Các chứng minh trên lớp có đề cập: (riêng phần nghiệm tối ưu thầy lướt hơi nhanh nên không để ý @@)

1. Chứng minh đạo hàm theo hướng, mệnh đề 1.2 (Trang 14), quyển 1
2. Chứng minh nếu f là hàm afin ($f(x) = \langle c, x\rangle + \alpha$) thì:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mà } \lambda + \mu = 1 \Rightarrow f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \langle c, \lambda x + \mu y\rangle + \alpha \\ &= \langle c, \lambda x\rangle + \langle c, \mu y\rangle + \alpha \\ &= \lambda\langle c, x\rangle + \mu\langle c, y\rangle + (\lambda + \mu)\alpha \\ &= \lambda\langle c, x\rangle + \lambda\alpha + \mu\langle c, y\rangle + \mu\alpha \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

1 Lý thuyết + Bài tập

1. Nêu định nghĩa tập afine, lồi, hàm lồi và các tính chất cơ bản

- Tập afin: Nếu M chứa trọn cả **đường thẳng** đi qua hai điểm bất kì thuộc M, tức là:

$$\forall x_1, x_2 \in M,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in M$$

  - Tổ hợp afin:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ và } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

  - Bao afin của E: Giao của tất cả các tập afin chứa E, cũng là tập afin nhỏ nhất chứa E, ký hiệu aff$E$
- Tập lồi: Nếu nó chứa trọn **đoạn thẳng** nối hai điểm bất kỳ thuộc nó, tức:

$$\forall x_1, x_2 \in M,\ 0 \le \lambda \le 1:\ \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in M$$

  - Nếu M là tập lồi thì αM cũng là tập lồi.
  - Nếu M_1, M_2 là hai tập lồi thì $M_1 + M_2$ cũng là tập lồi.
  - Một tập là tập lồi khi và chỉ khi nó chứa tất cả các tổ hợp lồi của những phần tử thuộc nó.
  - Tổ hợp lồi:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \ge 0 \text{ và } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

- Hàm lồi: Hàm f được xác định trên tập $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

- Các tính chất của hàm lồi:
  (a) Hàm lồi thì epif là tập lồi
  (b) f là hàm lồi thì tập mức dưới $L_\alpha(f)$ cũng là tập lồi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$
  (c) $f'(x_0, d) \leq f(x_0 + d) - f(x_0)$
  (d) f khả vi trên tập lồi mở:

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

  (e) Ma trận Hesse nửa xác định dương (xác định dương thì bỏ dấu =):

$$y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

  (f) Cho hàm toàn phương:

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Qx \rangle + \langle x, a \rangle + \alpha$$

  khi đó, f là hàm lồi khi Q là ma trận nửa xác định dương.

> Một số bài tập: bài 1, 2, 3, 13, 14, 15, **16, 17**, 19, 20 (Trang 36 − 38).

2. Với dữ kiện đã cho, phát biểu mô hình bài toán tối ưu (Trong sách có đề cập, chương 2, trang 39 − 50).

3. Phát biểu điều kiện cần và điền kiện đủ của sự tồn tại điểm cực tiểu của bài toán khả vi không ràng buộc.

   - Điều kiện cần: Cho f xác định, khả vi trên $\mathbb{R}^n$. Nếu $x^* \in \mathbb{R}^n$ là nghiệm cực tiểu địa phương của bài toán (P^{krb}) thì $\nabla f(x^*) = 0$.
   - Điều kiện đủ: Giả sử f khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó:
     – Nếu $x^* \in \mathbb{R}^n$ là điểm cực tiểu địa phương của f trên $\mathbb{R}^n$ khi:

$$\nabla f(x^*) = 0$$
$$\nabla^2 f(x^*) \text{ nửa xác định dương}$$

     – Trong trường hợp $\nabla^2 f(x^*)$ xác định dương thì x^* là điểm cực tiểu địa phương chặt của f.

4. Trình bày thuật toán gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia và thủ tục quay lùi. (Xem lại các bước trong sách trang 231, quyển 2).

> Một số bài tập: bài 5, 6, **7, 11** (Trang 289 − 291).