Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 27 tháng 10 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu

0.
Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

0.1 Hàm số đại số một biến và các phép biến đổi trên hàm

0.1.1 Hàm đa thức

Một dạng hàm quen thuộc, được giới thiệu trong chương trình học trung học phổ thông, là đa thức. Nhưng trước khi chúng ta nhắc lại về đa thức, chúng ta sẽ nhắc lại về đơn thức. Hàm **đơn thức**[2] là một hàm được viết dưới dạng

$$\boldsymbol{f(x) = ax^n}$$

với a là một số thực và biến x được mũ lên một số nguyên không âm n.

Hàm **đa thức**, như cái tên của nó, được biểu diễn dưới dạng tổng của các đơn thức

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

với n là một số nguyên không âm, a_i là các số thực, gọi là các **hệ số**, với mọi i nguyên nằm trong đoạn $[0, n]$ và $a_n \neq 0$. Khi này, n được gọi là **bậc** của đa thức. Mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$ đều thuộc tập xác định của hàm đa thức $f(x)$. Ví dụ:

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ là một đa thức bậc 2 với các hệ số $a_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_0 = 1$;
- $g(y) = y^3 - 4y$ là một đa thức bậc 3 với các hệ số $b_3 = 1$, $b_2 = 0$, $b_1 = -4$, $b_0 = 0$;
- $h(z) = 5$ là một đa thức bậc 0 với hệ số $c_0 = 5$;

Tính toán một số giá trị mẫu:

- $p(1) = 7 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 9 = 14$ với $q(t) = 7t^4 - 2t^2 + 9$ là một đa thức bậc 4 với các hệ số $d_4 = 7$, $d_3 = 0$, $d_2 = -2$, $d_1 = 0$, $d_0 = 9$;
- $q(2) = -3 \cdot 2 + 8 = 2$ với $q(r) = -3r + 8$ là một đa thức bậc 1 với các hệ số $e_1 = -3$, $e_0 = 8$.

Khi đa thức có bậc bằng 0, hay $f = P_0 = a_0$, thì được gọi là **đa thức hằng** hay **hàm hằng**. Một trường hợp đặc biệt là khi $f = 0$ (hay $f(x) = 0$ với mọi x). Nếu hàm này là đa thức, theo định nghĩa, hàm này chỉ có duy nhất hệ số đầu $a_0 = 0$. Tuy nhiên, cũng theo định nghĩa thì hệ số đầu phải khác 0. Vì vậy, hàm không có bậc và không được gọi là đa thức. Nhưng, do hàm nhận giá trị cố định với mọi x nên vẫn được gọi là hàm hằng [3].

Bài 1: Phác thảo đồ thị của những hàm sau:

1. $f(x) = x + 2$;
2. $f(x) = x^2 + 2x + 3$;
3. $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$;
4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$;
5. $f(x) = 2$;
6. $f(x) = 36x^4 + 28x^3 - 3x^2 - 6x - 1$;
7. $f(x) = -x^6 + x^2 - 4x - 2$;
8. $f(x) = -x^7 + x$.

Lời giải bài 1:

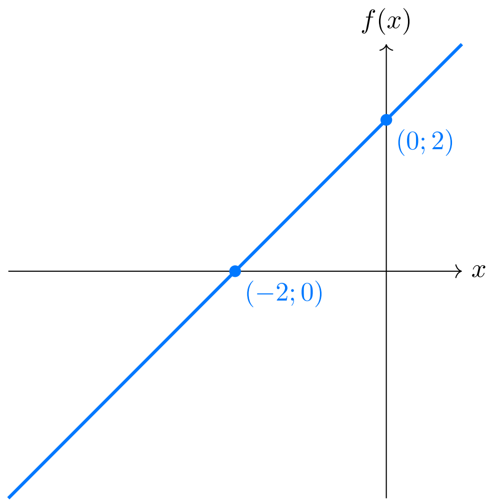
Bạn đọc có thể dùng những phần mềm vẽ đồ thị để nhanh chóng có hình vẽ. Tuy nhiên, nếu không có thiết bị điện tử thì bạn đọc vẫn có thể vẽ đồ thị bằng giấy và bút bằng cách lấy nhiều điểm ví dụ cho x và tính toán giá trị $f(x)$ và sau đó nối chúng lại với nhau.

Bạn đọc có thể để ý rằng là không phải lúc nào cũng đặt gốc tọa độ ở vị trí chính giữa và tỉ lệ xích trên hai trục không phải là giống nhau. Trong nhiều trường hợp, việc ép đặt gốc ở giữa và giữ tỉ lệ giống nhau trên các trục sẽ làm cho đồ thị lệch ra khỏi khu vực vẽ. Điều quan trọng nhất của những bài vẽ đồ thị trong vật lí không chỉ là căn ke chính xác vị trí từng điểm, mà còn là nhận ra được dáng điệu của đồ thị và vị trí tương đối giữa các điểm trên đồ thị đó. Qua đó, chúng ta rút ra được những tính chất toán học cần thiết để phục vụ những yêu cầu cụ thể trong bài tập ứng dụng.

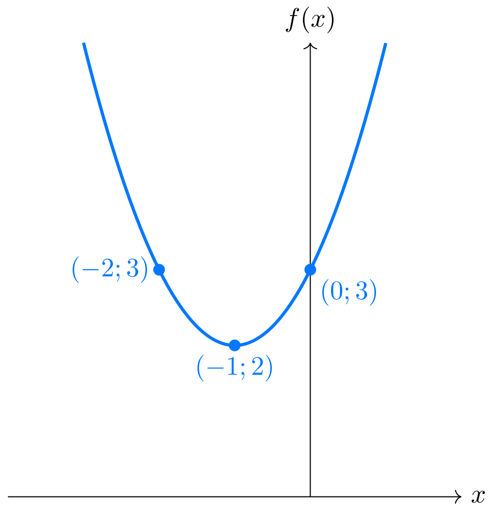
[2] Chúng ta sẽ đề cập đến đơn thức và đa thức nhiều biến khi đến phần hàm nhiều biến.

[3] Đa số những nhà toán học không coi $f = 0$ là đa thức bậc 0 do nhiều tính chất của đa thức bị phá vỡ khi gặp trường hợp này. Tuy nhiên, nhiều người vẫn coi $f = 0$ là đa thức không có bậc. Trong tài liệu này, tác giả không coi 0 là đa thức, nhưng vẫn coi là hàm hằng.

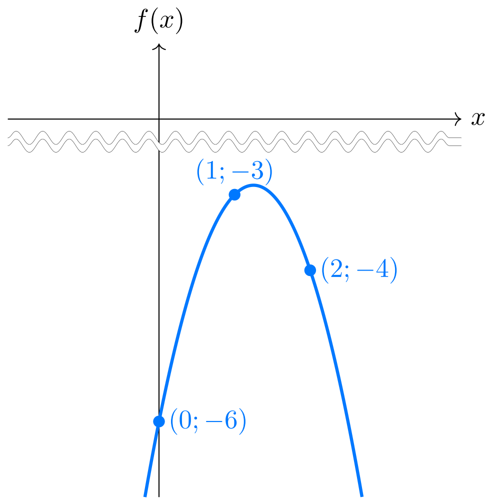
Dưới đây là đồ thị của các hàm đa thức trong bài:



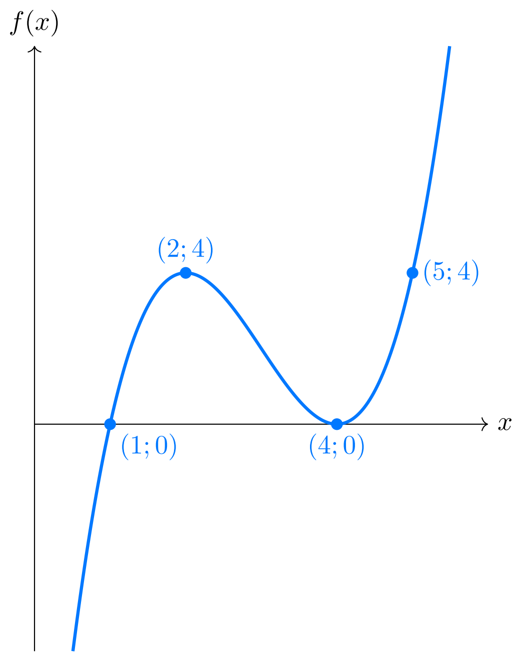
Hình 0.1: Đồ thị của hàm $f(x) = x + 2$



Hình 0.2: Đồ thị của hàm $f(x) = x^2 + 2x + 3$

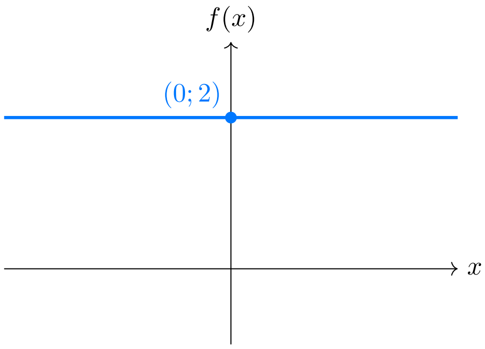


Hình 0.3: Đồ thị của hàm $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$

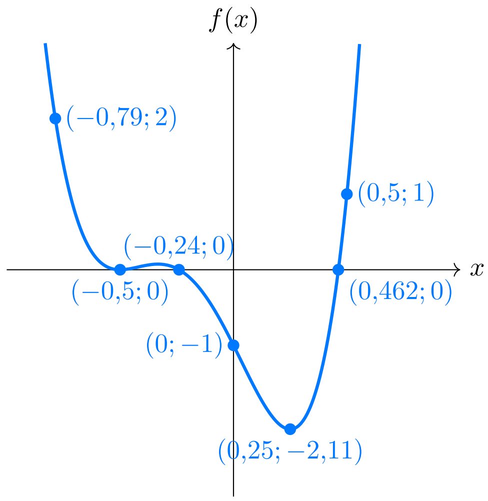


Hình 0.4: Đồ thị của hàm $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

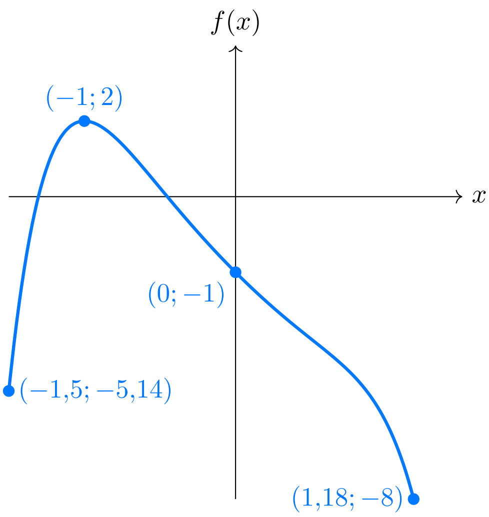
Ở hình 0.3, đồ thị có đoạn díc dắc. Ý nghĩa của cách vẽ này là để cắt bỏ phần đồ thị không cần thiết.



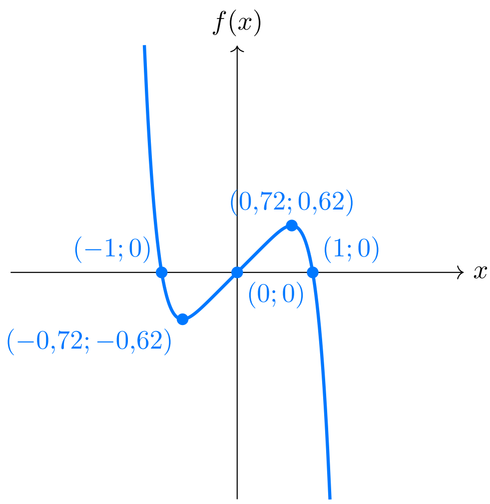
Hình 0.5: Đồ thị của hàm $f(x) = 2$



Hình 0.6: Đồ thị của hàm $f(x) = 36x^4 + 28x^3 - 3x^2 - 6x - 1$



Hình 0.7: Đồ thị của hàm $f(x) = -x^6 + x^2 - 4x - 2$



Hình 0.8: Đồ thị của hàm $f(x) = -x^7 + x$

Bài 2: Giải những phương trình sau. Các phương trình đều có ẩn là $x \in \mathbb{R}$.

1. $3x - 7 = 0$;
2. $x - 9 = 5x + 3$;
3. $\frac{1}{v} \cdot x - \frac{1}{v} \cdot x_0 = t$, với v, x_0, t là những tham số thực;
4. $6x^2 - 5x - 21 = 0$;
5. $5x^2 - 50x + 125 = 0$;
6. $x^2 + 2x + 4 = 0$;
7. $x^2 + 2x + 4 = 8$;
8. $5x^2 - 20x + 20 = x^2 - 4$;
9. $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$, với k, m, v, x_0 là những tham số thực;
10. $x^3 - \frac{11}{6} \cdot x^2 + x - \frac{1}{6} = 0$;
11. $2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 6 + 6x^2$;
12. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$;
13. $-x^4 - 3x^2 = -5$;
14. $x^4 + 1 = 3x^3 + x^2 + 3x$.

Lời giải bài 2:

1. Biến đổi tương đương phương trình để có:

$$\begin{aligned} & 3x - 7 = 0 \\ \iff & 3x = 7 \\ \iff & x = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\dfrac{7}{3}\right\}$.

2. Chuyển số hạng có thừa số x về một phía, và số hạng tự do về phía còn lại để được:

$$\begin{aligned} x-9&=5x+3\\ \iff (x-9)+(9-5x)&=(5x+3)+(9-5x)\\ \iff -4x&=12\\ \iff x&=-3. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3\}$.

3. Để giải phương trình có chứa tham số, chúng ta cần viết lại ẩn x dưới dạng một biểu thức chỉ chứa tham số và hằng số. Cụ thể,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v}\cdot x-\frac{1}{v}\cdot x_0&=t\\ \iff \frac{x}{v}&=t+\frac{x_0}{v}\\ \iff x&=vt+x_0. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\{vt+x_0\}$.

4. Nếu như bạn đọc chưa biết, nếu như một đa thức $f(x)$ nhận $x=a$ là nghiệm thì $f(x)$ có thể được viết thành tích của $(x-a)$ nhân một đa thức $g(x)$ với bậc nhỏ hơn 1 so với $f(x)$. Và nếu $g(x)$ lại có nghiệm $x=b$ thì chúng ta có thể viết $g(x)=(x-b)h(x)$ và qua đó có thể viết lại $f(x)=(x-a)(x-b)h(x)$. Một cách tổng quát nhất, nếu như $f(x)$ là phương trình bậc n có n nghiệm $a_1,a_2,\cdots,a_n$ thì có thể viết lại

$$f(x)=A\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

với A là hệ số của số hạng có bậc lớn nhất trong đa thức $f(x)$.

Nhẩm nghiệm (bằng cách bấm máy tính) phương trình thì có $x=-\frac{3}{2}$ và $x=\frac{7}{3}$. Chúng ta kì vọng có thể viết lại phương trình dưới dạng $6\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\left(x-\frac{7}{3}\right)=0$. Thực vậy, thực hiện phân tích nhân tử để có:

$$\begin{aligned} &6x^2-5x-21=0\\ \iff\ &6x^2-14x+9x-21=0\\ \iff\ &2x(3x-7)+3(3x-7)=0\\ \iff\ &(2x+3)(3x-7)=0\\ \iff\ &\left[\begin{aligned}&2x+3=0\\&3x-7=0\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&x=-\frac{3}{2}\\&x=\frac{7}{3}\end{aligned}\right.. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left\{-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{3}\right\}$.

5.

$$\begin{aligned} 5x^2-50x+125&=0\\ \iff 5\left(x^2-10x+25\right)&=0\\ \iff 5(x-5)^2&=0\\ \iff x-5&=0\\ \iff x&=5. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình có một phần tử duy nhất $\{5\}$.

6. Với những phương trình liên quan tới đa thức bậc hai không thể nhẩm ngay được nghiệm, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp tách bình phương. Với phương trình được cho:

$$\begin{aligned} x^2+2x+4&=0\\ \iff x^2+2x+1&=-3\\ \iff (x+1)^2&=-3. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Một số thực nhân với chính nó sẽ ra một số không âm. Cho nên phương trình 0.1 không thể đúng. Vậy phương trình vô nghiệm trên tập số thực.

7.

$$\begin{aligned} & x^2+2x+4=8 \\ \iff & x^2+2x+1=5 \\ \iff & (x+1)^2=5 \\ \iff & \left[\begin{aligned} x+1&=\sqrt{5} \\ x+1&=-\sqrt{5} \end{aligned}\right. \\ \iff & \left[\begin{aligned} x&=\sqrt{5}-1 \\ x&=-\sqrt{5}-1 \end{aligned}\right. . \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\sqrt{5}-1;-\sqrt{5}-1\right\}$.

8. Phần này tác giả làm khác so với phần 2. Chuyển đổi toàn bộ phương trình về một vế để đưa về dạng phương trình $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} & 5x^2-20x+20=x^2-4 \\ \iff & 4x^2-20x+24=0 \\ \iff & 4\left(x^2-5x+6\right)=0 \\ \iff & 4\left(x^2-2x-3x+6\right)=0 \\ \iff & 4\left(x(x-2)-3(x-2)\right)=0 \\ \iff & 4(x-3)(x-2)=0 \\ \iff & \left[\begin{aligned} x-3=0 \\ x-2=0 \end{aligned}\right. \iff x\in\{3;2\}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $\{3;2\}$.

9. Nhân cả hai vế với 2 để khử phân số trong phương trình:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx_0^2 \\ \iff & kx^2+mv^2=kx_0^2. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Xong, thực hiện chuyển vế để giữ thừa số chứa x^2 ở một bên, phương trình 0.2 tương đương với

$$\begin{aligned} (0.2) \iff & kx^2=kx_0^2-mv^2 \\ \iff & x^2=x_0^2-\frac{mv^2}{k}. \end{aligned}$$

Với trường hợp $x_0^2-\frac{mv^2}{k}<0$ thì phương trình vô nghiệm do x^2 không thể âm. Trong trường hợp còn lại, lấy căn bậc hai hai vế để có

$$x\in\left\{\sqrt{x_0^2-\frac{mv^2}{k}};-\sqrt{x_0^2-\frac{mv^2}{k}}\right\}.$$

Tại giá trị đặc biệt mà khi $x_0^2=\frac{mv^2}{k}$ thì tập nghiệm suy biến thành $\{0\}$.

Vậy, phương trình có nghiệm là

$$\begin{cases} \left\{\sqrt{x_0^2-\frac{mv^2}{k}};-\sqrt{x_0^2-\frac{mv^2}{k}}\right\} & \text{nếu } x_0^2-\frac{mv^2}{k}\geq 0 \\ \emptyset & \text{nếu } x_0^2-\frac{mv^2}{k}<0 \end{cases}.$$

10. Phân tích thừa số với để ý rằng 1, $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$ là nghiệm:

$$\begin{aligned}
& x^3 - \frac{11}{6} \cdot x^2 + x - \frac{1}{6} = 0 \\
\iff & x^3 - x^2 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \\
\iff & x^2 (x-1) - \frac{5}{6}x (x-1) + \frac{1}{6}(x-1) = 0 \\
\iff & (x-1)\left(x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right) = 0 \\
\iff & (x-1)\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) = 0 \\
\iff & (x-1)\left(x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 0 \\
\iff & (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x - \dfrac{1}{3} = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. .$$

Cuối cùng, như chúng ta đã dự đoán, phương trình có nghiệm là $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.

11. Có một cách là chuyển phương trình về một vế rồi nhẩm nghiệm. Dưới đây, tác giả sẽ trình bày một góc nhìn khác để giải bài toán này.

$$\begin{aligned}
& 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 6 + 6x^2 \\
\iff & \left(2x^3 + 2x\right) - \left(2x^2 + 2\right) = 6x^2 + 6 \\
\iff & 2x\left(x^2 + 1\right) - 2\left(x^2 + 1\right) = 6\left(x^2 + 1\right) \\
\iff & (2x - 2)\left(x^2 + 1\right) = 6\left(x^2 + 1\right). \qquad (0.3)
\end{aligned}$$

Để ý rằng, do $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Chúng ta đã chỉ ra rằng $x^2 + 1 \neq 0$, và qua đó, chúng ta có thể an toàn chia hai vế của 0.3 cho $x^2 + 1$ để có:

$$\begin{aligned}
& 2x - 2 = 6 \\
\iff & x = 4.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\{4\}$.

12. Dễ dàng thấy được có thể phân tích thừa số của đa thức được cho như sau:

$$\begin{aligned}
& x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0 \\
\iff & x(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0 \\
\iff & x(x+2)(x^2 - 1) = 0 \\
\iff & x(x+2)(x-1)(x+1) = 0.
\end{aligned}$$

Chia làm 4 trường hợp: $\left[\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right.$ và giải từng trường hợp một để có $x \in \{0; -2; 1; -1\}$.

Vậy phương trình có bộ nghiệm là $\{0; -2; 1; -1\}$.

13. Đặt 付 $= x^2$ để đưa từ đa thức bậc bốn về đa thức bậc hai như sau:

$$\begin{aligned} & -x^4 - 3x^2 = -5 \\ \iff & -\text{付}^2 - 3\text{付} = -5 \\ \iff & \text{付}^2 + 3\text{付} - 5 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình bậc hai này bằng công thức nghiệm, chúng ta có:

$$\left[\begin{aligned} \text{付} &= \frac{-3+\sqrt{3^2-4\cdot(-5)}}{2} = \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \\ \text{付} &= \frac{-3-\sqrt{3^2-4\cdot(-5)}}{2} = \frac{-3-\sqrt{29}}{2} \end{aligned}\right. .$$

Tuy nhiên, do 付 $= x^2 \geq 0$ nên 付 chỉ có thể nhận giá trị $\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$, và qua đó $x^2 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \left\{\sqrt{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}}; -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}}\right\}$.

14. Bài tập này dành cho những bạn chuyên toán thuần hơn là về ứng dụng. Nhận thấy rằng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ để có

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3x + 1 + \frac{3}{x}. \tag{0.4}$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$, bình phương hai vế để có $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ hay $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Thay vào 0.4, chúng ta có:

$$\begin{aligned} & y^2 - 2 = 3y + 1 \\ \iff & y^2 - 3y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình này bằng công thức nghiệm:

$$\left[\begin{aligned} y &= \frac{3+\sqrt{3^2-4\cdot(-3)}}{2} = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \\ y &= \frac{3-\sqrt{3^2-4\cdot(-3)}}{2} = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \end{aligned}\right. . \tag{0.5}$$

Giải phương trình $x + \frac{1}{x} = y$. Nếu chúng ta nhân cả tử và mẫu với x, chúng ta sẽ có phương trình với đa thức bậc hai theo ẩn x:

$$x^2 - yx + 1 = 0.$$

Cũng dùng công thức nghiệm để giải phương trình này để được:

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} \\ x &= \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \end{aligned}\right. .$$

Do $x \in \mathbb{R}$ nên giá trị trong dấu khai căn $y^2 - 4$ phải không nhỏ hơn 0. Kiểm tra hai giá trị y tìm được từ 0.5, chúng ta thấy $y = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn điều kiện này. Thay thế trực tiếp để tìm được tập nghiệm của phương trình. Cuối cùng, chúng ta có được $x \in \left\{\dfrac{3+\sqrt{21}+\sqrt{14+6\sqrt{21}}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{21}-\sqrt{14+6\sqrt{21}}}{2}\right\}$.

Bài 3: Giải các bất phương trình sau. Các bất phương trình đều có ẩn là $x \in \mathbb{R}$.

1. $4x + 7 < 0$;
2. $-8x - 16 > 0$;
3. $x - 2 \geq -2x + 5$;
4. $x^2 + 6x + 10 \leq 0$;
5. $x^2 - 11x + 30 > 0$;
6. $-3x^2 + 15x - 12 > -2x^2 + 10x - 12$;
7. $-x^4 + 18x^2 - 77 \geq 0$;
8. $x^7 \geq x$.

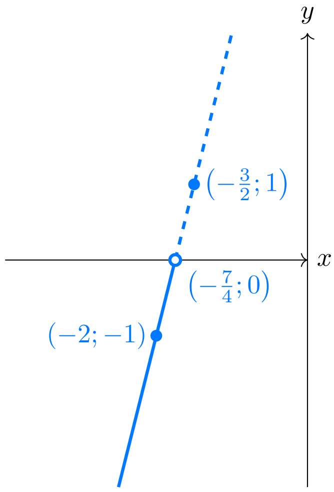
Lời giải bài 3:

1.

$$\begin{aligned} & 4x + 7 < 0 \\ \iff & 4x < -7 \\ \iff & x < -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; -\dfrac{7}{4}\right)$.

Để kiểm chứng lại kết quả, chúng ta sẽ sử dụng đồ thị của hàm số $f(x) = 4x + 7$ và kiểm tra xem những điểm nào trên đồ thị có giá trị nhỏ hơn 0 như hình 0.9. Chúng ta không nhận giá trị tại nút nên tại điểm giao với trục hoành, chúng ta vẽ đường tròn rỗng thay vì hình tròn.



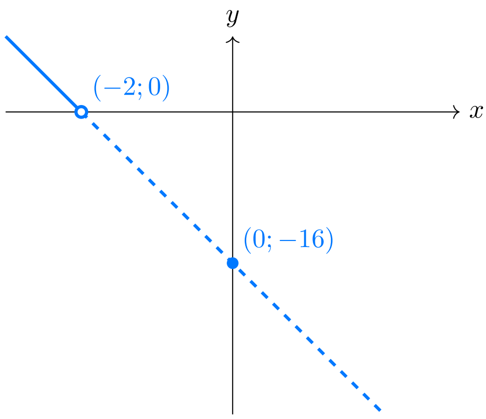
Hình 0.9: Đồ thị biểu diễn $4x+7$ và khoảng nhỏ hơn 0

2.

$$\begin{aligned} & -8x - 16 > 0 \\ \iff & -8x > 16 \\ \iff & x < -2. \end{aligned}$$

(Chia cho số âm thì đổi dấu bất phương trình.)

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -2)$.

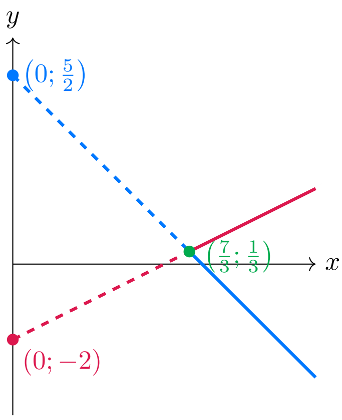


Hình 0.10: Đồ thị biểu diễn $-8x - 16$ và khoảng lớn hơn 0

3.

$$\begin{aligned} & x - 2 \geq -2x + 5 \\ \iff & x + 2x \geq 5 + 2 \\ \iff & 3x \geq 7 \\ \iff & x \geq \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\dfrac{7}{3}; \infty\right)$.



Hình 0.11: Đồ thị của $x - 2 \geq -2x + 5$

4. Để ý rằng $x^2+6x+10 = \left(x^2 + 6x + 9\right)+1 = (x+3)^2+1 \implies x^2+6x+10 \geq 1$. Do đó, $x^2+6x+10 \leq 0$ không có nghiệm.

5.

$$x^2 - 11x + 30 > 0$$

$$\iff (x-5)(x-6) > 0. \quad \text{(Phân tích đa thức thành nhân tử.)} \qquad (0.6)$$

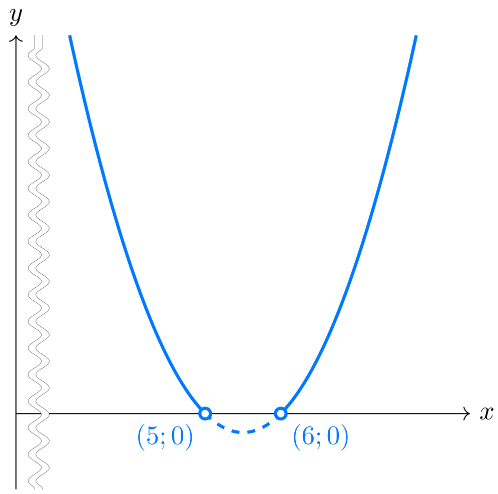
Do 0.6, nên nghiệm của $(x-5)(x-6) = 0$ hay $x \in \{5; 6\}$ không là nghiệm của 0.6.

Với $5 < x < 6$, $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases}$ cho nên $(x-5)(x-6) < 0$. Trường hợp này không thỏa mãn 0.6.

Với $x < 5$, $\begin{cases} x - 5 < 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases}$ cho nên $(x-5)(x-6) > 0$ (Tích hai số âm là một số dương.) thỏa mãn (0.6).

Với $x > 6$, $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \implies (x-5)(x-6) > 0$ thỏa mãn (0.6).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình này là $(-\infty; 5) \cup (6; \infty)$.



Hình 0.12: Đồ thị của $x^2 - 11x + 30 > 0$

Khi bạn đọc đã quen xét trường hợp thì có thể viết ngắn gọn lại dưới dạng bảng xét dấu như bảng 0.1.

x	$-\infty$		5		6		∞
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-5)(x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bảng 0.1: Bảng xét dấu cho $(x-5)(x-6)$

6.

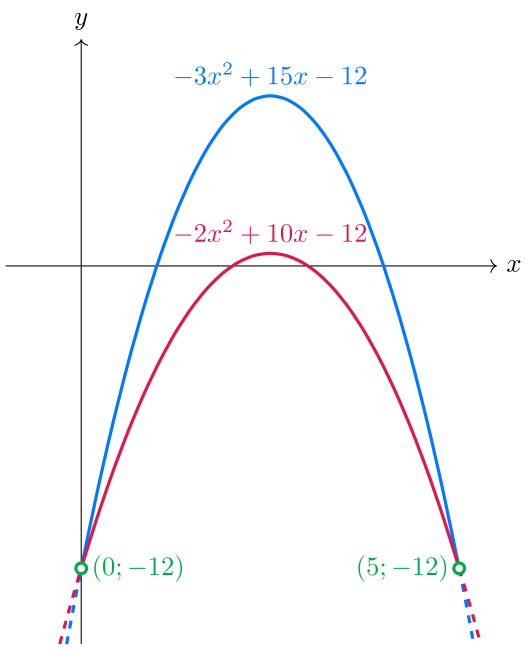
$$\begin{aligned} & -3x^2 + 15x - 12 > -2x^2 + 10x - 12 \\ \iff & -3x^2 + 2x^2 + 15x - 10x > -12 + 12 \\ \iff & -x^2 + 5x > 0 \\ \iff & x(-x+5) > 0 \\ \iff & x(x-5) < 0. \end{aligned} \qquad (0.7)$$

Kẻ bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		5		∞
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hình 0.13: Bảng xét dấu cho $x(x-5)$

Vậy nghiệm của 0.7 là $x \in (0; 5)$.



Hình 0.14: Đồ thị của $-3x^2 + 15x - 12 > -2x^2 + 10x - 12$

7. Có thể coi đa thức bậc 4 này là một đa thức bậc 2 với ẩn là x^2. Thực hiện phân tích nhân tử để có

$$\begin{aligned}
&-x^4+18x^2-77\geq 0\\
\iff\ & x^4-18x^2+77\leq 0 \qquad \text{(Nhân } -1 \text{ ở cả hai vế.)}\\
\iff\ & \left(x^2-7\right)\left(x^2-11\right)\leq 0\\
\iff\ & \left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-\sqrt{11}\right)\left(x+\sqrt{11}\right)\leq 0.
\end{aligned}$$

Kẻ bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{11}$		$-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}$		$\sqrt{11}$		∞
$x-\sqrt{7}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{7}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{11}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{11}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^4-18x^2+77		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hình 0.15: Bảng xét dấu cho x^4-18x^2+77

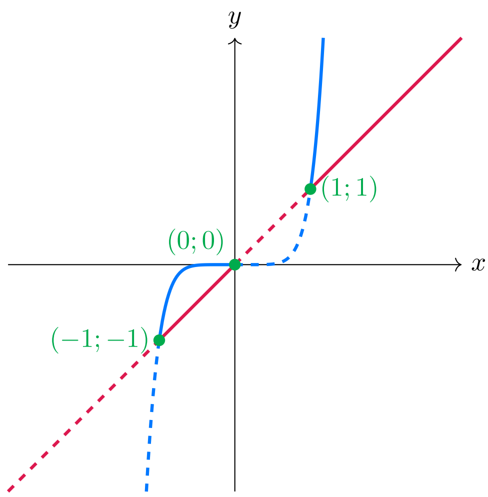
Từ bảng, chúng ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\sqrt{11};-\sqrt{7}\right]\cup\left[\sqrt{7};\sqrt{11}\right]$.

8.

$$\begin{aligned}
& x^7\geq x\\
\iff\ & x^7-x\geq 0\\
\iff\ & x(x^6-1)\geq 0\\
\iff\ & x(x^3-1)(x^3+1)\geq 0\\
\iff\ & x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2+x+1)\geq 0. \qquad (0.8)
\end{aligned}$$

Cần phải để ý rằng $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$ và $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$ đều là hai số dương. Chia cả hai vế của 0.8 cho hai số dương, chúng ta có:

$$(0.8) \iff x(x-1)(x+1)\geq 0. \qquad (0.9)$$



Hình 0.16: Đồ thị của $x^7\geq x$

Kẻ bảng xét dấu cho 0.9:

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x-1)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;-1]\cup[0;1]$.

Bài 4: Xác định tập giá trị của những hàm sau:

1. $f(x)=0$;
2. $f(x)=10x-20$;
3. $f(x)=x^2+2x+3$;
4. $f(x)=x^4+2x^2+3$.

Lời giải bài 4:

1. Theo định nghĩa, do hàm chỉ trả về kết quả là 0 nên tập giá trị của f là $\{0\}$.
2. Nhận thấy mọi giá trị $y\in\mathbb{R}$ đều có thể là kết quả của f do:

$$f\left(\frac{y}{10}+2\right)=10\left(\frac{y}{10}+2\right)-20=y.$$

Vậy tập giá trị của f là $\mathbb{R}$.

3. Theo đồ thị 0.2, chúng ta thấy được f nhận mọi giá trị trong khoảng $[2;\infty)$. Về mặt đại số, biến đổi f để có:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2.$$

Điều này khẳng định là nếu $y = f(x)$ thì $y \geq 2$. Tuy nhiên, nó chưa khẳng định là $y \geq 2$ là đủ để có x thỏa mãn $y = f(x)$. Để làm được điều này, chúng ta phải viết phương trình $y = f(x)$ và tìm một x là nghiệm của phương trình đó. Với $y \geq 2$, chúng ta đặt $x = -1 + \sqrt{y-2}$ và thực hiện tính $f(x)$:

$$\begin{aligned} f\left(-1+\sqrt{y-2}\right) &= \left(-1+\sqrt{y-2}\right)^2 + 2\left(-1+\sqrt{y-2}\right) + 3 \\ &= \left(1 - 2\sqrt{y-2} + y - 2\right) + \left(-2 + 2\sqrt{y-2}\right) + 3 \\ &= y. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta kết luận với $y \geq 2$ thì tồn tại x để $y = f(x)$.

Vậy tập giá trị của f là $[2;\infty)$.

4. Bình phương của một số thì luôn không âm. Cho nên $x^2 \geq 0$ và $x^4 = x^2 \times x^2$ là tích của hai số không âm thì là một số không âm. Do đó $x^4 + 2x^2 + 3 \geq 3$.

Ngược lại, mọi số thực y từ 3 trở lên đều có thể có một giá trị x sao cho $x^4 + 2x^2 + 3 = y$. Do $y \geq 3$ nên

$$\begin{aligned} & y - 2 \geq 1 \\ \iff & \sqrt{y-2} \geq 1 \\ \iff & \sqrt{y-2} - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có thể lấy khai căn và đặt $x = \sqrt{\sqrt{y-2} - 1}$. Khi này, thực hiện tương tự như đã làm ở phần 3 để có $f(x) = y$. Vậy tập giá trị của f là $[3;\infty)$.

0.1.2 Hàm phân thức

Hàm cộng, hàm trừ và hàm nhân của hai hàm đa thức là những hàm đa thức. Tuy nhiên, hàm thương lại không như vậy. Do khi chia hai đa thức có những tính chất đặc biệt, nên chúng ta xây dựng một khái niệm mới là hàm **phân thức**. Một hàm f được gọi là phân thức nếu $\boldsymbol{f = 0}$, hoặc:

$$\boldsymbol{f = \left(\frac{p}{q}\right)}$$

với p và q là hai đa thức. Trong trường hợp $f \neq 0$, tập xác định của f là tập hợp các giá trị x sao cho $q(x) \neq 0$.

Khái niệm về phân thức dẫn chúng ta một cách tự nhiên đến khái niệm về một dạng phân thức đặc biệt mang tên **số mũ âm**. Khi mũ một số với số âm, chúng ta có thể viết lại là

$$\boldsymbol{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$

với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $n \in \mathbb{Z}^+$. Các tính chất liên quan đến số mũ không âm cũng được áp dụng cho số mũ âm.

Bài 5: Cho biết tập xác định, tập giá trị và phác thảo đồ thị của những hàm sau:

1. $f(x) = \dfrac{2}{x}$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+4}$;
3. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$;
4. $f(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{x-1}$;
5. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x-5}$;
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
7. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+5x-3}$;
8. $f(x) = \dfrac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1}$;
9. $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{x-2}$;

Lời giải bài 5:

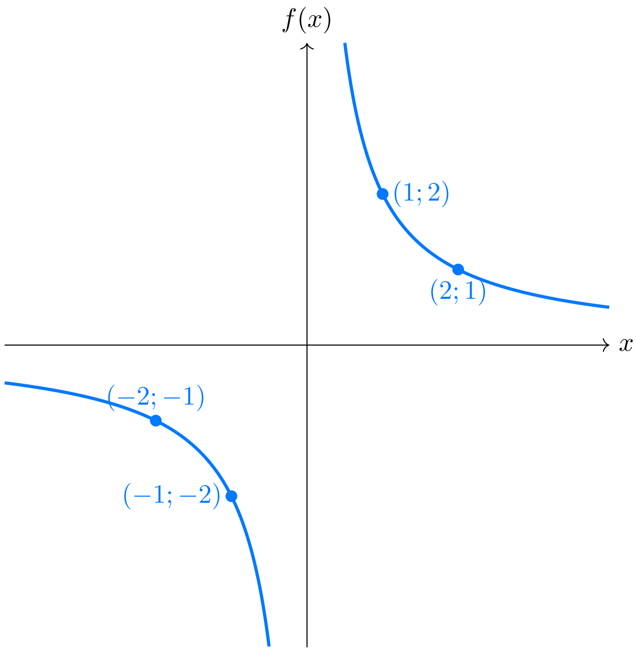
1. Theo định nghĩa hàm phân thức, tập xác định của hàm $f(x) = \frac{2}{x}$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kết quả của $f(x)$ phải khác 0 do nếu như vậy thì $f(x) = \frac{2}{x} = 0 \implies 2 = 0 \times x = 0$, vô lí.

Tuy nhiên, mọi số y khác 0 đều có thể là giá trị của $f(x)$ do

$$f\left(\frac{2}{y}\right) = \frac{2}{\frac{2}{y}} = y.$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



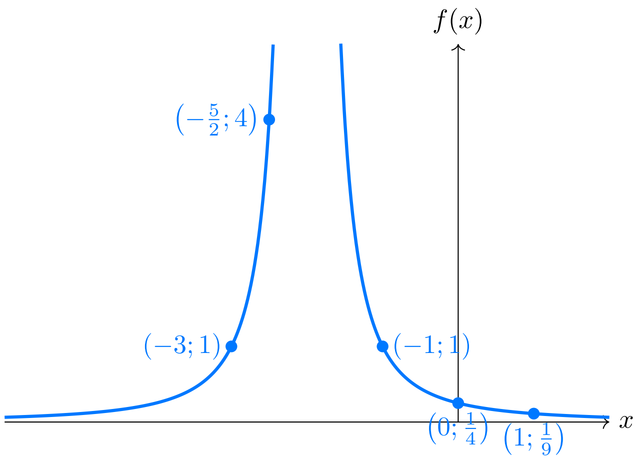
Hình 0.17: Đồ thị của hàm $f(x) = \frac{2}{x}$

2. Để phân thức có nghĩa thì mẫu số của phân thức phải khác 0. Viết và bất phương trình này:

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 4 \neq 0 \\ \iff & (x+2)^2 \neq 0 \\ \iff & x + 2 \neq 0 \\ \iff & x \neq -2 \end{aligned}$$

Vậy tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Có mẫu số $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$, mà mẫu số phải khác 0 nên có $x^2 + 4x + 4 > 0$. Chia hai số dương luôn được số dương, cho nên $f(x)$ chỉ nhận giá trị dương.



Hình 0.18: Đồ thị của hàm $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$

Ngược lại, mọi giá trị dương y đều có thể biểu diễn thông qua $f(x)$ do

$$\begin{aligned} f\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) &= \frac{1}{\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + 4\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) + 4} \\ &= \frac{1}{\left(\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) + 2\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}^+$.

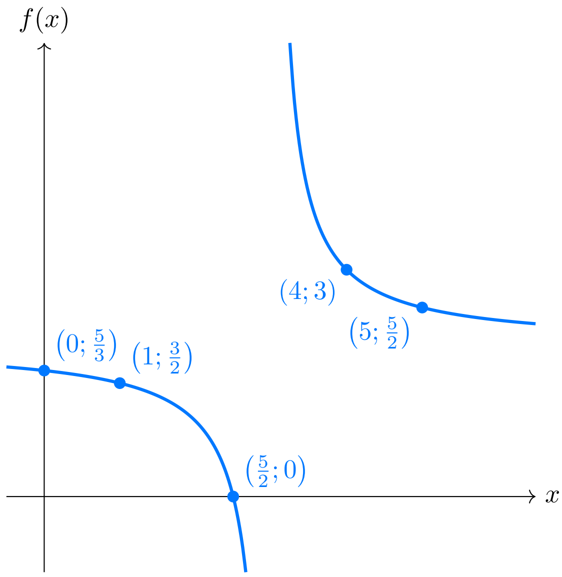
3. Để x thuộc tập xác định của hàm $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ thì $x - 3 \neq 0 \implies x \neq 3$. Vậy tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Giả sử có y sao cho $y = f(x)$. Khi này, chúng ta có

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-5}{x-3} \\ \implies y(x-3) &= 2x-5 \\ \iff yx - 3y &= 2x - 5 \\ \iff yx - 2x &= 3y - 5 \\ \iff x(y-2) &= 3y - 5. \end{aligned}$$

Nếu $y = 2$ thì chúng ta sẽ có $x(y-2) = 3y - 5 \implies x(2-2) = 3 \times 2 - 5 \implies 0 = 1$, vô lí.

Nếu $y \neq 2$ thì $x = \frac{3y-5}{y-2}$. Thay ngược lại giá trị x này:



Hình 0.19: Đồ thị của $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$

$$f\left(\frac{3y-5}{y-2}\right) = \frac{2\left(\frac{3y-5}{y-2}\right) - 5}{\left(\frac{3y-5}{y-2}\right) - 3} = \frac{\frac{6y-10-5y+10}{y-2}}{\frac{3y-5-3y+6}{y-2}} = \frac{\frac{y}{y-2}}{\frac{1}{y-2}} = y.$$

Qua lập luận vừa rồi, chúng ta có kết luận rằng tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

4. Giải tập xác định:

$$x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1.$$

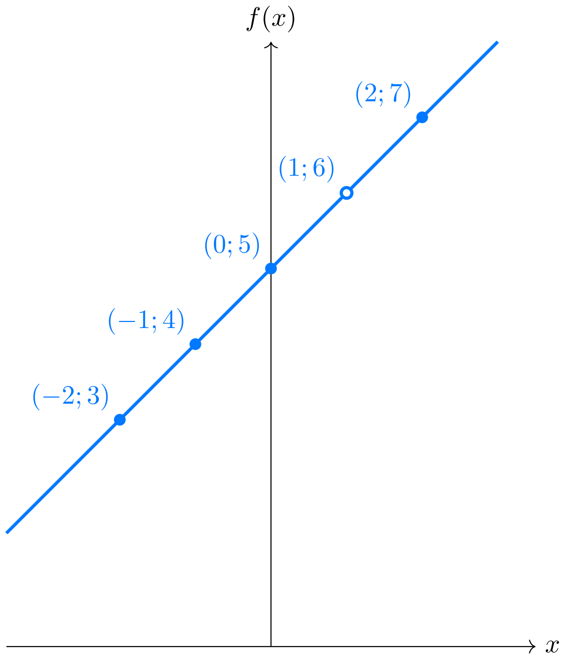
Qua đó, tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Đặt $y = f(x)$, với giả thiết $x \neq 1$ thì

$$y = \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = \frac{(x+5)(x-1)}{x-1} = x + 5.$$

Nhận thấy rằng $y \neq 6$, do nếu ngược lại thì sẽ cần phải có $x = 1$, không thỏa mãn tập xác định của $f(x)$. Với mọi giá trị khác của y đều có thể là đầu ra, do hiển nhiên rằng $f(y-5) = y$ như biến đổi ở trên.

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Tương tự khi giải bất phương trình, khi biểu diễn đồ thị có đứt đoạn, người ta thường vẽ đường tròn rỗng tại điểm bị đứt như đồ thị hình 0.20.



Hình 0.20: Đồ thị của $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x-1}$

5. Giải tập xác định, $f(x)$ xác định khi và chỉ khi

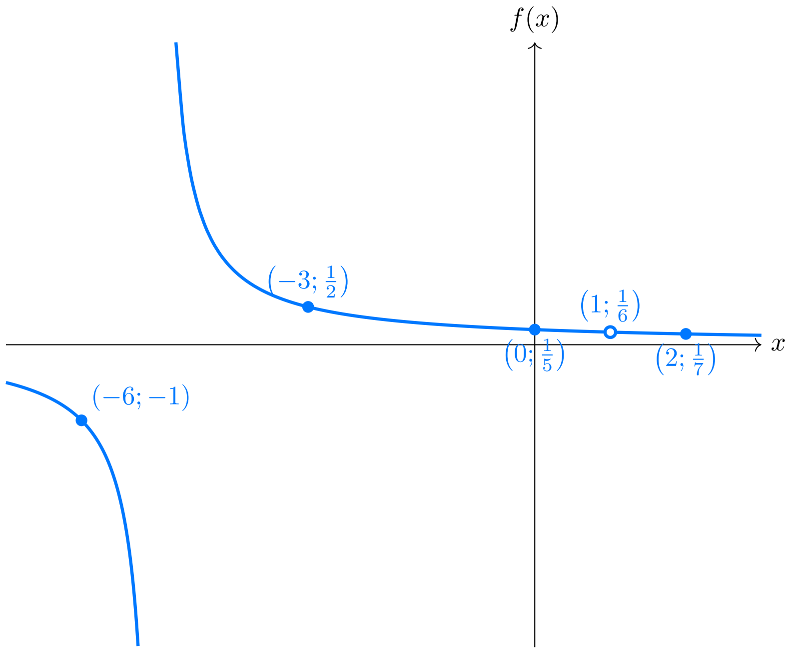
$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 &\neq 0 \\ \iff (x+5)(x-1) &\neq 0 \\ \iff x &\notin \{-5; 1\}. \end{aligned}$$

Tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$.

Đặt $y = f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x-5} = \frac{x-1}{(x+5)(x-1)} = \frac{1}{x+5}$. Qua đó, y không thể bằng 0. Khi $y \neq 0$, biến đổi cho chúng ta được $x = \frac{1}{y} - 5$. Do điều kiện tập xác định lên x nên $y \neq \frac{1}{6}$.

Kiểm chứng đại số cơ bản cho chúng ta được nếu $y \notin \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$ thì có thể đặt $x = \frac{1}{y} - 5$ để có $f(x) = y$.

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$.



Hình 0.21: Đồ thị của $\frac{x-1}{x^2+4x-5}$

6. Để ý rằng $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ với mọi giá trị thực của x. Cho nên $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ là hai số dương chia cho nhau luôn có nghĩa. Cho nên, tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R}$.

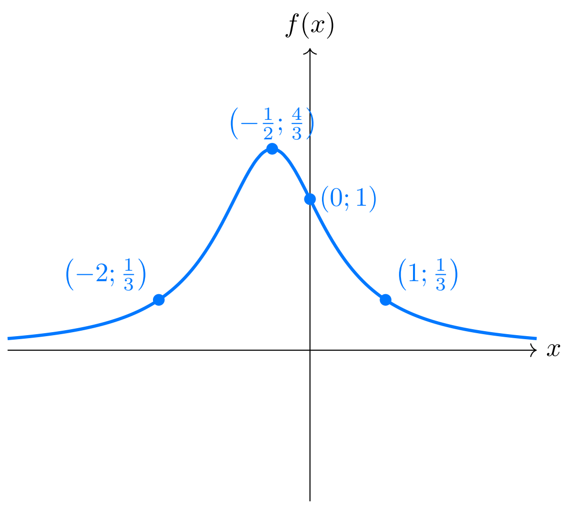
Cũng từ $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4}$ mà chúng ta có $\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$ (Cùng chia cả hai vế cho số dương $\frac{3(x^2+x+1)}{4}$).

Ngoài ra, do là phép chia hai số dương nên $\frac{1}{x^2+x+1} > 0$. Do đó, $0 < f(x) \leq \frac{4}{3}$.

Ngược lại, mọi $y \in \left(0; \frac{4}{3}\right]$ đều có thể biểu diễn thông qua $f(x)$, do

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{\frac{4-3y}{4y}} - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\left(\left(\sqrt{\frac{4-3y}{4y}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4-3y}{4y}}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\frac{4-3y}{4y} + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\frac{4-3y+3y}{4y}} \\
&= \frac{1}{\frac{4}{4y}} \\
&= y.
\end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\left(0; \frac{4}{3}\right]$.



Hình 0.22: Đồ thị của $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

7. Để $f(x)$ có nghĩa thì mẫu số phải khác 0. Có:

$$\begin{aligned} & 2x^2+5x-3 \neq 0 \\ \iff & (2x-1)(x+3) \neq 0 \quad \text{(Phân tích đa thức thành nhân tử.)} \\ \iff & x \notin \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}. \end{aligned}$$

Qua đó, tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}; -3\right\}$.

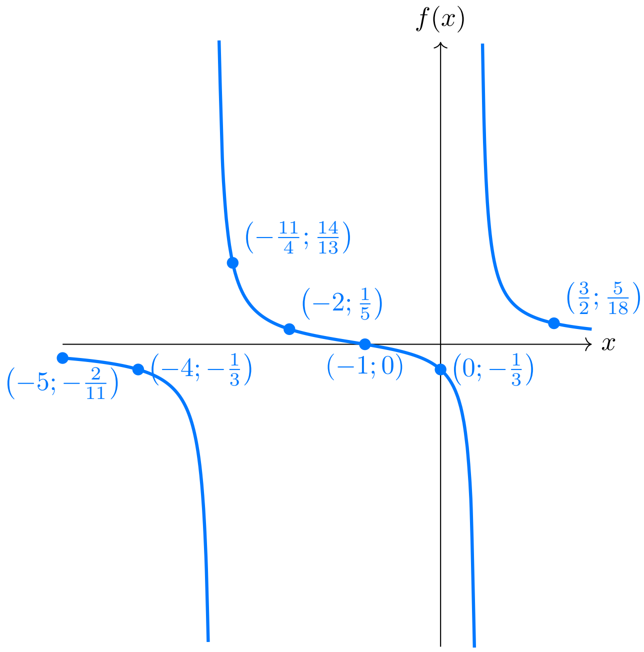
Bây giờ, chúng ta cần tìm những giá trị y sao cho tồn tại x để $y = f(x)$. Với $y = 0$ thì có $f(-1) = 0$ từ đồ thị 0.23. Với $y \neq 0$, đặt

$$x = \frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}.$$

x luôn nhận giá trị thực do mẫu số khác 0 ($4y \neq 0$) và phần tử bên trong dấu khai căn $49y^2-2y+1 = 48y^2+y^2-2y+1 = 48y^2+(y-1)^2$ luôn không âm. Thay giá trị x này vào tử số của $f(x)$:

$$\begin{aligned} x+1 &= \frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}+1 \\ &= \frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y}. \end{aligned}$$

Thay giá trị của y vào mẫu:



Hình 0.23: Đồ thị của $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+5x-3}$

$$\begin{aligned} 2x^2+5x-3 &= (x+3)(2x-1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}+3\right)\left(2\cdot\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}-1\right) \\ &= \frac{\sqrt{49y^2-2y+1}+7y+1}{4y}\cdot\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-7y+1}{2y} \\ &= \frac{\left(\sqrt{49y^2-2y+1}+1\right)^2-(7y)^2}{8y^2} \\ &= \frac{49y^2-2y+1+2\sqrt{49y^2-2y+1}+1-49y^2}{8y^2} \\ &= \frac{2\sqrt{49y^2-2y+1}-2y+2}{8y^2} \\ &= \frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y^2}. \end{aligned}$$

Mẫu số này khác 0 do nếu bằng 0 thì chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned} & \sqrt{49y^2-2y+1}-y+1 = 0 \\ \iff & \sqrt{49y^2-2y+1} = y-1 \\ \implies & 49y^2-2y+1 = (y-1)^2 \\ \iff & 49y^2-2y+1 = y^2-2y+1 \\ \iff & 48y^2 = 0 \\ \iff & y = 0 \end{aligned}$$

mâu thuẫn với giả thiết $y \neq 0$. Lấy tử số chia cho mẫu số và khử bỏ thừa số chúng để có

$$f\left(\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}\right) = \frac{\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y}}{\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y^2}} = y.$$

Chúng ta đã thể hiện rằng mọi số y đều có thể biểu diễn thông qua $f(x)$. Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}$.
8. Giải tập xác định:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &\neq 0 \\ \iff (x+1)^2 &\neq 0 \\ \iff x &\neq -1. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Giải tập giá trị sẽ khó hơn. Gọi $y \in \mathbb{R}$ và giả sử $y = f(x)$. Khi này,

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} \\ \implies y(x^2 + 2x + 1) &= x^2 - 3x - 2 \\ \iff yx^2 + 2yx + y &= x^2 - 3x - 2 \\ \iff (y-1)x^2 + (2y+3)x + (y+2) &= 0. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Nếu $y = 1$ thì từ (0.10), $5x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{5}$. Vậy 1 có thể là kết quả của $f(x)$.

Trong trường hợp còn lại, coi (0.10) là phương trình bậc hai với x là nghiệm. Để tồn tại nghiệm thì $\Delta \geq 0$, với Δ là

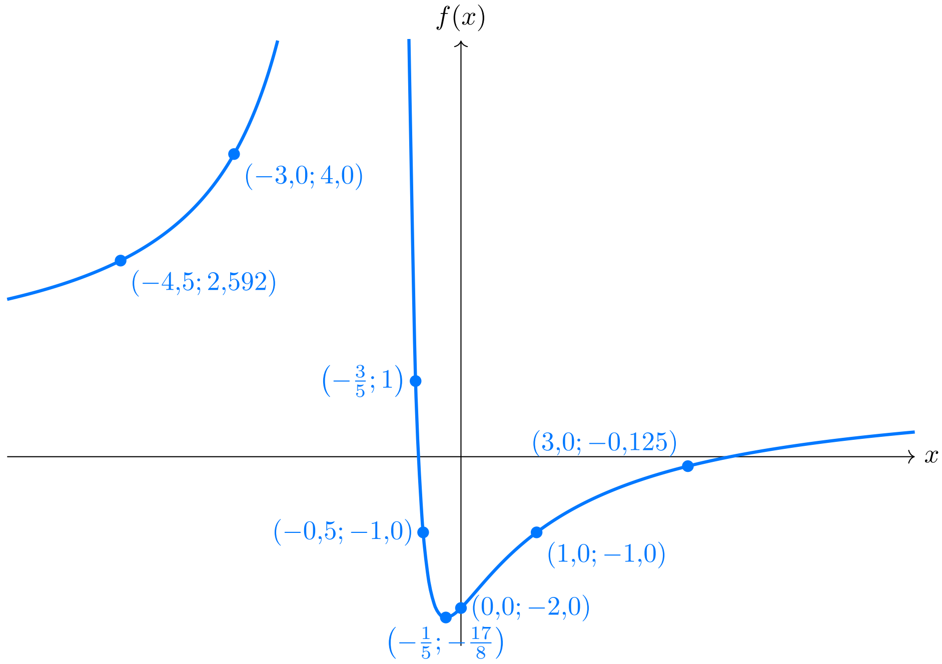
$$\begin{aligned} &= (2y+3)^2 - 4(y-1)(y+2) \\ &= 4y^2 + 12y + 9 - 4(y^2 + y - 2) \\ &= 4y^2 + 12y + 9 - 4y^2 - 4y + 8 \\ &= 8y + 17. \end{aligned}$$

Từ đó, để $\Delta \geq 0$ thì $8y + 17 \geq 0 \iff y \geq -\frac{17}{8}$.

Kiểm tra ngược tập giá trị, chúng ta đã biết 1 thuộc tập giá trị này. Với mọi giá trị $y \geq -\frac{17}{8}$ khác 1, đặt $x = \frac{2y+3-\sqrt{8y+17}}{2(1-y)}$, khi này

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1} - y + y = \frac{x^2 - 3x - 2 - yx^2 - 2yx - y}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{(1-y)x^2 - (2y+3)x - (2+y)}{(x+1)^2} + y = \frac{x^2 - \left(\frac{2y+3}{1-y}\right)x - \frac{y+2}{1-y}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot \left(\frac{2y+3}{2(1-y)}\right) + \left(\frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \left(\frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{y+2}{1-y}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{\left(x - \frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{\left(\frac{2y+3-\sqrt{8y+17}}{2(1-y)} - \frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{\left(\frac{-\sqrt{8y+17}}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y = \frac{\frac{8y+17}{4(1-y)^2} - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y = y. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\left[-\frac{17}{8}; \infty\right)$. Đồ thị của $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1}$ được thể hiện trong 0.24.



Hình 0.24: Đồ thị của $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1}$

9. Xét tập xác định của $f(x)$, cần phải có $x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2$. Vậy tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đặt $y = f(x)$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x^2+2}{x-2} \\ \iff y(x-2) &= 2x^2+2 \\ \iff yx - 2y &= 2x^2+2 \\ \iff 2x^2 - yx + 2y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Coi kết quả của biến đổi là phương trình bậc hai ẩn x. Để tồn tại x thì cần phải có

$$\begin{aligned} (-y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2y+2) &\geq 0 \\ \iff y^2 - 16y - 16 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kẻ bảng xét dấu của $g(y) = y^2 - 16y - 16$:

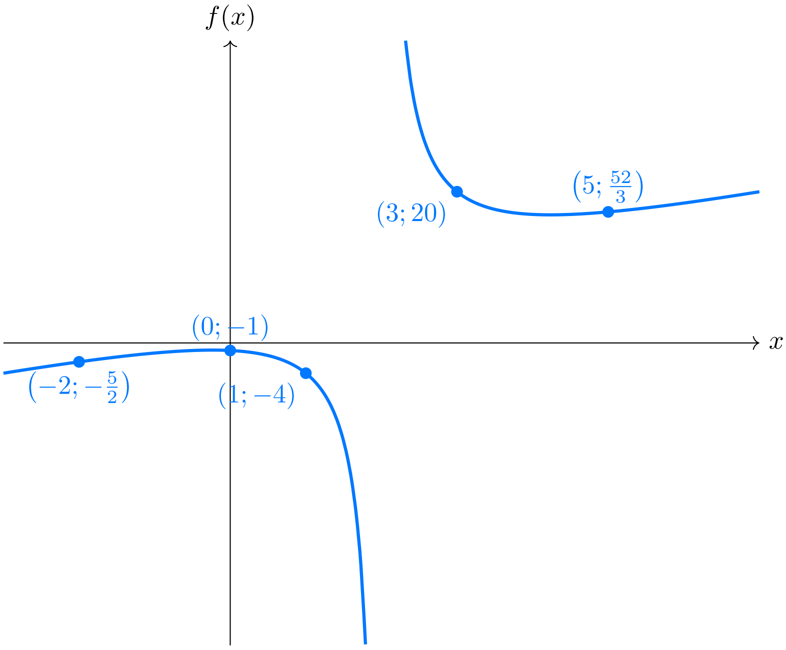
y	$-\infty$		$8-4\sqrt{5}$		$8+4\sqrt{5}$		∞
$y^2-16y-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bảng 0.2: Bảng xét dấu của $g(y) = y^2 - 16y - 16$

Qua bảng, chúng ta có điều kiện của y là $y \in \left(-\infty; 8-4\sqrt{5}\right] \cup \left[8+4\sqrt{5}; \infty\right)$. Chúng ta cũng có thể kiểm chứng bằng biến đổi đại số rằng với y thuộc tập hợp này thì có $f\left(\frac{\sqrt{y^2-16y-16}+y}{4}\right) = y$.

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\left(-\infty; 8-4\sqrt{5}\right] \cup \left[8+4\sqrt{5}; \infty\right)$.

Do tính chất của đồ thị, trục tung của đồ thị trong lời giải của tác giả đã bị co lại 10 lần, thể hiện ở hình 0.25.



Hình 0.25: Đồ thị của $f(x) = \frac{2x^2+2}{x-2}$

Bài 6: Giải các phương trình sau với ẩn $x \in \mathbb{R}$.

1. $\dfrac{2x^2-5x+2}{3x} = 0$;
2. $\dfrac{4x+2}{x^2+x-2} = 1$;
3. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2-x-3} = \dfrac{1}{x-1}$;
4. $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{8}{x^2-4}$;
5. $A = \dfrac{h}{6x}\left(\dfrac{b_0}{x} + 4b_1 + b_2\right)$ với A, b_0, b_1, b_2, h là những tham số thực dương;
6. $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{8}{4-x^2}$;
7. $\dfrac{24}{x+2} + \dfrac{24}{x^2-5x+6} = x^2$.

Lời giải bài 6:

1. Không phải mọi giá trị của x sẽ làm cho biểu thức được cho ở mỗi vế có nghĩa. Để $\frac{2x^2-5x+2}{3x}$ có nghĩa thì $3x \neq 0 \iff x \neq 0$. Khi này:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-5x+2}{3x} &= 0 \\ \implies 2x^2-5x+2 &= 0 \\ \iff (2x-1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Kiểm tra trực tiếp, chúng ta thấy nghiệm thỏa mãn phương trình gốc. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{2};2\right\}$.

2. Coi vế trái của phương trình được cho là một phân thức, chúng ta tìm tập xác định của nó:

$$\begin{aligned} x^2+x-2 &\neq 0 \\ \iff (x+2)(x-1) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases} .$$

Thực hiện biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned}
\frac{4x+2}{x^2+x-2} &= 1\\
\implies 4x+2 &= x^2+x-2\\
\iff 0 &= x^2-3x-4\\
\iff 0 &= (x+1)(x-4)\\
\iff x &\in \{-1;4\}.
\end{aligned}$$

Cả hai giá trị đều là nghiệm của phương trình bằng kiểm tra trực tiếp. Vậy phương trình có nghiệm là $\{-1;4\}$.

3. Để cả vế trái và vế phải của phương trình xác định giá trị thì

$$\begin{cases} x^3+3x^2-x-3\neq 0\\ x-1\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}(x-1)(x+1)(x-3)\neq 0\\ x-1\neq 0\end{cases} \iff x\notin\{-1;1;3\}.$$

Biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2-x-3} &= \frac{1}{x-1}\\
\iff \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)(x-3)} &= \frac{1}{x-1}\\
\iff \frac{1}{x-1} &= \frac{1}{x-1}.
\end{aligned} \tag{0.11}$$

Phương trình (0.11) luôn đúng với x làm cho cả hai vế của phương trình xác định. Do đó, tập nghiệm của phương trình là $\mathbb{R}\setminus\{-1;1;3\}$.

4. Phương trình có tập xác định[4] là $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{x+2}-\frac{x}{x-2} &= \frac{8}{x^2-4}\\
\iff \frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} &= \frac{8}{(x-2)(x+2)}\\
\implies \left(3x^2-6x\right)-\left(x^2+2x\right) &= 8\\
\iff 2x^2-8x-8 &= 0\\
\iff x &\in \left\{2\left(1+\sqrt{2}\right);2(1-\sqrt{2})\right\}.
\end{aligned}$$

Kiểm tra lại, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{3\cdot 2(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})+2}-\frac{2(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})-2}\\
=&\frac{6+6\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}-\frac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\\
=&\frac{\left(6+6\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}-\left(2+2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)}\\
=&\frac{12\sqrt{2}+24-\left(16+12\sqrt{2}\right)}{\left(2\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2-4}\\
=&\frac{8}{\left(2\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2-4}.
\end{aligned}$$

Tương tự khi kiểm tra $x=2\left(1-\sqrt{2}\right)$. Vậy phương trình có nghiệm là $\left\{2\left(1+\sqrt{2}\right);2\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}$.

5. Phương trình xác định khi $x\neq 0$. Trên điều kiện này,

[4]Tập xác định chỉ có với hàm số. Ở đây, ý chúng ta muốn là những giá trị để cho cả hai vế có thể tính được.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{h}{6x}\left(\frac{b_0}{x}+4b_1+b_2\right) \\
&= \frac{hb_0}{6x^2}+\frac{h\left(4b_1+b_2\right)}{6x} \\
\iff 6x^2A &= hb_0 + h\left(4b_1+b_2\right)x \\
\iff 6A\cdot x^2 - h\left(4b_1+b_2\right)x - hb_0 &= 0. \qquad (0.12)
\end{aligned}$$

Nhận thấy rằng nếu (0.12) có nghiệm thì nghiệm này phải khác 0. Trái lại, nếu 0 là nghiệm thì sẽ phải có $hb_0 = 0$. Nhưng từ giả thiết b_0 và h đều dương, $hb_0 > 0$. Chúng ta cần phải có nhận định này để không cần phải kiểm tra lại điều kiện tập xác định khi giải ra nghiệm.

Xét biệt thức $\Delta = h^2(4b_1+b_2)^2 + 24A\cdot hb_0$ của phương trình (0.12). Có các tham số đều là các giá trị dương nên Δ cũng là một giá trị dương. Cho nên, từ (0.12), chúng ta giải ra hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{h(4b_1+b_2)+\sqrt{\Delta}}{12A} \\ x = \frac{h(4b_1+b_2)-\sqrt{\Delta}}{12A} \end{array}\right. .$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{h(4b_1+b_2)+\sqrt{\Delta}}{12A}; \frac{h(4b_1+b_2)-\sqrt{\Delta}}{12A}\right\}$.

6. Phương trình có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. Trong tập xác định này,

$$\begin{aligned}
&\frac{3x}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{8}{4-x^2} \\
\iff &\frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{8}{(x-2)(x+2)}=0 \\
\iff &\frac{3x^2-6x-x^2-2x+8}{(x+2)(x-2)}=0 \\
\iff &\frac{2x^2-8x+8}{(x+2)(x-2)}=0 \\
\iff &2x^2-8x+8=0 \\
\iff &x^2-4x+4=0 \\
\iff &(x-2)^2=0 \\
\iff &x=2.
\end{aligned}$$

Tuy nhiên, tập xác định yêu cầu không nhận giá trị x này, cho nên phương trình này suy ra một điều mâu thuẫn. Vậy phương trình vô nghiệm.

7. Giải tập xác định của phương trình:

$$\begin{cases} x+2\neq 0 \\ x^2-5x+6\neq 0 \end{cases} \iff x\notin\{-2;2;3\}.$$

Giải phương trình:

$$\begin{aligned}
&\frac{24}{x+2}+\frac{24}{x^2-5x+6}=x^2 \\
\iff &\frac{24}{x+2}+\frac{24}{(x-2)(x-3)}-x^2=0 \\
\implies &24(x-2)(x-3)+24(x+2)-x^2(x-2)(x-3)(x+2)=0 \qquad \text{Nhân cả hai vế với } (x+2)(x-2)(x-3). \\
\iff &\left(24x^2-120x+144\right)+(24x+48)-\left(x^5-3x^4-4x^3+12x^2\right)=0 \\
\iff &-x^5+3x^4+4x^3+12x^2-96x+144=0 \\
\iff &(4-x)\left(x^4+x^3-12x+48\right)=0 \qquad (0.13)
\end{aligned}$$

Nhìn thấy ngay được, phương trình (0.13) có nghiệm $x=4$. Xét trường hợp còn lại, đặt $f(x) = x^4+x^3-12x+48 = x(x-2)\left(x^2+3x+6\right)+48$. Chúng ta sẽ chứng minh $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Chia làm hai trường hợp:

Trường hợp một — $0\le x\le 2$: Chúng ta sẽ chặn giá trị của những thành phần sau:

- $x(x-2)$:

$$\begin{aligned} x(x-2) &= x^2 - 2x \\ &= (x-1)^2 - 1 \\ \implies x(x-2) &\geq -1. \end{aligned} \tag{0.14}$$

- $x^2 + 3x + 6$:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 6 &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \\ \implies x^2 + 3x + 6 &\geq \frac{15}{4} > 0. \end{aligned}$$

Ngoài ra, theo giả thiết $0 \leq x \leq 2$,

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 3x \leq 6 \end{cases} \implies x^2 + 3x + 6 \leq 16 \iff -\left(x^2 + 3x + 6\right) \geq -16. \tag{0.15}$$

Kết hợp giữa (0.14) và (0.15) chúng ta có:

$$\begin{aligned} x(x-2) &\geq -1 && \text{(Từ bất phương trình (0.14).)} \\ \iff x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) &\geq -\left(x^2+3x+6\right) && \text{(Nhân cả hai vế với một số dương.)} \\ \iff x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) &\geq -16 && \text{(Từ bất phương trình ở (0.15).)} \\ \iff x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) + 48 &\geq 32 \\ \implies x^4 + x^3 - 12x + 48 &> 0. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có được $f(x) = 0$ không có nghiệm trong đoạn $[0;2]$.

Trường hợp hai — $x < 0$ hoặc $x > 2$: Dễ dàng nhận thấy x và $x-2$ cùng dấu cho nên $x(x-2) > 0$. Ngoài ra, đã có $x^2 + 3x + 6 > 0$ cho nên $x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) > 0$. Suy ra, $f(x) > 0$ với mọi $x \in)0;2($.

Kết hợp cả hai trường hợp, chúng ta có $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ như cần phải chứng minh.

Do đó, (0.13) $\iff x = 4$. Kiểm tra trực tiếp chúng ta thấy nghiệm này thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 4$.

Bài 7: Giải các bất phương trình sau trên ẩn x thực.

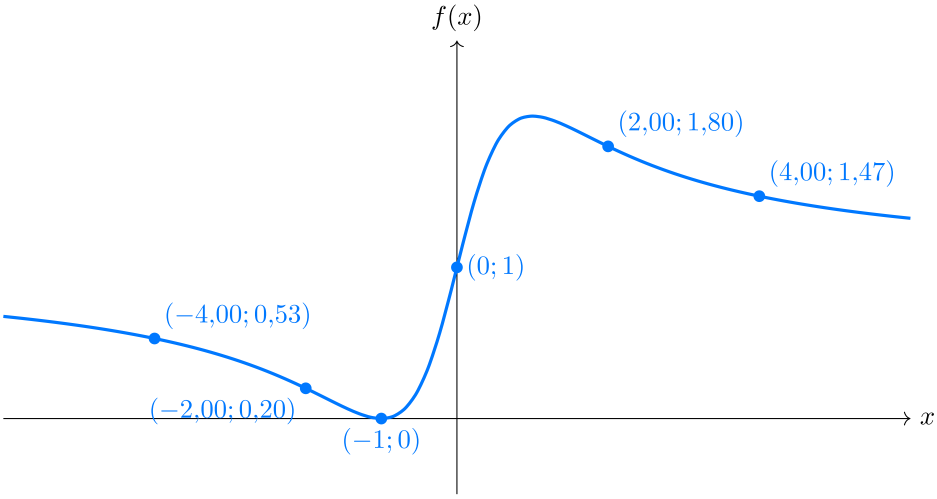
1. $\frac{x-1}{x+2} > 0$;
2. $\frac{x-2}{x^2+3x+2} \leq 0$;
3. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \geq 1$;
4. $x \leq \frac{x^2-1}{x}$;
5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} < \frac{2}{x-2}$;
6. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} \leq \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$;
7. $\frac{x^3-1}{x^2-1} > x - 1$;
8.

Bài 8: Phác thảo đồ thị của những hàm sau:

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + 1$;
2. $f(x) = \dfrac{x^4+1}{3x^2} - x$;
3. $f(x) = \dfrac{15x^3 + x^2 - 22x - 8}{3x^2 + 3x + 8}$;
4. $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$;
5. $f(x) = \dfrac{x+2}{x} \cdot \dfrac{x+3}{x+1}$;
6. $f(x) = \dfrac{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^4+4}}{\frac{2x^2+2}{3x^2+6x+6}}$.

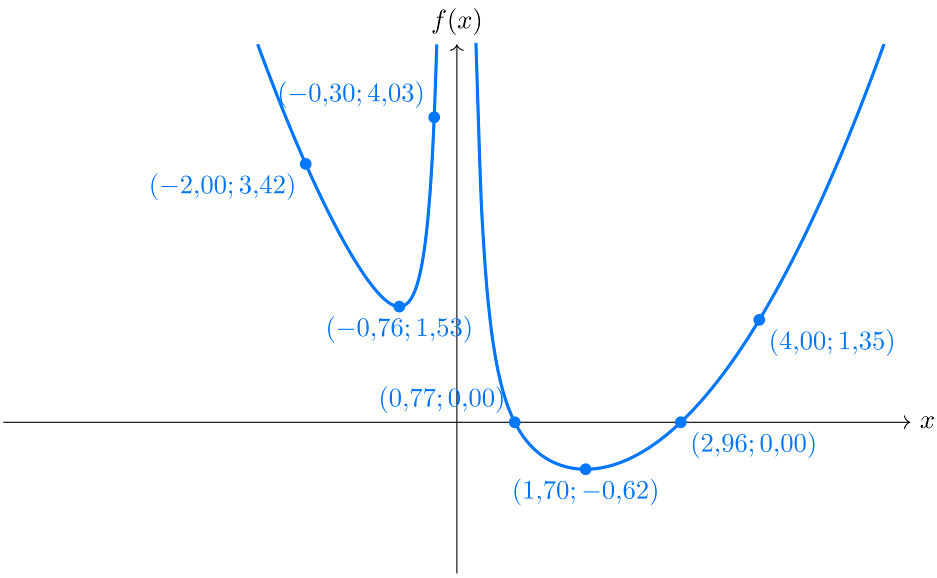
Lời giải bài 8:

1.



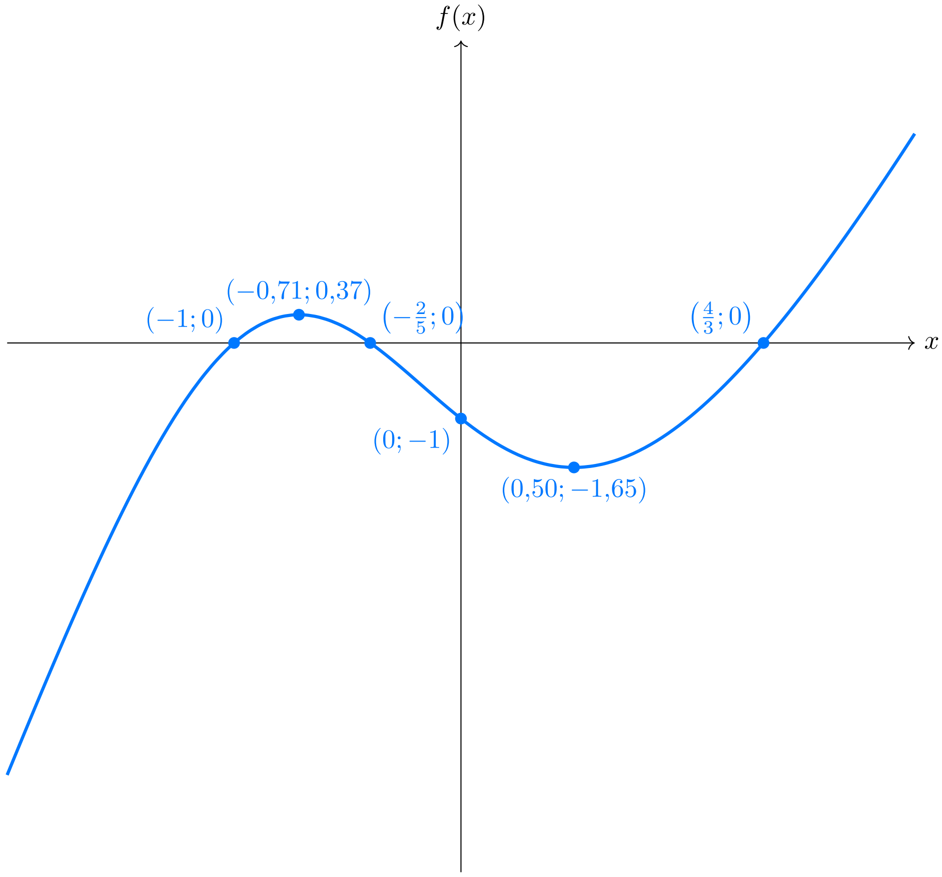
Hình 0.26: Đồ thị của $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 1$

2.



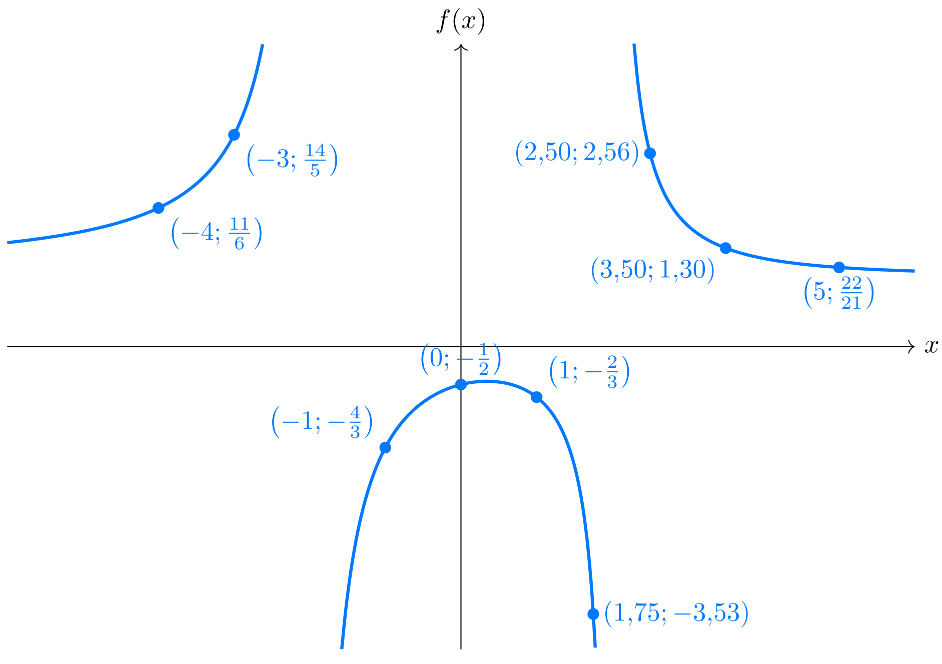
Hình 0.27: Đồ thị của $f(x) = \frac{x^4+1}{3x^2} - x$

3.



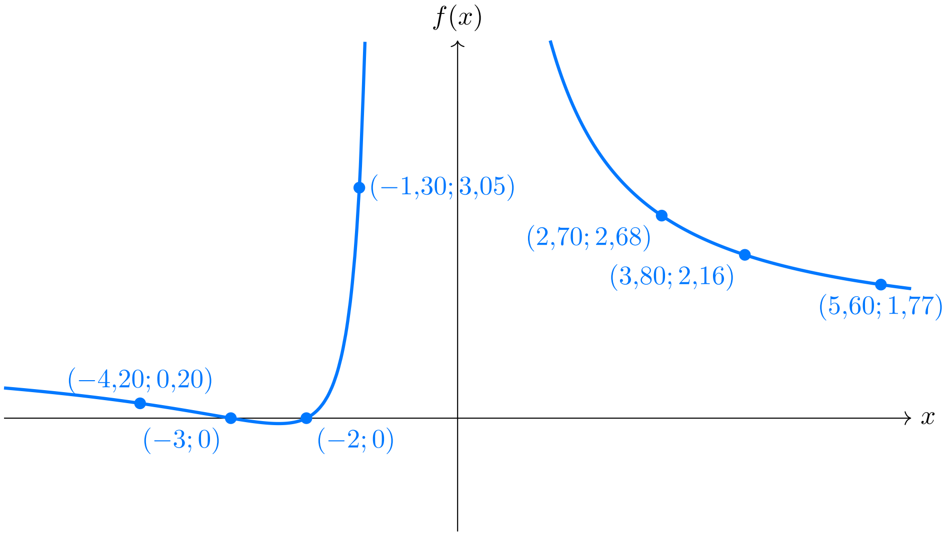
Hình 0.28: Đồ thị của $f(x) = \frac{15x^3+x^2-22x-8}{3x^2+3x+8}$

4.



Hình 0.29: Đồ thị của $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-2}$

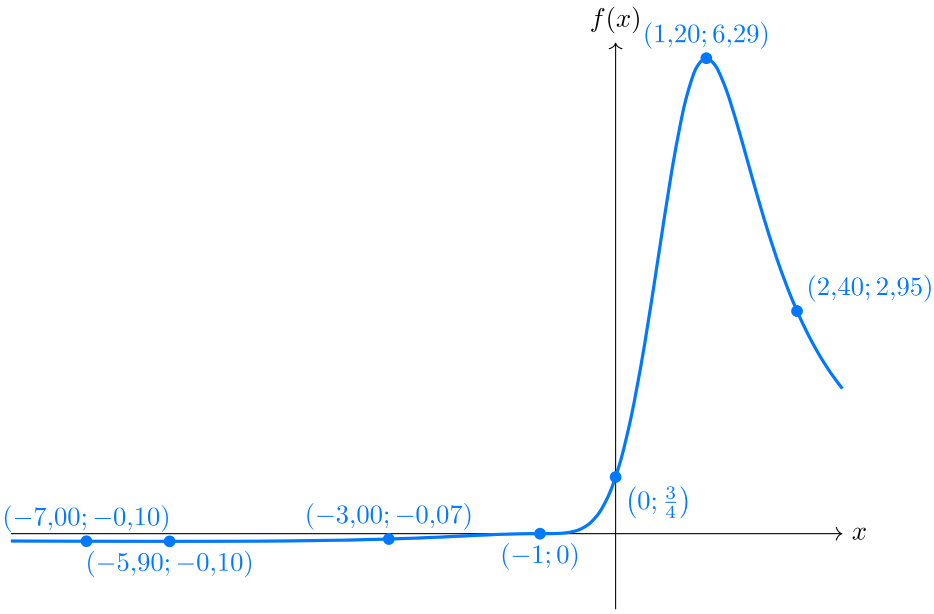
5.



Hình 0.30: Đồ thị của $f(x) = \frac{x+2}{x} \cdot \frac{x+3}{x+1}$

6. Thực hiện một số biến đổi đơn giản:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^4+4}}{\frac{2x^2+2}{3x^2+6x+6}} &= \frac{\frac{(x+1)^3}{(x^4+4x^2+4)-4x^2}}{\frac{2(x^2+1)}{3(x^2+2x+2)}} \\
&= \frac{(x+1)^3}{\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2} \cdot \frac{3\left(x^2+2x+2\right)}{2\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)} \cdot \frac{3\left(x^2+2x+2\right)}{2\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{3(x+1)^3}{2\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+2\right)}.
\end{aligned}$$



Hình 0.31: Đồ thị của $f(x) = \frac{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^4+4}}{\frac{2x^2+2}{3x^2+6x+6}}$

Tài liệu tham khảo

[1] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation, 2000.

[2] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.