# Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 19 tháng 12 năm 2025

# Mục lục

# Lời giới thiệu

# Phần 1
## Kiến thức toán học nền tảng

Phần này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Ví dụ, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn (bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán), mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 – 1955)

# 1.

# Lập luận trong toán học

## 1.1 Mệnh đề ghép và các phép nối mệnh đề

Hãy xem xét câu sau:

"Hôm nay trời mua *và* hội thao đã phải lùi lịch.".

Đây rõ ràng là một mệnh đề do chúng ta có thể dễ dàng xác định tính đúng sai của nó. Câu hỏi quan trọng hơn là chúng ta xác định tính chính xác của câu này như thế nào. Một cách tự nhiên, chúng ta sẽ xem xét từng phần "hôm nay trời mưa" và "hội thao đã phải lùi lịch". Từ tính đúng sai của hai vế, tính đúng sai của mệnh đề ban đầu được xác định. Đây là một ví dụ của **mệnh đề phức hợp** (hay **mệnh đề phức**), một mệnh đề được cấu tạo từ một hoặc một số **mệnh đề thành phần** và các **phép nối mệnh đề**.

Chỉ có 5 phép nối mệnh đề như sau:

- Phép **đối** — $\neg$,
- Phép **hội** hoặc phép **và** — $\wedge$,
- Phép **tuyển** hoặc phép **hoặc** — $\vee$,
- Phép **kéo theo** — $\implies$ hoặc $\Rightarrow$,
- Phép **tương đương** — $\iff$ hoặc $\Leftrightarrow$.

Kết hợp với chúng là hai dấu ngoặc, ngoặc đơn đóng ) và ngoặc đơn mở (, để xác định thứ tự giải giá trị lô-gích của mệnh đề phức hợp.

### 1.1.1 Phép đối

Thông thường, để phủ định một câu khẳng định, chúng ta hay dùng từ "không" hay những từ gần nghĩa như "chưa" hay "chẳng". Ví dụ, có thể phủ định câu "Cơm hôm nay ngon." thành "Cơm hôm nay *không* ngon.". Tuy nhiên, với những câu phức tạp hơn như ví dụ về hội thao ở trước đó thì việc thêm các chữ "không" như

"Hôm nay trời *không* mưa *và* hội thao đã *không* phải lùi lịch."

là không thỏa đáng. Cách viết đúng sẽ khá dài dòng:

"*Không phải trường hợp rằng* hôm nay trời mưa và hội thao đã phải lùi lịch.".

Sử dụng kí hiệu thì sẽ dễ dàng hơn, tuy nhìn hơi kì, kiểu như:

"$\neg$ (cơm hôm nay ngon)"

hay

"$\neg$ (hôm nay trời mưa và hội thao đã phải lùi lịch)".

Nhìn chung, nếu $P$ là một mệnh đề thì phủ định của nó sẽ có kí hiệu là $\boldsymbol{\neg P}$ hoặc $\overline{\boldsymbol{P}}$. Nếu $P$ đúng thì $\neg P$ sai và ngược lại, nếu $P$ sai thì $\neg P$ đúng.

### 1.1.2 Bảng giá trị chân lí

Trước khi đi đến những phép nối phức tạp hơn, chúng ta sẽ đề cập đến khái niệm bảng giá trị chân lí. Khi sử dụng các phép toán lô-gích để tạo ra mệnh đề phức hợp thì chúng ta cần phải xem xét các trường hợp có thể của các **giá trị chân lí**, một cách nói văn hoa hơn cho cụm từ "tính đúng sai", của từng mệnh đề thành phần. Khi mà số mệnh đề thành phần lớn lên thì số lượng trường hợp cũng tăng theo theo cấp số nhân. Để tránh việc phải viết nhiều, **bảng giá trị chân lí** đã được khai sinh[1].

Chúng ta sẽ lấy ví dụ ngay trên phép nối mệnh đề chúng ta vừa được tiếp cận. Khi xây dựng bảng giá trị chân lí, tác giả sẽ viết tắt "Đ" và "S" lần lượt cho mệnh đề có giá trị chân lí đúng và sai.

Bảng 1.1: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép đối

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| Đ | S |
| S | Đ |

### 1.1.3 Phép hội

Cho hai mệnh đề $P$ và $Q$. Mệnh đề phức "$P$ và $Q$" là **hội** của $P$ và $Q$ và có kí hiệu là $\boldsymbol{P \wedge Q}$. Mệnh đề này chỉ đúng khi cả hai mệnh đề thành phần $P$ và $Q$ đều đúng, thể hiện dưới dạng bảng giá trị chân lí 1.2.

Bảng 1.2: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép hội

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ |
| Đ | S | S |
| S | Đ | S |
| S | S | S |

### 1.1.4 Phép tuyển

Mệnh đề phức "$P$ hoặc $Q$" là **tuyển** của hai mệnh đề $P$ và $Q$ và có kí hiệu $\boldsymbol{P \vee Q}$. Mệnh đề này đúng khi tối thiểu một trong hai mệnh đề đầu vào đúng, và chỉ sai khi cả hai mệnh đề đầu vào đều sai. Bảng 1.3 cho giá trị chân lí của mệnh đề tuyển.

Bảng 1.3: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép tuyển

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ |
| Đ | S | Đ |
| S | Đ | Đ |
| S | S | S |

Ý nghĩa của từ "hoặc" trong toán học hơi khác với ý nghĩa thông thường. Khi người ta nói "hoặc", người ta hay ám chỉ một trong số các trường hợp liệt kê ra là đúng. Trong lô-gích, cả hai mệnh đề đúng vẫn làm cho mệnh đề phức hợp đúng.

### 1.1.5 Phép kéo theo

Đây lại là một phép nối nữa mà ý nghĩa của nó (có thể) khác với ý nghĩa thông thường. Đây là phép cũng gây nhiều lỗi lập luận lô-gích nhất. Mệnh đề với phép **kéo theo** $\boldsymbol{P \implies Q}$ chỉ sai khi $P$ không suy ra

[1] Đây có vẻ là một khái niệm đơn giản, bởi vì lập bảng là một thao tác đã được thực hiện thường xuyên xuyên suốt lịch sử loài người, tuy nhiên, không có quá nhiều tài liệu lịch sử nói về bảng giá trị chân lí. Tài liệu sớm nhất mà tác giả tìm được cho thấy sự sử dụng của kiểu bảng này xuất phát từ thế kỉ XIX[2]. Có thể, trường hợp thứ nhất, người xưa thấy việc viết (hay nói, biết chữ là một thứ xa xỉ) các mệnh đề lô-gích phức hợp là bình thường, hoặc, trường hợp thứ hai với khả năng xảy ra cao hơn, kiến thức lịch sử của tác giả còn hạn hẹp.

$Q$, điều này tương đương, và chỉ tương đương, với có $P$ mà không có $Q$. Bạn đọc nên để ý kĩ hai dòng cuối cùng của bảng giá trị chân lí 1.4.

Bảng 1.4: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép kéo theo

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ |
|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ |
| Đ | S | S |
| *S* | *Đ* | *Đ* |
| *S* | *S* | *Đ* |

### 1.1.6 Phép tương đương

Thông thường, hai sự vật "tương đương" có nghĩa là hai sự vật có giá trị ngang nhau và có thể thay thế được cho nhau. Tương tự, trong lô-gích, hai mệnh đề **tương đương** khi và chỉ khi cả hai luôn cùng đúng hoặc cùng sai.

Bảng 1.5: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép tương đương

| $P$ | $Q$ | $P \iff Q$ |
|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ |
| Đ | S | S |
| S | Đ | S |
| S | S | Đ |

### 1.1.7 Thứ tự giải giá trị chân lí của mệnh đề của các phép nối

Giống như thứ tự các phép tính số học[2]để tính giá trị các biểu thức số học, để xác định giá trị chân lí của mệnh đề có nhiều phép nối, các phép nối mệnh đề cũng có sắp xếp thứ tự[3] từ mức ưu tiên cao đến ưu tiên thấp như sau:

1. Phép đối — $\neg$ (mức ưu tiên cao nhất);
2. Phép và — $\wedge$;
3. Phép hoặc — $\vee$;
4. Phép kéo theo và phép tương đương — $\implies$ và $\iff$ (mức ưu tiên thấp nhất).

Với các phép ở trên cùng một mức, có thể quy ước xử lí theo nhiều cách khác nhau: thứ tự xuất hiện (từ trái qua phải), kết hợp tính toán từ trái qua phải với thứ tự phép kéo theo đi trước phép tương đương, hoặc yêu cầu sử dụng các dấu ngoặc để sắp xếp thứ tự. Trong cuốn sách này, tác giả sẽ sử dụng quy ước *từ trái qua phải* là chủ yếu, kèm với việc sử dấu ngoặc để giúp tăng khả năng đọc khi cần thiết.
**Bài 1:** Xây dựng bảng giá trị chân lí của các mệnh đề sau:

1. $\neg P \implies Q$;
2. $(P \iff Q) \vee \neg Q$;
3. $P \wedge (Q \implies R)$;
4. $P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$;
5. $Q \implies R \wedge R \vee \neg P$;
6. $(P \implies Q) \implies (R \implies Q \implies P)$.

**Lời giải bài 1**:
1. Để ý đến thứ tự các phép nối, dấu $\neg$ sẽ được thực hiện trước $\implies$. Thực hiện xây dựng như ở bảng sau.

[2] [...], thứ mà con người phát minh ra [...]
[3] [...]và vẫn chưa có sự thống nhất[...]

Bảng 1.6: Bảng giá trị chân lí cho bài 1 phần 1

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg P \implies Q$ |
|---|---|---|---|
| Đ | Đ | S | Đ |
| Đ | S | S | Đ |
| S | Đ | S | Đ |
| S | S | Đ | S |

Có thể thực hiện viết bảng giá trị chân lí dưới dạng rút gọn như ở bảng 1.8. Sau khi thực hiện xong một phép nối, có thể viết ở ngay dưới mệnh đề cần tìm giá trị chân lí thay vì tách thành cột riêng để tiết kiệm giấy nếu như mệnh đề dài.

Bảng 1.7: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho bài 1 phần 1

| $P$ | $Q$ | $\neg$ | $P$ | $\implies$ | $Q$ | $\neg P \implies Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Đ | Đ | S | Đ | *Đ* | Đ | Đ |
| Đ | S | S | Đ | *Đ* | Đ | Đ |
| S | Đ | Đ | S | *Đ* | Đ | Đ |
| S | S | Đ | S | *S* | S | S |

2.

Bảng 1.8: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho bài 1 phần 2

| $P$ | $Q$ | $(P$ | $\iff$ | $Q)$ | $\vee$ | $\neg$ | $Q$ | $(P \iff Q) \vee \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Đ | Đ | Đ | Đ | Đ | *Đ* | S | Đ | Đ |
| Đ | S | Đ | S | S | *Đ* | Đ | S | Đ |
| S | Đ | S | S | Đ | *S* | S | Đ | S |
| S | S | S | S | S | *Đ* | Đ | S | Đ |

**Bài 2:** Sử dụng bảng giá trị chân lí, chứng minh các mệnh đề sau luôn đúng với mọi giá trị chân lí của $P$, $Q$ và $R$.

- $P \vee \neg P$ (tính loại trừ trung gian[4]);
- $\neg(P \wedge \neg P)$ (tính không mâu thuẫn[5]);
- $\neg(\neg P) \iff P$ (tính phủ định kép);
- $P \wedge P \iff P$ (tính khả nghịch với phép hội);
- $P \vee P \iff P$ (tính khả nghịch với phép tuyển);
- $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ (tính giao hoán với phép hội);
- $P \vee Q \iff Q \vee P$ (tính giao hoán với phép tuyển);
- $\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$ (định luật Đờ Moóc-gơn[6], phần 1);
- $\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$ (định luật Đờ Moóc-gơn, phần 2);
- $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$;
- $\neg(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$ (phép đối trên phép kéo theo);
- $(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$;
- $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$ (tính chất kết hợp với phép hội);
- $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$ (tính chất kết hợp với phép tuyển);
- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \wedge (Q \vee R)$ (tính chất phân phối, phần 1);

[4]Một mệnh đề hoặc đúng, hoặc phủ định của nó đúng; không tồn tại khả năng trung gian.
[5]Không thể có một mệnh đề vừa đúng vừa sai cùng lúc và theo cùng một nghĩa.
[6]Augustus De Morgan (1806 – 1871)

- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \vee (Q \wedge R)$ (tính chất phân phối, phần 2);
- $(P \implies Q) \wedge (Q \implies R) \implies (P \implies R)$ (tính chất bắc cầu);
- $(P \iff Q) \wedge (Q \iff R) \iff$

# Tài liệu tham khảo - Toán

[1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.

[2] Irving H Anellis. Peirce's truth-functional analysis and the origin of the truth table. *History and Philosophy of Logic*, 33(1):87–97, 2012.

[3] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation, 2000.

# Tài liệu tham khảo - Vật lí