l^m(\theta, \phi) \tag{4.5}$$

dove ho scomposto il vettore spostamento perturbato in componente radiale $\xi_r(r)$ e tangenziale $\xi_h(r)$.

Le funzioni armoniche sferiche soddisfano

$$L^2 Y_l^m = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2} = -r^2 \nabla_h^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m \tag{4.6}$$

La variazione euleriana di densitá, pressione, potenziale gravitazionale sono espresse

$$(\rho', P', \Phi') = e^{i\omega t}[\rho'(r), P'(r), \Phi'(r)] Y_l^m$$

4.2.2 Spettro delle oscillazioni. Utilizzo l'equzione del moto (4.2) e l'equazione di continuitá (4.3) per eliminare $\xi_h(r)$ dall'equazione del moto

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\xi_r) - \frac{\xi_r g}{c^2} + \frac{1}{\rho_0}(\frac{1}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}) P' - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}\Phi' = 0 \\ &\frac{1}{\rho_0}(\frac{d}{dr} + \frac{g}{c^2}) P' - (\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = 0 \\ &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\Phi'}{dr}) - \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi' - \frac{4\pi G\rho_0}{g} N^2 \xi_r - \frac{4\pi G}{c^2} P' = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

con $g = -\frac{1}{\rho_0}\frac{dP_0}{dr}$, $c^2 = \frac{\Gamma_1 P_0}{\rho_0}$ e le frequenze critiche sono definite ho nella sezione 5.2.

Il sistema di equazione (4.7) ha soluzione con le opportune equazioni al contorno per un insieme discreto di valori delle frequenze, ω_{nlm}. L'ordine angolare non compare nelle equazioni quindi gli autovalori ω_{nlm} sono $2l+1$ degeneri: la degenerazione é rimossa nel caso si tenga conto della rotazione ($\frac{\Omega}{\omega} \approx 10^{-4}$) o di effetti gravitazionali di altri corpi.

Condizioni al contorno: sono necessarie 4 condizioni.

- Due condizioni per $r = 0$ selezionano le soluzioni regolari:

  $$P' = 0,\ \Phi' = 0 \tag{4.8}$$

  Vicino a zero risulta un andamento asintotico

  $$\begin{aligned} &(l \neq 0):\ \xi_r \propto r^{l-1};\ (l = 0):\ \xi_r \propto r \\ &P',\ \Phi' \propto r^l \end{aligned}$$

- Alla superficie solare richiediamo la continuitá di $\delta\nabla\Phi$ e che non si abbia propagazione verso l'esterno.

All'esterno della stella ho $\rho' = 0$ quindi scelgo la soluzione nulla a infinito dell'equazione di Poisson $\Phi' = Ar^{-l-1}$:

$$\frac{d\Phi'}{dr} + \frac{l+1}{r}\Phi' = 0,\ r = R_\odot \tag{4.9}$$

La condizione di non propagazione oltre la fotosfera dipende dalla descrizione dell'atmosfera solare. Nella versione piú semplice impongo che la variazione di pressione sia zero alla superficie perturbata della stella

$$\delta P = P' + \xi_r \frac{dP}{dr} = 0 \tag{4.10}$$

[Fig.3 pag. 13 J Christensen-Dalsgaard, 2002]

5. Caratteristiche asintotiche delle oscillazioni adiabatiche.

I modi gravo-acustici descritti in (4.7) si riducono ai modi p ed f per alte frequenze e ai modi g per basse frequenze. Approssimando il comportamento della perturbazione localmente con un'onda piana e trascurando la perturbazione al potenziale gravitazionale Φ' si ottendono soluzioni asintotiche per gli autovettori e le frequenze dei modi normali.

5.1: Comportamento asintotico.

Per determinare la struttura dello spettro delle oscillazioni introduciamo l'approssimazione di Cowling (Cowling, 1941) cioé trascuriamo la perturbazione del potenziale gravitazionale. Quindi il sistema (4.7) si riduce al secondo ordine

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\xi_r) - \frac{\xi_r g}{c^2} + \frac{1}{\rho_0}(\frac{1}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2})P' = 0 \tag{5.1}$$
$$\frac{1}{\rho_0}(\frac{d}{dr} + \frac{g}{c^2})P' - (\omega^2 - N^2)\xi_r = 0$$

Considero i limiti asintotici di alte e basse frequenze: ottengo un problema del tipo di Sturm-Liuville.

- Per $\omega \to \infty$:

  Lo spettro é discreto, le oscillazioni sono prodotte da onde acustiche in cui la forza dominante é fornita dalla pressione, i modi p, ordinati in base al numero di zeri di ξ_r fra il centro e la superficie.

- Per $\omega \to 0$:

  Lo spettro é discreto, il moto é determinato dalla forza di gravitá, ho i modi g, ordinati secondo il numero di nodi radiali.

Lo spettro solare é la combinazione dei modi parziali precedenti; i modi f separano i modi g e p: non hanno nodi in direzione radiale.

Relazione di dispersione per i modi gravo-acustici.

Approssimo il comportamento spaziale delle oscillazioni con quello di onda piana

$$\vec{\xi} \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}},\ \vec{k} = k_r\hat{r} + \vec{k}_h$$

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2} \approx k_h^2 c^2$$

Considero i coefficienti delle equazioni (5.1) costanti ad eccezione di $P_0,\ \rho_0$: approssimazione valida se la lunghezza d'onda delle perturbazioni é molto minore della scala caratteristica di variazione dei coefficienti.

Sostituisco

$$\xi_r \propto \rho_0^{-\frac{1}{2}} e^{ik_r r},\ P_1 \propto \rho_0^{\frac{1}{2}} e^{ik_r r} \& \tag{5.2}$$

forma richiesta dalla conservazione dell'energia e della quantitá di moto, e ottengo la relazione di dispersione:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_A^2}{c^2} + S_l\frac{N^2 - \omega^2}{c^2\omega^2} = \frac{\omega^2}{c^2}(1 - \frac{\omega_{l,+}^2}{\omega^2})(1 - \frac{\omega_{l,-}^2}{\omega^2}) \tag{5.3}$$

e quindi determino le frequenze critiche per i modi gravo-acustici

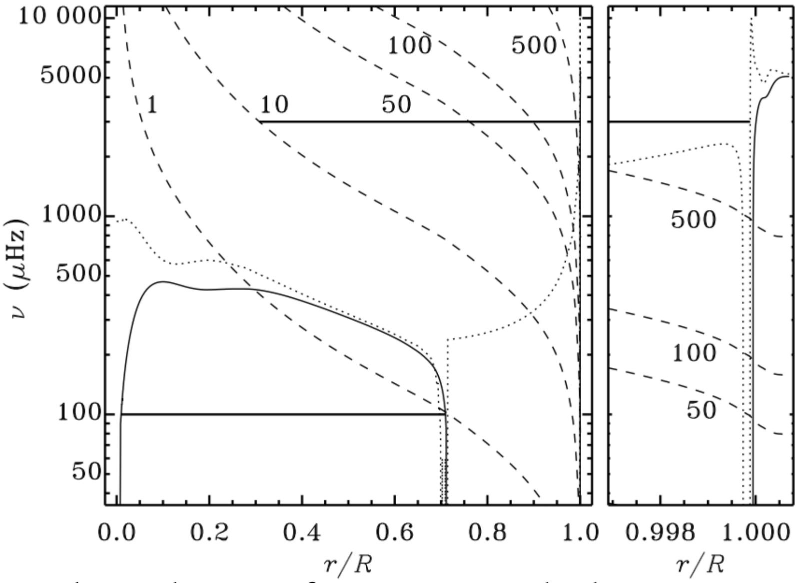
$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(S_l^2 + \omega_c^2) \pm \sqrt{\frac{1}{2}(S_l^2 + \omega_c^2)^2 - N^2 S_l^2} \tag{5.4}$$

I modi di oscillazione soddisfano la relazione

$$\omega \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2}(1 - \frac{N^2}{\omega^2})} \, \frac{dr}{c} \approx \pi(n - \frac{1}{2}) \tag{5.5}$$

5.2: Cavitá risonanti.

La parte superiore dello spettro delle oscillazioni é caratterizzata da modi acustici mentre la parte inferiore é caratterizzata da modi di gravitá (vedere capitolo 5). La variazione delle proprietá del gas influenzano la velocitá del suono, $c_s = \Gamma_1 \frac{P}{\rho}$, e le frequenze critiche: esistono regioni dell'interno solare, dipendenti dalla natura delle oscillazioni, in cui é possibile un comportamento periodico ai cui bordi si ha riflessione interna.



Legenda

$\frac{\omega_c}{2\pi}$; $\frac{S_l}{2\pi}$; $\frac{N}{2\pi}$;

Le linee orizzontali a $100\,\mu$Hz e $3000\,\mu$Hz demarcano le regione in cui sono confinati risp. un modo g e p.

Figura 6: Frequenze caratteristiche calcolate tramite il modello S. Da J Christensen-Dalsgaard, 2002.

Le onde acustiche sono confinate in una regione che é limitata superiormente dall'aumento della frequenza critica acustica

$$\omega_A = \frac{c_s}{2H_\rho}\sqrt{1 - 2\frac{dH_\rho}{dr}} \tag{5.6}$$

causato dalla diminuzione della temperatura dato che $\omega_A \propto T^{-\frac{1}{2}}$ che provoca la riflessione delle onde con periodo attorno ai 5-min, mentre l'aumento della velocitá del suono con la profonditá e la conseguente rifrazione dell'onda porta a propagazione del moto puramente tangenziale $k_r = 0$: ció avviene nel guscio sferico per cui $c_s = \frac{\omega}{k_h} \approx \omega \frac{r}{L}$ ovvero per $\omega = S_l$ frequenza di Lamb definita da

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c_s^2}{r^2} \tag{5.7}$$

Maggiore é il grado l meno profonda é la cavitá: le cavitá acustiche si estendono nella zone convettiva fino alla profonditá in cui la rifrazione dovuta all'aumento della velocitá del suono $c_s \propto \sqrt{T}$ causa una riflessione totale dell'onda quando la velocitá del suono é aumentata fino alla loro velocitá di fase orizzontale.

[Fig.5 pg. 15 J Christensen-Dalsgaard, 2002]

Si puó stimare la profonditá della cavitá acustica, utilizzando la condizione $c_s = \frac{\omega}{k_h}$ per $k_r = 0$: approssimo la temperatura al punto di inversione del moto con $T \approx \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} \delta$ dove δ é la profonditá della cavitá e, ipotizzando un gas ideale, ho $\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \frac{g}{c_P}$ con c_P calore specifico a pressione costante per unitá di massa.

Usando le relazioni fra gli esponenti adiabatici e che nel caso sono uguali a γ riscrivo $c_s^2 = (\Gamma_3 - 1) g\delta$ e sostituendo nella condizione al punto di inversione ottengo $\delta = \frac{\omega^2}{k_h^2(\Gamma_3 - 1)g}$: i modi con stesso $\frac{\omega}{k_h}$ sono confinati nella stessa cavitá.

Condizione di risonanza radiale

In Duvall Jr (1982) si mostra che un grafico di $\frac{\pi(n+\alpha)}{\omega}$ rispetto a $\frac{\omega}{k_h}$ rappresenta i modi p con un'unica curva, per

α e n intero opportuni, quindi

$$(n+\alpha)\frac{\pi}{\omega} = F'(\frac{\omega}{k_h}) = F(\frac{\omega}{L}) \tag{5.8}$$

[Fig.2 Duvall Jr, 1982]

La formula sopra si giustifica considerando che, per l fissato, le frequenze dei modi sono determinate dalla condizione che l'onda interferisca costruttivamente con se stessa, come per una cavita chiusa ad un'estremitá. Un'onda stazionaria in direzione radiale implica che l'integrale di k_r nella regione di propagazione fra due zeri consecutivi sia un intero multiplo di π.

$$(n+\alpha)\pi \approx \int_{r_t}^{R} k_r\,dr \approx \int_{r_t}^{R} \frac{\omega}{c_s}\sqrt{1-\frac{S_l^2}{\omega^2}}\,dr \tag{5.9}$$

ho usato la relazione di dispersione per onde acustiche e la frequenza di Lamb (5.7), $c_s^2 = \Gamma_1\frac{P}{\rho}$, con

$$F(w) = \int_{r_t}^{R} \sqrt{1-\frac{c_s^2}{r^2w^2}}\,\frac{dr}{c_s} \tag{5.10}$$

Cavitá risonanti per modi g.

I modi g sono modi di gravitá dovuti alla forza di galleggiamento. Le regione di propagazione dei modi g sono definite da $\omega < N$ per grandi k_hH o $\omega < S_l\frac{\omega_A}{N}$ per k_hH piccoli.

Nella parte a basse frequenze dei modi g é valida una relazione di dispersione approssimata per $l \neq 0$

$$k_r^2 = \frac{S_l^2}{c^2}(\frac{N^2}{\omega^2}-1) \tag{5.11}$$

[introdotta in precedenza (??)]

Vale una relazione analoga a (5.9)

$$\frac{(n+\alpha_g)\pi}{L} \approx \int_{r_1}^{r_2} (\frac{N^2}{\omega^2}-1)^{\frac{1}{2}}\,d\ln r \tag{5.12}$$

con $r_2 \approx R_{cz}$.

Le onde di gravitá sono presenti nelle regioni in cui il gas é neutro o completamente ionizzato (N^2 grande) mentre sono riflesse dalle regioni dove N é piccolo o immaginario: ionizzazione parziale, instabilitá convettiva, centro del Sole.

Ho cavitá risonanti per modi g:

- Core radiativo.

  I modi g sono confinati tra la la parte centrale dove $g \to 0$ e il fondo della zona convettiva dove $N^2 < 0$.

- Atmosfera.

  N ha un massimo in coincidenza del punto T_m nella cromosfera: modi g confinati tra zona convettiva e cromosfera ($\Pi \approx 180 - 800$s).

[Fig.2 pg 636 daDouglas Gough et al., 1991]

5.3: Espressioni asintotiche delle frequenze dei modi

Per alte frequenze trascuro N in (5.5)

$$\omega\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}-\frac{S_l^2}{\omega^2}}\,\frac{dr}{c} \approx \pi(n-\frac{1}{2})$$

con $r_1 = r_t$, $r_2 = R_t$, e $\alpha(\omega)$ funzione della frequenza e del comportamento vicino alla superficie di ω_c e nella regione in cui $\omega \approx S_l$. Ritrovo la relazione di Duvall (5.8).

Per modi di alto grado angolare, confinati nella regione convettiva, considerando Γ_1 e g costanti e una stratificazione adiabatica, ho la relazione di dispersione approssimata

$$\omega^2 = \frac{2}{\mu_p}\frac{g}{R}(n+\alpha) \tag{5.13}$$

dove $\mu_p = \frac{1}{\Gamma_1 - 1}$ é l'inidce politropico efficace della regione considerate

I modi di basso l penetrano in profonditá, quindi approssimo $r_t \approx 0$, da cui risulta

$$\int_0^R \frac{dr}{c} - \frac{L}{\omega}\frac{\pi}{2} = \frac{(n+\alpha)\pi}{\omega} \tag{5.14}$$

avendo usato l'espansione

$$F(w) \approx \int_0^R \frac{dr}{c} - w^{-1}\frac{\pi}{2} \tag{5.15}$$

Ottengo la relazione, da cui le frequenze risultano equispaziate in n e quasi degeneri per $n + \frac{l}{2}$, $\nu_{nl} \approx \nu_{n-1,l+2}$, con $\Delta\nu = [2\int_0^R \frac{dr}{c}]^{-1}$:

$$\nu_{nl} = \frac{\omega_{nl}}{2\pi} \approx (n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha)\Delta\nu \tag{5.16}$$

Questo comportamento a bassi l é stato osservato da Claverie et al., 1979 sulla luce integrata sul intero disco solare.

Espressione asintotica modi g.

Nell'interno solare approssimo (5.5) con

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{N^2}{\omega} - 1}\frac{dr}{r} = \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{L} \tag{5.17}$$

dove l'integrale comprende la regione di propagazione e i punti di inversione del moto sono definiti dall'andamento di N.

I modi g di alto n e basso l soddisfano un'equazione analoga a (5.16) con periodi equispaziati

$$\omega = \frac{L\int_{r_1}^{r_2} N\frac{dr}{r}}{\pi(n + \frac{l}{2} + \alpha_g)} \tag{5.18}$$

III Problema inverso e accuratezza parametri del modello solare.

Considero la soluzione del problema inverso: come ricavare informazioni sulla struttura solare dalle frequenze osservate.

Per quanto riguarda l'inversione asintotica, indipendente dal modello ma afflitta da errori sistematici o differenziale, dipendente da un procedimento di linearizzazione attorno ad un modello ma che riduce in parte l'errore, in questa tesi considero la forma elementare basata sull'inversione della legge di Duvall.

Il punto di partenza delle tecniche di inversione non asintotiche sono le differenze tra le frequenze dei modi solari osservati e quelli predetti da un modello solare, e le autofunzioni di un modello solare combinate in opportune funzioni dette kernel attraverso cui si mettono in relazione le differenze tra una coppia di variabili indipendenti, per esempio (ρ, c^2), e differenze nelle frequenze.

Si puó cosí verificare la struttura prevista dal modello solare standard tramite una misura indipendente di d_{cz}, Y_{Ph}, ρ_b e $c_s(r)$, apportare migliorie alla fisica dei modelli solari e restringere l'incertezza su altre grandezze dei modelli quali opacitá e $(\frac{Z}{X})_{in}$.

6. Inversione asintotica.

Si ricava, usando le espressioni asintotiche (5.1), il profilo radiale della velocitá indipendente dal modello solare e si determina l'effetto dell'evoluzione stellare sui modi p di basso ordine radiale. Considerando la differenza tra risultati relativi a diversi set di frequenze é possibile attenuare gli effetti degli errori sistematici dovuti alla descrizione asintotica.

6.1: Inversione della legge di Duvall

Considero i modi p di alte frequenze quindi é plausibile trascurare N e la variazione del potenziale gravitazionale. Le approssimazioni fatte introducono errori sistematici: per i modi piú penetranti nell'interno solare la perturbazione del potenziale gravitazionale influenza sensibilmente $F(\frac{\omega}{L})$, per modi confinati vicino alla superficie α dipende da l.

6.1.1 Inversione velocitá del suono. Determinando sperimentalmente $F(\frac{\omega}{L}) = F(w)$ l'equazione (5.10) puó essere invertita analiticamente

$$r = R\text{exp}\{-\frac{2}{\pi}\int_{a_s}^{a}(w^{-2}-a^{-2})^{-\frac{1}{2}}\frac{dF}{dw}\,dw\} \tag{6.1}$$

dove $a = \frac{c_s}{r}$.

6.1.2 Struttura dei modi penetranti nel core stellare Per modi di basso grado é possibile espandere al primo ordine l'integrale nella (5.10)

$$F(w) = \int_{r_t}^{R}\sqrt{1-\frac{c_s^2}{w^2r^2}}\,\frac{dr}{c_s} \approx \int_0^R \frac{dr}{c_s} - w^{-1}\frac{\pi}{2} \tag{6.2}$$

ed esprimere la legge di Duvall tramite

$$\nu_{nl} = \frac{\omega_{nl}}{2\pi} \approx (n + \frac{l}{2} + \frac{1}{4} + \alpha)\Delta\nu \tag{6.3}$$

con $\Delta\nu = [\int_0^R \frac{dr}{c_s}]^{-1}$.

La deviazione dalla (6.3) fornisce informazioni sull'evoluzione chimica del core di fusione: infatti estendendo ancora l'espansione di (5.10) si ha una misura della variazione di c nel core della stella

$$d_{nl} = \nu_{nl} - \nu_{n-1,l+2} \approx -(4l+6)\frac{\Delta\nu}{4\pi^2\nu_{nl}}\int_0^R \frac{dc_s}{dr}\frac{dr}{r} \tag{6.4}$$

La velocitá del suono é ridotta a causa dell'aumentare di μ durante la fusione di H in He durante l'evoluzione stellare: il centro solare é un minimo locale per la velocitá del suono e quindi, essendo il gradiente della velocitá del suono positivo, la parte centrale da un contributo sempre piú negativo in (6.4) con l'evolversi della stella.

6.1.3 DUVALL LINEARIZZATA Introducendo nella relazione di Duvall (5.9) le differenze tra le grandezze relative a due modelli solari o modello solare e freuquenze osservate ottengo

$$S_{nl}\frac{\delta\omega_{nl}}{\omega_{nl}} \approx H_1(\frac{\omega_{nl}}{L}) + H_2(\omega_{nl}),\ S_{nl} = \int_{r_t}^{R}(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega_{nl}^2})^{-\frac{1}{2}}\frac{dr}{c} - \pi\frac{d\alpha}{d\omega} \tag{6.5}$$

dove ho definito

$$H_1(w) = \int_{r_t}^{R}(1-\frac{c^2}{r^2w^2})^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta_r c}{c}\frac{dr}{c},\ H_2(\omega) = \frac{\pi}{\omega}\delta\alpha(\omega) \tag{6.6}$$

che possono essere ottenute separatamente attraverso fitting dei dati sperimentali.

Dalla rozza approssimazione $\frac{\delta\omega}{\omega} \approx \frac{\int_{r_t}^{R}\frac{\delta_r c_s}{c_s}\frac{dr}{c_s}}{\int_{r_t}^{R}\frac{dr}{c_s}}$ si vede che le differenze nella velocitá del suono nelle varie regioni influiscono sulle differenze nelle frequenze con un peso dato dal tempo impiegato da un'onda sonora ad attraversare la regione: le differenze nella regione vicino alla superficie dove c_s é minore hanno un effetto relativamente grande sulle differenze di frequenza.

Una volta determinato H_1 le differenze nel profilo radiale di c_s sono determinate tramite

$$\frac{\delta_r c_s}{c_s} = -\frac{2a}{\pi}\frac{d}{d\ln r}\int_{a_s}^{a}(a^2-w^2)^{-\frac{1}{2}}H_1(w)\,dw \tag{6.7}$$

La funzione H_2 é determinata dalla regione sotto la fotosfera. J Christensen-Dalsgaard e Hernández, 1992, analizzando la relazione tra $H_2(\omega)$ e le differenze in $c_s(r)$ e Γ_1 nelle regioni esterne, hanno visto che discrepanze piú vicino alla superficie generano una componente lentamente oscillante in $H_2(\omega)$ e la "frequenza" aumenta con l'aumentare della profonditá. É inoltre possibile indagare l'andamento di Γ_1 nella regione di seconda ionizzazione di He e piú in generale il comportamento di $H_2(\omega)$ nelle zone di ionizzazione di H e He consente un'analisi dell'equazione di stato e determinazione dell'abbondanza di elio nella zona convettiva.

7. Inversione non asintotica.

La soluzione del problema inverso per il sistema completo di equazioni si basa sulla linearizzazione delle variazioni attorno ad un modello di cui siano calcolabili le autofunzioni del vettore moto perturbato $\vec{\xi}$: il problema é espresso matematicamente da (7.2). Faccio l'esempio della correzione alle frequenze dei modi causata dalla rotazione.

7.1: Principio variazionale

Riscrivo l'equazione del moto linearizzata (4.2) nella forma

$$-\omega^2\delta\vec{r} = \frac{1}{\rho}\nabla p' - \vec{g}' - \frac{\rho'}{\rho}\vec{g} = L(\delta\vec{r}) \tag{7.1}$$

Chandrasekhar, 1964 ha dimostrato che (7.1) costituisce un problema agli autovalori hermitiano per condizioni ai bordi di pressione e densitá nulle.

Non essendo possibile misurare le autofunzioni delle oscillazioni lineari adiabatiche per il Sole devo linearizzare il problema attorno ad un modello solare per cui siano calcolabili mentre le oscillazioni di un altro modello o del Sole stesso sono descritte da $(L+\delta L)(\xi+\delta\xi) = -(\omega+\delta\omega)^2(\xi+\delta\xi)$. La variazione delle frequenze é determinata da

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\int_V \rho\vec{\xi}\delta L\vec{\xi}\,d^3x}{2\omega^2\int_V \rho\vec{\xi}\cdot\vec{\xi}d^3x} \tag{7.2}$$

dove $\vec{\xi} = \delta\vec{r}$ é autovettore (perturbazione lagrangiana) del problema agli autovalori (7.1).

7.2: Rotazione.

Il Sole é un rotatore lento quindi posso considerare la correzione un effetto lineare, al primo ordine. Il campo di velocitá in coordinate sferiche é $\vec{v_0} = (0,0,r\Omega\sin\theta) = \vec{\Omega}\wedge\vec{r}$ dove il vettore velocitá angolare é funzione di r e θ

$$\overrightarrow{\Omega(r,\theta)} = (\Omega(r,\theta)\cos\theta, -\Omega(r,\theta)\sin\theta, 0) \tag{7.3}$$

In assenza di moti macroscopici il termine d'inerzia é $\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$, mentre in caso di rotazione diventa $\rho_0 (\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v_0} \cdot \vec{\nabla})^2 \vec{\xi}$ e, considerando il termine dovuto alla rotazione come una piccola correzione alle frequenze dei modi $\omega_{(l,m)} + \Delta\omega_{(l,m)}$, l'equazione del moto diventa

$$\rho_0(\omega_\alpha^2 + 2\omega_\alpha \Delta\omega_\alpha)\vec{\xi} = \nabla P_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}\nabla P_0 + \rho_0 \nabla \Phi_1 + 2i\omega_\alpha \rho_0 (\vec{v_0} \cdot \vec{\nabla})\vec{\xi} \tag{7.4}$$

equazione del moto al primo ordine nella perturbazione, con $\alpha = (l, m)$.

Abbiamo

$$\Delta\omega_\alpha = \frac{i\int \rho_0 \xi_\alpha^* (\vec{v_0} \cdot \vec{\nabla})\xi_\alpha}{\int \rho_0 \xi_\alpha^* \xi_\alpha} = \frac{-m\int \rho_0 \Omega \xi_\alpha^* \xi_\alpha \, dV + i \int \rho_0 \xi_\alpha^* (\vec{\Omega} \wedge \vec{\xi_\alpha}) \, dV}{\int \rho_0 \xi_\alpha^* \xi_\alpha} \tag{7.5}$$

Il problema di trovare $\Omega(r, \theta)$ dalla differenza $\Delta\omega_\alpha$ é lineare in Ω quindi $\Delta\omega_\alpha \propto \Omega$. Per determinare quindi la rotazione dobbiamo conoscere l'autovalore ξ_α dello stato imperturbato. Per rotazione puramente radiale $\Omega(r)$ la relazione tra lo splitting delle frequenze e la rotazione é

$$\Delta\omega_\alpha = -m \frac{\int_0^{R_\odot} \rho_0 \Omega \{|\xi_r - \xi_h|^2 + [l(l+1) - 2]|\xi_h|^2\} r^2 \, dr}{\int_0^{R_\odot} \rho_0 \{|\xi_r|^2 + l(l+1)|\xi_h|^2\} r^2 \, dr} = \int_0^{R_\odot} K_\alpha(r)\Omega(r) \, dr \tag{7.6}$$

La velocitá angolare contribuisce a $\Delta\omega_\alpha$ negli strati in cui ξ_α é apprezzabile. Nel caso di rotazione dipendente solo da r si ha che $\Delta\omega_\alpha$ é lineare in m: ho $2l + 1$ frequenze equispaziate.

Le osservazioni della superficie mostrano una dipendenza dalla co-latitudine

$$\frac{\Omega(\theta)}{2\pi} = 451.5 \, \mathrm{nHz} - 65.3 \, \mathrm{nHz} \cos^2\theta - 66.7 \, \mathrm{nHz} \cos^4\theta$$

legge soggetta a discrepanze e variazioni temporali.

Per investigare la dipendenza $\Omega(r, \theta)$ devo considerare le $2l + 1$ frequenze: latitudinal shear causa una deviazione da frequenze equispaziate.

7.3: Correzioni struttura idrostatica.

Determino le differenze tra le frequenze osservate e quelle relative ad un modello, $\delta\omega_{nl} = \Omega_\odot - \Omega_{Mod}$, e le differenze nella stratificazione idrostatica tramite l'inversione per le variabili (ρ, c^2)

$$\frac{\delta\omega_{nl}}{\omega_{nl}} = \int_0^R [K_{c^2,\rho}^{nl}(r)\frac{\delta_r c^2}{c^2}(r) + K_{\rho,c^2}^{nl}(r)\frac{\delta_r \rho}{\rho}(r)] \, dr + I_{nl}^{-1} F_{Surf}(\omega_{nl}) + \sigma_i \tag{7.7}$$

dove σ_i é l'incertezza sulle frequenze osservate e

$$\tag{7.8}$$

$$\frac{\delta_r c^2}{c^2}(r) = \frac{[c_\odot^2(r) - c_{mod}^2(r)]}{c^2(r)}, \; \frac{\delta_r \rho}{\rho}(r) = \frac{[\rho_\odot(r) - \rho_{mod}(r)]}{\rho(r)} \tag{7.9}$$

I kernel K_Q^j dipendono dalle autofunzioni del modello, il termine $E_{nl}^{-1} F_{Surf}(\omega_{nl})$, con $E_{nl} = \int_V |\delta\vec{r}|^2 \rho \, dV$, é una correzione dovuta alle differenti condizioni fisiche che si incontrano vicino alla superficie: i modi con basse frequenze sono riflessi piú in profonditá a $\omega = \omega_c$ e quindi sono meno influenzati dagli strati superficiali.

Per esplicitare la relazione linearizzata tra le differenze nelle grandezze ρ, g, P, c^2 e le differenze nelle frequenze si scrive

$$\delta L\vec{\xi} = \nabla(\delta c^2 \nabla \cdot \vec{\xi} + \delta\vec{g} \cdot \vec{\xi}) + \nabla(\frac{\delta\rho}{\rho})c^2 \nabla \cdot \vec{\xi} + \frac{1}{\rho}\nabla\rho\delta c^2 \nabla\vec{\xi} + \delta\vec{g}\nabla \cdot \vec{\xi} - G\nabla \int_V \frac{\nabla \cdot (\delta\rho\xi)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \, d^3x' \tag{7.10}$$

che sostituita in (7.2) porta a

$$F_{Surf}(\omega) - \frac{1}{2\omega^2}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = E_{nl}\frac{\delta\omega}{\omega} \tag{7.11}$$

con

$$\delta g(r) = \frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r \delta\rho(s)s^2\,ds,\; I_1 = -\int_0^R \rho(\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi})^2\delta c^2 r^2\,dr \tag{7.12}$$

$$I_2 = \int_0^R \xi_r[\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} + \nabla\cdot(\rho\vec{\xi})]\delta g r^2\,dr,\; I_3 = \int_0^R \rho c^2\xi_r\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\delta\rho}{\rho})r^2\,dr \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned} I_4 = &\frac{4\pi G}{2l+1}\int_0^R \nabla\cdot(\rho\vec{\xi})r^2\,dr[\frac{1}{r^{l+1}}\int_0^r s^{l+2}(\rho\nabla\cdot\vec{\xi} - \rho\frac{d\xi_r}{ds} - \frac{l+2}{s}\rho\xi_r)\frac{\delta\rho}{\rho}\,ds \\ &+ r^l\int_r^R \frac{1}{s^{l-1}}(\rho\nabla\cdot\vec{\xi} - \rho\frac{d\xi_r}{ds} - \frac{1-l}{s}\rho\xi_r)\frac{\delta\rho}{\rho\,ds}] \end{aligned} \tag{7.14}$$

Normalizzazione?

Per distinguere gli effetti dovuti alla non corretta descrizione fisica dei modi vicino alla superficie, $r > 0.95R_\odot$, cui sono piú sensibili i modi di l elevato, si introduce il fattore $Q_{nl} = \frac{E_{nl}}{E^0_{nl}}$.

Nel caso l'entitá delle correzioni a ρ e c^2 non giustifichi l'approssimazione lineare si ha un miglior accordo definendo la differenza tramite $\frac{\delta f}{f} = \frac{f-f_0}{\sqrt{ff_0}}$.

Le correzioni alle pressione si ottengono dall'equazione di equilibrio idrostatico (1.10)

$$\delta P = \int_r^R (g\delta\rho + \rho\delta g)\,dr \tag{7.15}$$

7.3.1 Inversione equazione di stato e composizione.

Per investigare la composizione é necessario usare l'equazione di stato per esplicitare $\Gamma_1(P,\rho,X_i)$ e, esprimendo $\delta_r c^2$ in termini di $\delta_r u = \delta_r(\frac{P}{\rho})$, $\delta_r\rho$, $\delta_r Y$ e $\delta_r\Gamma_1$, otteniamo una formula equivalente a (7.8):

$$\frac{\delta\omega_{nl}}{\omega_{nl}} = \int_0^R K^{nl}_{u,Y}(r)\frac{\delta_r u}{u}(r)\,dr + \int K^{nl}_{Y,u}(r)\delta_r Y\,dr + \int_0^R K^{nl}_{c^2,\rho}(r)(\frac{\delta\Gamma_1}{\Gamma_1})_{int}\,dr + I^{-1}_{nl}F_{Surf}(\omega_{nl}) \tag{7.16}$$

dove $(\delta\Gamma_1)_{int}$ é l'errore dovuto alle imprecisioni dell'equazione di stato a (P,ρ,X_i) fissati. La determinazione dell'abbondanza di elio nella regione convettiva é dovuta principalmente alla deviazione da $\Gamma_1 = \frac{5}{3}$ nella regione di seconda ionizzazione dell'elio.

Le differenze in U e ρ fra modelli solari sismologici e modelli solari standard sono al massimo pochi per cento.

[fig. 3 Castellani et al., 1999]

7.3.2 Tecniche di inversione numeriche.

Elenco alcune tecniche numeriche usate.

Minimi quadrati

Si parametrizzano le funzioni incognite $\frac{\delta_r c^2}{c^2}$, $\frac{\delta_r\rho}{\rho}$, F_{Surf}. Attraverso la tecnica dei minimi quadrati si ottengono i parametri e le correzioni. La funzione da minimizzare é

$$Y = (N - N_p)\chi^2 + \alpha N\int_0^1 (x\frac{d}{dx}\frac{\Delta u}{u})^2\,dx \tag{7.17}$$

con

(7.18)

$$\chi^2 = \frac{1}{N-N_p}\sum_{\alpha=1}^N (\frac{\Delta\nu_{obs} - \Delta\nu_{fit}}{\sigma})^2_\alpha \tag{7.19}$$

e N indica il numero totale di modi j, N_p il numero di parametri da determinare, $\Delta\nu_{fit}$ contiene le funzioni incognite opportunamente parametrizzate ed é dato da (7.16) o (7.8), σ é l'errore osservativo e α il parametro di regolarizzazione.

(7.20)

Subtractive Optimally Localized Averaging

Per determinare in generale la funzione $\frac{\delta f_1(r)}{f_1(r)}$ scelgo i $c_i(r_0)$ tali che $\sum c_i(r_0)\frac{\delta\omega_i}{\omega_i}$ fornisca una media del valore di $\frac{\delta f_1(r)}{f_1(r)}$ in $r = r_0$:

$$\sum_i c_i(r_0)\frac{\delta\omega_i}{\omega_i}=\int_0^R\sum_i c_i(r_0)K^i_{1,2}(r)\frac{\delta f_1(r)}{f_1(r)}\,dr+\int_0^R\sum_i c_i(r_0)K^i_{2,1}(r)\frac{\delta f_2(r)}{f_2(r)}\,dr+\sum_i c_i(r_0)\frac{F_{Surf}(\omega_i)}{\omega_i}$$

Il primo termine approssima il valore di $\frac{\delta f_1}{f_1}$ pesato dal kernel $\mathscr{K}(r,r_0)=\sum_i c_i(r_0)K^i_{1,2}(r)$, il secondo tiene conto dell'influenza che hanno le discrepanze della seconda funzione su quelle della funzione che abbiamo scelto di invertire pesate da $\mathscr{L}_{21}(r_0,r)=\sum_i c_i(r_0)K^i_{21}(r)$, il terzo é il termine di superficie: i coefficienti $c_i(r_0)$ sono scelti in maniera da riprodurre la funzione target, minimizzare la contaminazione delle $\frac{\delta f_2}{f_2}$ via $\mathscr{L}_{21}$ e il rumore.

I parametri si trovano minimizzando

$$\int(\sum_i c_iK^i_{12})^2\,dr+\beta\int(\sum_i c_iK^1_{21})^2\,dr+\mu\sum_{ij}c_ic_jE_{ij}$$

β é un parametro per il contributo del secondo termine, E é una matrice che rappresenta le incertezze sulle frequenze osservate.

Illustro la tecnica SOLA per determinare $\frac{\delta_r c^2}{c^2}$: si formano delle combinazioni lineari di $\frac{\delta\omega_i}{\omega_i}$ pesate da coefficienti $c_i(r_0)$ tali che $\frac{\delta c^2}{c^2}$ sia centrato attorno r_0 e che gli altri termini in (7.8) siano soppressi, queste compongo un averaging kernel $\mathscr{K}_{c^2,\rho}(r_0,r)=\sum_i c_i(r_0)K^i_{c^2,\rho}(r)$, con $\int_0^R\mathscr{K}(r_0,r)\,dr$. La natura precisa della localizzazione é determinata da una funzione target la cui larghezza é anch'essa parametro del fit.

Determino i varii coefficienti minimizzando l'espressione

$$\int_0^R[\mathscr{K}_{c^2,\rho}(r_0,r)-\mathscr{T}(r_0,r)]^2\,dr+\beta\int_0^R\mathscr{G}_{\rho,c^2}(r_0,r)\,dr+\mu\sum_i\sigma_ic_i(r_0)c_j(r_0)\tag{7.21}$$

$$\mathscr{G}_{\rho,c^2}(r_0,r)=\sum_i c_i(r_0)K^i_{\rho,c^2}(r)\tag{7.22}$$

il kernel cross-term contralla i contributi indesiderati di $\frac{\delta_r\rho}{\rho}$

dove $i=(n,l)$ e σ_i é l'errore su $\frac{\delta\omega_i}{\omega_i}$.

7.4: Vincoli al modello solare: modello solare sismologico.

Tramite le tecniche di inversione si misurano, anche se in termini di correzioni ad un modello, grandezze dell'interno solare che permettono un vaglio accurato dei modelli solari.

Indico con $Q(P)$ e $Q_\odot$ i valori di una grandezza Q determinati tramite un modello solare, funzione dei parametri del modello, e risultanti dalle correzioni sismologiche a quest ultimi

$$Q_\odot=Q(P)+q(\omega)$$

L'incertezza su $Q_\odot$ dipende dall'errore sulle frequenze, la procedura di inversione e regolarizzazione e il modello di partenza.

7.4.1 Modello solare sismologico

Oltre a determinare il valore sismologico corretto delle grandezze meccaniche del modello solare si puó stabilire il range dei parametri del SSM compatibili con le frequenze osservate: si approssima localmente una dipendenza della grandezza Q dai parametri della forma $\frac{Q}{Q_{MSS}}=(\frac{P}{P_{MSS}})^{\alpha_{QP}}$ quindi si determina il range dei parametri $p_i=\frac{P^i}{P^i_{MSS}}$ compatibile con $\Omega_i\pm\Delta\Omega_i$, in particolare si usano le grandezze sismologiche piú accurate $Y_{ph},\ R_b,\ \rho_b$.

7.4.2 Zona convettiva

Le quantitá che caratterizzano la zona convettiva sono R_b, Y_{ph} e c_b,ρ_b .

- L'abbondanza di elio é determinata da varii autori in un range $Y_{ph}=0.226$ – 0.260.

  Il valore di Y_{ph} inferiore di 0.27 – 0.28, richiesto per calibrare i modelli con la luminositá attuale, conferma l'importanza della diffusione dell'elio verso il centro di gravitá.

- Fondo della zona convettiva.

  La regione radiativa ha stratificazione sub-adiabatica mentre a partire da $r=R_b$ si ha stratificazione quasi-adiabatica, $\Gamma_1\approx\frac{5}{3}$: $P\propto\rho^{\frac{5}{3}}$. Il gradiente di $c_{s\odot}(r)$ é discontinuo in R_b.

$$\frac{R_b}{R_\odot} = 0.710 – 0.716$$
$$c_b = 0.221\,\mathrm{Mm\,s^{-1}} – 0.225\,\mathrm{Mm\,s^{-1}}$$

ρ_b is an indipendent quantity ($\rho(x)$ in convective zone is determined up to a scaling factor): the helioseismological determination of ρ_b fixes such a factor.

$$\rho_b = 0.192\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

[Degl'Innoccenti et al., 1997 fig.3]

7.4.3 Regione intermedia con $0.2 < x < 0.65$.

(Vedi: Bahcall et al., 2004) Sotto la zona convettiva $\Gamma_1 = \frac{5}{3}$ con accuratezza migliore di 10^{-3}. L'inversione sismologica é accurata: $\frac{\Delta u}{u} \leq 5‰$. Dalla conoscenza di $u_\odot$ si ricava il profilo radiale della velocitá del suono tramite $c_s^2 = \Gamma_1 u$.

Le proprietá di questa regione sono determinate dall'opacitá e quindi, nella misura in cui é possibile combinare le differenze nei modi per cancellare il contributo della zona convettiva e considerare il contributo di $\frac{\delta L}{L}$ una piccola correzione, come accade fuori dalla regione di produzione di energia, é possibile studiare gli effetti delle variazioni di opacitá sui modi.

La quantitá da determinare é quindi

$$\frac{\delta\kappa}{\kappa} = \frac{\delta\kappa}{\kappa} + \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho}\right)_T + \frac{\delta T}{T}\left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T}\right)_\rho \tag{7.23}$$

dove $\frac{\Delta\kappa}{\kappa}$ rappresenta la correzione a $\kappa(\rho, T)$ a densitá, temperatura e composizione fissate.

[fig 11/12 Elliott, 1995]

7.4.4 Core di fusione $x < 0.2$.

Vedi Elliott e Kosovichev, 1998

Inversione di $(\delta\Gamma_1)_{int}$ mostra la necessitá di tener conto degli effetti relativistici per gli elettroni, che nel core solare hanno energia termica 1.35 kev approx 0.3% of m_e).

$$\frac{\delta\Gamma_1}{\Gamma_1} \approx -\frac{2+2X}{3+5X} T \tag{7.24}$$

dove T é in unitá di $\frac{m_e c^2}{k}$

[Elliott e Kosovichev, 1998 fig.3].

La temperatura centrale dipende principalmente dall'opacitá e dal rapporto $\frac{Z}{X}$. Nella regione centrale si determina

$$R_b = R_{b,MSS} z^{-0.046} k^{-0.0084} \tag{7.25}$$
$$\rho_b = \rho_{b,MSS} z^{0.47} k^{0.095} \tag{7.26}$$
$$Y_{ph} = Y_{ph,MSS} z^{0.31} k^{0.61} \tag{7.27}$$

dove k e z si riferiscono a opacitá e rapporto metalli/idrogeno.

Il valore ottimale dei parametri (k, z) si determina minimizzando

$$\chi^2(z,k) = \sum_i \left(\frac{Q_{\odot i} - Q_i(z,k)}{\Delta Q_i}\right)^2 \tag{7.28}$$

quindi per la temperatura centrale del Sole si ha

$$T_{ES} = T_{MSS}\left(\frac{Y_{ph\odot}}{Y_{ph,MSS}}\right)^{0.2} = 1.587 \times 10^7\,\mathrm{K} \tag{7.29}$$

Appendice

Descizione Euleriana e Lagrangiana

Convezione

Equazione di stato

Il teorema del viriale applicato ad un gas autogravitante descritto dall'equazione di stato dei gas perfetti monoatomici, $P = (\gamma - 1)\rho u$ con $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$, Per un'equazione di stato generale definisco il parametro ζ che mette in relazione l'energia interna u con la frazione di energia interna dovuta ai moti traslazionali

$$\zeta u = 3\frac{P}{\rho} \tag{7.30}$$

per un gas ideale monoatomico non relativistico

$$\zeta = 3(\gamma - 1) \xrightarrow{\gamma=\frac{5}{3}} 2 \tag{7.31}$$

Reazioni nucleari

PP cycle

Nell'interno stellare l'idrogeno é ionizzato quindi nel caso di emissione di positroni nel Q-valore é compreso un contributo per l'annichilamento e$^-$ e$^+$.

BOTTLE-NECK

$$^1H +^1 H \rightarrow^2 H + e^+ + \nu_e (Q = 1.44MeV)$$

Il neutrino ha spettro continuo con endpoint

$$E(\nu) = 0.42MeV$$

Reazione lenta:

$$\sigma \approx 10^{-33} b(KeV)$$
$$\approx 10^{-23} b(MeV)$$
$$R = \frac{1}{2} n_P^2 \langle \sigma v \rangle \approx 5 * 10^{-18} \text{reazioni}/\text{P}/s$$
$$\rho_\odot^c = 125 gr/cm^3 \quad (7.5 * 10^{25} P/cm^3)$$
$$T_\odot^c 15 * 10^6 K \Rightarrow \langle T_P \rangle \approx 1KeV$$

per le regioni centrali del sole.

DEUTERON COOKING UP TO HELIUM Il deutone viene trasformato rapidamente in isotopo di elio

$$^2H +^1 H \rightarrow^3 He + \gamma \quad (Q = 5.49MeV)$$

PRODUZIONE DI HE4: CICLO PP1 (SUN: 69%).

$$^3He +^3 He \rightarrow^4 He + 2^1H + \gamma \quad (Q = 12.86MeV)$$

BILANCIO ENERGETICO PP L'energia dei neutrini che escono dal core non scalda la fotosfera.

$$Q = 26.7MeV$$

Atomi neutri e annichilamento e$^-$ e$^+$.

TEMPI MEDI DI REAZIONE NELLA CATENA PP. Per le condizioni presenti nel sole:

Reazione	t_r
$^1H +^1 H \rightarrow^2 H + e^+ + \nu_e$	$7 * 10^9\, yr$
$^2H +^1 H \rightarrow^3 He + \gamma$	$4s$
$^3He +^3 He \rightarrow^4 He + 2^1H$	$4 * 10^5\, yr$
$^{12}C +^1 H \rightarrow^{13} N + \gamma$	$10^6\, yr$
$^{13}N \rightarrow^{13} C + e^+ + \nu_e$	$10\, min$
$^{13}C +^1 H \rightarrow^{14} N + \gamma$	$2 * 10^5\, yr$
$^{14}N +^1 H \rightarrow^{15} O + \gamma$	$< 3 * 10^7\, yr$
$^{15}O \rightarrow^{15} N + e^+ + \nu_e$	$2\, min$
$^{15}N +^1 H \rightarrow^{12} C +^4 He$	$10^4\, yr$

Altre diramazioni della catena p p dopo produzione He3.

CICLO HEP (SUN: 0.0001%).

$$^3He +^1 H \rightarrow^4 He + e^+ + \nu_e \quad (Q = 19.28MeV)$$
$$E_\nu^{max} = Q - m_e c^2 = 18.77MeV$$

PRODUZIONE BE7 (SUN: 31%).

$$^3He +^4 He \rightarrow_4^7 Be + \gamma$$

da cui seguono 2 diramazioni:

Ciclo PP2 (Sun: 99.7%).
$^7_4Be + e^- \rightarrow^7_3 Li + \nu_e$
CE: decadimento a 2 corpi: neutrino monoenergetico

$$E(\nu) \approx 0.862 MeV$$
$$^7_3Li +^1 H \rightarrow 2^4He$$

Ciclo PP3 (Sun: 0.3%).
$^7_4Be +^1 H \rightarrow^8_5 B + \gamma$
$^8_5B \rightarrow^8_4 Be + e^+ + \nu_e$
Spettro energetico del neutrino continuo con endpoint

$$E(\nu) = 14 MeV$$
$$^8_4Be \rightarrow 2^4He$$

Energia irradiata in neutrini

	$Q_{eff} = Q - \langle E_\nu \rangle (MeV)$	Perdita in neutrini
PP1	$= 26.2$	2%
PP2	$= 25.66$	4%
PP3	$= 19.17$	28%

Ciclo CNO

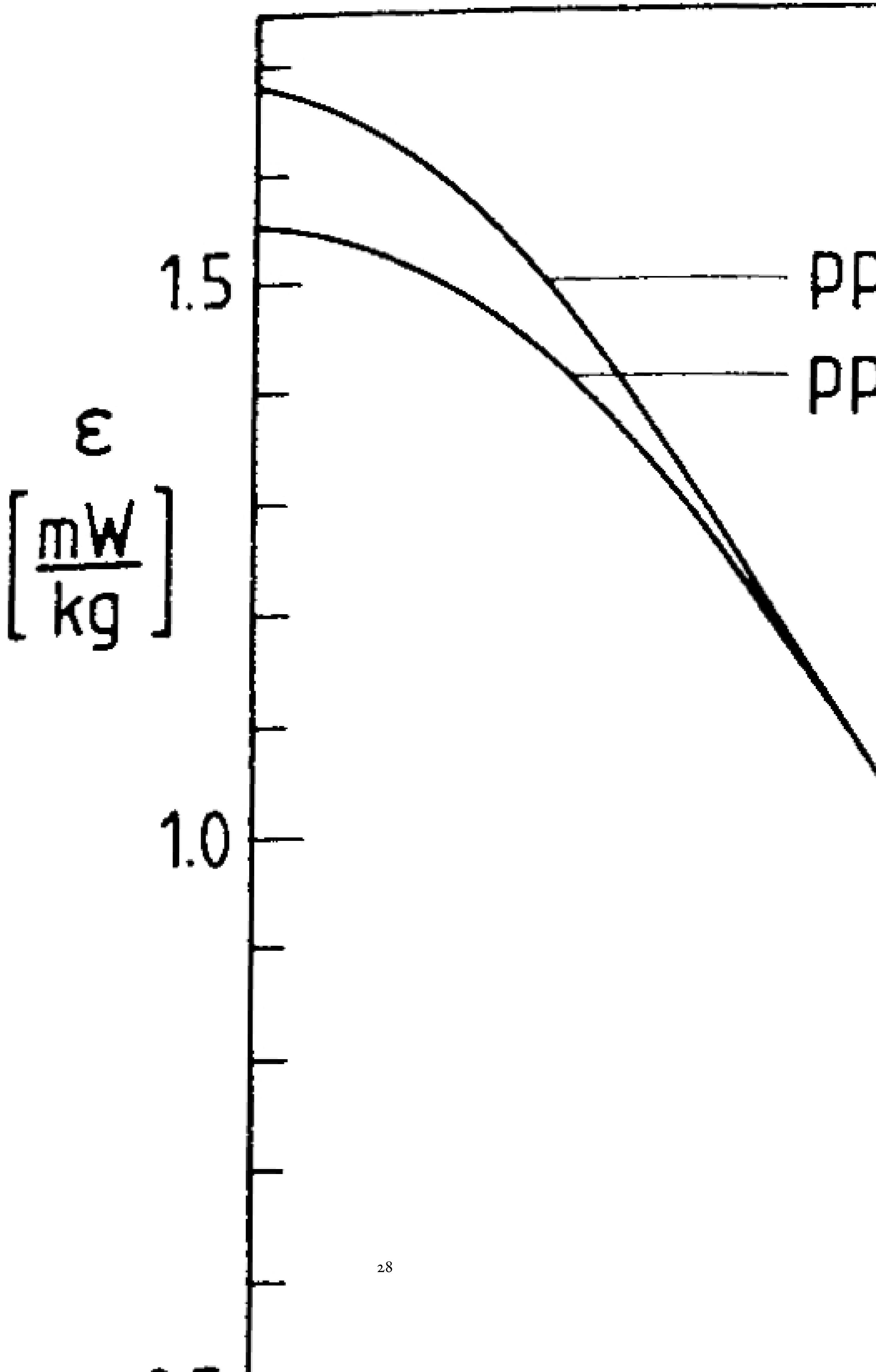
Procede con maggiore velocitá perché non é presente il bottleneck $H + H \rightarrow D$ ma la barriera coulombiana per la fusione dei nuclei é 6-7 volte piú elevata: efficiente ad alte temperature.

$$^{12}_6C +^1 H \rightarrow^{13}_7 N + \gamma$$
$$^{13}N \rightarrow^{13}_6 C + e^+ + \nu$$
$$^{13}C +^1 H \rightarrow^{14}_7 N + \gamma$$
$$^{14}_7N +^1 H \rightarrow^{15}_8 O + \gamma$$
$$^{15}_8O \rightarrow^{15}_7 N + e^+ + \gamma$$
$$^{15}_7N +^1 H \rightarrow^{12}_6 C +^4_2 He$$

Processo efficace:
$4^1H \rightarrow^4 He + 2e^+ + 2\nu_e$ uguale alla catena PP, stesso Q-valore.
L'energia generata per unitá di massa é

$$\epsilon = \sum Q'_{ik} r_{ik} \tag{7.32}$$

con Q'_{ij} energia liberata per reazione.


1.5
1.0
ε
[mW/kg]
PP
PP

Bibliografia

Bahcall, John N, Aldo M Serenelli e Marc Pinsonneault (2004). «How accurately can we calculate the depth of the solar convective zone?» In: *The Astrophysical Journal* 614.1, p. 464.

Castellani, V et al. (1999). «Helioseismology, solar models and neutrino fluxes». In: *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements* 70.1, pp. 301–314.

Chandrasekhar, S. (1964). «A General Variational Principle Governing the Radial and the Non-Radial Oscillations of Gaseous Masses.» In: *ApJ* 139, p. 664. DOI: 10.1086/147792.

Christensen-Dalsgaard, J (2002). «Helioseismology». In: *arXiv preprint astro-ph/0207403*.

Christensen-Dalsgaard, J e F Pérez Hernández (1992). «The phase function for stellar acoustic oscillations–I. Theory». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 257.1, pp. 62–88.

Christensen-Dalsgaard, Jørgen (1997). «Lecture notes on stellar oscillations». In:

Claverie, A et al. (1979). «Solar structure from global studies of the 5-minute oscillation». In: *Nature* 282, pp. 591–594.

Cowling, TG (1941). «The non-radial oscillations of polytropic stars». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 101, p. 367.

Degl'Innoccenti, S et al. (1997). «Helioseismology and standard solar models». In: *Astroparticle Physics* 7.1, pp. 77–95.

Deubner, F-L (1975). «Observations of low wavenumber nonradial eigenmodes of the Sun». In: *Astronomy and Astrophysics* 44, pp. 371–375.

Duvall Jr, TL (1982). «A dispersion law for solar oscillations». In: *nature* 300, p. 242.

Elliott, JR (1995). «Opacity determination in the solar radiative interior». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 277.4, pp. 1567–1579.

Elliott, JR e AG Kosovichev (1998). «Relativistic Effects in the Solar Equation of State». In: *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*. Vol. 418, p. 453.

Gough, DO e NO Weiss (1976). «The calibration of stellar convection theories». In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 176.3, pp. 589–607.

Gough, Douglas e Juri Toomre (1991). «Seismic observations of the solar interior». In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 29, pp. 627–685.

Leibacher, JW e RFi Stein (1971). «A new description of the solar five-minute oscillation». In: *Astrophysical Letters* 7, pp. 191–192.

Leighton, Robert B, Robert W Noyes e George W Simon (1962). «Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report.» In: *The Astrophysical Journal* 135, p. 474.

Prandtl, Ludwig (1925). «Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz». In: *Z. Angew. Math. Mech* 5.2, pp. 136–139.

Stix, Michael (1991). «The Sun. an Introduction». In: *The Sun. An Introduction, XIII, 390 pp. 192 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library* 1.

Ulrich, Roger K (1970). «The five-minute oscillations on the solar surface». In: *The Astrophysical Journal* 162, p. 993.

Vitense, Erika (1953). «Die Wasserstoffkonvektionszone der Sonne. Mit 11 Textabbildungen». In: *Zeitschrift fur Astrophysik* 32, p. 135.

Wambsganss, J (1988). «Hydrogen-helium-diffusion in solar models». In: *Astronomy and Astrophysics* 205, pp. 125–128.