Paramagneto Estocástico

Notas de aula,
Prof. Marcelo Pires, CBPF

25 de agosto de 2025

Conteúdo

1 Modelo Físico

Seguindo a Ref.[1] considere um paramagneto com N partículas independentes, possuindo um spin que pode assumir o estado "up" ($\uparrow$, $+1$) ou "down" ($\downarrow$, -1). O sistema evolui ao longo do tempo na ausência de campo externo através de flutuações estocásticas. A variável central é a magnetização total M, definida como

$$M = \sum_{i=1}^{N} s_i, \quad s_i = \pm 1. \tag{1}$$

Se $N_\uparrow$ denota o número de spins up e $N_\downarrow$ o número de spins down, então

$$M = N_\uparrow - N_\downarrow, \quad N = N_\uparrow + N_\downarrow \tag{2}$$

Ou seja,

$$N_\uparrow = \frac{N+M}{2}, \quad N_\downarrow = \frac{N-M}{2} \tag{3}$$

A cada passo de tempo:

1. Seleciona-se aleatoriamente uma partícula do sistema
2. Com probabilidade $p = \frac{1}{2}$:
   - Se o spin estava up ($+1$), torna-se down (-1): flip $\uparrow\Rightarrow\downarrow$
   - Se o spin estava down (-1), torna-se up ($+1$): flip $\downarrow\Rightarrow\uparrow$

2 Formalismo

Pelas regras de simulação obtemos:

1. A probabilidade de um spin $\uparrow$ ser selecionado depende da proporção de spins $\uparrow$ no sistema:

$$P(\uparrow\Rightarrow\downarrow) = \frac{N_\uparrow}{N} = \frac{N+M}{2N} \tag{4}$$

2. A probabilidade de um spin $\downarrow$ ser selecionado depende da proporção de spins $\downarrow$ no sistema:

$$P(\downarrow\Rightarrow\uparrow) = \frac{N_\downarrow}{N} = \frac{N-M}{2N} \tag{5}$$

Para um flip $\downarrow\Rightarrow\uparrow$ temos $\Delta N_\uparrow = 1$ e $\Delta N_\downarrow = -1$ logo a variação da magnetização é:

$$\Delta M_+ = \Delta N_\uparrow - \Delta N_\downarrow = (+1) - (-1) = +2 \tag{6}$$

Para um flip $\uparrow\Rightarrow\downarrow$ temos $\Delta N_\uparrow = -1$ e $\Delta N_\downarrow = 1$ logo a variação da magnetização é:

$$\Delta M_- = \Delta N_\uparrow - \Delta N_\downarrow = (-1) - (+1) = -2 \tag{7}$$

Assim, a magnetização no tempo $t+1$, M_{t+1}, pode ser expressa em termos de M_t da seguinte forma:

$$M_{t+1} = \begin{cases} M_t - 2 & \text{com probabilidade } P_- = \frac{N+M_t}{2N} \\ M_t + 2 & \text{com probabilidade } P_+ = \frac{N-M_t}{2N} \end{cases} \tag{8}$$

O valor médio da magnetização no tempo $t+1$ é:

$$\langle M_{t+1}\rangle = (M_t + \Delta M_+)P_+ + (M_t + \Delta M_-)P_- \tag{9}$$

$$= (M_t + 2)\frac{N - M_t}{2N} + (M_t - 2)\frac{N + M_t}{2N} \tag{10}$$

$$= M_t\left(1 - \frac{2}{N}\right) \tag{11}$$

Esta é uma equação de recorrência linear cuja solução é

$$\langle M_t\rangle = M_0\left(1 - \frac{2}{N}\right)^t \tag{12}$$

onde M_0 é a magnetização inicial. Podemos considerar a magnetização média dada por $m = M/N$, logo (13) torna-se

$$\langle m_t\rangle = m_0\left(1 - \frac{2}{N}\right)^t \tag{13}$$

Este resultado tem uma interpretação física clara: a ausência de um campo magnético externo e as flutuações estocásticas do sistema fazem com que o paramagneto relaxe para um estado de magnetização nula ao longo do tempo.

3 Referências

1 KONONOVICIUS, A.; RUSECKAS, J. Stochastic dynamics of N correlated binary variables and non-extensive statistical mechanics. Physics Letters A, v. 380, n. 18-19, p. 1582-1588, 2016. https://juliusruseckas.github.io/publications/PhysLettA_380_1582.pdf