Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 3 tháng 10 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu

0.

Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

0.1 Thuộc tính của hàm số

Trước phần này, chúng ta mới chỉ xét nghiệm của hàm và hình dạng của hàm số thông qua đồ thị. Nhìn vào đồ thị, chúng ta có thể thấy được hàm số có nhiều thành phần đặc biệt. Ở trong phần này, chúng ta sẽ gọi tên và khảo sát những thành phần đặc biệt đó.

0.1.1 Hàm bị chặn

Con người luôn có mong muốn tìm ra những kì quan vĩ đại, những kết quả ngày càng lớn. Đi kèm với đó là khao khát nắm trọn được sự vô tận trong lòng bàn tay. Tuy nhiên, không giống như lí thuyết, vùng đất mà con người có thể thỏa trí tưởng tượng và bay bổng, nơi mà con người có thể đếm đến vô tận và xa hơn cả thế, địa điểm mà vô tận chỉ tóm gọn trong "số 8 nằm ngang", thực tiễn không cho phép con người đi đến vô tận. Không có cái gì mãi phồng lên vô cùng lớn hay thu bé vô cùng nhỏ. Nói ngắn gọn, mọi thứ đều bị chặn.

Và, tuy thuộc về phạm trù lí thuyết, một số hàm số vẫn bị chặn. Xét trên tập số thực, một hàm số một biến f có tập xác định D được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại $M \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$. Tương tự, f được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại $m \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$.

0.1.2 Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Khái niệm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất không phải là một khái niệm mới. Đây là một khái niệm được sử dụng rộng rãi trong toán học, và chúng ta đã gặp qua nó rất nhiều trong chương trình học trung học phổ thông. Hơn nữa, bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất luôn là bài toán mang tính thực tế cao. Phần này sẽ nhắc lại định nghĩa và sẽ đưa thêm một số bài tập để rèn luyện.

Cho một hàm f phụ thuộc vào biến x với tập xác định là D. y_M được gọi là **giá trị lớn nhất** của f nếu tồn tại $x_M \in D$ sao cho $\boldsymbol{y_M = f(x_M)}$ và $\boldsymbol{f(x) \leq y_M}$ **với mọi** $\boldsymbol{x \in D}$. Giá trị x_M được gọi là **điểm đạt giá trị lớn nhất** của f.

Một cách tương tự, chúng ta cũng định nghĩa được giá trị nhỏ nhất. y_m được gọi là **giá trị nhỏ nhất** của f nếu tồn tại $x_m \in D$ sao cho $\boldsymbol{y_m = f(x_m)}$ và $\boldsymbol{f(x) \geq y_m}$ **với mọi** $\boldsymbol{x \in D}$. Giá trị x_m được gọi là **điểm đạt giá trị nhỏ nhất** của f.

Thông thường, người ta sẽ coi như giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là hàm và có kí hiệu như sau:

$$\boldsymbol{\max_D(f) = y_M} \qquad \text{và} \qquad \boldsymbol{\min_D(f) = y_m}.$$

Sẽ có một vài hàm mà thông thường chúng ta sẽ nói rằng giá trị lớn nhất (hay giá trị nhỏ nhất) là vô cùng. Khi này, chúng ta sẽ cần phải có một định nghĩa đặc biệt. Có thể viết

$$\boldsymbol{\max_D(f) = \infty}$$

nếu với mọi $y \in \mathbb{R}$ thì tồn tại x sao cho $f(x) > y$. Tương tự,

$$\boldsymbol{\min_D(f) = -\infty}$$

nếu với mọi $y \in \mathbb{R}$ thì tồn tại x sao cho $f(x) < y$.

Bài 1: Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm f được định nghĩa ở sau, nếu có. Nếu không, đưa ra lí do tại sao.

1. $f(x) = x^4 - 10x^2 - 2$ với f xác định khi $x \in [0; 9]$;
2.

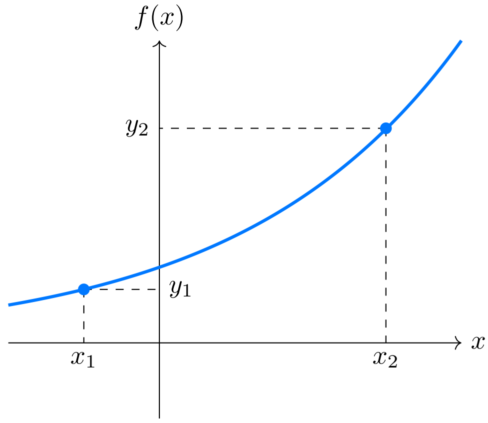
0.1.3 Hàm đồng biến và nghịch biến

Thông qua biểu diễn hình học của một hàm số, người ta sẽ thấy hàm số tăng và giảm theo giá trị đầu vào. Từ đó, xây dựng được hai khái niệm là hàm đồng biến và hàm nghịch biến. Cụ thể, f được gọi là **đồng biến** trên tập D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$, có

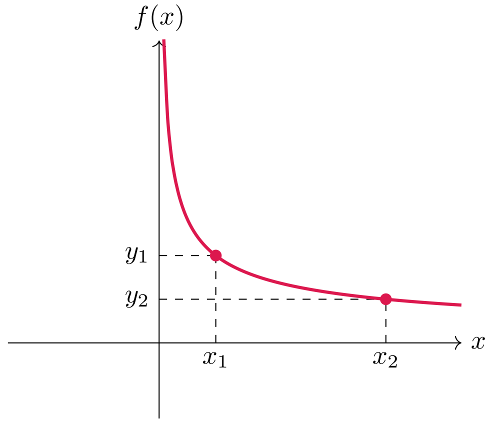
$$\boldsymbol{x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)}.$$

Bằng một định nghĩa tương tự, f được gọi là **nghịch biến** trên tập D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$, có

$$\boldsymbol{x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)}.$$



Hình 0.1: Ví dụ hàm f đồng biến



Hình 0.2: Ví dụ hàm f nghịch biến

Bạn đọc hoàn toàn có thể thu hẹp định nghĩa này từ tập D thành một khoảng $(a; b)$. Lí do để chỉ xét trong một khoảng như vậy là từ ứng dụng trong thực tiễn, ít khi nào người ta xét sự tăng giảm của hàm số trên nhiều khoảng tách biệt với nhau.

Bài 2: Chứng minh rằng

1. $2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$;
2. $(x-1)^2$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$;
3. $|x| \cdot ||x-1|-1|$ đồng biến trên $(0; 1)$ và nghịch biến trên $(1; 2)$;
4. $x^2 + mx + \lfloor x \rfloor$ đồng biến trên $\left[-\frac{m}{2}; \infty\right)$ nếu coi $m \in \mathbb{R}$ là tham số thực.

Lời giải bài 2:

1. Xét hai giá trị $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho $x_1 < x_2$. Khi này, hiển nhiên có được $2x_1 < 2x_2$. Do đó, kết luận được $2x$ là đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2. Xét hai giá trị $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ sao cho $x_1 < x_2$. Thực hiện một số biến đổi:

$$\begin{aligned} & x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \\ \iff & x_1 - 1 > x_2 - 1 > 0 \\ \implies & \begin{cases} (x_1-1)^2 > (x_1-1)(x_2-1) & \text{(cùng nhân hai vế với } x_1 - 1 \text{ dương)} \\ (x_1-1)(x_2-1) > (x_2-1)^2 & \text{(cùng nhân hai vế với } x_2 - 1 \text{ dương)} \end{cases} \\ \implies & (x_1-1)^2 > (x_2-1)^2. \end{aligned}$$

Chúng ta dễ dàng thấy điều phải chứng minh.

3. Trên khoảng $(0; 1)$, $|x| = x$ và $||x-1|-1| = |1-x-1| = |-x| = x$. Do đó, $|x| \cdot ||x-1|-1| = x^2$. Khi này, với $0 < x_1 < x_2 < 1$, dễ dàng có được $x_1^2 < x_2^2$. Do đó, $|x| \cdot ||x-1|-1|$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Ngoài ra, trên khoảng $(1; 2)$, $|x| = x$ giống như trước. Tuy nhiên, $||x-1|-1| = |x-1-1| = |x-2| = 2-x$. Do đó, với $1 < x_1 < x_2 < 2$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} & 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ \implies & (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 \\ \iff & -(x_1-1)^2 > -(x_2-1)^2 \\ \iff & -x_1^2 + 2x_1 - 1 > -x_2^2 + 2x_2 - 1 \\ \iff & x_1(2-x_1) > x_2(2-x_2) \\ \iff & |x_1| \cdot ||x_1-1|-1| > |x_2| \cdot ||x_2-1|-1|. \end{aligned}$$

Vậy $|x| \cdot ||x-1|-1|$ nghịch biến trên $(1; 2)$. Chúng ta có điều phải chứng minh.

4. Với $-\frac{m}{2} \leq x_1 < x_2$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 + \frac{m}{2} < x_2 + \frac{m}{2} \\ \Longrightarrow &\left(x_1 + \frac{m}{2}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{m}{2}\right)^2 \\ \Longleftrightarrow &\; x_1^2 + mx_1 < x_2^2 + mx_2. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Đặt $\begin{cases} a = \lfloor x_1 \rfloor \\ b = \lfloor x_2 \rfloor \end{cases}$. Từ đó, có thể khẳng định được a và b là hai số nguyên. Giả sử $a > b$. Để ý rằng, do $\begin{cases} a \leq x_1 < a+1 \\ b \leq x_2 < b+1 \end{cases}$ cho nên có thể viết

$$\begin{cases} x_1 = a + l_a \\ x_2 = b + l_b \end{cases}$$

với phần lẻ l_a và l_b nằm trong nửa đoạn $[0;1)$. Với $a > b$ là số nguyên, có thể suy ra được $a \geq b+1$. Từ đó, có chuỗi

$$a + l_a \geq a \geq b + 1 > b + l_b \implies x_1 > x_2.$$

Tuy nhiên, điều này trái với giả thiết trước đó. Cho nên, nếu để $x_1 < x_2$ thì

$$\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor \tag{0.2}$$

.

Kết hợp (0.1) và (0.2), cộng vế theo vế để có

$$x_1^2 + mx_1 + \lfloor x_1 \rfloor < x_2^2 + mx_2 + \lfloor x_2 \rfloor.$$

Chúng ta đã chứng minh được tính đồng biến như yêu cầu.

Tài liệu tham khảo

[1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.