Capítulo 1

Método de Euler Explícito/progresivo

Notación: $[s]$= parte entera de s = $\text{máx}\{k \in \mathbb{Z}/k \leq s\}$.
Dado $h > 0$, consideramos en $[a, b]$ el conjunto de puntos uniformemente espaciados

$$x_n = a + nh,\ \ n = 0, 1, ..., N,\ \ N = \left[\frac{b-a}{h}\right]$$

$$x_0 = a,\ \ x_n \in [a, b],\ \ n = 0, ..., N \quad 0 \leq b - x_N < h \qquad \left(x_N = b \Leftrightarrow \frac{b-a}{h} \in \mathbb{Z}\right)$$

Vamos a aproximar los valores de la solución exacta $y = y(x)$ del (PVI) en los puntos x_n por vectores $y_n \in \mathbb{R}^m$ generados por el método numérico, $n = 0, ..., N$

Notación

- $y(x_n) \in \mathbb{R}^m$ – valor de la solución exacta en x_n
- $y_n \in \mathbb{R}^m$ – aproximación construida por el método numérico
- $h > 0$ – longitud de paso

Queremos que $y_n \approx y(x_n)$, o lo que es lo mismo, $\text{lím}_{h\to 0^+}\left(\text{máx}_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\|\right) = 0$

1.1. Motivación

1.1.1. Obtención del método mediante derivación numérica

La solución exacta $y = y(x)$ del (PVI) cumple:

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \Rightarrow y'(x_n) \overset{\text{h pequeño}}{\approx} \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

Así pues: $\dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx f(x_n, y(x_n))$

1.1.2. Obtención del método mediante integración numérica

La solución exacta $y = y(x)$ del (PVI) cumple

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(s)ds = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s))ds$$

Aproximamos $f(s, y(s)) \approx f(x_n, y(x_n)) \quad \forall s \in [x_n, x_{n+1}]$

Esto equivale a usar la fórmula del rectángulo izquierdo: $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} g'(s)ds \approx g(\alpha)(\beta - \alpha)$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx hf(x_n, y(x_n)) \Rightarrow y_{n+1} - y_n \approx hf(x_n, y_n)$$

1.2. Esquema del método

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n), \quad n = 0, ..., N-1 \\ y_0 = \eta + \bar{\eta}, \quad \bar{\eta} \text{ perturbación de la ci} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 = \eta + \bar{\eta} \end{cases}$$

Por lo general, la perturbación de la condición $\bar{\eta}$ será 0. No obstante, en las prácticas de la asignatura veremos como en algunos problemas nos es conveniente aplicar 2 veces el método de forma consecutiva para poder emplear 2 longitudes de paso distintas. En ese caso la condición inicial de la segunda iteración está perturbada pues es la aproximación obtenida por la primera.

Problema continuo	**Problema discreto**
▪ PVI	▪ Conjunto finito
▪ $x \in [a, b]$	▪ $\{x_n\} \subset [a, b] (x_n = a + nh)$
▪ Solución exacta $y = y(x)$ $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$	▪ Solución numérica $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^m$
	▪ El problema (P_h) depende de h.

El método de Euler Explícito es un método explícito, es decir, calculado el y_n, se puede calcular el y_{n+1} sin necesidad de resolver ninguna ecuación o sistema de ecuaciones, como sí sucede en los métodos implícitos.

$$y_0 \Rightarrow y_1 \Rightarrow y_2 \Rightarrow ... \Rightarrow y_N$$

1.3. Interpretación geométrica

Para el caso escalar, el punto (x_{n+1}, y_{n+1}) se alcanza avanzando a partir del punto (x_n, y_n) a lo largo de la recta que tiene pendiente $f(x_n, y_n)$ y que pasa por (x_n, y_n) de modo que la variable x aumente en h $(h > 0)$

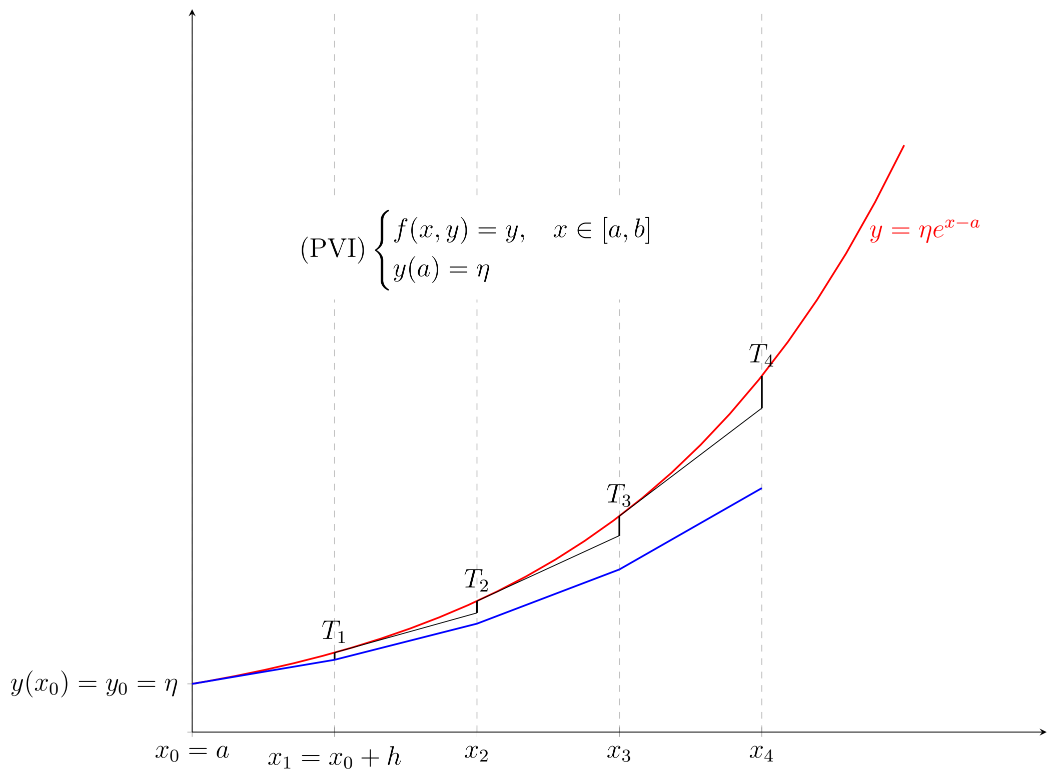


Figura 1.1: Interpretación geométrica de Euler Explícito

¡ATENCIÓN! Aunque en este ejemplo parezca que el error global es la suma de los errores locales de discretización, en general

$$|y(x_n) - y_n| \neq \sum_{i=1}^{n} T_i$$

Eso sucede únicamente cuando f dependa únicamente de x y no de y.

Para estudiar los métodos numéricos, estudiaremos 4 aspectos de los mismos:

- Consistencia: ¿Los errores locales de discretización tienden a cero?
- Estabilidad: ¿Soluciones que parten próximas permanecen próximas?
- Convergencia: ¿Las aproximaciones tienden a la solución exacta?
- Estabilidad numérica: ¿Soluciones exactas acotadas tienen soluc. numéricas acotadas?

Repaso de la fórmula de Taylor

1. **Con resto integral**

   Sea $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase $\mathcal{C}^{p+1}([a,b],\mathbb{R}^m)$, $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$.
   Entonces, $\forall \alpha, x \in [a,b]$, se tiene que:

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha) + (x-\alpha)\varphi'(\alpha) + \frac{1}{2!}(x-\alpha)^2\varphi''(\alpha) + ... + \frac{1}{p!}(x-\alpha)^p\varphi^{p)}(\alpha) + \mathcal{R}_p(x,\alpha),$$

$$\mathcal{R}_p(x,\alpha) = \frac{1}{p!}\int_\alpha^x (x-s)^p\varphi^{p+1)}(s)ds$$

2. **Resto en forma de Lagrange**

   En el caso escalar (m=1), es válida la forma de Lagrange del resto:

$$\mathcal{R}_p(x,\alpha) = \frac{1}{(p+1)!}(x-\alpha)^{p+1}\varphi^{p+1)}(\xi), \quad \xi \in \langle\alpha, x\rangle$$

O de Landau

Definición 1.3.0.1. *Sea $\varphi : (0,h_0) \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $p \in \mathbb{R}$*

- $\varphi(h) = O(h^p)$ [*φ es O grande de h^p*]

$$:\Leftrightarrow \exists \bar{h} \in (0,h_0),\ \exists c \geq 0 \text{ cte } / \ \|\varphi(h)\| \leq ch^p \quad \forall h \in (0,\bar{h})$$

- $\varphi(h) = o(h^p)$ [*φ es o pequeña de h^p*]

$$:\Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{\varphi(h)}{h^p} = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{\|\varphi(h)\|}{h^p} = 0\right)$$

Ejercicio 1.3.0.2. Probar las siguientes propiedades:

1. $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{o}(\mathbf{h}^\mathbf{p}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{O}(\mathbf{h}^\mathbf{p})$

$$\varphi(h) = o(h^p) :\Leftrightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{\|\varphi(h)\|}{h^p} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 \leq h < \delta \Rightarrow \frac{\|\varphi(h)\|}{h^p} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 \leq h < \delta \Rightarrow \|\varphi(h)\| \leq \varepsilon h^p$$

   Tomando $c = \varepsilon$ fijado, $\bar{h} = \delta$, se tiene que $\varphi(h) = O(h^p)$

2. $\mathbf{q} < \mathbf{p}$, $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{O}(\mathbf{h}^\mathbf{p}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{o}(\mathbf{h}^\mathbf{q})$

$$\varphi(h) = O(h^p) :\Leftrightarrow \exists \bar{h} \in (0,h_0],\ \exists c \geq 0 \text{ cte } / \ \|\varphi(h)\| \leq ch^p \quad \forall h \in (0,\bar{h})$$

$$\Rightarrow \frac{\|\varphi(h)\|}{h^p} \leq c \quad \forall h \in (0,h_0)$$

   En particular, consideremos $h \in (0,1)$: $0 \leq \dfrac{\|\varphi(h)\|}{h^p} \cdot h^{p-q} \leq ch^{p-q}$. Tomando límites:

$$0 \leq \lim_{h\to 0^+}\frac{\|\varphi(h)\|}{h^p} \cdot h^{p-q} \leq 0 \Rightarrow \varphi(h) = o(h^q) \quad \forall q \in \{1,...,p-1\}$$

1.4. Consistencia y orden de consistencia

El método de Euler Explícito se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - f(x_n, y_n) = 0 \quad \text{(Estamos aproximando la derivada)}$$

Esto nos invita a realizar la siguiente definición:

Definición 1.4.0.1. *Para n=1,...,N se definen los vectores τ_n de la siguiente forma:*

$$\tau_{n+1} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - f(x_n, y(x_n)), \;\; n = 0, ..., N-1$$

donde $y = y(x)$ denota una solución exacta de la EDO $y' = f(x, y)$.

Observación 1.4.0.2. τ_n depende de h y de y (solución exacta del PVI).

Definición 1.4.0.3 (Error local de discretización). *Definimos el error local de discretización (o error local de truncamiento) en x_{n+1} mediante:*

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}, \;\; n = 0, ..., N-1$$

partiendo de la hipótesis de localización (es decir, $y(x_n) = y_n$). En el caso del método de Euler Explícito, esto es:

$$T_{n+1} = h \cdot \tau_{n+1}$$

Justificación de las definiciones anteriores

Hipótesis de localización: Para entender esto de forma visual, acudamos a la figura 1.1. Para el cálculo de T_{n+1}, partimos de la solución exacta $y(x_n)$ y damos un paso con pendiente $f(x_n, y(x_n))$, que recordemos que en general es distinto de $f(x_n, y_n)$. Bajo la hipótesis de localización, T_{n+1} es el error cometido en x_{n+1}. En efecto:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + h\tau_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned}$$

Restando:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \underbrace{y(x_n) - y_n}_{\substack{\| \\ 0}} + h\underbrace{[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)]}_{\substack{\| \\ 0}} + T_{n+1}$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = T_{n+1}$$

Proposición 1.4.0.4 (Consistencia y orden)**.** *Sea $y = y(x)$ una solución exacta de la EDO $y' = f(x, y)$. Entonces:*

1. $\lim\limits_{h\to 0^+} \big(\max\limits_{1\le n\le N} \|\tau_n\|\big) = 0$
2. *Si además $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$,* $\quad \max\limits_{1\le n\le N} \|\tau_n\| = O(h)$

Demostración.

1. Recordemos que:

$$\tau_{n+1} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - f(x_n, y(x_n)),\ \ n = 0, 1, ..., N-1$$

Como $y = y(x)$ es solución exacta de la EDO $y' = f(x, y)$, $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$

Por tanto,

$$\tau_{n+1} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - y'(x_n),\ \ n = 0, 1, ..., N-1 \tag{EE1}$$

Como y es solución de $y' = f(x, y)$, $y \in \mathcal{C}^1([a, b])$

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(s)ds - y'(x_n) = \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \big(y'(s) - y'(x_n)\big)ds$$

$$\Rightarrow \|\tau_{n+1}\| \le \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \big\|y'(s) - y'(x_n)\big\|ds \le \max_{s\in[x_n,x_{n+1}]} \big\|y'(s) - y'(x_n)\big\|,\ \ n = 0, 1, ..., N-1$$

$$\Rightarrow \max_{1\le n\le N} \|\tau_n\| = \max_{0\le n\le N-1} \|\tau_{n+1}\| \le \max_{\substack{s,t\in[a,b]\\ |s-t|\le h}} \big\|y'(s) - y'(t)\big\| \xrightarrow[\substack{y'\,unif.\\ cont.en[a,b]}]{h\to 0^+} 0$$

2. Supongamos que $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Aplicamos la fórmula de Taylor con resto integral:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)y''(s)ds$$

Sustituimos esto en (EE1), obteniendo:

$$\begin{aligned}\tau_{n+1} &= \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)y''(s)ds \Rightarrow \|\tau_{n+1}\| \le \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)\big\|y''(s)\big\|ds \\ &\le \frac{M_2}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)ds\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)ds = \frac{1}{2}h^2$, obtenemos:

$$\|\tau_{n+1}\| \le \frac{M_2}{2}h$$

□

Observación 1.4.0.5. $y \in \mathcal{C}^2([a,b]) \Rightarrow \max\limits_{1\leq n\leq N} \|T_n\| = O(h^2)$

Observación 1.4.0.6. Si $y \in \mathcal{C}^p([a,b])$, $p > 3$, fijémonos en que $\|\tau_{n+1}\| = O(h)$ ya que tendremos siempre un término $O(h)$.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \underset{O(h^3)}{\underset{\parallel}{R_2}} \Rightarrow \tau_{n+1} = \frac{h}{2}y''(x_n) + O(h^2)$$

Definición 1.4.0.7. *Por cumplirse que* $\lim_{h\to 0^+} \max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| = 0$ *para toda solución* $y(\cdot)$ *de la EDO* $y' = f(x,y)$*, decimos que el método de Euler Explícito es* ***consistente con esa EDO****. Dado que esto se cumple para cualquier función f en las hipótesis (Hf), decimos que el método de Euler Explícito es* ***consistente***

Definición 1.4.0.8. *Por cumplirse que* $\max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| = O(h)$ *para toda solución* $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *de la EDO* $y' = f(x,y)$*, siendo f cualquier función que satisfaga (Hf), y cumplirse además que en algunas situaciones con* $y(\cdot)$ *regular se tiene* $\max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| \neq O(h^p)$*, con p>1, decimos que el método de Euler Explícito es* ***consistente de orden 1*** *o que tiene* ***orden 1 de consistencia***

1.5. Estabilidad

La estabilidad es la propiedad que garantiza que las soluciones de dos esquemas perturbados están próximas si los están las perturbaciones.

$$\text{Consistencia} \Leftrightarrow \max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| \xrightarrow{h\to 0^+} 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{N} \|T_n\| = h\sum_{n=1}^{N} \|\tau_n\| \leq hN \max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| \leq (b-a) \max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| \xrightarrow{h\to 0^+} 0$$

La consistencia implica que la suma de los errores locales de discretización es pequeña cuando h es pequeña. No obstante, esta propiedad no garantiza la convergencia ya que, como ya vimos en el apartado anterior,

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \neq \sum_{i=1}^{n+1} T_i.$$

Será el concepto de estabilidad el cual, unido al de consistencia, nos permita probar la convergencia. A continuación, presentamos un lema del que haremos uso en la siguiente proposición:

Lema 1.5.0.1 (Lema de Gronwall discreto)**.** *Sea* $\{\theta\}_{n=0}^N \subset \mathbb{R}$ *que satisfagan:*

$$\theta_{n+1} \leq \gamma\theta_n + \alpha_{n+1},\ \ n = 0, 1, ..., N-1. \tag{1}$$

Entonces:

$$\theta_n \leq \gamma^n\theta_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma^{n-i}\alpha_i,\ \ n = 0, ..., N \tag{2}$$

Demostración. Hagámoslo por inducción en n.

- Para $n = 1$, (2) se reduce a $\theta_1 \leq \gamma\theta_0 + \alpha_1$, que es (1) para $n = 0$.
- Supongamos ahora (2) cierto para $n - 1 \geq 0$ y probémoslo para n:

$$\begin{aligned}
\theta_n &\leq \gamma\theta_{n-1} + \alpha_n \\
&\leq \gamma\big(\gamma^{n-1}\theta_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\gamma^{n-1-i}\alpha_i\big) + \alpha_n \\
&= \gamma^n\theta_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\gamma^{n-i}\alpha_i + \alpha_n \\
&= \gamma^n\theta_0 + \sum_{i=1}^{n}\gamma^{n-i}\alpha_i
\end{aligned}$$

□

1.5.1. Esquemas perturbados

Sean $(\delta_0, \delta_1, ..., \delta_N)$, $(\delta_0^*, \delta_1^*, ..., \delta_N^*) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$ dos perturbaciones dadas y sean $(z_0, z_1, ..., z_N)$, $(z_0^*, z_1^*, ..., z_N^*)$ respectivamente las soluciones de los esquemas perturbados siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} = f(x_n, z_n) + \delta_{n+1}, \;\; n = 0, 1, ..., N-1 \\ z_0 = y_0 + \delta_0 = \eta + \bar{\eta} + \delta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1}^* - z_n^*}{h} = f(x_n, z_n^*) + \delta_{n+1}^*, \;\; n = 0, 1, ..., N-1 \\ z_0^* = y_0 + \delta_0^* = \eta + \bar{\eta} + \delta_0^* \end{cases}$$

La estabilidad es la propiedad que garantiza que las soluciones de dos esquemas perturbados están próximas si los están las perturbaciones:

Proposición 1.5.1.1 (Estabilidad)**.** *Con las notaciones anteriores, para todo $h > 0$ se cumple la siguiente acotación:*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|z_n - z_n^*\| \leq e^{L(b-a)}\left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h\sum_{i=1}^{N}\|\delta_i - \delta_i^*\|\right]$$

donde $L > 0$ es la constante de Lipschitz en las hipótesis (Hf)

Demostración. Si $N = 0$, la demostración es trivial. Por lo tanto, supongamos $N \geq 1$.

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= z_n + hf(x_n, z_n) + h\delta_{n+1}, \;\; n = 0, ..., N-1 \\
z_{n+1}^* &= z_n^* + hf(x_n, z_n^*) + h\delta_{n+1}^*, \;\; n = 0, ..., N-1
\end{aligned}$$

Restando:

$$z_{n+1} - z_{n+1}^* = z_n - z_n^* + h\big[f(x_n, z_n) - f(x_n, z_n^*)\big] + h(\delta_{n+1} - \delta_{n+1}^*),\ \ n = 0, ..., N-1$$

Aplicando la desigualdad triangular y la hipótesis (Hf):

$$\underbrace{\|z_{n+1} - z_{n+1}^*\|}_{\theta_{n+1}} \leq \underbrace{(1 + hL)}_{\gamma > 0}\underbrace{\|z_n - z_n^*\|}_{\theta_n} + \underbrace{h\|\delta_{n+1} - \delta_{n+1}^*\|}_{\alpha_{n+1}},\ \ n = 0, ..., N-1$$

Aplicando el lema 1, resulta:

$$\|z_n - z_n^*\| \leq (1 + hL)^n\|z_0 - z_0^*\| + h\sum_{i=1}^{N}(1 + hL)^{n-i}\|\delta_i - \delta_i^*\|,\ \ n = 1, ..., N$$

Como $1+hL > 1$, $(1+hL)^{n-i} \leq (1+hL)^{n-1} \leq (1+hL)^n$, $\ i = 1, ..., n$. Además, $z_0 - z_0^* = \delta_0 - \delta_0^*$. Por tanto:

$$\|z_n - z_n^*\| \leq (1 + hL)^n\left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h\sum_{i=1}^{N}\|\delta_i - \delta_i^*\|\right],\ \ n = 1, ..., N$$

Usando que $1 + x \leq e^x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$, se tiene que $1 + hL \leq e^{hL}$, con lo cual:

$$(1 + hL)^n \leq (e^{hL})^n = e^{nhL} = e^{L(x_n - a)}.$$

Por tanto:

$$\|z_n - z_n^*\| \leq e^{L(x_n - a)}\left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h\sum_{i=1}^{n}\|\delta_i - \delta_i^*\|\right],\ \ n = 1, ..., N$$

y eso implica que:

$$\max_{0 \leq n \leq N}\|z_n - z_n^*\| \leq e^{L(b-a)}\left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h\sum_{i=1}^{N}\|\delta_i - \delta_i^*\|\right]$$

como queríamos demostrar. □

Definición 1.5.1.2. *Por cumplirse la acotación de la proposición anterior, decimos que el método de Euler Explícito es* ***estable****.*

1.6. Convergencia

Se entiende por convergencia de un método numérico la garantía de que, al realizar un buen número de iteraciones (h suficientemente pequeño), la aproximación y_n terminan por acercarse cada vez más a la solución exacta $y(x_n)$.

Teorema 1.6.0.1 (de Convergencia). *Sea*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-y_n}{h} = f(x_n, y_n), \;\; n = 0, ..., N-1 \\ y_0 = \eta + \bar{\eta} \end{cases}$$

Supongamos que la perturbación de la condición inicial $\bar{\eta}$ es una función de h tal que

$$\lim_{h\to 0^+} \bar{\eta}(h) = 0$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\| \right) = 0$$

Demostración. La idea fundamental de la demostración es que $\{y(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ verifica un esquema perturbado con las perturbaciones dadas por τ_n.
La solución exacta $y = y(x)$ del (PVI) es

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

luego la solución de la esquema perturbado es

$$\begin{cases} \dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = f(x_n, y(x_n)) + \underset{\delta_{n+1}}{\underset{\|}{\tau_{n+1}}}, \;\; n = 0, ..., N-1 \\ y(x_0) = \eta = \eta + \bar{\eta} + \underset{\delta_0}{\underset{\|}{(-\bar{\eta})}} \end{cases}$$

El problema discreto puede verse como un esquema perturbado con perturbaciones nulas:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-y_n}{h} = f(x_n, y_n) + \underset{\delta^*_{n+1}}{\underset{\|}{0}}, \;\; n = 0, ..., N-1 \\ y_0 = \eta + \bar{\eta} + \underset{\delta^*_0}{\underset{\|}{0}} \end{cases}$$

En virtud de la estabilidad:

$$\max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\| \leq e^{L(b-a)} \left[\|\bar{\eta}(h)\| + h\sum_{i=1}^{N} \|\tau_i\| \right] \leq e^{L(b-a)} \left[\|\bar{\eta}(h)\| + hN \max_{1\leq n\leq N} \|\tau_i\| \right]$$

Por tanto:

$$\max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\| \leq e^{L(b-a)} \Bigg[\underbrace{\|\bar{\eta}(h)\|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{por hipótesis}}} + (b-a) \underbrace{\max_{1\leq n\leq N} \|\tau_i\|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{por consistencia}}} \Bigg]$$

Con lo cual:

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\max_{0\le n\le N}\|y(x_n)-y_n\|\right)=0$$

$\square$

Definición 1.6.0.2. *Por cumplirse el teorema anterior, se dice que el método de Euler Explícito es* ***convergente****.*

Observación 1.6.0.3. Supongamos que la solución exacta $y = y(x)$ del (PVI) es de clase $\mathcal{C}^2([a,b])$ y que $\bar{\eta}(h) = O(h)$. Entonces, en virtud de (EE1)

$$\max_{0\le n\le N}\|y(x_n)-y_n\|\le e^{L(b-a)}\left[ch+(b-a)\frac{M_2}{2}h\right]=\tilde{c}h\Rightarrow \max_{0\le n\le N}\|y(x_n)-y_n\|=O(h)$$

Por este motivo se dice que el método de Euler Explícito es **al menos convergente de orden 1**. Como además, en general con $y = y(x)$ regular se tiene que

$$\max_{0\le n\le N}\|y(x_n)-y_n\|\ne O(h^p),\ \ p>1,$$

se dice que el método de Euler es **convergente exactamente de orden 1**.

Observación 1.6.0.4. Supongamos que para un valor $x \in [a,b]$ queremos aproximar $y(x)$. Parece razonable forzar el $h > 0$ a tomar de forma que $x = x_n = a + nh$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con objeto de que $y_n \approx y(x_n) = y(x)$. Podemos considerar el límite:

$$\lim_{\substack{h\to 0^+\\ nh=x-a}} y_n(h)=\lim_{\substack{n\to +\infty\\ nh=x-a}} y_n(h)=\lim_{n\to+\infty} y_n(\tfrac{x-a}{h})$$

Se tiene que:

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\max_{0\le n\le N}\|y(x_n)-y_n\|\right)=0\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0^+\\ nh=x-a}} y_n(h)=y(x)\quad \forall x\in[a,b]$$

En efecto, dado $x \in [a,b]$. Consideramos $h > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ / $nh = x - a(\Leftrightarrow x = x_n)$

$$0\le\|y_n(h)-y(x)\|=\|y_n(h)-y(x_n)\|\le \max_{0\le j\le N}\|y_j(h)-y(x_j)\|\longrightarrow 0$$

1.7. Estabilidad numérica

El análisis anteriormente realizado muestra que si aproximamos correctamente las condiciones iniciales y consideramos un intervalo temporal fijo, podemos aproximar la solución en los nodos con precisión arbitraria. Bastará con tomar h suficientemente pequeño. No obstante, habrá situaciones en las que a efectos prácticos ese h sea demasiado pequeño (es decir, que los errores de redondeo terminando afectando de manera notable a los cálculos). Por otra parte, el estudio no dice nada sobre el comportamiento asintótico de $\{y_n\}$ cuando $n \to \infty$ con h fijo.

Por ello resulta interesante el estudio de la estabilidad numérica:

- método numéricamente estable → el método genera soluciones acotadas
- método numéricamente inestable → el método **NO** genera soluciones acotadas

En nuestro caso simplemente estudiaremos la familia de PVIs lineales, lo que justifica el nombre a continuación:

Estabilidad numérica lineal

El citado estudio se restringe a:

- problema escalar: $y' = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}$ (ecuación de Dahlquist)
- problema vectorial: $y' = Ay, A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ diagonalizable

1.7.1. Problema escalar

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & \lambda \in \mathbb{C} \\ y(a) = \eta, & \eta \in \mathbb{C} \end{cases}$$

La solución exacta es $y(x) = \eta e^{\lambda(x-a)} \Rightarrow |y(x)| = |\eta| e^{Re(\lambda)(x-a)}$. Supongamos $\eta \neq 0$, entonces:

- Si $Re(\lambda) > 0 \Rightarrow |y(x)| \nearrow +\infty$ exponencialmente cuando $x \longrightarrow +\infty$
- Si $Re(\lambda) = 0 \Rightarrow |y(x)| = |\eta| \quad \forall x \in [a, +\infty)$
- Si $Re(\lambda) < 0 \Rightarrow |y(x)| \searrow 0$ exponencialmente cuando $x \longrightarrow +\infty$

Así pues: $Re(\lambda) \leq 0 \Rightarrow y(x)$ acotada en $[a, +\infty)$

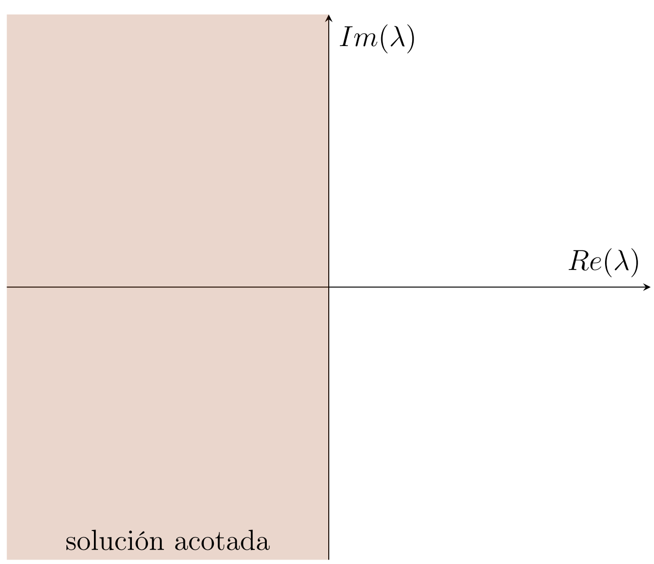


Figura 1.2: Región donde la solución exacta está acotada ($\mathbb{C}^-$)

Entonces se vuelve bastante pertinente la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones el método de Euler Explícito genera soluciones numéricas acotadas $\{y_n\}_{n=0}^{+\infty}$? Apliquemos el método a la ecuación de Dahlquist:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = \lambda y_n \Rightarrow y_{n+1} = (1+h\lambda)y_n,\ n \geq 0 \Rightarrow y_n = (1+h\lambda)^n y_0 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow |y_n| = |1+h\lambda|^n |y_0|$$

Supongamos $y_0 \neq 0$:

$$\{y_n\}_{n=0}^{+\infty} \text{ acotada} \Leftrightarrow |1+h\lambda|^n \text{ acotada} \Leftrightarrow |1+h\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{h}+\lambda\right| \leq \left|\frac{1}{h}\right| \Leftrightarrow \left|\lambda - (-\frac{1}{h})\right| \leq \frac{1}{h}.$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \overline{D\left(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right)},\ \text{siendo } \overline{D(c,r)} \text{ el disco cerrado de centro c y radio r}$$

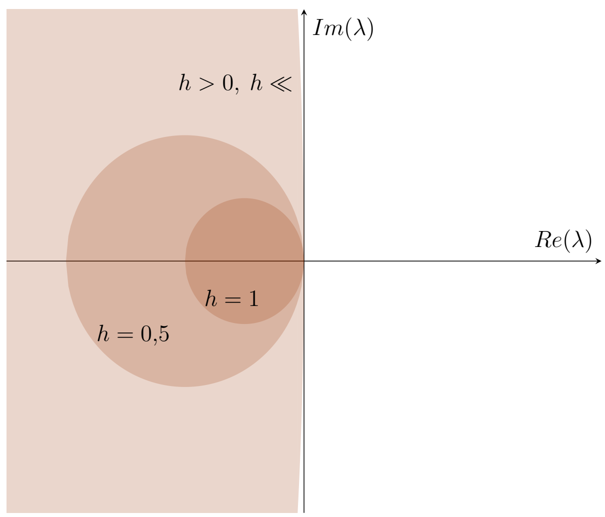


Figura 1.3: Región donde la solución numérica está acotada

Dado $h > 0$, la región de los valores $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\{y_n\}_{n=0}^{+\infty}$ está acotada es

$$R^{EE}(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ |1+h\lambda| \leq 1\} = \overline{D\left(-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right)}.$$

$R^{EE}(h)$ depende de h y es una región acotada $\forall h > 0$. Por lo tanto, se tiene que:

$$\forall h > 0,\ \mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C}/Re(\lambda) \leq 0\} \not\subset R^{EE}(h),$$

es decir,

$$\forall h > 0,\ \exists \lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) \leq 0 \ / \ \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ no está acotada.}$$

Recordemos que $y_{n+1} = (1+h\lambda) \cdot y_n$, por tanto, es pertinente dar la siguiente definición:

Definición 1.7.1.1. *Llamamos **función de estabilidad** o **factor de ampliación** del método de Euler Explícito A^{EE} a la siguiente función:*

$$A^{EE}(z) = 1 + z,\ z \in \mathbb{C}$$

Como salta a la vista, $y_{n+1} = A^{EE}(h\lambda) \cdot y_n$

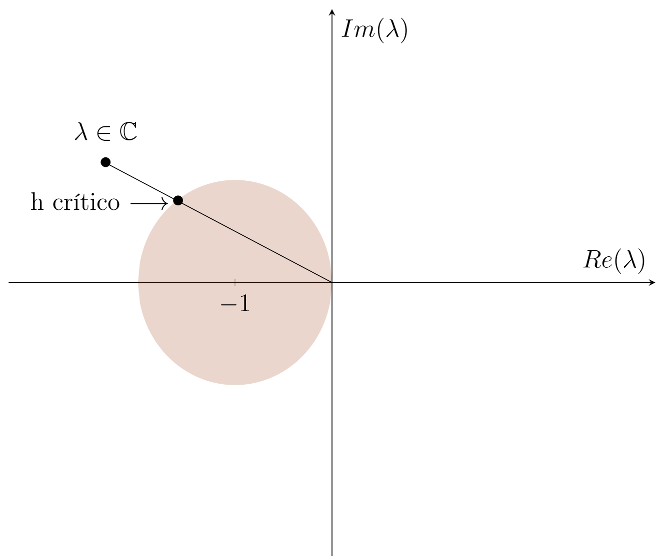
Definición 1.7.1.2. *Llamamos* ***región de estabilidad absoluta*** *o* ***región A-estable*** *a la región de* $\mathbb{C}$ *donde* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *está acotada:*

$$R^{EE} = \{z \in \mathbb{C} / |A^{EE}(z)| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} / |1+z| \leq 1\} = \overline{D(-1,1)}$$

Dado $h > 0$

$$\begin{aligned} R^{EE}(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} / |1+h\lambda| \leq 1\} = \{\lambda \in \mathbb{C} / |A^{EE}(h\lambda)| \leq 1\} &= \{\lambda \in \mathbb{C} / h\lambda \in R^{EE}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} / h\lambda \in \overline{D(-1,1)}\} \end{aligned}$$

En la práctica interesa, dado un $\lambda \in \mathbb{C}$, buscar los valores de $h > 0$ para los cuales hay estabilidad numérica, es decir, $h\lambda \in R^{EE}$



Si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda) < 0$, entonces para $h > 0$ suficientemente pequeño, $h\lambda \in \overline{D(-1,1)}$. Más concretamente, si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda) < 0$,

$$\{h > 0 \; / \; h\lambda \in \overline{D(-1,1)}\} = \{h > 0 \; / \; |1+h\lambda| \leq 1\} = \left(0, \frac{-2Re\lambda}{|\lambda|^2}\right]$$

En efecto:

$$\begin{aligned} |1+h\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow |1+h\lambda|^2 \leq 1 &\Leftrightarrow (1+hRe\lambda)^2 + (hIm\lambda)^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2hRe\lambda + h^2[(Re\lambda)^2 + (Im\lambda)^2] \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2hRe\lambda + h^2|\lambda|^2 \leq 1 \Leftrightarrow 2hRe\lambda + h^2|\lambda|^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2Re\lambda + h|\lambda|^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow h \leq \frac{-2Re\lambda}{|\lambda|^2} \end{aligned}$$

Entonces hay estabilidad numérica $\Leftrightarrow 0 < h \leq \dfrac{-2Re\lambda}{|\lambda|^2}$

Si $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$, hay estab. numérica si $0 < h \leq \dfrac{2}{|\lambda|}$

Ejemplo 1.7.1.3. $\lambda = -10^4$

$$\left\{\begin{array}{l} y' = -10^4 y \\ y(0) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow y(x) = e^{-10^4 x}$$

Hay estabilidad numérica $\Leftrightarrow 0 < h \leq 2 \cdot 10^{-4}$

Dado que $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \;/\; Rez \leq 0\} \not\subset R^{EE}(= \overline{D(-1,1)})$, se dice que **el método de Euler Explícito no es A-estable** (no contiene al semiplano izquierdo). Con lo cual,

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } Re\lambda \leq 0 \text{ para los cuales } \exists h > 0 \;/\; h\lambda \notin R^{EE},$$

y por tanto, para esos valores de h y λ no hay estabilidad numérica.

1.7.2. Problema vectorial

Consideremos el siguiente PVI:

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ diagonalizable y $\eta \in \mathbb{R}^m$

$$A \text{ diag. } \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C}) \text{ no singular } \;/\; P^{-1}AP = \Lambda, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow y' = P\Lambda P^{-1} y \Rightarrow \frac{d}{dx}(P^{-1}y) = \Lambda P^{-1} y$$

Realizando el cambio de variable $z = P^{-1}y$ obtenemos el PVI:

$$\begin{cases} z' = \Lambda z \\ z(a) = P^{-1}y(a) = P^{-1}\eta \end{cases}$$

Por lo tanto, concluimos que el diagrama a continuación es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = Ay \\ y(a) = \eta \end{cases} & \xrightarrow[z = P^{-1}y]{\text{diagonaliz.}} & \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \Lambda z \\ z(a) = P^{-1}y(a) = P^{-1}\eta \end{cases} & \xrightarrow{\text{desacoplar}} & \begin{cases} \dfrac{d\,{}^iz}{dx} = \lambda_i\,{}^iz \\ {}^iz(a) =^i [P^{-1}\eta] \end{cases} \\
\Big\downarrow \text{EE} & & \Big\downarrow \text{EE} & & \Big\downarrow \text{EE} \\
\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = Ay_n \\ y(a) = \eta \end{cases} & \xrightarrow[z = P^{-1}y]{\text{diagonaliz.}} & \begin{cases} \dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} = \Lambda z_n \\ z(a) = P^{-1}\eta \end{cases} & \xrightarrow{\text{desacoplar}} & \begin{cases} \dfrac{{}^iz_{n+1} -^i z_n}{h} = \lambda_i\,{}^iz_n \\ {}^iz(a) =^i [P^{-1}\eta] \end{cases}
\end{array}$$

Hay estabilidad numérica $\boldsymbol{\Leftrightarrow h\lambda_i \in R^{EE} \quad \forall i = \{1, ..., m\}}$

Capítulo 2

Método de Euler Implícito/regresivo

2.1. Motivación

$$\text{(PVI)}\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in [a,b] \\ y(a) = \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^m \text{ dado} \end{cases}$$

La solución exacta $y = y(x)$ del (PVI) cumple $y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$:

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_{n+1} - h)}{h} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

con lo cual se verifica:

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

2.2. Esquema del método

$$\left.\begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 = \eta + \bar{\eta} \end{cases}\right| \Rightarrow \qquad y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{EI1}$$

Nótese el carácter implícito: conocido y_n, para calcular y_{n+1} es preciso resolver un sistema de ecuaciones no lineales:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \Leftrightarrow F(y_{n+1}) = 0, \;\; F(z) = z - y_n - hf(x_{n+1}, z)$$

Proposición 2.2.0.1. *Para h suficientemente pequeño, el sistema* (EI1) *tiene solución y es única. Además, puede ser calculada por el método de iteración funcional*

Demostración. Recordemos que f cumple (Hf).

- Si $L = 0$, el resultado es trivial ya que f no depende de y.

- Supongamos $L > 0$. Fijado $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$, consideremos la aplicación $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por:

$$g(y) = y_n + hf(x_{n+1}, y), \quad y \in \mathbb{R}^m$$

  y_{n+1} es solución de (EI1) $\Leftrightarrow y_{n+1} = g(y_{n+1})$, es decir, y_{n+1} es un punto fijo de g. Probaremos que g es contractiva (en $\mathbb{R}^m$) para $h > 0$ suficientemente pequeño, lo que garantizará que g tiene un único punto fijo.

$$\begin{aligned}\|g(y) - g(y^*)\| &= \|\cancel{y_n} + hf(x_{n+1}, y) - (\cancel{y_n} + hf(x_{n+1}, y^*))\| = h\|f(x_{n+1}, y) - f(x_{n+1}, y^*)\| \\ &\leq hL\|y - y^*\| \quad \forall y, y^* \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

  En consecuencia, si $0 < h < 1/L$, g es contractiva y por tanto el sistema (EI1) tiene solución única. La denotamos por y_{n+1}

$\square$

Además, el teorema de la aplicación contractiva asegura que cualquiera que sea el punto inicial $y_{n+1}^{[0]} \in \mathbb{R}^m$, la sucesión

$$\{y_{n+1}^{[\nu]}\}_{\nu=0}^{\infty}$$

definida por

$$y_{n+1}^{[\nu+1]} = g(y_{n+1}^{[\nu]}) \quad \nu = 0, 1, ...$$

converge a y_{n+1} y el error de convergencia satisface

$$\|y_{n+1}^{[\nu]} - y_{n+1}\| \leq \frac{(hL)^\nu}{1 - hL}\|y_{n+1}^{[1]} - y_{n+1}^{[0]}\|$$

Se llama método de iteración funcional, método de iteración de punto fijo o método de los iterantes de Picard.

2.2.1. Elección del punto inicial

- $y_{n+1}^{[0]} = y_n$ ya que $y_n \approx y(x_n) \overset{\text{h peq}}{\approx} y(x_{n+1}) \approx y_{n+1}$

- $y_{n+1}^{[0]} = y_n + hf(x_n, y_n)$ que es la aproximación de $y(x_{n+1})$ dando un paso de Euler Explícito a partir de y_n

2.2.2. Método de Newton

Hay casos en los que se desea tomar un valor de $h > \dfrac{1}{L}$. Dado que la aplicación g entonces deja de ser contractiva, resulta de interés aplicar el método de Newton para resolver numéricamente (EI1). Definimos $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por:

$$F(z) = z - y_n - hf(x_{n+1}, z)$$

$$y_{n+1} \text{ solución de (EI1)} \Leftrightarrow F(y_{n+1}) = 0$$

$$DF(z) = I_m - h \cdot \frac{\partial f}{\partial z}\big(x_{n+1}, z\big)$$

$$\begin{cases} y_{n+1}^{[0]} \in \mathbb{R}^m \quad \text{dado} \\ y_{n+1}^{[\nu+1]} = y_{n+1}^{[\nu]} - \big[DF\big(y_{n+1}^{[\nu]}\big)\big]^{-1} \cdot F(y_{n+1}^{[\nu]}), \;\; \nu = 0, 1, ... \end{cases}$$

Para evitar tener que calcular la inversa de una matriz es equivalente al siguiente esquema:

$$\begin{cases} \Delta^{[\nu]} \in \mathbb{R}^m \\ \\ DF\big(y_{n+1}^{[\nu]}\big) \cdot \Delta^{[\nu]} = -F(y_{n+1}^{[\nu]}) \\ \\ y_{n+1}^{[\nu+1]} = y_{n+1}^{[\nu]} + \Delta^{[\nu]} \end{cases}$$

2.3. Interpretación geométrica

En el caso escalar:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y^*)$$

Desde puntos de la forma (x_{n+1}, y^*) trazamos la recta que pasa por ese punto y tiene pendiente $f(x_{n+1}, y^*)$. Sobre esa recta, retrocedemos h para obtener el punto $(x_n, y^* - hf(x_{n+1}, y^*))$. El valor de y_{n+1} estará definido por aquel y^* tal que $x_n, y_n = (x_n, y^* - hf(x_{n+1}, y^*))$.

En la siguiente figura los segmentos grises representan posibles rectas que se trazan cuyo valor en x_n no coincide con el de y_n.

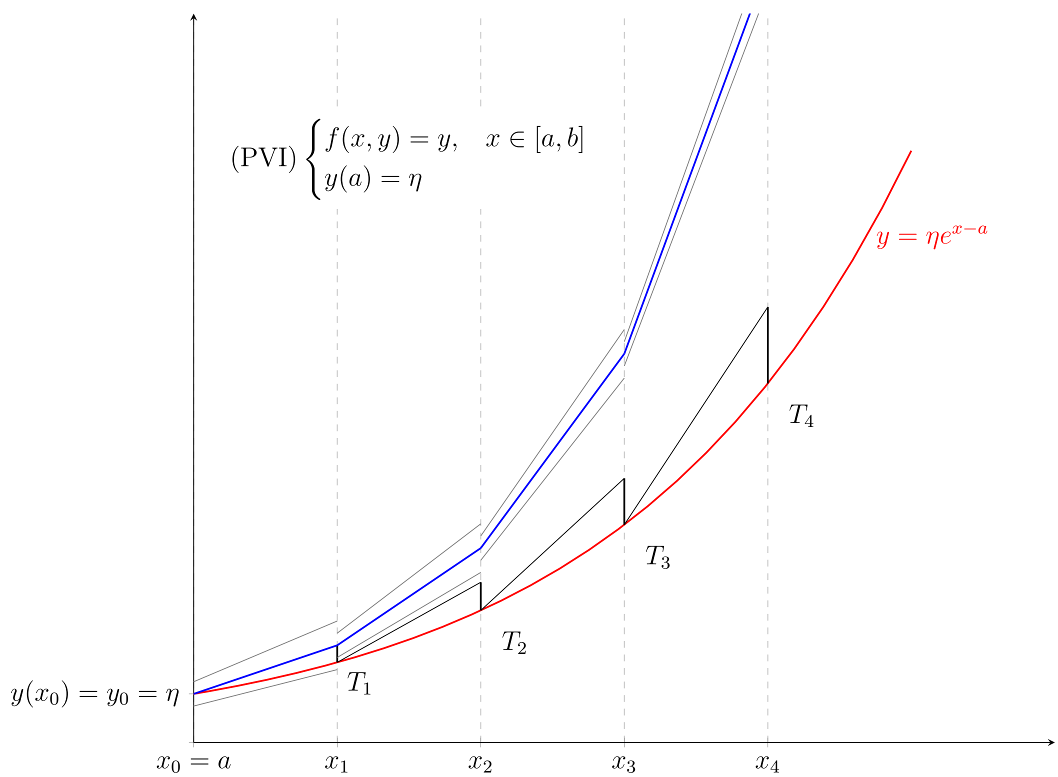


Figura 2.1: Interpretación geométrica de Euler Implícito

Observación 2.3.0.1. En la figura 2.1 las lineas grises representan rectas que no son solución del sistema.

Observación 2.3.0.2. Nótese que:

- El proceso es implícito
- Nada garantiza, a priori, la existencia de tal punto, y en caso de que exista, tampoco estará garantizada su unicidad.

2.4. Consistencia y orden de consistencia

Al igual que en el método de Euler Explícito, el método de Euler Implícito se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - f(x_{n+1}, y_{n+1}) = 0$$

Nuevamente esto nos invita a realizar la siguiente definición:

Definición 2.4.0.1. *Para n=0,...,N-1 se definen los vectores τ_{n+1} mediante:*

$$\tau_{n+1} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - f(x_{n+1}, y(x_{n+1})), \quad n = 0, 1, ..., N-1 \tag{EI2}$$

donde $y = y(x)$ es una solución exacta de la EDO $y' = f(x, y)$. τ_n depende de h y η

Observación 2.4.0.2. En este caso, si definimos

$$T_{n+1} = h \cdot \tau_{n+1}$$

bajo las hipótesis de localización ($y(x_n) = y_n$), se tiene, en general,

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} \neq T_{n+1}$$

Demostración.

$$\text{(EI2)} \Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf\big(x_{n+1}, y(x_{n+1})\big) + h\tau_{n+1}$$

$$\text{(EI1)} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + hf\big(x_{n+1}, y_{n+1}\big)$$

Restando:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \underbrace{y(x_n) - y_n}_{\substack{\| \\ 0}} + h\underbrace{\Big[f\big(x_{n+1}, y(x_{n+1})\big) - f\big(x_{n+1}, y_{n+1}\big)\Big]}_{\substack{\nparallel \\ 0 \text{ (en general)}}} + h\tau_{n+1}$$

□

Observación 2.4.0.3. De hecho, puede probarse que:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = h\tau_{n+1} + \|\tau_{n+1}\| \cdot O(h^2)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} h\|f\big(x_{n+1}, y(x_{n+1})\big) - f\big(x_{n+1}, y_{n+1}\big)\| &\leq hL\|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\| \\ &\leq h^2L\|\tau_{n+1}\|(1 + O(h^2)) \\ &= \|\tau_{n+1}\| \cdot O(h^2) \end{aligned}$$

□

Proposición 2.4.0.4 (Consistencia y orden de consistencia)**.** *Sea $y = y(x)$ una solución exacta de la EDO $y' = f(x, y)$. Entonces:*

1. $\lim_{h\to 0^+} \left(\max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\|\right) = 0$
2. *Si además $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$, entonces* $\max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| = O(h)$

Demostración.

1. Análogo a lo que hacíamos en Euler Explícito:

$$\tau_{n+1} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - y'(x_{n+1}), \;\; n = 0, 1, ..., N-1 \tag{EI3}$$

Como y es solución de $y' = f(x, y)$, $y \in \mathcal{C}^1([a, b])$

$$\tau_{n+1} = \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(s)ds - y'(x_{n+1}) = \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \big(y'(s) - y'(x_{n+1})\big)ds$$

$$\Rightarrow \|\tau_{n+1}\| \leq \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \big\|y'(s) - y'(x_{n+1})\big\|ds \leq \max_{s\in[x_n,x_{n+1}]} \big\|y'(s) - y'(x_{n+1})\big\|, \;\; n = 0, 1, ..., N-1$$

$$\Rightarrow \max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| =\leq \max_{\substack{s,t\in[a,b]\\|s-t|\leq h}} \big\|y'(s) - y'(t)\big\| \xrightarrow[\substack{y' unif.\\ cont.en[a,b]}]{h\to 0^+} 0$$

2. Supongamos que $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Aplicamos la fórmula de Taylor con resto integral:

$$y(x_n) = y(x_{n+1} - h) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + \int_{x_{n+1}}^{x_n} (x_n - s)y''(s)ds$$

Sustituimos esto en (EI3), obteniendo:

$$\begin{aligned}\tau_{n+1} &= \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x_n - s)y''(s)ds \Rightarrow \|\tau_{n+1}\| \leq \frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (s - x_n)\big\|y''(s)\big\|ds \\ &\leq \frac{M_2}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} (s - x_n)ds\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} (s - x_n)ds = \frac{1}{2}h^2$, obtenemos:

$$\|\tau_{n+1}\| \leq \frac{M_2}{2}h$$

□

Ejercicio 2.4.0.5. Probar que para Euler Implícito, si $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$

$$\tau_{n+1} = -\frac{h}{2}y''(x_{n+1}) + O(h^2)$$

Demostración. Aplicando la fórmula de Taylor con resto integral, al igual que lo que pasaba en Euler Explícito es evidente que $\|\tau_{n+1}\| = O(h)$ ya que tendremos siempre un término $O(h)$.

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + h^2y''(x_{n+1}) + O(h^3) \Rightarrow \tau_{n+1} = -\frac{h}{2}y''(x_{n+1}) + O(h^2)$$

□

Definición 2.4.0.6. *Por cumplirse 1., Euler Implícito es consistente con la EDO* $y' = f(x, y)$*. Al cumplirse para cualquier* f *en la hipótesis* (Hf)*, decimos que Euler Implícito es consistente. Por otra parte, sabemos que si* $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$*,*

$$\max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| = O(h)$$

En general, para una y *suficientemente regular,*

$$\max_{1\leq n\leq N} \|\tau_n\| \neq O(h^p), \ \ p > 1.$$

Por cumplirse ambas cosas decimos que Euler Implícito es consistente de orden 1 o que tiene orden 1 de consistencia

2.5. Estabilidad

Lema 2.5.0.1. *Para todo* $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$*,*

$$\frac{1}{1-x} \leq exp\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Demostración. Para $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} \leq exp\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad (1 + s \leq e^s \quad \forall s \in \mathbb{R})$$

□

2.5.1. Esquemas perturbados

Sean $(\delta_0, \delta_1, ..., \delta_N), (\delta_0^*, \delta_1^*, ..., \delta_N^*) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$ dos perturbaciones dadas y sean $(z_0, z_1, ..., z_N)$, $(z_0^*, z_1^*, ..., z_N^*) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$ respectivamente las soluciones de los esquemas perturbados siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} = f(x_{n+1}, z_{n+1}) + \delta_{n+1}, \quad n = 0, 1, ..., N-1 \\ z_0 = y_0 + \delta_0 = \eta + \bar{\eta} + \delta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1}^* - z_n^*}{h} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^*) + \delta_{n+1}^*, \quad n = 0, 1, ..., N-1 \\ z_0^* = y_0 + \delta_0^* = \eta + \bar{\eta} + \delta_0^* \end{cases}$$

Proposición 2.5.1.1 (Estabilidad). *Con las notaciones anteriores, se cumple* $\forall h > 0$ *la acotación:*

$$\max_{0\leq n\leq N} \|z_n - z_n^*\| \leq exp\left(\frac{L(b-a)}{1-h_0L}\right)\left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h\sum_{i=1}^{N}\|\delta_i - \delta_i^*\|\right]$$

Demostración.

$$z_{n+1} = z_n + hf(x_{n+1}, z_{n+1}) + h\delta_{n+1}, \qquad n = 0, ..., N-1$$
$$z_{n+1}^* = z_n^* + hf(x_{n+1}, z_{n+1}^*) + h\delta_{n+1}^*, \qquad n = 0, ..., N-1$$

Restando:

$$z_{n+1} - z_{n+1}^* = z_n - z_n^* + h\big[f(x_{n+1}, z_{n+1}) - f(x_{n+1}, z_{n+1}^*)\big] + h(\delta_{n+1} - \delta_{n+1}^*)$$

Aplicando la desigualdad triangular y la hipótesis (Hf):

$$\|z_{n+1} - z_{n+1}^*\| \leq \|z_n - z_n^*\| + hL\|z_{n+1} - z_{n+1}^*\| + h\|\delta_{n+1} - \delta_{n+1}^*\|$$

Como $h \leq h_0$ y $h_0L < 1$, se tiene que $1 - hL > 0$. Por tanto:

$$\underbrace{\|z_{n+1} - z_{n+1}^*\|}_{\theta_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{1}{1-hL}}_{\gamma>0} \cdot \underbrace{\|z_n - z_n^*\|}_{\theta_n} + \underbrace{\frac{h}{1-hL}\|\delta_{n+1} - \delta_{n+1}^*\|}_{\alpha_{n+1}}, \quad n = 0, ..., N-1$$

Aplicamos el Lema 1:

$$\|z_n - z_n^*\| \leq \left(\frac{1}{1-hL}\right)^n \|z_0 - z_0^*\| + h\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{1-hL}\right)^{n+1-i}\|\delta_i - \delta_i^*\|, \quad n = 1, ..., N$$

$$0 < \frac{1}{1-hL} \leq exp\left(\frac{hL}{1-hL}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-hL}\right)^n \leq \exp\left(\frac{hL}{1-hL}\right)^n = \exp\left(\frac{nhL}{1-hL}\right) = \exp\left(\frac{L(x_n - a)}{1-hL}\right)$$

$$0 < h \leq h_0 \Rightarrow 1 - hL \geq 1 - h_0L > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1-hL} \leq \frac{1}{1-h_0L}$$
$$\Rightarrow \exp\left(\frac{L(x_n - a)}{1-hL}\right) \leq \exp\left(\frac{L(x_n - a)}{1-h_0L}\right)$$

Por tanto:

$$\|z_n - z_n^*\| \leq \exp\left(\frac{L(x_n - a)}{1-h_0L}\right)\left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h\sum_{i=1}^{n}\|\delta_i - \delta_i^*\|\right], \quad n = 0, ..., N$$

Luego:

$$\max_{0\leq n\leq N} \|z_n - z_n^*\| \leq \exp\left(\frac{L(b-a)}{1-h_0L}\right)\left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h\sum_{i=1}^{n}\|\delta_i - \delta_i^*\|\right], \quad n = 0, ..., N$$

□

2.6. Convergencia

La solución exacta del PVI $y = y(x)$ cumple:

$$\begin{cases} \dfrac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + \tau_{n+1}, \quad n = 0, ..., N-1 \\ y(x_0) = \eta + \bar{\eta} - \bar{\eta} \end{cases}$$

$\{y_n\}_{n=0}^N$ es solución de un esquema perturbado con perturbación cero. Aplicando la estabilidad de Euler Implícito, para $h \in (0, h_0]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| &\leq exp\left(\frac{L(b-a)}{1 - h_0 L}\right) \cdot \left[\|\bar{\eta}(h)\| + h \sum_{i=1}^{N} \|\tau_i\|\right] \\ &\leq exp\left(\frac{L(b-a)}{1 - h_0 L}\right) \cdot \left[\|\bar{\eta}(h)\| + h(b-a) \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \|\tau_i\|\right] \end{aligned}$$

Por tanto:

1. $\lim_{h \to 0^+} \bar{\eta}(h) = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\|\right) = 0$

2. Si $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ y $\bar{\eta} = O(h)$, entonces $\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| = O(h)$

Definición 2.6.0.1. *Por cumplirse 1. decimos que Euler Implícito es **convergente**. Como se cumple 2. y además en general* $\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - y_n\| \neq O(h^p)$, $p > 1$ *con* $y(\cdot)$ *regular, decimos que Euler Implícito es **convergente exactamente de orden 1**.*

2.7. Estabilidad numérica

Al igual que con Euler Explícito, estudiaremos la estabilidad numérica lineal del método de Euler Implícito.

Estabilidad numérica lineal

El citado estudio se restringe a:

- problema escalar: $y' = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}$ (ecuación de Dahlquist)
- problema vectorial: $y' = Ay, A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ diagonalizable

2.7.1. Problema escalar

$$\begin{cases} y' = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

$y(x)$ acotada en $[a, \infty) \Leftrightarrow Re\lambda \leq 0$. Aplicamos Euler Implícito a la ecuación de Dahlquist:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \lambda y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$$

Si $h\lambda \neq 1 \Rightarrow y_{n+1} = \dfrac{1}{1 - h\lambda} \cdot y_n, \;\; n \geq 0$

Observación 2.7.1.1. *$Re\lambda \leq 0, \;\; h > 0 \Rightarrow Re(1 - h\lambda) = 1 - hRe\lambda \geq 1 \Rightarrow |1 - h\lambda| \geq 1$* Como veremos a continuación, esto nos garantizará que todo el semiplano izquierdo está contenido en la región de estabilidad del método de Euler Implícito.

$$y_n = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n \cdot y_0$$

Supongamos $y_0 \neq 0$. Entonces

$$|y_{n+1}| = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n \cdot |y_0|$$

$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ acotada $\Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{1 - h\lambda}\right| \leq 1.$

Observación 2.7.1.2. Si $Re\lambda \leq 0$, entonces $\forall h > 0$, $\left|\dfrac{1}{1 - h\lambda}\right| \leq 1$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada.

Puesto que $y_{n+1} = \dfrac{1}{1 - h\lambda} \cdot y_n$, no es conveniente dar la siguiente definición:

Definición 2.7.1.3 (Función de estabilidad)**.** *Llamamos función de estabilidad o factor de ampliación del método de Euler Implícito A^{EI} a la siguiente función:*

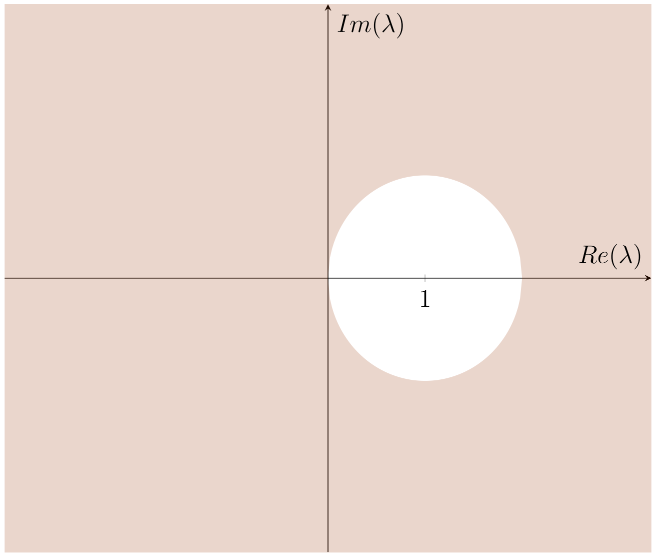
$$A^{EI}(z) = \frac{1}{1 - z}, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Como salta a la vista, $y_{n+1} = A^{EI}(h\lambda) \cdot y_n$

Definición 2.7.1.4 (Región de estabilidad absoluta)**.**

$$R^{EI} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |A^{EI}(z)| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \left|\frac{1}{1 - z}\right| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |1 - z| \geq 1\} = \mathbb{C} \backslash D(1, 1)$$

es la región donde $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada



$$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \;/\; Rez \leq 0\} \subset R^{EI},$$

luego el método de Euler Implícito es A-estable.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda \leq 0$, entonces $\forall h > 0$, $Re(h\lambda) \leq 0$, luego $h\lambda \in \mathbb{C}^- \subset R^{EI}$
$\Rightarrow$ Tendremos $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ acotada cualquiera sea $h > 0$

2.7.2. Problema vectorial

Es exactamente igual que lo que pusimos en Euler Explícito, vayan allí si necesitan refrescarlo. La conclusión a la que llegamos después de diagonalizar y desacoplar el sistema de ecuaciones, es que hay estabilidad numérica $\Leftrightarrow h\lambda_i \in R^{EI} \quad \forall i = 1, ..., m$

Capítulo 3

Métodos de Runge-Kutta

3.1. Motivación

Los métodos de Euler tienen orden de convergencia 1, es decir, en general:

$$\max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\| \approx c_1 h$$

Supongamos que queremos alcanzar una precisión ε prefijada (por ejemplo, $\varepsilon = 10^{-6}$). La estimación de la longitud de paso h necesaria $h \approx h(\varepsilon)$ será:

$$c_1 h_1 = \varepsilon \Rightarrow h_1 = \frac{\varepsilon}{c_1}$$

Luego tendremos que dar $N_1(\varepsilon) = \left[\dfrac{b-a}{h_1(\varepsilon)}\right] \approx \dfrac{(b-a)\cdot c_1}{\varepsilon}$ pasos.

Euler Explícito requiere una evaluación de f por paso de tiempo, luego necesitamos $\dfrac{(b-a)\cdot c_1}{\varepsilon}$ evaluaciones de f. Si por ejemplo $\varepsilon = 10^{-6} \Rightarrow N_1(10^{-6}) \approx (b-a)c_1 \cdot 10^6$.

Sin embargo, si un método tiene orden de convergencia $p \geq 2$, se tendrá que:

$$\max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\| \approx c_p h^p.$$

Si pedimos una precisión ε arbitraria, necesitamos $h \approx h_p(\varepsilon)$, de forma que:

$$c_p \cdot (h_p(\varepsilon))^p = \varepsilon \Rightarrow h_p(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{c_p}\right)^{1/p}$$

$$N_p(\varepsilon) = \left[\frac{b-a}{h_p(\varepsilon)}\right] \approx \frac{(b-a)\cdot(c_p)^{1/p}}{\varepsilon^{1/p}}$$

Supongamos que el método requiere s_p evaluaciones de f por paso. Por lo tanto, necesitamos $s_p N_p = s_p \cdot (b-a) \cdot \dfrac{(c_p)^{1/p}}{\varepsilon^{1/p}}$ evaluaciones de f en total. Supongamos $s_p = p$.

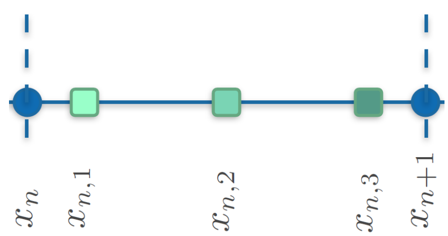
	$p=1$	$p=2$	$p=3$
ε	$\dfrac{c_1}{\varepsilon}$	$\dfrac{2\sqrt{c_2}}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\dfrac{3\sqrt[3]{c_3}}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$
10^{-3}	$c_1 \cdot 10^3$	$\sqrt{c2} \cdot 63'2$	$\sqrt[3]{c_3} \cdot 30$
10^{-6}	$c_1 \cdot 10^6$	$\sqrt{c2} \cdot 2 \cdot 10^3$	$\sqrt[3]{c_3} \cdot 3 \cdot 10^2$
10^{-12}	$c_1 \cdot 10^{12}$	$\sqrt{c2} \cdot 2 \cdot 10^6$	$\sqrt[3]{c_3} \cdot 3 \cdot 10^4$

Como podemos observar, es conveniente intentar encontrar/construir métodos numéricos con un mayor orden de convergencia con el fin de reducir el número de iteraciones necesarias con el cual tener el error prefijado.

Ejemplo 3.1.0.1. Vamos a obtener un **método explícito de orden 2** de forma constructiva.
Supongamos en este caso que f no depende de y:

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) = \eta \end{array}\right\} \Rightarrow y(x) = \eta + \int_a^x f(s)ds, \;\; a \leq x \leq b \quad \text{integrando (f indep de y)}$$

Problema de integración numérica (cuadratura numérica): Usaremos una fórmula de cuadratura compuesta de orden 2, en este caso, la fórmula de los trapecios compuestos:



$$y(x_n) = \eta + \int_a^{x_n} f(s)ds \approx \eta + \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\big[f(x_{i-1}) + f(x_i)\big] =: y_n$$

Forma incremental:

$$y_1 = \eta + \frac{h}{2}\big[f(x_0) + f(x_1)\big]$$
$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\big[f(x_1) + f(x_2)\big]$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[f(x_n) + f(x_{n+1})\big]$$

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(x_n) - y_n| \leq ch^2 \quad \text{si } f \in \mathcal{C}^2([a,b])$$

Ejemplo 3.1.0.2. Extensión al caso en que $f = f(x, y)$.

$$\left.\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \eta \end{cases}\right\} \Rightarrow y(x) = \eta + \int_a^x f(s, y(s))ds, \;\; a \leq x \leq b$$

Primer paso.

$$y(x_1) = \eta + \int_a^{x_1} f(s, y(s))ds \approx y_0 + \frac{h}{2}\big[f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))\big] =: y_n$$

Necesitamos una aproximación explícitamente calculable de $y(x_1)$. En este ejemplo usamos Euler Explícito para efectuar tal aproximación, lo que nos conduce a:

$$y(x_1) \approx y_0 + \frac{h}{2}\big[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0))\big] =: y_1$$

Esto nos lleva a definir el siguiente método numérico:

3.2. Método de Heun/Euler mejorado

$$\begin{cases} y_0 = \eta + \bar{\eta} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))\Big], \quad n = 0, ..., N-1 \end{cases}$$

Reescribimos el método usando las notaciones siguientes

$$\begin{array}{ll} x_{n1} = x_n & y_{n1} = y_n \\ x_{n2} = x_n + h & y_{n2} = y_n + hf(x_{n1}, y_{n1}) \end{array}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2}f(x_{n1}, y_{n1}) + \frac{1}{2}f(x_{n2}, y_{n2})\right]$$

3.3. Descripción general de los métodos Runge-Kutta

Considerando ahora el método de orden s dado por el tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^t \end{array} \qquad c, b \in \mathbb{R}^s, \;\; A \in \mathcal{M}_{s\times s}(\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x_{ni} = x_n + c_i h \quad i = 1, ..., s \\ y_{ni} = y_n + h\displaystyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(x_{nj}, y_{nj}), \quad i = 1, ..., s & \text{(RK1)} \\ y_{n+1} = y_n + h\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{ni}, y_{ni}) & \text{(RK2)} \end{cases}$$

Proposición 3.3.0.1. *Las ecuaciones* (RK1) - (RK2) *son equivalentes a:*

$$\begin{cases} x_{ni} = x_n + c_i h, \quad i = 1, ..., s \\ k_{ni} = f(x_{ni}, y_n + h\displaystyle\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_{nj}), \quad i = 1, ..., s & \text{(RK3)} \\ y_{n+1} = y_n + h\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i k_{ni} & \text{(RK4)} \end{cases}$$

Demostración.
" $\Rightarrow$ " Supongamos que $y_{ni},\ i = 1, ..., s$ es solución de (RK1). Introducimos

$$k_{ni} = f(x_{ni}, y_{ni}) \tag{RK5}$$

Usando (RK5) en (RK1)

$$y_{ni} = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_{nj} \tag{RK6}$$

Por tanto:

$$k_{ni} \overset{\text{(RK5)}}{=} f(x_{ni}, y_{ni}) \overset{\text{(RK6)}}{=} f(x_{ni}, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_{nj}) \quad i = 1, ..., s \quad \text{que es (RK3).}$$

$$y_{n+1} \overset{\text{(RK2)}}{=} y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{ni}, y_{ni}) \overset{\text{(RK5)}}{=} y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_{ni} \quad \text{que es (RK4).}$$

" $\Leftarrow$ " Supongamos que $k_{ni},\ i = 1, ..., s$ es solución de (RK3) y que y_{n+1} está dado por (RK4). Análogo □

Aunque la notación con los k_{ni} pueda parecer un poco liosa e innecesaria al empezar a trabajar con los métodos Runge-Kutta, es esencial para la parte de programación dado que ahorra evaluaciones de f. Sin embargo, si nos sabemos la notación en los y_{ni} y recordamos que $k_{ni} = f(x_{ni}, y_{ni})$ nos resultará inmediato pasar de una a otra.

3.4. Métodos Runge-Kutta explícitos (ERK)

Si la matriz A es estrictamente triangular inferior; es decir, triangular inferior y la diagonal todo ceros, o lo que es lo mismo, $a_{ij} = 0$ si $j \leq i$. Entonces:

$$\left| \begin{array}{l} y_{n1} = y_n \\ y_{ni} = y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(x_{nj}, \overbrace{y_{nj}}^{\text{ya calculados}}) \quad i = 1, ..., s \\ y_{n+1} = y_n + h \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{ni}, y_{ni}) \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} k_{n1} = f(x_{n1}, y_n) \\ k_{ni} = f(x_{ni}, y_n + h \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \overbrace{k_{nj}}^{\text{ya calculados}}), \quad i = 1, ..., s \\ y_{n+1} = y_n + h \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i k_{ni} \end{array} \right.$$

3.4.1. Euler Explícito

Podemos entender el método de Euler Explícito como un caso particular de un método Runge-Kutta explícito. En efecto, tomando $s = 1$ y el siguiente tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

1. Formulación con los y_{ni}:

$$\left| \begin{array}{l} x_{n1} = x_n + 0 \cdot h = x_n \\ y_{n1} = y_n + h \cdot 0 \cdot f(x_{n1}, y_{n1}) = y_n \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot 1 \cdot f(x_{n1}, y_{n1}) \end{array} \right.$$

2. Formulación con los k_{ni}:

$$\left| \begin{array}{l} x_{n1} = x_n + 0 \cdot h = x_n \\ k_{n1} = f(x_{n1}, y_n + h \cdot 0 \cdot k_{n1}) = f(x_{n1}, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot 1 \cdot k_{n1} \end{array} \right.$$

3.5. Métodos Runge-Kutta implícitos (IRK)

Cuando A no es estrictamente triangular inferior, el método será implícito: Conocido y_n, las ecuaciones (RK1) (alternativamente (RK3)) forman un sistema de ms ecuaciones y ms incógnitas escalares que son:

- Las componentes de $y_{ni},\ i = 1, ..., s$ para (RK1).
- las componentes de $k_{ni},\ i = 1, ..., s$ para (RK3).

Teorema 3.5.0.1. *Supongamos que f satisface las hipótesis* (Hf) *con constante de Lipschitz L. Si $hL\|A\|_\infty < 1$, entonces el sistema* (RK1) *tiene solución única. Además, el método de iteración funcional converge globalmente a la solución:*

$$\begin{pmatrix} y_{n1}^{[\nu+1]} \\ \vdots \\ y_{ns}^{[\nu+1]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s} a_{1j} f(x_{nj}, y_{nj}^{[\nu]}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{s} a_{sj} f(x_{nj}, y_{nj}^{[\nu]}) \end{pmatrix},\ \textit{siendo} \begin{pmatrix} y_n \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \textit{ el vector } y_n$$

3.5.1. Euler Implícito

Al igual que con el método de Euler Explícito, podemos entender el método de Euler Implícito como un caso particular de un método Runge-Kutta implícito. En efecto, tomando $s = 1$ y el siguiente tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

1. Formulación con los y_{ni}:

$$\left| \begin{array}{l} x_{n1} = x_n + 1 \cdot h = x_{n+1} \\ y_{n1} = y_n + h \cdot 1 \cdot f(x_{n1}, y_{n1}) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n1}, y_{n1}) = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{array} \right.$$

2. Formulación con los k_{ni}:

$$\left| \begin{array}{l} x_{n1} = x_n + 1 \cdot h = x_{n+1} \\ k_{n1} = f(x_{n1}, y_n + h \cdot 1 \cdot k_{n1}) = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot 1 \cdot k_{n1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{array} \right.$$

3.6. Métodos semiimplícitos (DIRK)

Son aquellos en los que A es triangular inferior (es decir, $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$). Ahora bien, la diagonal puede ser distinta de cero. En este caso, la resolución de (RK1) (alternitavemente (RK3)) se reduce a resolver sucesivamente s sistemas de ecuaciones con m incógnitas.
En efecto, para (RK1):

$$\begin{cases} y_{n1} = y_n + ha_{11}f(x_{n1}, y_{n1}) \\ y_{ni} = y_n + h\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}f(x_{nj}, y_{nj}) + a_{ii}f(x_{ni}, y_{ni}), \ \ i = 2, ..., s \end{cases} \tag{RK7}$$

Observación 3.6.0.1. Podemos no particularizar y_{n1} si consideramos $\sum_{j=1}^{0} = 0$.

3.7. Más ejemplos de métodos RK

Esta sección está directamente extraída de las transparencias vistas en clase y que están disponibles en el campus virtual a modo de completitud. En estas también se habla del θ-método y sin embargo en este tema no lo vamos a tratar. Eso es porque este método pertenece a la familia de los métodos lineales multipaso y nos interesará más verlo con ese enfoque.

Ejemplo 3.7.0.1 (RK uniparamétrico de una etapa)**.** Consideremos el método de orden 1 dado por el tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

1. Formulación con los y_{ni}:

$$\left| \begin{aligned} &x_{n1} = x_n + h\theta \\ &y_{n1} = y_n + h\theta f(x_{n1}, y_{n1}) \\ &y_{n+1} = y_n + hf(x_{n1}, y_{n1}) \end{aligned} \right.$$

2. Formulación con los k_{ni}:

$$\left| \begin{aligned} &x_{n1} = x_n + h\theta \\ &k_{n1} = f(x_{n1}, y_n + h\theta k_{n1}) \\ &y_{n+1} = y_n + hk_{n1} \end{aligned} \right.$$

Ejemplo 3.7.0.2 (RK uniparamétrico de dos etapas)**.** Consideremos el método de orden 2 dado por el tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Formulación con los y_{ni}:

$$\left|\begin{array}{l} x_{n1} = x_n \\ x_{n2} = x_n + h\alpha \\ \\ y_{n1} = y_n \\ y_{n2} = y_n + h\alpha f(x_{n1}, y_{n1}) \\ \\ y_{n+1} = y_n + h(1 - \frac{1}{2\alpha}) f(x_{n1}, y_{n1}) + h\frac{1}{2\alpha} f(x_{n2}, y_{n2}) \end{array}\right.$$

2. Formulación con los k_{ni}:

$$\left|\begin{array}{l} x_{n1} = x_n \\ x_{n2} = x_n + h\alpha \\ \\ k_{n1} = f(x_{n1}, y_{n1}) \\ k_{n2} = f(x_{n2}, y_n + h\alpha k_{n1}) \\ \\ y_{n+1} = y_n + h(1 - \frac{1}{2\alpha}) k_{n1} + h\frac{1}{2\alpha} k_{n2} \end{array}\right.$$

Observación 3.7.0.3.

- $\alpha = 1 \Rightarrow$ método de Heun.
- $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ método de Euler modificado.

Ejemplo 3.7.0.4 (Runge-Kutta clásico de orden 4)**.** Consideremos el método de orden 4 dado por el tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

1. Formulación con los y_{ni}:

$$\left|\begin{array}{l} x_{n1} = x_n \\ x_{n2} = x_n + h\frac{1}{2} \\ x_{n3} = x_n + h\frac{1}{2} \\ x_{n4} = x_n + h \\ \\ y_{n1} = y_n \\ y_{n2} = y_n + h\frac{1}{2}f(x_{n1}, y_{n1}) \\ y_{n3} = y_n + h\frac{1}{2}f(x_{n2}, y_{n2}) \\ y_{n4} = y_n + hf(x_{n3}, y_{n3}) \\ \\ y_{n+1} = y_n + h\frac{1}{6}f(x_{n1}, y_{n1}) + h\frac{2}{6}f(x_{n2}, y_{n2}) + h\frac{2}{6}f(x_{n3}, y_{n3}) + h\frac{1}{6}f(x_{n4}, y_{n4}) \end{array}\right.$$

2. Formulación con los k_{ni}:

$$\left|\begin{array}{l} x_{n1} = x_n \\ x_{n2} = x_n + h\frac{1}{2} \\ x_{n3} = x_n + h\frac{1}{2} \\ x_{n4} = x_n + h \\ \\ k_{n1} = f(x_{n1}, y_{n1}) \\ k_{n2} = f(x_{n2}, y_n + h\frac{1}{2}\alpha k_{n1}) \\ k_{n3} = f(x_{n3}, y_n + h\frac{1}{2}\alpha k_{n2}) \\ k_{n4} = f(x_{n3}, y_n + h\alpha k_{n3}) \\ \\ y_{n+1} = y_n + h\frac{1}{6}k_{n1} + h\frac{2}{6}k_{n2} + h\frac{2}{6}k_{n3} + h\frac{1}{6}k_{n4} \end{array}\right.$$

Ejemplo 3.7.0.5 (Métodos Runge-Kutta Gauss-Legendre)**.** Estos son métodos basados en las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre. Permiten obtener un orden $2s$ con s etapas. Son métodos implícitos.

3.8. Notación Φ_f

Definición 3.8.0.1. *Los métodos Runge-Kutta se pueden escribir en la siguiente forma:*

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(x_n, y_n; h) \tag{RK8}$$

donde $\Phi_f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, donde* $h_0 > 0$ *es un número suficientemente pequeño.* Φ_f *se conoce como la función incremento, que depende de* f*.*

Observación 3.8.0.2.

- Φ_f es explícita para los ERK
- Φ_f no es explícita para los IRK

Ejemplo 3.8.0.3.

1. Euler explícito:

$$\begin{aligned}&y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)\\&\Phi_f(x, y; h) = f(x, y) \qquad \text{independiente de h}\end{aligned}$$

2. Método de Heun:

$$y_{n+1} = y_n + h \underbrace{\left[\frac{1}{2}f(x_n, y_n) + \frac{1}{2}f\big(x_n + h, y_n + f(x_n, y_n)\big)\right]}_{\Phi_f(x_n,y_n;h)}$$

$$\Phi_f(x, y; h) = \frac{1}{2}f(x, y) + \frac{1}{2}f(x + h, y + hf(x, y))$$

Definición 3.8.0.4 (Definición de Φ_f en el caso general)**.**

$$\Phi_f(x, y; h) = \sum_{i=1}^{s} b_i f(x + c_i h, Y_i)$$

donde $Y_i \in \mathbb{R}^m,\ i = 1, ..., s$ *es la solución del sistema siguiente*

$$Y_i = y + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(x + c_j h, Y_j)$$

Este sistema tiene solución única cuando $hL\|A\|_\infty < 1$*, ya que es análogo al sistema* (RK1)

Observación 3.8.0.5. Si $x = x_n,\ y = y_n$ entonces $Y_i = y_{ni},\ i = 1, ..., s$ y por tanto:

$$\Phi_f(x_n, y_n; h) = \sum_{i=1}^{s} b_i f(x_{ni}, y_{ni})$$

3.9. Consistencia y orden de consistencia

$$\text{(RK8)} \Leftrightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \Phi_f(x_n, y_n; h) = 0$$

De la misma manera que llevamos haciendo en los 2 temas anteriores, es conveniente realizar la siguiente definición:

Definición 3.9.0.1. *Para* $n = 0, 1, ..., N - 1$ *y* $h > 0$ *suficientemente pequeño, se definen los vectores* τ_{n+1} *de la forma:*

$$\tau_{n+1} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} - \Phi_f(x_n, y(x_n); h) \tag{RK9}$$

donde $y = y(x)$ *es una solución exacta de la EDO* $y' = f(x, y)$

Definición 3.9.0.2. *Se dice que el método* (RK8) *es consistente con la EDO* $y' = f(x, y)$ *si para toda solución exacta* $y = y(x)$ *de dicha EDO se tiene que:*

$$\lim_{h \to 0^+} \max_{1 \leq n \leq N} \|\tau_n\| = 0$$

Definición 3.9.0.3. *Sea* $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$. *Se dice que el método* (RK8) *tiene orden p de consistencia (o que es consistente de orden p) si p es el mayor entero tal que*

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|\tau_n\| = O(h^p)$$

Observación 3.9.0.4. Si para todo f suficientemente regular, $\max\limits_{0 \leq n \leq N} \|\tau_n\| = O(h^p)$, se dice que el método es consistente al menos de orden p

Definición 3.9.0.5.

$$T_{n+1} := h\tau_{n+1} = y(x_{n+1}) - \underbrace{\Big[y(x_n) + h\Phi_f(x_n, y_n; h) \Big]}_{\tilde{y}_{n+1}}$$

$\tilde{y}_{n+1}$ *es el resultado de dar un paso del método RK a partir de* $(x_n, y(x_n))$

Ejercicio 3.9.0.6. Obtener las condiciones necesarias y suficientes para que un método RK explícito de dos etapas con $c_1 = 0$ tenga al menos orden 2 de consistencia para EDOs escalares

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_{n1} &= x_n \\ x_{n2} &= x_n + c_2 h \\ \\ k_{n1} &= f(x_n, y_n) \\ k_{n2} &= f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_{n1}) \\ \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 + k_{n1} + b_2 k_{n2}) \end{aligned}$$

Buscamos una condición necesaria y suficiente para que $\|\tau_{n+1}\| = O(h^2) \Leftrightarrow T_{n+1} = O(h^3)$

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}$$

Tenemos que explicitar el desarrollo de Taylor hasta el término h^2 incluído
1 página de cuentas muy ricas que quedan como ejercicio para el lector

$$T_{n+1} = O(h^3) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 c_2 = \dfrac{1}{2} \\ b_2 a_{21} = \dfrac{1}{2} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha := a_{21} \neq 0 \\ b_2 = \dfrac{1}{2\alpha} \\ c_2 = \alpha \\ b_1 = 1 - \dfrac{1}{2\alpha} \end{array} \right.$$

Estamos entonces ante el método uniparamétrico en función de α

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - 1/2\alpha & 1/2\alpha \end{array}$$

3.9.1. Orden de consistencia de los métodos RK

Para estudiar el orden de consistencia de los métodos Runge-Kutta nos será de utilidad introducir la siguiente notación:

- $\mathcal{C} = diag(c) = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_s \end{pmatrix}$
- $e = (1, ..., 1)^t \in \mathbb{R}^s$

Proposición 3.9.1.1. *Un método RK es* ***al menos de orden 1*** $\Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ *se tiene que:*

1. $b^t e = 1 \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$

Además, esta condición equivale a la consistencia del método.

Proposición 3.9.1.2. *Un método RK es* ***al menos de orden 2*** $\Leftrightarrow$ *es al menos de orden 1 y además cumple:*

1. $b^t \mathcal{C} e = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2}$
2. $b^t \mathcal{A} e = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} = \frac{1}{2}$

Observación 3.9.1.3. Con frecuencia consideraremos métodos de Runge-Kutta tales que

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i,$$

propiedad a la que nos referiremos como condición de suma por filas. Esta condición se puede expresar como $\mathcal{A}e = c$. Por tanto, las 2 últimas condiciones de la anterior proposición se reducen a comprobar que $b^t \mathcal{C} e = \dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto, podemos reenunciar la anterior proposición de la siguiente forma:

Proposición 3.9.1.4. *Un método Runge-Kutta que cumpla $\mathcal{A}e = c$ es* ***al menos de orden 2*** *si y sólo si es al menos de orden 1 y además cumple:*

$$b^t \mathcal{C} e = \frac{1}{2}$$

Las condiciones de orden $p > 2$ son cada vez más complicadas. Por ello, para las condiciones de orden 3 y 4, consideraremos métodos Runge-Kutta que cumplan la condición de suma por filas.

Proposición 3.9.1.5. *Consideremos un método RK tal que $\mathcal{A}e = c$. El método es al menos de orden 3 si y sólo si es al menos de orden 2 y además:*

1. $b^t\mathcal{C}^2e = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$

2. $b^t\mathcal{A}\mathcal{C}e = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$

Proposición 3.9.1.6. *Consideremos un método RK tal que $\mathcal{A}e = c$. El método es al menos de orden 4 si y sólo si es al menos de orden 3 y además:*

1. $b^t\mathcal{C}^3e = \dfrac{1}{4}$

2. $b^t\mathcal{A}\mathcal{C}^2e = \dfrac{1}{12}$

3. $b^t\mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{C}e = \dfrac{1}{8}$

4. $b^t\mathcal{A}^2\mathcal{C}e = \dfrac{1}{24}$

Observación 3.9.1.7. Si el método RK tiene orden p de consistencia y $f \in \mathcal{C}^s$, $s < p$, entonces $\|\tau_n\| = O(h^s)$

Ejercicio 3.9.1.8. Comprobar que el método con la siguiente tabla de Butcher tiene exactamente orden 2 de consistencia

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array} \qquad \alpha \neq 0$$

La demostración es trivial y se deja como ejercicio para el lector.

3.10. Estabilidad

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi_f(x_n, y_n; h)$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \Phi_f(x_n, y_n; h) = 0$$
$$\tau_{n+1} = \frac{y(x_{n+1} - y(x_n)}{h} - \Phi_f(x_n, y(x_n); h)$$

Dadas las perturbaciones $(\delta_0, \delta_1, ..., \delta_N)$, $(\delta_0^*, \delta_1^*, ..., \delta_N^*) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$, introducimos, para h>0 suficientemente pequeño, los esquemas perturbados siguientes:

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} = \Phi_f(x_n, z_n; h) + \delta_{n+1} \quad n = 0, 1, ..., N-1 \\ z_0 = y_0 + \delta_0 = \eta + \bar{\eta} + \delta_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{z_{n+1}^* - z_n^*}{h} = \Phi_f(x_n, z_n^*; h) + \delta_{n+1}^* \quad n = 0, 1, ..., N-1 \\ z_0^* = y_0 + \delta_0^* = \eta + \bar{\eta} + \delta_0^* \end{cases}$$

que para h sufic^{te} pequeño, definen las soluciones $(z_0, z_1, ..., z_N)$, $(z_0^*, z_1^*, ..., z_N^*) \in (\mathbb{R}^m)^{N+1}$

Proposición 3.10.0.1 (Estabilidad)**.** *Supongamos que f verifica* (Hf)*. Entonces existen $h_0 > 0$ y una constante $M \geq 0$ independiente de h tales que para todo $h \in (0, h_0]$ se tiene la acotación*

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|z_n - z_n^*\| \leq M \left[\|\delta_0 - \delta_0^*\| + h \sum_{i=1}^{N} |\delta_i - \delta_i^*\| \right] \tag{RK12}$$

Por tanto, todos los métodos RK son estables

Idea de la demostración:

1. Partimos de las condiciones (Hf)

2. Acotaciones análogas a la demostración realizada para Euler Explícito.

3.11. Convergencia

La sucesión finita $\{y(x_n)\}_{n=0}^{N}$ cumple:

$$\begin{cases} \dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} = \Phi_f(x_n, y(x_n); h) + \underset{\delta_{n+1}}{\underset{\parallel}{\tau_{n+1}}} & n = 0, 1, ..., N-1 \\ y(x_0) = \eta + \bar{\eta} + \underset{\delta_0}{\underset{\parallel}{(-\bar{\eta})}} \end{cases}$$

La sucesión finita $\{y_n\}_{n=0}^{N}$ cumple:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-y_n}{h} = \Phi_f(x_n, y_n; h) + \underset{\delta^*_{n+1}}{\underset{\parallel}{0}} & n = 0, 1, ..., N-1 \\ y_0 = \eta + \bar{\eta} + \underset{\delta^*_0}{\underset{\parallel}{0}} \end{cases}$$

En virtud de la estabilidad, para todo $h \in (0, h_0]$ tenemos la acotación:

$$\max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\| \leq M\left[\|\bar{\eta}(h)\| + h\sum_{i=1}^{N}\|\tau_i\|\right]$$

$$\max_{0\leq n\leq N} \|y(x_n) - y_n\| \leq M\left[\|\bar{\eta}(h)\| + (b-a)\cdot \overbrace{\max_{1\leq i\leq N}\|\tau_i\|}^{O(h^p)}\right]$$

Si RK es consistente, tenemos que

$$\lim_{h\to 0^+}(\max_{1\leq n\leq N}\|\tau_i\|) = 0$$

y por tanto

$$\lim_{h\to 0^+}\bar{\eta}(h) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+}(\max_{1\leq n\leq N}\|y(x_n) - y_n\|) = 0$$

Por cumplirse (RK12), todos los métodos RK son estables. En consecuencia, todo método RK consistente es convergente.

Por otra parte, cuando $\max_{1\leq n\leq N}\|\tau_n\| = O(h^p)$ y $\|\bar{\eta}(h)\| = O(h^p)$ (en particular cuando vale 0), el método convergerá con orden p, es decir,

$$\max_{0\leq n\leq N}\|y(x_n) - y_n\| = O(h^p)$$

3.12. Estabilidad numérica lineal

Supongamos $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ diagonalizable, es decir, $\exists P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ no singular, y $\exists \Lambda \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C})$ matriz diagonal tal que $P^{-1}BP = \Lambda$. Al igual que con los métodos Euler Explícito e Implícito, podemos hacer el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\begin{cases} y' = By \\ y(a) = \eta \end{cases} \arrow[r, "\text{diagonalizar}", "z = P^{-1}y"'] \arrow[d, "\text{RK}"] & \begin{cases} z' = \Lambda z \\ z(a) = P^{-1}\eta \end{cases} \arrow[r, "\text{desacoplar}"] \arrow[d, "\text{RK}"] & \begin{cases} l\dfrac{d\,{}^iz}{dx} = \lambda_i\,{}^iz \\ {}^iz(a) =^i [P^{-1}\eta] \end{cases} \arrow[d, "\text{RK}"] \\
\begin{cases} \text{Esquema} \\ \text{del método} \end{cases} \arrow[r, "\text{diagonalizar}", "z = P^{-1}y"'] & \begin{cases} \text{Esquema del} \\ \text{método en z} \end{cases} \arrow[r, "\text{desacoplar}"] & \begin{cases} \text{Esquema del} \\ \text{método en } {}^i\text{z} \end{cases}
\end{tikzcd}$$

Un método RK aplicado a $y' = By$ es numéricamente estable si y sólo si lo es al aplicarlo a todas las EDOs escalares $y' = \lambda_i,\ \ i = 1, ..., s$

Consideremos la ecuación de Dahlquist:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & \lambda \in \mathbb{C} \\ y(a) = \eta, & \eta \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Supongamos $\eta \neq 0$. $Re\lambda \leq 0 \Leftrightarrow y(\cdot)$ acotada en $[a, +\infty)$.

Ejemplo 3.12.0.1 (Método de Heun)**.**

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$x_{n1} = x_n$$
$$x_{n2} = x_n + h$$

$$y_{n1} = y_n$$
$$y_{n2} = y_n + hf(x_{n1}, y_{n1})$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2}f(x_{n1}, y_{n1}) + \frac{1}{2}f(x_{n2}, y_{n2})\right]$$

Aplicando el método a la ecuación $y' = \lambda y,\ \lambda \in \mathbb{C}$ (es decir, $f(x, y) = \lambda y$):

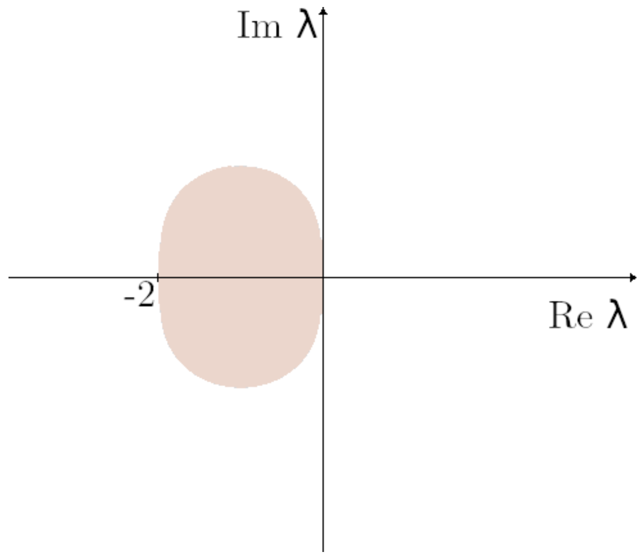
$$y_{n1} = y_n$$
$$y_{n2} = y_n + h\lambda y_{n1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2}\lambda y_{n1} + \frac{1}{2}\lambda y_{n2}\right] = y_n + \frac{h\lambda}{2}y_n(2 + h\lambda) = y_n\left[1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2\right] = A(h\lambda)\cdot y_n$$

donde $A(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2}$ es la función de estabilidad del método de Heun

$$y_n = \big(A(h\lambda)\big)^n \cdot y_0 \qquad \text{Supongamos } y_0 \neq 0 \qquad \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ acotado } \Leftrightarrow |A(h\lambda)| \leq 1$$

$$R = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |A(z)| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |1 + z + \frac{z^2}{2}| \leq 1\}$$



$\lim\limits_{|z| \to +\infty} |A(z)| = +\infty \Rightarrow$ R es un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Re \ z \leq 0\} \not\subset R \Rightarrow$ el método de Heun no es A-estable

Definición 3.12.0.2 (Intervalo de estabilidad absoluta). $I = R \cap \mathbb{R}$. *Cuando todos los autovalores son reales, nos basta estudiar este intervalo real en lugar de toda la región*

Para Heun: $I = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |1 + x + \frac{x^2}{2}| \leq 1\} = [-2, 0]$

Demostración. En efecto, si bien la gráfica de la región de estabilidad ya nos permite afirmar esto, veamos como llegar algebraicamente al resultado:

$$\left.\begin{aligned} 1 + x + \frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow 2x + x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = -2 \\ |A(-1)| = \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = [-2, 0]$$

$\square$

Ejemplo 3.12.0.3 (Lobatto III B).

$$x_{n1} = x_n$$
$$x_{n2} = x_n + h$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

$$y_{n1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_{n1}, y_{n1})$$
$$y_{n2} = y_n + \frac{h}{2} f(x_{n1}, y_{n1})$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2} f(x_{n1}, y_{n1}) + \frac{1}{2} f(x_{n2}, y_{n2})\right]$$

Aplicamos el método a $y' = \lambda y, \ \lambda \in \mathbb{C}$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \lambda y_{n+1} \Rightarrow$$

Ejercicio 3.12.0.4. Demostrar que el método Lobatto IIIB es A-estable

3.12.1. Máximo orden alcanzable por los Runge-Kutta explícitos

El máximo oden alcanzables por los métodos ERK de s etapas con $1 \leq s \leq 4$ es s. Para $s \geq 5$, no existen ERK de orden s (Esto explica el interés del ERK de 4 etapas). Se tiene la siguiente tabla:

Orden (p)	1	2	3	4	5	6	8	9	10
Número mínimo de etapas de un ERK (s)	1	2	3	4	6	7	11	$12 \leq s \leq 17$	$13 \leq s \leq 17$

Para obtener un orden mayor que el número de etapas ($p \geq s$), es necesario usar métodos implícitos. En este caso el máximo alcanzable es $p = 2s$. Esto se consigue con los métodos Runge-Kutta-Gauss-Legendre (RKGL)

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array} \text{ RKGL de 1 etapa}$$

Observación 3.12.1.1. Todos los métodos **Runge-Kutta explícitos** de orden p tienen **función de estabilidad** el desarrollo del polinomio de Taylor de orden p de la función e^z entorno al 0, es decir:

$$A^{RKE}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p!}, \quad \text{en un método RK explícito de orden } p$$

Así pues:

$$R^{RKE} = \left\{ z \in \mathbb{C} \; / \left| 1 + z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p!} \right| \leq 1 \right\}$$

Aunque **este resultado no se ha visto en clase** (así que no es algo que podamos concluir directamente), conocerlo nos puede ayudar a la hora de calcular la función de estabilidad. Es precisamente por esto que los métodos de Runge-Kutta explícitos (en particular Euler Explícito) **NO son A-estables**.