Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 17 tháng 11 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu **3**

0 Kiến thức toán học nền tảng **4**

0.1 Đồ thị . . . 5

0.1.1 Trục số một chiều . . . 5

0.1.2 Mặt phẳng hai chiều và hệ tọa độ vuông góc . . . 7

0.1.3 Không gian ba chiều và hướng tam diện . . . 9

Lời giới thiệu

0.

Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

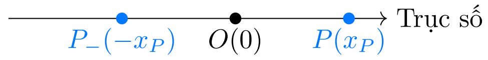
[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

0.1 Đồ thị

0.1.1 Trục số một chiều

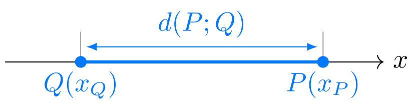
Đồ thị là cầu nối đầu tiên giữa đại số và hình học mà chắc là bạn đọc đã được học. Thông thường, nhắc đến đồ thị, chúng thường được dùng để biểu thị mặt phẳng hai chiều hoặc không gian ba chiều. Nhưng, đồ thị cơ bản nhất chỉ có một chiều, hay tên gọi khác là **trục số**.

Đặt một điểm O trên trục làm gốc tọa độ biểu diễn cho số 0, từ đó chúng ta có thể biểu diễn mọi số thực trên trục số này. Nói một cách không chính thống, với một số x_P dương bất kì, đánh dấu cách O một đoạn bằng x_P đơn vị độ dài theo hướng trục, chúng ta có điểm P biểu diễn x_P. Viết tắt cách biểu diễn, được $\boldsymbol{P(x_P)}$. Ngược lại, nếu chúng ta muốn đánh dấu số $x_{P\_} = -x_P$ mang giá trị âm, chúng ta dịch ngược lại chiều trục như trên hình 0.1.



Hình 0.1: Trục số một chiều

Khi có nhiều điểm ở trên đồ thị, chúng ta sẽ mong muốn tính những thông số liên quan tới những điểm đó. Do kiến thức toán hiện tại đang bị giới hạn, chúng ta sẽ chỉ tập trung vào một đặc điểm nhất định, **khoảng cách**. Trên một trục số như hình 0.2, cho hai điểm $P(x_P)$ và $Q(x_Q)$, khoảng cách giữa chúng là



Hình 0.2: Khoảng cách trên trục số

$$\boldsymbol{d(P;Q) = |x_P - x_Q| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2}}.$$

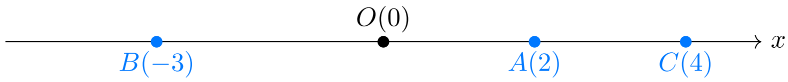
Với $a; b \in \mathbb{R}$ sao cho $a \le b$, định nghĩa chín loại **khoảng**:

Khoảng	**Biểu diễn**
$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ (**khoảng đóng bị chặn** hay **đoạn**)	

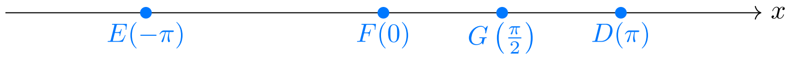
- $\boldsymbol{[a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}}$, còn có tên là ;
- $\boldsymbol{[a;b) = [a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}}$;
- $\boldsymbol{(a;b] =]a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}}$;
- $\boldsymbol{(a;b) =]a;b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}}$;
- $\boldsymbol{(-\infty;a] =]-\infty;a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}}$;
- $\boldsymbol{(-\infty;a) =]-\infty;a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}}$;
- $\boldsymbol{[a;+\infty) = [a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}}$;
- $\boldsymbol{(a;+\infty) =]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}}$;
- $(-\infty;+\infty) =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$;

Bài 1: Biểu diễn nhóm các điểm sau trên trục số. Tính khoảng cách giữa hai điểm phân biệt bất kì trong nhóm đó.

1. $A(2)$, $B(-3)$, và $C(4)$;
2. $D(\pi)$, $E(-\pi)$, $F(0)$, và $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
3. $H(0{,}\overline{3})$ và $I(\sqrt{2})$;
4. $J\left(\frac{355}{113}\right)$, $K\left(\frac{9801}{2206\sqrt{2}}\right)$ và $L\left(\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right)$;
5. $M(x)$ và $N(2x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

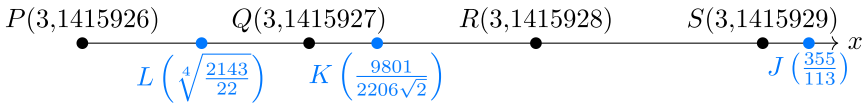


Hình 0.3: Trục số cho phần 1 của bài **??**



Hình 0.4: Trục số cho phần 2 của bài **??**

Lời giải bài ??:



Hình 0.6: Trục số cho phần 4 của bài **??**

Ta có đồ thị cho các phần từ 1 đến 4 như các hình 0.3, 0.4, 0.5, và 0.6.

Cần lưu ý rằng, để biểu diễn thuận lợi nhất, các trục số khi biểu diễn số cần được chọn những tỉ lệ khác nhau và tại những vị trí khác nhau.

Các khoảng cách giữa hai điểm phân biệt đôi một là

1.

$$\begin{aligned}
d(A;B) &= d(B;A) = |2-(-3)| = 5;\\
d(B;C) &= d(C;B) = |4-(-3)| = 7;\\
d(C;A) &= d(A;C) = |4-2| = 2.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
d(D;E) &= d(E;D) = |\pi-(-\pi)| = 2\pi;\\
d(E;F) &= d(F;E) = |(-\pi)-0| = \pi;\\
d(F;G) &= d(G;F) = \left|0-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2};\\
d(G;D) &= d(D;G) = \left|\frac{\pi}{2}-\pi\right| = \frac{\pi}{2};\\
d(D;F) &= d(F;D) = |\pi-0| = \pi;\\
d(E;G) &= d(G;E) = \left|(-\pi)-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3.

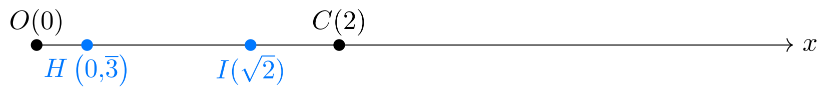
$$d(H;I) = d(I;H) = \left|0{,}\overline{3}-\sqrt{2}\right| = \frac{1-3\sqrt{2}}{3};$$

4.

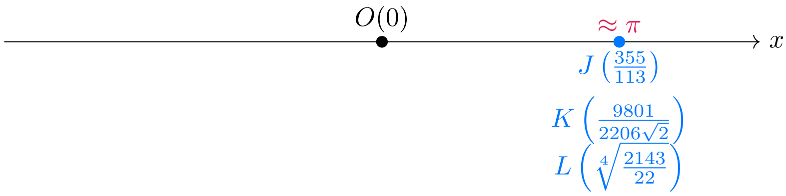
$$\begin{aligned}
d(J;K) &= d(K;J) = \left|\frac{355}{113}-\frac{9801}{2206\sqrt{2}}\right| = \frac{1566260-1107513\sqrt{2}}{498556} \approx 1{,}9034\times 10^{-7};\\
d(K;L) &= d(L;K) = \left|\frac{9801}{2206\sqrt{2}}-\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right| = \frac{107811\sqrt{2}-2206\sqrt[4]{22818664}}{48532} \approx 7{,}7431\times 10^{-8};\\
d(L;J) &= d(J;L) = \left|\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}-\frac{355}{113}\right| = \frac{7810-113\sqrt[4]{22818664}}{2486} \approx 2{,}6777\times 10^{-7};
\end{aligned}$$

Trong vật lí, việc tính toán chính xác đến như ở phần 4 là không cần thiết và nhiều khi còn không chính xác. Luôn luôn có sai số khi đo đạc, và trong phần lớn trường hợp, khi kết hợp sai số này vào trong tính toán thì các giá trị khoảng cách như trên gần như vô nghĩa. Cho nên, về mặt thực tiễn, chúng ta hoàn toàn có thể thay thế đồ thị của 4 như hình 0.7 và khi tính khoảng cách, chúng ta có thể tính xấp xỉ là

$$d(J{,}K) = d(K{,}J) \approx d(K{,}L) = d(L{,}K) \approx d(L{,}J) = d(J{,}L) \approx 0.$$

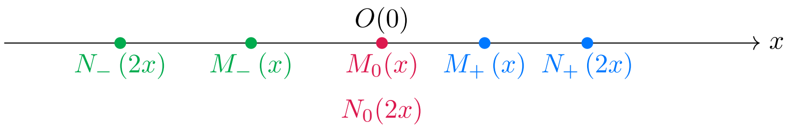


Hình 0.5: Trục số cho phần 3 của bài **??**



Hình 0.7: Xấp xỉ vị trí điểm trên trục số cho phần 4 của bài **??**

Để vẽ được đồ thị cho phần 5, chúng ta sẽ xét vị trí tương đối giữa M, N kèm theo gốc O để quy chiếu như biểu diễn ở hình 0.8. Cụ thể, khi $x > 0$, điểm M và N được biểu diễn thành hai điểm M_+ và N_+. Tương tự, khi $x < 0$, M và N biểu diễn hai điểm M_- và N_-. Một trường hợp đặc biệt là khi $x = 0$, M và N đều có tọa độ là 0, cho nên hai điểm đó và gốc cùng chia sẻ vị trí với nhau.

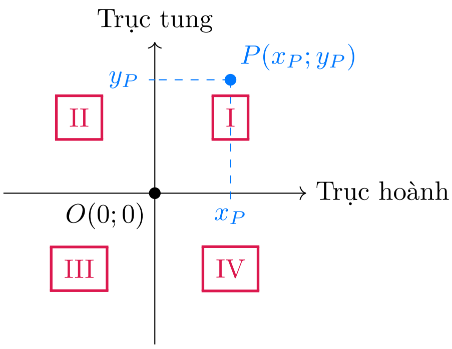


Hình 0.8: Ba trường hợp cho vị trí tương đối của M, N, O cho phần 5 của bài **??**

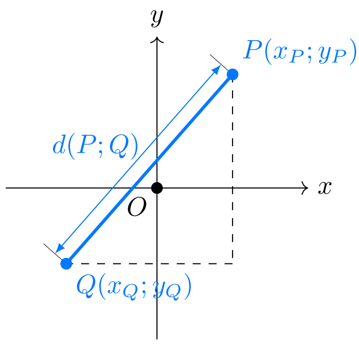
Khoảng cách giữa hai điểm M và N luôn là

$$d(M;N) = d(N;M) = |x - 2x| = |x|.$$

0.1.2 Mặt phẳng hai chiều và hệ tọa độ vuông góc



Hình 0.9: Hệ tọa độ vuông góc



Hình 0.10: Khoảng cách giữa hai điểm

Mở rộng lên mặt phẳng hai chiều, nếu chúng ta đặt hai trục vuông góc với nhau và giao nhau tại gốc $O(0)$ của mỗi trục, khi đó, chúng ta có thể xác định vị trí của điểm trên mặt phẳng chứa hai trục theo biểu diễn đại số bằng cách dóng điểm đó lên trục mà sau này được gọi là **tọa độ**. Đây được gọi là **hệ tọa độ vuông góc** (hay **hệ tọa độ Đề-các**[2]). Như ở hình 0.9, trục nằm ngang được gọi là **trục hoành**, trục dọc được gọi là **trục tung**. Tùy trong từng trường hợp, vị trí và hướng chỉ của các trục có thể thay đổi. Với mỗi điểm, vị trí khi dóng điểm đó vào trục hoành gọi là **hoành độ**, vào trục tung gọi là **tung độ**. Tiếp tục lấy ví dụ từ hình 0.9, điểm P có tọa độ là $(x_P; y_P)$ và được kí hiệu là $\boldsymbol{P(x_P; y_P)}$. Thêm vào đó, hai trục chia mặt phẳng thành bốn **góc phần tư**, từ góc phần tư thứ **I** đến góc phần tư thứ **IV** bao gồm các điểm thỏa mãn tính chất sau:

- Góc phần tư thứ **I**: $\boldsymbol{x > 0}$ và $\boldsymbol{y > 0}$;

[2] René Descartes (1596-1650)

- Góc phần tư thứ **II**: $\boldsymbol{x < 0}$ và $\boldsymbol{y > 0}$;
- Góc phần tư thứ **III**: $\boldsymbol{x < 0}$ và $\boldsymbol{y < 0}$;
- Góc phần tư thứ **IV**: $\boldsymbol{x > 0}$ và $\boldsymbol{y < 0}$.

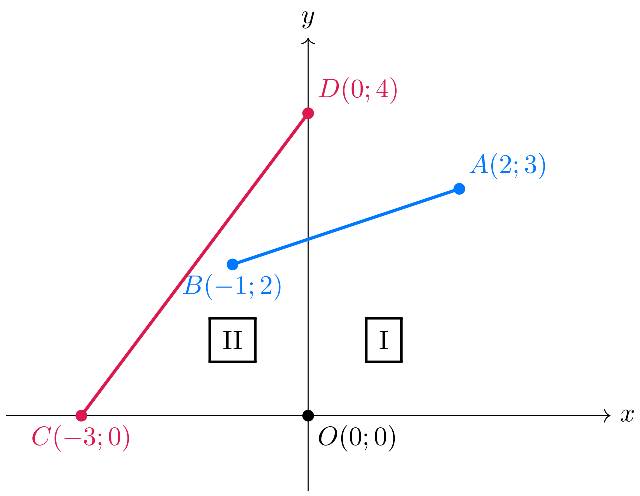
Về mặt hình học, khi tọa độ được vẽ thông thường, góc phần tư thứ I nằm ở vị trí trên cùng bên phải, và các góc phần tư còn lại lần lượt được đánh số theo ngược chiều kim đồng hồ. Khi tọa độ bị thay đổi thì vị trí các góc phần tư cũng thay đổi theo, nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện đại số ở trên. **Các điểm trên trục không xác định thuộc bất cứ góc phần tư nào.**

Giống như trên trục một chiều, khi có hai điểm trên mặt phẳng thì chúng ta có thể tính khoảng cách giữa chúng. Một cách chi tiết, cho hai điểm $P(x_P; y_P)$ và $Q(x_Q; y_Q)$, theo định lí Pi-ta-go, khoảng cách giữa hai điểm đó là

$$\boldsymbol{d(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}}.$$

Bài 2: Biểu diễn các điểm sau trên hệ tọa độ vuông góc: $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(-3;0)$, $D(0;4)$, $P(12t;-3t)$, $Q(20t;12t)$ (với $t \in \mathbb{R}$). Xác định góc phần tư hoặc trục tọa độ của mỗi điểm. Sau đó, tính khoảng cách giữa những cặp điểm sau: A và B, C và D, P và Q.

Lời giải bài ??:



Hình 0.11: Biểu diễn các điểm A, B, C, D trong bài **??**

Các góc phần tư hay trục số mà các điểm thuộc về có thể được xác định như hình 0.11. Theo một cách khác, về mặt đại số, có:

- $A(2;3)$: $x > 0$, $y > 0 \implies A$ thuộc góc phần tư thứ I;
- $B(-1;2)$: $x < 0$, $y > 0 \implies B$ thuộc góc phần tư thứ II;
- $C(-3;0)$: $x < 0$, $y = 0 \implies C$ thuộc trục hoành;
- $D(0;4)$: $x = 0$, $y > 0 \implies D$ thuộc trục tung;

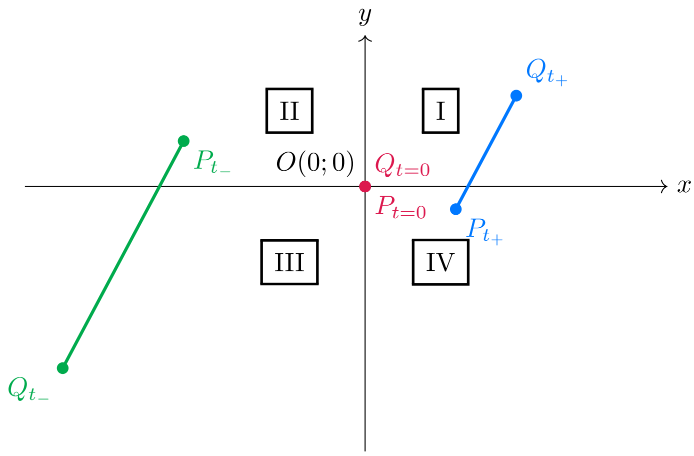
Để xác định được vị trí của hai điểm P và Q, cần phải xét giá trị của t. Nếu t dương, thì P và Q sẽ có tọa độ là $P_{t_+}(12t;-3t)$ và $Q_{t_+}(20t;12t)$ với $x_{P_{t_+}} > 0$, $y_{P_{t_+}} < 0$ và $x_{Q_{t_+}} > 0$, $y_{Q_{t_+}} > 0$. Khi này, chúng ta có thể kết luận rằng P thuộc góc phần tư thứ IV và Q thuộc góc phần tư thứ I. Ngược lại, nếu t âm, thì P và Q sẽ có tọa độ là $P_{t_-}(12t;-3t)$ và $Q_{t_-}(20t;12t)$ với $x_{P_{t_-}} < 0$, $y_{P_{t_-}} > 0$ và $x_{Q_{t_-}} < 0$, $y_{Q_{t_-}} < 0$. Khi này, P thuộc góc phần tư thứ II và Q thuộc góc phần tư thứ III. Cuối cùng, nếu $t = 0$, thì cả hai điểm đều có tọa độ là $(0;0)$, tức là chúng trùng với gốc tọa độ.

Tóm tắt lại, xét các trường hợp về vị trí tương đối của P và Q như hình 0.12, chúng ta có:

$$\begin{cases} t > 0 \implies P \in \text{góc phần tư thứ IV}, Q \in \text{góc phần tư thứ I} \\ t < 0 \implies P \in \text{góc phần tư thứ II}, Q \in \text{góc phần tư thứ III} \\ t = 0 \implies P = \text{gốc tọa độ}, Q = \text{gốc tọa độ} \end{cases}.$$

Khoảng cách giữa những cặp điểm được yêu cầu là:

- $d(A;B) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}1623$;

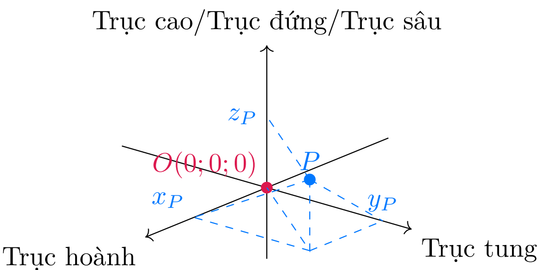


Hình 0.12: Biểu diễn các điểm P, Q trong bài **??** theo các trường hợp

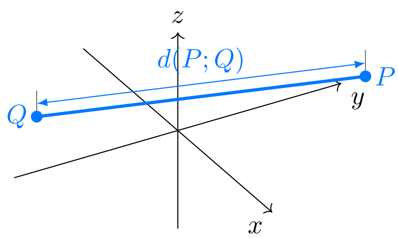
- $d(C;D) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = 5;$

- $d(P;Q) = \sqrt{(12t-20t)^2 + (-3t-12t)^2} = 13|t|.$

0.1.3 Không gian ba chiều và hướng tam diện



Hình 0.13: Hệ tọa độ vuông góc ba chiều



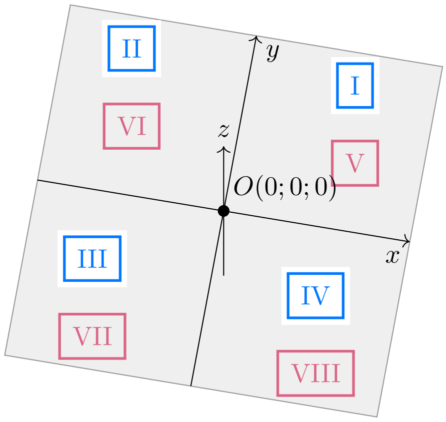
Hình 0.14: Khoảng cách giữa hai điểm trong không gian ba chiều

Đương nhiên sẽ có một vài trường hợp mà biểu diễn hai chiều không thể đủ. Khi này, mở rộng hơn nữa, chúng ta cũng có thể làm những điều trên không gian ba chiều tương tự với khi ở trục số một chiều hay mặt phẳng hai chiều. Khi đó, chúng ta sẽ có một hệ tọa độ ba chiều với ba trục vuông góc với nhau, được gọi là **hệ tọa độ vuông góc ba chiều**. Mỗi điểm trong không gian sẽ có tọa độ là $\boldsymbol{(x;y;z)}$ với x, y, z là các hoành độ, tung độ và cao độ tương ứng. Khoảng cách giữa hai điểm trong không gian ba chiều được tính theo công thức

$$\boldsymbol{d(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}}.$$

Và cũng tương tự như với mặt phẳng hai chiều, ba trục sẽ chia không gian thành tám phần, gọi là **góc phần tám không gian**. Các phần này được đánh số từ I đến VIII như sau: Nhìn từ phía dương của trục cao, các góc phần tám được đánh dấu ngược chiều kim đồng hồ như trong mặt phẳng hai chiều. Các góc phần tám I, II, III, IV nằm trên mặt phẳng Oxy và góc phần tám V, VI, VII, VIII nằm dưới mặt phẳng Oxy. Các góc phần tám này được biểu diễn trong hình 0.15. Về mặt đại số,

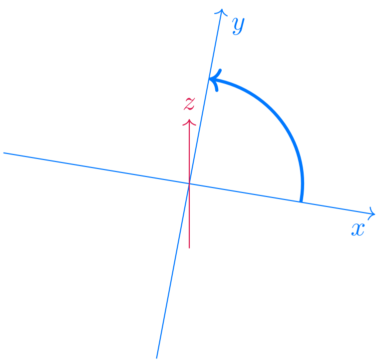
- Góc phần tám **I**: $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{y > 0}$, $\boldsymbol{z > 0}$;
- Góc phần tám **II**: $\boldsymbol{x < 0}$, $\boldsymbol{y > 0}$, $\boldsymbol{z > 0}$;
- Góc phần tám **III**: $\boldsymbol{x < 0}$, $\boldsymbol{y < 0}$, $\boldsymbol{z > 0}$;
- Góc phần tám **IV**: $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{y < 0}$, $\boldsymbol{z > 0}$;
- Góc phần tám **V**: $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{y > 0}$, $\boldsymbol{z < 0}$;
- Góc phần tám **VI**: $\boldsymbol{x < 0}$, $\boldsymbol{y > 0}$, $\boldsymbol{z < 0}$;
- Góc phần tám **VII**: $\boldsymbol{x < 0}$, $\boldsymbol{y < 0}$, $\boldsymbol{z < 0}$;
- Góc phần tám **VIII**: $\boldsymbol{x > 0}$, $\boldsymbol{y < 0}$, $\boldsymbol{z < 0}$.



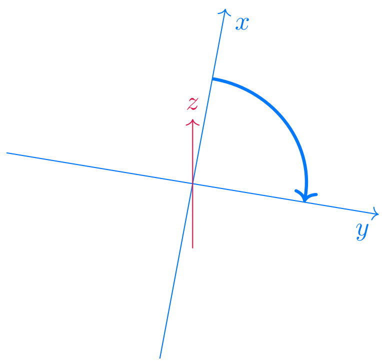
Hình 0.15: Góc phần tám không gian

Trên hệ tọa độ không gian, chúng ta cần phải quan tâm thêm xem là ba trục tạo thành **hướng tam diện** nào. Nhìn từ phía dương của trục cao, khi này, nếu trục hoành xoay sang trục tung theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, thì hướng tam diện được gọi là **hướng tam diện thuận**. Ngược lại, nếu trục hoành xoay sang trục tung theo hướng cùng chiều kim đồng hồ, thì hướng tam diện được gọi là **hướng tam diện nghịch**. Một cách khác là dùng quy tắc bàn tay phải: nắm tay phải vào trục cao, khi này, ngón tay cái chỉ hướng của trục cao. Nếu hướng nắm ngón tay theo hương quay từ trục hoành sang trục tung, thì hướng tam diện là thuận. Ngược lại, nếu hướng nắm ngón tay theo hướng quay từ trục tung sang trục hoành, thì hướng tam diện là nghịch.

Chúng ta đã có phân bổ vị trí của các góc phần tám trong hệ tọa độ tam diện thuận. Lặp lại lập luận với cùng biểu thức đại số, chúng ta có thể phân bổ vị trí của các góc phần tám trong hệ tọa độ tam diện nghịch. Thông thường, hệ tọa độ tam diện thuận được ưa dùng hơn.



Hình 0.16: Tam diện thuận



Hình 0.17: Tam diện nghịch

Bài 3: Trung điểm của một đoạn thẳng AB là điểm M trong không gian khi và chỉ khi M thỏa mãn $d(A; M) = d(B; M) = \frac{d(A;B)}{2}$. Chứng minh rằng với tọa độ của M là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

thì M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Vẽ ví dụ với $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 0; 4)$.

Lời giải bài 3:

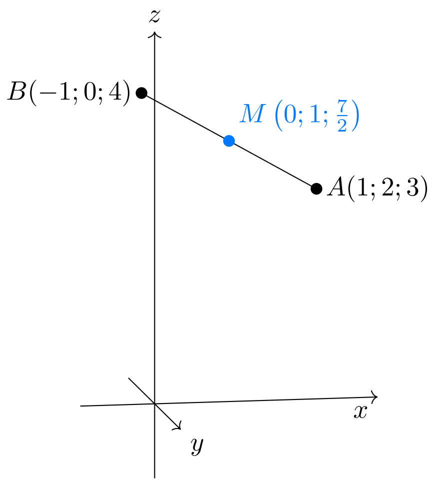
Áp dụng công thức khoảng cách để tính khoảng cách giữa hai điểm A và M, có:

$$\begin{aligned}
d(A;M) &= \sqrt{\left(x_A - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y_A - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(z_A - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A - z_B}{2}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \frac{d(A;B)}{2}.
\end{aligned}$$

Một cách tương tự, chúng ta cũng có $d(B;M) = \frac{d(A;B)}{2}$. Như vậy, M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm A và B. Qua đó, có được điều phải chứng minh.

Vẽ đồ thị ví dụ với $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;4)$, chúng ta được đồ thị ở hình 0.18.

Công thức về vị trí tọa độ trung điểm được cho trong bài là công thức đơn giản và hữu dụng. Bạn đọc nên học thuộc công thức này.



Hình 0.18: Ví dụ với trung điểm M của $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;4)$

Tài liệu tham khảo

[1] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review.* Courier Corporation, 2000.

[2] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis.* Springer Science & Business Media, 2011.