# Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 16 tháng 10 năm 2025

# Mục lục

# Lời giới thiệu

# 0.

# Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

# 0.1 Hệ các số thực

## 0.1.1 Khai căn

Nhắc tới số vô tỉ $\sqrt{2}$, chúng ta cần phải đề cập tới **phép khai căn**. Có câu nói rằng ngược của phép cộng là phép trừ, ngược của phép nhân là phép chia, ngược của phép lũy thừa là phép khai căn.

Cho $x$ là một số thực không âm, và $n$ là một số nguyên dương. Chúng ta sẽ thống nhất với nhau rằng tồn tại duy nhất một số thực không âm $y$ thỏa mãn $y^n = x$. Từ đây, chúng ta có định nghĩa phép khai căn như sau:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x \qquad (y \geq 0)\,.}$$

$n$ được gọi là **bậc** của phép khai căn. Nếu $n = 2$, người ta thường viết tắt $\boldsymbol{\sqrt{x}}$ thay vì $\boldsymbol{\sqrt[2]{x}}$.

Với $m,n \in \mathbb{Z}^+$ và $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ bất kì, có những tính chất như sau:

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x}; \\ \sqrt[n]{xy} &= \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}; \\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad (y \neq 0)\,. \end{aligned}}$$

Giống như với số thực, chúng ta sẽ khẳng định tính chính xác của phép khai căn này nếu có cơ hội.

# 0.2 Hàm số đại số một biến và các phép biến đổi trên hàm

## 0.2.1 Hàm căn thức

**Hàm căn thức** là một trong những hàm số cơ bản trong toán học, được định nghĩa dựa trên phép căn thức của số thực như sau:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{x}}$$

trong đó $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ và $n \in \mathbb{Z}^+$. Nếu $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$ là số lẻ, thì chúng ta có mở rộng của hàm căn thức trên toàn bộ tập số thực:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \sqrt[2k+1]{x} \text{ nếu } x \geq 0 \\ -\sqrt[2k+1]{-x} \text{ nếu } x < 0 \end{cases}}.$$

Tối giản hóa định nghĩa trên, có thể viết $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ trên toàn bộ $x$ thực.

Khi hợp hai hàm số $f \circ g$ mà $f$ là hàm căn thức, có $f \circ g(x) = \sqrt[n]{g(x)}$. Khi này, $g(x)$ có thể được gọi là **biểu thức dưới dấu căn** hay **biểu thức lấy căn**.

**Bài 1:** Giải các phương trình sau với ẩn $x$ thực

1. $\sqrt{x} = 2$;
2. $\sqrt{x-2} = -2$;
3. $\sqrt[3]{x^5+1} = -2$;
4. $\sqrt[4]{x^4 - 2x^2 + 8} = -x$;
5. $\sqrt{x^3 - 3x + 1} = \sqrt{x^3 + 2x - 6}$;
6. $\sqrt[4]{x^4+1} = \sqrt[4]{x^4 - 3x + 1}$;
7. $2\sqrt{x^2 - 9} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$;
8. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 5$;
9. $\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} = \sqrt{x(x-3)}$;
10. $\sqrt{x+3} = \sqrt[3]{5x+3}$;.

**Lời giải bài 1:**

1. Tập xác định của phương trình là $[0; \infty)$. Theo định nghĩa của phép khai căn:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} = 2 \\ \iff\ & x = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

Vậy $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Theo định nghĩa của phép khai căn, với căn bậc chẵn, chúng ta có $\sqrt{x-2} \geq 0$. Do đó, phương trình vô nghiệm.

3. Thực hiện biến đổi đại số:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^5+1} &= -2 \\ \iff x^5 + 1 &= (-2)^3 = -8 \\ \iff x^5 &= -9 \\ \iff x &= -\sqrt[5]{9}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{-\sqrt[5]{9}\right\}$.

4.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^4 - 2x^2 + 8} &= -x \\ \implies x^4 - 2x^2 + 8 &= (-x)^4 = x^4 \\ \implies 8 - 2x^2 &= 0 \\ \implies x &\in \{-2; 2\}. \end{aligned}$$

Kiểm tra trực tiếp, thấy $x = -2$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{2\}$.

5.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 - 3x + 1} &= \sqrt{x^3 + 2x - 6} \\ \implies x^3 - 3x + 1 &= x^3 + 2x - 6 \\ \iff x &= \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, khi kiểm tra $x = \frac{7}{5}$ thì $x^3 - 3x + 1 = -\frac{57}{125}$ là một số âm, không thỏa mãn điều kiện xác định của $\sqrt{x^3 - 3x + 1}$. Qua đó, chúng ta có tập nghiệm của phương trình là $\emptyset$.

6.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^4 + 1} &= \sqrt[4]{x^4 - 3x + 1} \\ \implies x^4 + 1 &= x^4 - 3x + 1 \\ \iff x &= 0. \end{aligned}$$

Kiểm tra lại, thấy cả hai vế đều bằng 1 khi $x = 0$. Cho nên tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

7. Giống như nhiều bài tập trước đó, bình phương lên hai vế để khử căn để được

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{x^2-9}\right)^2 &= \left((x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\right)^2 \\ \implies 4\left(x^2 - 9\right) &= (x+5)^2 \frac{x+3}{x-3} \\ \implies 4\left(x^2-9\right)(x-3) &= (x+5)^2(x+3) \\ \implies 4x^3 - 12x^2 - 36x + 108 &= x^3 + 13x^2 + 55x + 75 \\ \iff 3x^3 - 25x^2 - 91x + 33 &= 0 \\ \iff (x-11)(x+3)(3x-1) &= 0 \\ \iff x &\in \left\{11; -3; \frac{1}{3}\right\}. \end{aligned}$$

Thử lại, chúng ta kết luận được các nghiệm của phương trình là $x \in \{11; -3\}$.

8. Nếu $x$ thỏa mãn phương trình $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 5$, thì cần phải có $\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x + 9 \geq 0 \end{cases}$. Ngoài ra, có

$\begin{cases} \sqrt{x+4} \geq 0 \\ \sqrt{x+9} \geq 0 \end{cases}$ nên $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} \geq 0$. Do đó, bình phương hai vế để có phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9}\right)^2 = 5^2 \\
\iff &\ x + 4 + 2\sqrt{x+4}\sqrt{x+9} + x + 9 = 25 \\
\iff &\ 2\sqrt{(x+4)(x+9)} = 12 \qquad \left(\sqrt{x+4}\sqrt{x+9} = \sqrt{(x+4)(x+9)} \text{ do cả hai biểu thức dưới căn đều không âm.}\right) \\
\iff &\ \sqrt{(x+4)(x+9)} = 6 \\
\iff &\ (x+4)(x+9) = 6^2 = 36 \\
\iff &\ x^2 + 13x + 36 = 0 \\
\iff &\ x(x+13) = 0 \\
\iff &\ x = 0 \qquad (x + 13 > x + 4 \geq 0.).
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

9.

# Tài liệu tham khảo


[1] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review.* Courier Corporation, 2000.

[2] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis.* Springer Science & Business Media, 2011.