Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 13 tháng 2 năm 2026

Mục lục

Phần 1
Kiến thức toán học nền tảng

Phần này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Ví dụ, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn (bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán), mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 – 1955)

1.

Giải tích mệnh đề

1.1 Phương pháp lập luận lô-gích

1.1.1 Điều kiện cho lập luận lô-gích

Quá trình lập luận lô-gích được kiểm soát bởi những bộ quy luật hết sức đơn giản, đơn giản tới mức mà cả tác giả và bạn đọc đều có thể và đã từng làm theo. Có rất nhiều yêu cầu về mặt kĩ thuật cần phải quan tâm khi xây dựng một bộ quy luật lập luận mà khuôn khổ cuốn sách này không có khả năng đề cập. Tác giả sẽ chỉ đưa ra các điều kiện cơ bản nhưng quan trọng nhất khi lập luận lô-gích diễn dịch:

1. Điều kiện về **tính ổn định**: Bộ quy luật lập luận không thể vừa chứng minh một mệnh đề và đồng thời là phủ định của nó. Hiểu theo cách khác, bộ quy luật không thể chứng minh đồng thời P và $\neg P$ cùng đúng;

2. Điều kiện về **tính hoàn thiện**: Bộ quy luật lập luận cần phải cho phép chứng minh *tất cả* các kết luận có thể từ một nhóm các giả thiết nhất định.

1.1.2 Định nghĩa chứng minh

Từ các điều kiện, chúng ta lại đặt câu hỏi, thế nào là chứng minh? Để tránh định nghĩa lặp "chứng minh là một quá trình lập luận", tác giả sẽ đưa ra một định nghĩa đơn giản như sau: Nếu như cho biết W, mệnh đề X **chứng minh** mệnh đề Y khi và chỉ khi $\boldsymbol{X} \implies \boldsymbol{Y}$ (dưới điều kiện W)[1].

Nếu có nhiều mệnh đề cho giả thiết X_1, X_2,..., X_n, thì khi này mệnh đề giả thiết tổng là hợp của tất cả các giả thiết con

$$X = X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n = \bigwedge_{i=1}^{n} X_i.$$

Một cách tương tự, chúng ta cũng có thể định nghĩa điều kiện tổng W và kết luận tổng Y.

$$W = W_1 \wedge W_2 \wedge \cdots \wedge W_n = \bigwedge_{i=1}^{n} W_i;$$

$$Y = Y_1 \wedge Y_2 \wedge \cdots \wedge Y_n = \bigwedge_{i=1}^{n} Y_i.$$

Do chúng ta chưa xây dựng hệ thống số cho nên việc kí hiệu bằng dấu $\cdots$ hay dấu $\bigwedge$ lớn sẽ là hơi lạm dụng. Do đó, với trường hợp xác định được số lượng các mệnh đề, nên viết đầy đủ và tường minh toàn bộ biểu thức thay vì viết tắt.

Ngoài ra, bạn đọc cũng có thể đã để ý rằng tác giả tách một phần gọi là "điều kiện" mặc dù hoàn toàn có thể đưa điều kiện vào trong phần giả thiết. Sở dĩ tác giả làm như vậy là do thực tế, khi chứng minh phần lớn các bài toán, chúng ta cũng sẽ ngầm hiểu một số điều kiện nhất định — định nghĩa, tính chất, hay kết quả đã có. Ví dụ, kể đến về một định lí quen thuộc:

[1] Từ giờ trở đi, mỗi mệnh đề được đưa ra sẽ được mặc định là đúng.

"Nếu x là một số thực thì $x^2 \geq 0$."

Một học sinh khá của cấp trung học cơ sở hoàn toàn có thể hiểu và lí giải được điều này sử dụng các tính chất của số thực được cung cấp. Học sinh muốn chứng minh định lí đó sẽ không cần phải chép lại cả quyển sách giáo khoa và đưa toàn bộ lí thuyết vào phần giả thiết, mà sẽ chỉ tập trung vào ý tưởng cốt lõi nhất và sự hiểu biết rằng người đọc (chủ yếu là giáo viên) sẽ biết về các tính chất của số thực được sử dụng trong chứng minh.

Xét một ví dụ cơ bản cho việc chứng minh, giả sử có giả thiết như sau:

1. "Nếu trời mưa thì sân vận động sẽ ướt.";
2. "Trời đang mưa."

và chứng minh kết luận "Sân vận động thì ướt". Để thực hiện chứng minh, chuyển sang dưới dạng kí hiệu

- P: "Trời mưa.";
- Q: "Sân vận động ướt.".

Qua đó, chúng ta có thể viết lại lập luận này dưới dạng như sau:

$$\begin{array}{r|l} \text{Giả thiết} & P \implies Q \\ & P \\ \hline \text{Kết luận} & Q \end{array}.$$

Mệnh đề mà chúng ta cần khẳng định đúng để hoàn thành chứng minh là $(P \implies Q) \wedge P \implies Q$. Thực vậy, có bảng 1.1.

Bảng 1.1: Bảng giá trị chân lí của $(P \implies Q) \wedge P \implies Q$

P	Q	$(P$	$\implies$	$Q)$	$\wedge$	P	$\implies$	Q
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	*Đ*	Đ
Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	S
S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	*Đ*	Đ
S	S	S	Đ	S	S	S	*Đ*	S

Vậy, từ giả thiết, chúng ta có kết được kết luận. Điều phải chứng minh.

Từ định nghĩa chứng minh, chúng ta cũng có định nghĩa của **không chứng minh**: X không chứng minh Y nếu tồn tại giá trị chân lí của X và Y để $X \implies Y$ sai.

Ví dụ, một phép ngụy biện thường xuyên được sử dụng là ngụy biện khẳng định hệ quả:

$$\begin{array}{r|l} \text{Giả thiết} & X \implies Y \\ & Y \\ \hline \text{Kết luận} & X \end{array}.$$

Sử dụng bảng giá trị chân lí, chúng ta có ngay điều không chứng minh.

Bảng 1.2: Bảng giá trị chân lí của $(X \implies Y) \wedge Y \implies X$

X	Y	$(X$	$\implies$	$Y)$	$\wedge$	Y	$\implies$	X
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	*Đ*	Đ
Đ	S	Đ	S	S	S	S	*Đ*	Đ
S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	*S*	S
S	S	S	Đ	S	S	S	*Đ*	S

Bài 1: Cho X và Y là hai mệnh đề thỏa mãn $X \iff Y$. Chứng minh rằng X chứng minh Y và Y chứng minh X.

Lời giải bài 1:

Viết lại đề bài dưới dạng giả thiết – kết luận:

Giả thiết	$X \iff Y$
Kết luận	$(X \implies Y) \land (Y \implies X)$

.

Sử dụng bảng giá trị chân lí:

Bảng 1.3: Bảng giá trị chân lí của $(X \iff Y) \implies (X \implies Y) \land (Y \implies X)$

X	Y	$(X$	$\iff$	$Y)$	$\implies$	$(X$	$\implies$	$Y)$	$\land$	$(Y$	$\implies$	$X)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	*Đ*	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S	*Đ*	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ
S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S
S	S	S	Đ	S	*Đ*	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S

<table>
<tr><th>X</th><th>Y</th><th>$(X \implies Y) \land (Y \implies X)$</th></tr>
<tr><td>Đ</td><td>Đ</td><td rowspan="4">Đ</td></tr>
<tr><td>Đ</td><td>S</td></tr>
<tr><td>S</td><td>Đ</td></tr>
<tr><td>S</td><td>S</td></tr>
</table>

chúng ta có điều phải chứng minh.

1.1.3 Quy tắc thay thế trong chứng minh lô-gích

Nếu như mỗi lần chứng minh, chúng ta phải lôi bảng giá trị chân lí thì sẽ gặp vấn đề khi một mệnh đề lớn có quá nhiều mệnh đề con cấu thành. Trong tương lai, chúng ta sẽ xây dựng các kiến trúc toán học cơ bản. Để làm được điều đó, chúng ta sẽ cần rất nhiều các định nghĩa và tiên đề. Chúng ta cần một hệ thống quy tắc để lập luận hoặc chứng minh.

- Quy tắc thứ nhất: Cho $A \implies B$. Khi thay đồng thời các mệnh đề A trong 穌 bởi B để có được mệnh đề 各 thì có được 穌 $\implies$ 各 hay 穌 chứng minh 各.
- Quy tắc thứ hai: Cho $A \iff B$. Khi thay đồng thời các mệnh đề A trong 穌 bởi B để có được mệnh đề 各 thì có được 穌 $\iff$ 各.
- Quy tắc thứ ba: Cho 墫 có mệnh đề A làm mệnh đề con. Nếu 墫 đúng không phụ thuộc vào giá trị chân lí của A thì mệnh đề 墫 vẫn đúng khi thay đồng thời tất cả các mệnh đề A trong 墫 bằng mệnh đề B bất kì.

Để thuận tiện cho việc lập luận, sẽ sử dụng các kết quả đã có của bài **??** ở trang **??**.

Bài 2: Chứng minh rằng $\overline{\neg A \lor B} \lor A \land \neg C \iff A \land \overline{B \land C}$ với A, B và C là các mệnh đề bất kì.

Lời giải bài 2: Có $\overline{P \lor Q} \iff \neg P \land \neg Q$ đúng với mọi mệnh đề P và Q theo định luật Đờ Moóc-gơn. Thay mệnh đề P và Q lần lượt bởi A và B, chúng ta có

$$\overline{\neg A \lor B} \iff \neg(\neg A) \land \neg B.$$

Lại có $\overline{\neg P} \iff P$ với mọi P theo tính chất phủ định kép cho nên $\neg(\neg A) \iff A$. Do đó

$$\overline{\neg A \lor B} \iff A \land \neg B.$$

Như một hệ quả,

$$\overline{\neg A \lor B} \lor A \land \neg C \iff A \land \neg B \lor A \land \neg C.$$

Theo tính chất phân phối, $P \land Q \lor P \land R \iff P \land (Q \lor R)$ với mọi P, Q, R,

$$A \land \neg B \lor A \land \neg C \iff A \land (\neg B \lor \neg C).$$

Suy ra, $\overline{\neg A \lor B} \lor A \land \neg C \iff A \land (\neg B \lor \neg C)$.

Định luật Đờ Moóc-gơn vẫn còn một hệ thức nữa là $\neg P \lor \neg Q \iff \overline{P \land Q}$, dẫn đến $(\neg B \lor \neg C) \iff \overline{B \land C}$ nếu đổi P bởi B và Q bởi C. Do đó

$$A \land (\neg B \lor \neg C) \iff A \land \overline{B \land C}.$$

Vậy $\overline{\neg A \vee B} \vee A \wedge \neg C \iff A \wedge \overline{B \wedge C}$. Chúng ta có điều cần phải chứng minh.
Bài 3: Biết rằng, lô-gích khó hoặc nhiều người thích học nó, và nếu làm khoa học là dễ thì lô-gích là không khó. Sử dụng lập luận diễn dịch, chứng minh rằng nếu không phải rằng nhiều người thích học lô-gích, làm khoa học là không dễ dàng.
Lời giải bài 3: Đặt biến cho các mệnh đề:

- L: "Lô-gích khó.";
- A: "Nhiều người thích học lô-gích.";
- S: "Làm khoa học là dễ dàng.".

Chúng ta có bộ giả thiết – kết luận như sau:

Giả thiết	$L \vee A$	("Lô-gích khó hoặc nhiều người thích học nó.")
	$S \implies \neg L$	("Nếu làm khoa học là dễ thì lô-gích là không khó.")
Kết luận	$\neg A \implies \neg S$	("Nếu không phải rằng nhiều người thích học lô-gích, làm khoa học là không dễ dàng.")

Viết lại dưới dạng kí hiệu, chúng ta cần chứng minh rằng

$$(L \vee A) \wedge (S \implies \neg L) \implies (\neg A \implies \neg S).$$

Trước hết, để ý rằng $A \implies \neg\neg A$ (theo tính chất phủ định kép) nên

$$L \vee A \iff L \vee \neg(\neg A).$$

Do tính chất giao hoán của phép tuyển,

$$L \vee \neg(\neg A) \iff \neg(\neg A) \vee L.$$

Theo định nghĩa phép kéo theo, $\neg P \vee Q \iff (P \implies Q)$ với mọi P và Q nên

$$\neg(\neg A) \vee L \iff (\neg A \implies L).$$

Kết hợp lại ba mệnh đề tương đương này, chúng ta có

$$L \vee A \iff (\neg A \implies L).$$

Theo tính chất phản đảo,

$$(S \implies \neg L) \iff (\neg(\neg L) \implies \neg S).$$

Kết hợp với tính chất phủ định kép,

$$(S \implies \neg L) \iff (L \implies \neg S).$$

Qua đó, xét vế giả thiết của mệnh đề cần chứng minh:

$$(L \vee A) \wedge (S \implies \neg L) \iff (\neg A \implies L) \wedge (L \implies \neg S).$$

Ngoài ra, theo tính chất bắc cầu,

$$(\neg A \implies L) \wedge (L \implies \neg S) \iff (\neg A \implies \neg S).$$

Do vậy,

$$(L \vee A) \wedge (S \implies \neg L) \iff (\neg A \implies \neg S).$$

Điều phải chứng minh.
Bài 4: Xác định xem các kết luận sau có thể được chứng minh từ các giả thiết được cho sử dụng lập luận diễn dịch hay không.

1.

Giả thiết	Nếu máy chủ hoạt động bình thường và đường truyền mạng ổn định thì người dùng có thể truy cập dữ liệu;
	Người dùng đang không truy cập được dữ liệu.
Kết luận	Máy chủ đang gặp sự cố.

;

2.

Giả thiết	Âm nhạc đang làm cho Qua-di thư giãn, hoặc là tiếng ồn làm cho Qua-di đau đầu; Nếu Qua-di đeo tai nghe chống ồn, thì tiếng ồn không làm cho Qua-di đau đầu; Thực tế là Qua-di đang đeo tai nghe chống ồn.
Kết luận	Âm nhạc đang làm cho Qua-di thư giãn.

;

3.

Giả thiết	Nếu bây giờ là tháng 12, thì tháng liền trước là tháng 11; Nếu tháng trước là tháng 11, thì 6 tháng trước (bây giờ) là tháng 6; Nếu tháng sau là tháng 1, thì bây giờ là tháng 12; Tháng liền trước là tháng 11.
Kết luận	Bây giờ đang là tháng 12.

;

4.

Giả thiết	Chỉ khi hoàng tử tiêu diệt được ma vương và cứu được công chúa thì vương quốc mới thái bình; Nếu vương quốc thái bình hoặc nhà vua băng hà, bầu trời sẽ không có màu tím; Nếu hoàng tử không cứu được công chúa, bầu trời sẽ có màu tím; Nhà vua chưa băng hà và bầu trời không có màu tím.
Kết luận	Hoàng tử đã cứu được công chúa.

;

5.

Giả thiết	Nếu Tu-ba-na thức khuya học bài và không uống cà phê, Tu-ba-na sẽ mệt mỏi vào sáng ngày hôm sau; Nếu Tu-ba-na mệt mỏi vào sáng ngày hôm sau, bạn ấy sẽ không thể thi tốt hoặc sẽ ngủ gật trong giờ thi; Ở giờ thi sáng nay, Tu-ba-na đã không quay cóp nhưng bạn ấy vẫn không thi tốt.
Kết luận	Tu-ba-na đã thức khuya học bài vào ngày trước hôm thi.

.

Lời giải bài 4:

1. Đặt biến cho các mệnh đề:

- N: "Máy chủ hoạt động bình thường.";
- C: "Đường truyền mạng ổn định.";
- D: "Người dùng có thể truy cập được dữ liệu.".

"Mảy chủ gặp sự cố." tương đương với "Máy chủ đang không hoạt động bình thường.", hay $\neg N$.

Viết lại hệ thống giả thiết – kết luận dưới dạng lô-gích:

Giả thiết	$N \wedge C \implies D$ $\neg D$
Kết luận	$\neg N$

.

Lập luận này là không sắc đáng, do tồn tại bộ giá trị chân lí cho C, D, và N khiến cho lập luận sai. Cụ thể, sau khi giải giá trị chân lí của mệnh đề $(N \wedge C \implies D) \wedge \neg D \implies \neg N$ với mệnh đề C và D sai và N là mệnh đề đúng —

C	D	N	$(N$	$\wedge$	C	$\implies$	$D)$	$\wedge$	$\neg$	D	$\implies$	$\neg$	N
S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ

,

chúng ta có mệnh đề cần chứng minh sai. Do vậy, kết luận không suy ra được từ giả thiết.

2. Đặt biến:

- R: "Âm nhạc (đang) làm cho Qua-di thư giãn.";

- B: "Tiếng ồn làm cho Qua-di đau đầu.";
- H: "Qua-di (đang) đeo tai nghe chống ồn.".

Kí hiệu hóa:

$$\begin{array}{r|l} \text{Giả thiết} & R \vee B \\ & H \implies \neg B \\ & H \\ \hline \text{Kết luận} & R \end{array}.$$

Do tính chất kết hợp của phép hội nên

$$(R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H \iff (R \vee B) \wedge ((H \implies \neg B) \wedge H).$$

Có $(H \implies \neg B) \wedge H \implies \neg B$ $((P \implies Q) \wedge P \implies Q)$ nên

$$(R \vee B) \wedge ((H \implies \neg B) \wedge H) \implies (R \vee B) \wedge \neg B.$$

Từ tính chất phân phối, chúng ta có

$$(R \vee B) \wedge \neg B \iff R \wedge \neg B \vee B \wedge \neg B.$$

Theo tính chất phủ định kép, $B \wedge \neg B \iff \overline{\neg(B \wedge \neg B)}$. Lại có $\neg(B \wedge \neg B)$ luôn đúng do tính chất không mâu thuẫn nên $\overline{\neg(B \wedge \neg B)}$ sai. Kết hợp lại, có được $B \wedge \neg B \iff \mathbf{M}$ với $\mathbf{M}$ là một mệnh đề sai nào đó.

Do vậy $(R \vee B) \wedge \neg B \iff R \wedge \neg B \vee \mathbf{M}$. Thêm tính chất đồng nhất, có $R \wedge \neg B \vee \mathbf{M} \iff R \wedge \neg B$, và theo tính chất rút gọn, $R \wedge \neg B \implies R$.

Kết hợp tất cả các kết quả đã có, chúng ta có thể có quá trình lập luận như sau:

$$\begin{aligned} &(R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H \iff (R \vee B) \wedge ((H \implies \neg B) \wedge H) \\ &(R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H \implies (R \vee B) \wedge \neg B \\ &(R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H \implies R \wedge \neg B \vee B \wedge \neg B \\ &(R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H \implies R \wedge \neg B \\ &(R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H \implies R. \end{aligned}$$

Vậy, kết luận có thể suy ra được từ giả thiết.

3. Trông đáp án của câu này có vẻ hiển nhiên, nhưng thực chất không phải như vậy. Kí hiệu các mệnh đề:

- D: "Bây giờ (đang) là tháng 12.";
- U: "Tháng (liền) trước là tháng 11.";
- S: "6 tháng trước (bây giờ) là tháng 6.";
- M: "Tháng (liền) sau là tháng 1.".

Chuyển giả thiết và kết luận sang dưới dạng kí hiệu:

$$\begin{array}{r|l} \text{Giả thiết} & D \implies U \\ & U \implies S \\ & M \implies D \\ & U \\ \hline \text{Kết luận} & D \end{array}.$$

Chỉ có một trường hợp khiến cho phép lập luận thất bại:

D	M	S	U	$(D$	$\implies$	$U)$	$\wedge$	$(U$	$\implies$	$S)$	$\wedge$	$(M$	$\implies$	$D)$	$\wedge$	U
S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ

D	M	S	U	$(D \implies U) \wedge (U \implies S) \wedge (M \implies D) \wedge U$	$\implies$	D
S	S	Đ	Đ	Đ	*S*	S

.

Nhưng chỉ cần một trường hợp là đủ để chứng minh không còn hợp lệ.

Cũng có thể nhìn câu này theo một hướng khác. Lập luận này chỉ hợp lệ nếu có điều kiện đi kèm. Nếu như chúng ta không sử dụng lịch thông thường mà sử dụng một loại lịch đặc biệt mà trước tháng 12 lại có một tháng 11A thì sao? Bài tập này càng nhấn mạnh cần phải có một "nền tảng" chung trong việc giải quyết vấn đề trước khi đề cập đến những yếu tố chi tiết.

4. Đặt biến các mệnh đề:

- L: "Hoàng tử tiêu diệt được ma vương.";
- P: "Hoàng tử cứu được công chúa.";
- N: "Vương quốc mới thái bình.";
- I: "Nhà vua băng hà.";
- R: "Bầu trời có màu tím.".

Kí hiệu hóa:

$$\begin{array}{r|l} \text{Giả thiết} & L \wedge P \implies N \\ & N \vee I \implies \neg R \\ & \neg P \implies R \\ & \neg I \wedge \neg R \\ \hline \text{Kết luận} & P \end{array}.$$

Viết tắt $(L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R) \wedge (\neg P \implies R) \wedge (\neg I \wedge \neg R)$ bởi M. Thực hiện liên tiếp các phép "biến đổi" thông qua các tính chất, nhận xét:

$$\begin{aligned} M &\iff \big((L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R)\big) \wedge (\neg P \implies R) \wedge (\neg I \wedge \neg R) \qquad \text{(thứ tự tính toán)}; \\ M &\iff \big((L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R)\big) \\ &\qquad\qquad \wedge \big((\neg P \implies R) \wedge (\neg I \wedge \neg R)\big) \qquad \text{(tính chất kết hợp của phép hội)}; \\ M &\implies (\neg P \implies R) \wedge (\neg I \wedge \neg R) \qquad \text{(tính chất rút gọn)}. \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất rút gọn một lần nữa để có $\neg I \wedge \neg R \implies \neg R$. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} M &\implies (\neg P \implies R) \wedge \neg R; \\ M &\implies \overline{\neg P} \qquad \text{(quy tắc phủ định)}; \\ M &\implies P \qquad \text{(tính chất phủ định kép)}. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có điều phải chứng minh. Bạn đọc cũng có thể thực hiện bài tập này thông qua bảng giá trị chân lí, nhưng khi đó, bạn đọc sẽ phải xét... mà thôi, bạn đọc có thể tham khảo bảng 1.4 nếu bạn đọc không muốn phải ghét bản thân như tác giả đã từng khi thực hiện lập bảng này[2]. Ngoài ra, bạn đọc cũng sẽ mất đi cơ hội được thưởng thức nghệ thuật của sự lập luận do bị thay thế bởi sự cơ học của phương pháp.

[2] Bạn đọc có thể kiểm tra lại bảng 1.4 để trải nghiệm cảm giác của tác giả lúc viết đáp án. Khi càng tăng nhiều biến thì số trường hợp cần phải kiểm tra cũng tăng theo theo cấp số nhân.

Bảng 1.4: Bảng giá trị chân lí của $(L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R) \wedge (\neg P \implies R) \wedge (\neg I \wedge \neg R) \implies P$

I	L	N	P	R	$(L$	$\wedge$	P	$\implies$	$N)$	$\wedge$	$(N$	$\vee$	I	$\implies$	$\neg$	$R)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S
Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	S
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	S
Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S
Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	S	Đ	S	S	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S
Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	S
Đ	S	S	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	S
S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S
S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ
S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S
S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ
S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	S	S	Đ	Đ	S
S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ
S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S
S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ
S	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S
S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ
S	S	Đ	S	S	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S
S	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ
S	S	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S
S	S	S	S	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ
S	S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S

I	L	N	P	R	$(L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R)$	$\wedge$	$(\neg$	P	$\implies$	$R)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	S
Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	*S*	Đ	S	Đ	Đ
Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S
Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	S	*S*	S	Đ	Đ	S
Đ	Đ	S	S	Đ	S	*S*	Đ	S	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S
Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	S
Đ	S	Đ	S	Đ	S	*S*	Đ	S	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S
Đ	S	S	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	S	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	S
Đ	S	S	S	Đ	S	*S*	Đ	S	Đ	Đ
Đ	S	S	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S
S	Đ	Đ	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	S
S	Đ	Đ	S	Đ	S	*S*	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S
S	Đ	S	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S	*S*	S	Đ	Đ	S
S	Đ	S	S	Đ	Đ	*Đ*	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	S	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S
S	S	Đ	Đ	Đ	S	*S*	S	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	S	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	S
S	S	Đ	S	Đ	S	*S*	Đ	S	Đ	Đ
S	S	Đ	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S
S	S	S	Đ	Đ	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	Đ
S	S	S	Đ	S	Đ	*Đ*	S	Đ	Đ	S
S	S	S	S	Đ	Đ	*Đ*	Đ	S	Đ	Đ
S	S	S	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S	S

I	L	N	P	R	$(L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R)$ $\wedge(\neg P \implies R)$	$\wedge$	$(\neg$	I	$\wedge$	$\neg$	$R)$	$\implies$	P
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	Đ
Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	Đ
Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	S
Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	S
Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	S
Đ	Đ	S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	S
Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	S
Đ	S	Đ	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	S
Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	Đ
Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	Đ
Đ	S	S	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	*Đ*	S
Đ	S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	S
S	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	Đ
S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	S
S	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	S
S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	Đ
S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	S
S	Đ	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	S
S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	Đ
S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	Đ
S	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	S
S	S	Đ	S	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	S
S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	Đ
S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	Đ
S	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	*Đ*	S
S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	S

5. Đặt biến:

- N: “Tu-ba-na thức khuya học bài.”;
- K: “Tu-ba-na uống cà phê.”;
- L: “Tu-ba-na mệt mỏi (vào sáng ngày thi).”;
- B: “Tu-ba-na thi tốt (vào sáng ngày thi).”;
- D: “Tu-ba-na ngủ gật trong giờ thi.”;
- Q: “Tu-ba-na đã quay cóp.”.

Kí hiệu hóa giả thiết và kết luận:

Giả thiết	$N \wedge \neg K \implies L$
	$L \implies \neg B \vee D$
	$\neg Q \wedge \neg B$
Kết luận	N

Không có bất cứ lí do nào để chứng minh này có thể hợp lí được cả, bởi vì nếu chúng ta đặt giá trị chân lí của tất cả các mệnh đề con là sai:

B	D	K	L	N	Q	N	$\wedge$	$\neg$	K	$\implies$	L
S	S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S

B	D	K	L	N	Q	L	$\implies$	$\neg$	B	$\vee$	D
S	S	S	S	S	S	S	Đ	Đ	S	S	S

B	D	K	L	N	Q	$\neg$	Q	$\wedge$	$\neg$	B
S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S

B	D	K	L	N	Q	$(N \wedge \neg K \implies L)$	$\wedge$	$(L \implies \neg B \vee D)$	$\wedge$	$(\neg Q \wedge \neg B)$	$\implies$	N
S	S	S	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	*S*	S

thì chúng ta có thể thấy rằng kết luận N không được suy ra từ giả thuyết.

Vậy, giả thiết không chứng minh được kết luận.

1.1.4 Mâu thuẫn

Từ một số giả thiết cho trước, chúng ta có thể chứng minh các mệnh đề khác, nhưng không có nghĩa là nó thực sự "đúng". Hãy tưởng tượng rằng bạn đọc đang đi xem ảo thuật. Ảo thuật gia dẫn dắt bạn đọc thông qua một câu chuyện của một quả bóng mà trong đó có những hành động được miêu tả rất chi tiết. Chiếc cốc úp vào quả bóng, di chuyển trên bàn trực tiếp dưới con mắt của bạn đọc. Bạn đọc nửa tin vào lời của ảo thuật gia, nửa tin vào thị giác của mình rằng quả bóng vẫn ở dưới cái cốc, nhưng cuối cùng, kết quả là quả bóng lại biến mất mà lại xuất hiện trong tay của nhà ảo thuật gia. Đúng là kết luận bạn đọc đưa ra — quả bóng nằm dưới cái cốc — là hợp lí từ câu chuyện của nhà ảo thuật gia, nhưng nó chỉ "đúng" nếu như ảo thuật gia thực hiện hành động thật như lời nói mà không có sự dụng kĩ thuật tay. Nói cách khác, các giả thiết mà nhà ảo thuật gia đưa ra chứng minh được kết luận của bạn đọc, nhưng kết luận chỉ thật sự hợp lí nếu như giả thiết là không có mâu thuẫn.

Mâu thuẫn được định nghĩa là khi giả thiết không thể nhận giá trị chân lí đúng. Viết dưới dạng kí hiệu, X bị mâu thuẫn nếu $X \implies \mathbf{M}$ với M là một mệnh đề sai nào đó. Chúng ta không bao giờ muốn làm việc với giả thiết có mâu thuẫn, do nó có thể chứng minh mọi thứ. Thật vậy, gọi Y là mệnh đề bất kì. Do X luôn sai nên $X \implies Y$ luôn đúng do định nghĩa của phép kéo theo. Vậy X chứng minh Y.

"Thế không phải mong ước của con người là khám phá mọi thứ, chứng minh mọi thứ hay sao?" — Bạn đọc có thể hỏi. Đúng là như vậy, nhưng sẽ khá vô dụng nếu chúng ta chứng minh được một mệnh đề và cả phủ định của nó nữa. Để ý rằng lập luận trong chứng minh trên không phụ thuộc vào Y. Do đó, chúng ta hoàn toàn có thể có $X \implies \neg Y$. Điều này không có nghĩa $Y \wedge \neg Y$, chỉ là khẳng định rằng phép chứng minh là không có giá trị nếu như điều kiện đầu vào đã sai.

Để chứng minh giả thiết X bị mâu thuẫn, chúng ta chứng minh $X \implies \mathbf{M}$. Để chứng minh giả thiết X không có mâu thuẫn, tương tự như chứng minh thông thường, chúng ta chỉ ra một trường hợp để $X \implies \mathbf{M}$ sai.

Bài 5: Cho các giả thiết sau. Xét xem những giả thiết đó có bị mâu thuẫn hay không.

1. $P \vee Q$, $\neg P$, $\neg Q$;
2. $P \uparrow R$, P, $Q \wedge R$;
3. $P \implies Q \impliedby R$, $\neg P$, $\neg Q$, $\neg R$;
4. $P \oplus Q$, $P \odot Q$;
5. $P \oplus Q$, $Q \odot R$, $R \oplus P$;
6. $A \odot B$, $B \oplus C$, $C \odot D$, $D \impliedby A$.

Lời giải bài 5:

Với toàn bộ các phần, gọi $\mathbf{M}$ là mệnh đề sai nào đó.

1. Thực hiện biến đổi lên giả thiết:

$$
\begin{aligned}
&(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q \iff (P \land \neg P \lor Q \land \neg P) \land \neg Q \quad \text{(tính chất phân phối)};\\
&(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q \iff (\mathbf{M} \lor \neg P \land Q) \land \neg Q \quad \text{(tính không mâu thuẫn và tính giao hoán)};\\
&(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q \iff (\neg P \land Q) \land \neg Q \quad \text{(tính đồng nhất với phép tuyển)};\\
&(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q \iff \neg P \land (Q \land \neg Q) \quad \text{(tính chất kết hợp)};\\
&(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q \iff \neg P \land \mathbf{M} \quad \text{(tính chất không mâu thuẫn)};\\
&(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q \iff \mathbf{M} \quad \text{(tính chất thống trị)}.
\end{aligned}
$$

Có $(P \lor Q) \land \neg P \land \neg Q$ chứng minh một mệnh đề sai. Do đó, giả thiết có mâu thuẫn.
2.

Bảng 1.5: Bảng giá trị chân lí của $(P \uparrow R) \land P \land (Q \land R)$

P	Q	R	$(P$	$\uparrow$	$R)$	$\land$	P	$\land$	$(Q$	$\land$	$R)$	$(P \uparrow R) \land P \land (Q \land R)$
Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	*S*	Đ	Đ	Đ	S
Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	*S*	Đ	S	S	
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	*S*	S	S	Đ	
Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	*S*	S	S	S	
S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	S	*S*	Đ	Đ	Đ	
S	Đ	S	S	Đ	S	S	S	*S*	Đ	S	S	
S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	*S*	S	S	Đ	
S	S	S	S	Đ	S	S	S	*S*	S	S	S	

Với mọi trường hợp, giả thiết đều có giá trị chân lí sai, cho nên giả thiết bị mâu thuẫn.

Có thể sử dụng lập luận rằng để giả thiết $P \uparrow R$ đúng thì không thể P và R cùng đúng, nhưng giả thiết thứ hai cho P, và giả thiết thứ ba — $Q \land R$ — hiển nhiên chứng minh R. Chúng ta thấy được điều mâu thuẫn.

3. Giả thiết là không mâu thuẫn, dưới trường hợp sau:

P	Q	R	$(P$	$\Longrightarrow$	Q	$\Longleftarrow$	$R)$	$\land$	$\neg$	P	$\land$	$\neg$	Q	$\land$	$\neg$	R
S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	*Đ*	Đ	S

.

Đây cũng là trường hợp duy nhất mà giả thiết không có mâu thuẫn.

4. Để $P \oplus Q$ đúng thì P và Q phải không cùng giá trị chân l, nhưng để $P \odot Q$ đúng thì P và Q phải giống nhau về giá trị chân lí. Vậy, mâu thuẫn.

Lập luận được kiểm tra lại bằng bảng giá trị chân lí 1.6.

Bảng 1.6: Bảng giá trị chân lí của $(P \oplus Q) \land (P \odot Q)$

P	Q	$(P$	$\oplus$	$Q)$	$\land$	$(P$	$\odot$	$Q)$	$(P \oplus Q) \land (P \odot Q)$
Đ	Đ	Đ	S	Đ	*S*	Đ	Đ	Đ	S
Đ	S	Đ	Đ	S	*S*	Đ	S	S	
S	Đ	S	Đ	Đ	*S*	S	S	Đ	
S	S	S	S	S	*S*	S	Đ	S	

5. Giả thiết là không có mâu thuẫn. Ví dụ:

P	Q	R	$(P$	$\oplus$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\odot$	$R)$	$\land$	$(R$	$\oplus$	$P)$
Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	*Đ*	S	Đ	Đ

.

6. Bảng 1.7 cho thấy rằng giả thiết luôn mâu thuẫn.

Bảng 1.7: Bảng giá trị chân lí của $(A \odot B) \wedge (B \oplus C) \wedge (C \odot D) \wedge (D \iff A)$

A	B	C	D	$(A$	$\odot$	$B)$	$\wedge$	$(B$	$\oplus$	$C)$	$\wedge$	$(C$	$\odot$	$D)$	$\wedge$	$(D$	$\iff$	$A)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	*S*	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	*S*	S	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	*S*	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	*S*	S	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	*S*	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	*S*	S	S	Đ
Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	S	S	S	S	S	S	Đ	*S*	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	S	S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	*S*	S	S	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	*S*	Đ	S	S
S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	*S*	S	Đ	S
S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S
S	Đ	S	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	*S*	S	Đ	S
S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	*S*	Đ	S	S
S	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	*S*	S	Đ	S
S	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	S	S	S	S	S	Đ	*S*	Đ	S	S
S	S	S	S	S	Đ	S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	*S*	S	Đ	S

Để có thể sử dụng lập luận thông thường, có thể thấy là để $A \odot B$ và $C \odot D$ đúng thì mỗi mệnh đề trong cặp A và B, C và D phải có giá trị chân lí giống nhau. Thêm vào đó, $B \oplus C$ dẫn đến B và C khác giá trị chân lí. Do vậy A và D khác giá trị chân lí. Tuy nhiên $D \iff A$ khi và chỉ khi D và A cùng đúng hoặc cùng sai, dẫn đến mâu thuẫn.

1.1.5 Chứng minh bằng phản chứng minh

Chứng minh bằng phản chứng minh (gọi tắt là **phản chứng**) là một phương pháp hiệu quả khi chúng ta không nhìn ra được phương hướng lập luận trực tiếp để chứng minh một mệnh đề. Để thực hiện phương pháp này, chúng ta thực hiện các bước như sau:

1. Giả sử phủ định của kết luận.
2. Coi hợp của giả thiết với phủ định của kết luận này là một nhóm giả thiết mới và lập luận đến khi chứng minh được một mệnh đề sai.
3. Qua đó có mâu thuẫn trong giả thiết mới, và kết luận rằng kết luận phải đúng.

Dù chúng ta vẫn còn đang thiếu rất nhiều công cụ để thực hiện chứng minh nhiều định lí, nhưng chúng ta hoàn toàn có thể khẳng định được sự hợp lí của phương pháp phản chứng. Trước hết, mô hình hóa phương pháp này dưới dạng giả thiết – kết luận. Gọi X là giả thiết ban đầu được cho, Y là kết quả cần được chứng minh và $\mathbf{M}$ là một mệnh đề sai nào đó. Ý tưởng của phản chứng được thể hiện quả giả thiết và kết luận mới như sau:

$$\begin{array}{r|l} \text{Giả thiết} & X \\ & X \wedge \neg Y \implies \mathbf{M} \\ \hline \text{Kết luận} & Y \end{array}.$$

Gọi $\mathbf{V}$ là một mệnh đề đúng. Theo tính chất thống trị, có

$$X \iff X \wedge \mathbf{V}.$$

Ngoài ra, do $P \vee \neg P \iff \mathbf{V}$ với mọi mệnh đề P, cho nên

$$X \iff X \wedge (Y \vee \neg Y).$$

Áp dụng tính chất phân phối để có

$$X \iff (X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y).$$

Giả thiết thứ hai cho chúng ta $X \wedge \neg Y$ có mâu thuẫn. Do vậy,

$$\begin{aligned} X \wedge (X \wedge \neg Y) &\implies X; \\ X \wedge (X \wedge \neg Y) &\implies (X \wedge Y) \vee \mathbf{M}; \\ X \wedge (X \wedge \neg Y) &\implies X \wedge Y. \end{aligned}$$

Có $X \wedge Y \implies Y$, qua đó có được điều phải chứng minh.

Bài 6: Sử dụng phản chứng, khẳng định sự đúng đắn của kết luận sau từ giả thiết đã cho:

$$\begin{array}{r|l} \text{Giả thiết} & A \implies B \\ & C \vee \neg B \\ & \overline{A \wedge C} \\ \hline \text{Kết luận} & \neg A \end{array}.$$

Tài liệu tham khảo - Toán

[1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.

[2] Irving H Anellis. Peirce's truth-functional analysis and the origin of the truth table. *History and Philosophy of Logic*, 33(1):87–97, 2012.

[3] Daniel W Cunningham. *A logical introduction to proof*. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation, 2000.

[5] Patrick Suppes. *Introduction to logic*. Courier Corporation, 2012.

Tài liệu tham khảo - Vật lí