UNIVERSITETI POLITEKNIK – TIRANE
Fakulteti i Teknologjise se Informacionit
Sheshi Nene Tereza, 1 – Tirane
Tel/Fax : +355 4 2278 159

Laborator 4

Tranformimi Z dhe transformimi i kundert

Studenti:
Piro Gjikdhima

Pranoi:
MSc. Erison Ballasheni

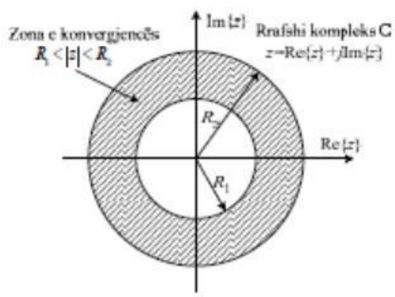
1.Hyrje

Transformimi Z perdoret per sistemet diskrete ne kohe. Tranformimi Z mundeson qe shume veprime ne sinjale te kryhen me operacione te thjeshta algjebrike.

Tranformimi Z i sinjalit x($_{k}$) do te shenohet me X(z) dhe do te percaktohet me:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$ ku z eshte numer i plote

Per cdo sekuence te dhene, nje grup vlerash per Z per te cilat transformimi Z konvergjon, quhet zona e konvergjences. Pra, X(z) eshte transformimi Z i x(k), i cili zakonisht eshte i definuar (d.m.th ka vlera te fundme) ne nje unaze ne rrafshin kompleks z. Variabli kompleks z quhet ndryshe dhe frekuence komplekse e cila shprehet si $z=|z|e^{jw}$ ku z eshte magnituda dhe w eshte frekuenca reale.



Zona e konvergjences eshte nje unaze ose nje disk ne planin z me qender ne origjine. Transformimi Furie i x(k) konvergjon atehere dhe vetem atehere kur zona e konvergjences e transformimit z eshte rrethi njesi. $|z| = 1$. Pozicionet e poleve te X(z) percaktojne zonen e konvergjences, e cila kufizohet nga polet, por nuk permban asnje pol.

Nese x(k) eshte nje sekuence me zgjatje te fundme, per shembull nje sekuence qe eshte zero pervec ne nje interval te fundem $-\infty < k < N2 < \infty$, atehere zona e konvergjences eshte i gjithe plani z, pervec z=0, ose z=∞.

Nese x(k) eshte nje sinjal me sekuenca te djathta, pra qe eshte zero per $k < N1 < \infty$, zona e konvergjences zgjatet jashte polit me te madh drejt polit z=∞.

Nese x(k) eshte nje sinjal me sekuenca te majta, pra qe eshte zero per $k > N2 > -\infty$, zona e konvergjences zgjatet brenda drejt polit me te vogel deri tek z = 0.

Zona e konvergjences duhet te jete nje zone e nderlidhur/kompakte, pra nuk mund te perbehet nga dy apo me shume unaza te ndara (rreth me qender ne origjine).

Transformimi i kundert Z i nje funksioni kompleks X(z) jepet me formulen:

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

Ku C eshte sektori kunderorar i cili rrethon origjinen dhe shtrihet ne zonen e konvergjences se transformimit Z.

2. Objektivi

Objektivi i kesaj pune laboratori eshte studimi i transformimit Z dhe i kundert Z te furie per sinjale diskrete, implementimi i tyre ne MATLAB dhe percaktimi i zones se konvergjences.

3. Qellimi

Ky laborator ka per qellim percaktimin e transformimit Z te cdo sinjali te dhene, gjetjen e transformimit te kundert Z, si dhe paraqitjen grafikisht te poleve dhe zerove ne diagramen Pol_Zero duke perdorur MATLAB-in.

4. Zhvillimi i punes

4.1 Transformimi Z

a) Ushtrim

Gjeni transformin Z te funksionit te meposhtem:

$$X(\mathrm{n}) = \frac{1}{4^n} u(n)$$

Per gjetjen e transformit Z do te perdoret kodi i meposhtem ne MATLAB:

```
>> syms z n
>> ztrans(1/4^n)
```

Cili eshte transformimi Z qe perftuat? Llogarisni zonen e konvergjences.

ans = z/(z - 1/4)
Kjo formule eshte e vertete vetem per (¼)/n<1 qe do te thote |n|>1/4;

b) Ushtrim

Le te jete $X_1(z) = 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2}$ dhe $X_2(z) = 3 + 4z^{-1} + 5z^{-2} + 6z^{-3}$

Percakto: $X_3(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$

X_1 dhe X_2 shenohen si me poshte:
$X_1(z)=\{2,3,4\}$ dhe $X_2(z)=\{3,4,5,6\}$

Shumezimi i dy sekuencave do te realizohet permes funksionit te konvolucionit *conv*, te cilin e kemi perdorur ne Laboratorin 2. Konvolucioni i ketyre dy sekuencave do te jape koeficientet e prodhimit polinomial te kerkuar.

Kodi qe do te perdoret ne MATLAB:

```
>> x1=[2,3,4]; x2=[3,4,5,6];
>> x3= conv(x1,x2)
```

Cila eshte pergjigja qe moret? Duke perdorur koeficientet e prodhimit polinomial te kerkuar paraqisni ne forme analitike funksionin $X_3(z)$.

x3 =[6 17 34 43 38 24]

$X3(z) = 6 + 17z^{-1} + 34z^{-2} + 43z^{-3} + 38z^{-4} + 24z^{-5}$

c) Ushtrim

Le te jete $X_1(z) = z + 2 + 3z^{-1}$ dhe $X_2(z) = 2z^2 + 4z + 3 + 5z^{-1}$

Percakto: $X_3(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$

X_1 dhe X_2 shenohen si me poshte:
$X_1(z)=\{1,\underset{\uparrow}{2},3\}$ dhe $X_2(z)=\{2,4,\underset{\uparrow}{3},5\}$

Shumezimi i dy sekuencave do te realizohet permes funksionit te konvolucionit *conv_m* te cilin e krijuam ne Laboratorin 2.

Ne rast se funksioni nuk eshte i ruajtur ne kompjuterin tuaj, krijoni dhe njehere funksionin e meposhtem ne te njejten forme sic jane krijuar funksionet gjate puneve te meparshme te laboratorit.

Funksioni conv_m:

```
function [y,ny]=conv_m(x,nx,h,nh)
nyb=nx(1)+nh(1);
nye=nx(length(x))+nh(length(h)); ny=[nyb:nye];
y=conv(x,h); end
```

Pasi te keni implementuar funksionin, shkruani kodin me poshte ne MATLAB.

```
>> x1 = [1,2,3];
>> n1 = [-1:1];
>> x2 = [2,4,3,5];
>> n2 = [-2:1];
>> [x3,n3] = conv_m(x1,n1,x2,n2)
```

Cila eshte pergjigja qe moret? Duke perdorur koeficientet e prodhimit polinomial te kerkuar paraqisni ne forme analitike funksionin $X_3(z)$.

```
x3 =

   2    8    17    23    19    15

n3 =

  -3   -2   -1     0     1     2
```

$$X_3(z)=\frac{2+8z\text{^}-1+17z\text{^}-2+23z\text{^}-3+19z\text{^}-4+15z\text{^}-5}{-3-2z\text{^}-1-1z\text{^}-2+1z\text{^}-3+2z\text{^}-4}$$

d) Ushtrim

Diagrama pol zero per nje funksion ne domain-in Z:

Komanda *zplane(b,a)* llogarit diagamen pol zero te nje funksioni z, *root(a)* perdoret per te shfaqur vleren e polit dhe *root(b)* per te shfaqur vleren e zeros.

Ndertoni diagramen pol zero per transformimin Z te meposhtem:

$$X(z)=\frac{Z^{-2}+Z^{-1}}{1-2Z^{-1}+3Z^{-2}}$$

Per ndertimin e diagrames perdoret kodi i meposhtem ne MATLAB:

```
b=[0 1 1 ]
 a= [1 -2 +3]
  roots(a)
  roots(b)
zplane(b,a)
```

Sa zero dhe pole ka funksioni dhe cilet jane ato? Ndertoni diagramen pol zero te perftuar.

b = 0 1 1

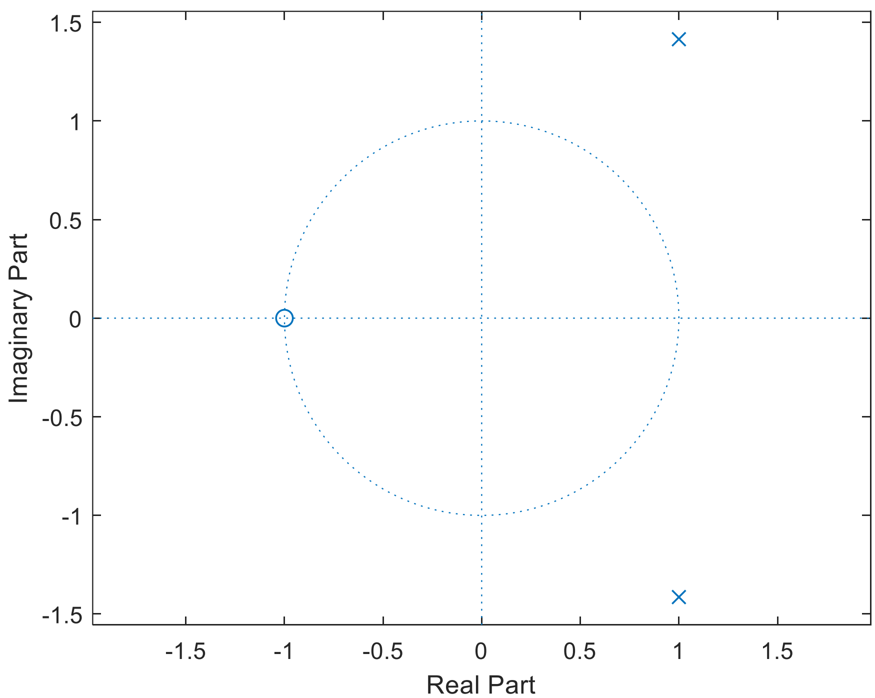
a = 1 -2 3

ans =

1.0000 + 1.4142i

1.0000 - 1.4142i

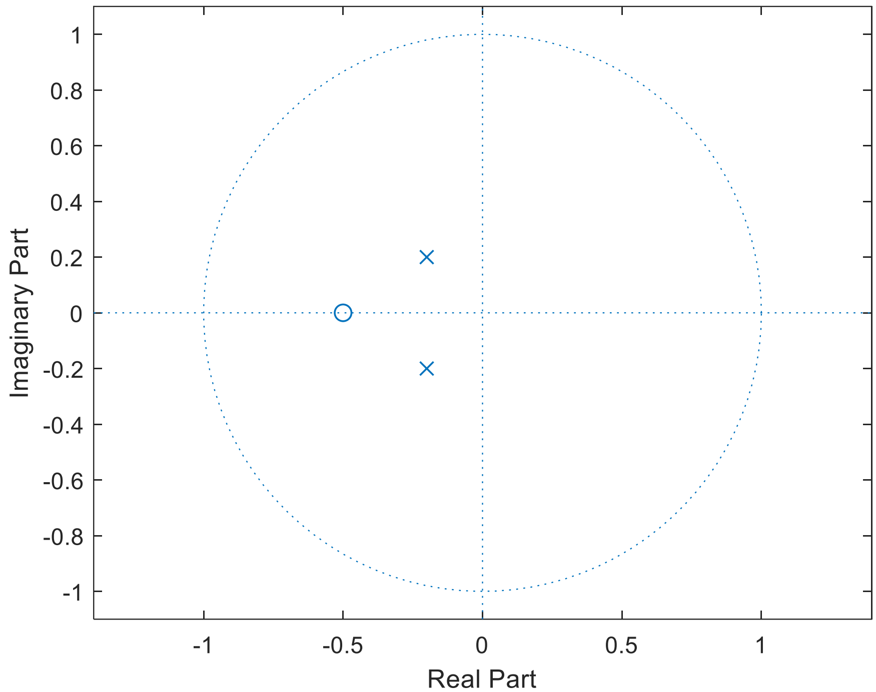
ans = -1



Te njejten procedure ndiqni dhe per:

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

```
b=[0 1 1/2 ]
 a= [1 +2/5 +2/25]
  roots(a)
  roots(b)
zplane(b,a)
```



4.2 Transformimi i kundert Z

a) Ushtrim

Jepet transformimi Z i H(k) si me poshte:

$$H(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

Kodi i meposhtem ne MATLAB do te perdoret per llogaritjen e koeficienteve:

```
num=[0  1]
den=[3-4  1]
[r,p,k]=residuez(num,den)
```

Cila eshte dalja qe merrni? Bazuar ne koeficientet e marre percaktoni H(n).

```
R =
   0.5000
  -0.5000
p =

   1.0000
   0.3333
C =

    []
```

Dalja:

$$H(z) = \frac{0.5}{1 - z^{-1}} - \frac{0.5}{1 - (1/3)\, z^{-}} 2$$

H(n)= (3^(1/2)*(-3^(1/2)/3)^(n - 1))/12 - (3^(1/2)*(3^(1/2)/3)^(n - 1))/12 + ½

b) Ushtrim

Jepet transformimi Z i H(k) si me poshte:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0.9z^{-1})^2 (1 + 0.9z^{-1})}$$

Kodi i meposhtem ne MATLAB do te perdoret per llogaritjen e koeficienteve:

```
num=[1]; den=poly([0.9  0.9  -0.9]);
[r,p,k]=residuez(num,den)
```

Cila eshte dalja qe merrni? Bazuar ne koeficientet e marre percaktoni H(k).

Per te gjetur transformimin e kundert Z ne MATLAB do te perdoret funksioni iztrans. >>syms z n
>>iztrans(H(z))
Zevendesoni H(z) me formulen e mesiperme.

```
r =
  0.2500 + 0.0000i
  0.2500 + 0.0000i
  0.5000 - 0.0000i
p =
 -0.9000 + 0.0000i
  0.9000 + 0.0000i
  0.9000 - 0.0000i
k =
    []
```

$$H(z) = \frac{0.25}{1-0.9z^{-1}} + \frac{0.5}{(1-0.9z^{-1})^2} + \frac{0.25}{1+0.9z^{-1}}$$

H(n)= (-9/10)^n/4 + (5*(9/10)^n)/4 + ((9/10)^n*(n - 1))/2

c) Ushtrim

Llogarisni transformimin e kundert Z te funksionit te meposhtem:

$$X(z) = \frac{1}{(1-0.9z^{-1})^2(1+0.9z^{-1})} \qquad |z| > 0.9$$

Kodi ne MATLAB qe do te perdoret eshte si me poshte:

```
b=1; a=poly([0.9, 0.9, -0.9])
[R,p,C]=residuez(b,a)
```

Nga llogaritjet kemi:

Nga ciftet e tabeles se transformimit z kemi:

$$x(n) = 0.25(0.9)^n u(n) + \frac{5}{9}(n+1)(0.9)^{n+1}u(n+1) + 0.25(-0.9)^n u(n)$$

Qe pas thjeshtimeve del:

$$x(n) = 0.75(0.9)^n u(n) + 0.5n(0.9)^n u(n) + 0.25(-0.9)^n u(n)$$

Cila eshte dalja qe merrni?

R = 0.2500 0.5000 0.2500
p = 0.9000 0.9000 -0.9000
c = []

$$X(z) = \frac{0.25}{1-0.9z^{-1}} + \frac{0.5}{(1-0.9z^{-1})^2} + \frac{0.25}{1+0.9z^{-1}}, \qquad |z| > 0.9$$

$$= \frac{0.25}{1-0.9z^{-1}} + \frac{0.5}{0.9}z\frac{(0.9z^{-1})}{(1-0.9z^{-1})^2} + \frac{0.25}{1+0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9$$

Per te kontrolluar nese shprehja e mesiperme x(n) eshte e sakte, le te verifikojme 8 elementet e pare te sekuences (n) qe i korrespondojne X(z).
Verifikimi ne MATLAB behet si me poshte:
Ne rast se ju mungon funksioni impseq ne kompjuterin tuaj, krijoni dhe njeher funksionin te perdorur ne Laboratorin1.

```
% Funksioni per te gjeneruar x(n)=delta(n-no), n1<=n<=n2
function [x,n]=impseq(no,n1,n2)

n=[n1:n2];
x=[(n-no) == 0];

end
```

```
[delta,n]=impseq(0,0,7);
x=filter(b,a,delta) % sekuenca verifikuese
x=(0.75)*(0.9).^n+(0.5)*n.*(0.9).^n+(0.25)*(-0.9).^n  %sekuenca pas thjeshtimeve
```

Tregoni daljet e marre. A jane keto rezultate te njejta per te dyja rastet?

```
x =

   1.0000   0.9000   1.6200   1.4580   1.9683   1.7715   2.1258   1.9132


x =

   1.0000   0.9000   1.6200   1.4580   1.9683   1.7715   2.1258   1.9132
```

Po, jane e njejta.

d) **Ushtrim**

Konsiderojme ekuacionin me diferenca:

$$6y(n) - 5y(n-1) + y(n-2) = \frac{1}{4^n}, n \geq 0$$

Dhe y(n-1)=1, y(n-2)=0

Duke marre transformimin Z te seciles prej temave do te kemi:

$$6Y\,(z) - 5(z^{-1}Y\,(z) + \;y(-1)) + (z^{-2}Y\,(z) + z^{-1}\,y(-1) + y(-2)) = \frac{4z}{4\,z-1}$$

$$(6 - 5z^{-1} + z^{-2})Y\,(z) = \frac{4z}{4\,z-1} - z^{-1} + 5z^{-1}$$

$$Y\,(z) = (\,\frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}})(\frac{4z}{4z-1} - z^{-1} + 5z^{-1})$$

Transformimi i kundert z llogaritet si me poshte:

```
>> syms z n
>> iztrans((4*z/(4*z-1)-z^-1+5)/(6-5*z^-1+z^-2))
```

Ne baze te rezultatit qe moret tregoni sa eshte y(k).

```
ans =
y(k)=(5*(1/2)^n)/2 - 2*(1/3)^n + (1/4)^n/2
```