

Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 10 tháng 1 năm 2026

Mục lục

Lời giới thiệu	3
I Kiến thức toán học nền tảng	4
1 Lập luận trong toán học	6
1.1 Mệnh đề ghép và các phép nối mệnh đề	6
1.1.1 Phép đối	7
1.1.2 Bảng giá trị chân lí	7
1.1.3 Phép hội	7
1.1.4 Phép tuyển	8
1.1.5 Phép kéo theo và phép hệ quả	9
1.1.6 Phép đẳng giá	10
1.1.7 Phép tuyển chọn	10
1.1.8 Thứ tự giải giá trị chân lí của mệnh đề của các phép nối	10
Tài liệu tham khảo	19

Lời giới thiệu

Phần 1

Kiến thức toán học nền tảng

Phần này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lý thuyết của môn vật lý (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lý và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Ví dụ, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn (bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán), mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lý thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lý sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lý. Thứ hai, vật lý không dùng nhiều đến lý thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lý không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lý thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lý đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh¹. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lý, và giống rất nhiều công trình vật lý hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lý. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lý hay kỹ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách “tôn giáo hóa”. Tác giả vẫn đưa một số lý thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lý thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lý thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

¹Albert Einstein (1879 – 1955)

1.

Lập luận trong toán học

1.1 Mệnh đề ghép và các phép nối mệnh đề

Hãy xem xét câu sau:

”Hôm nay trời mưa *và* hội thao đã phải lùi lịch.”.

Đây rõ ràng là một mệnh đề do chúng ta có thể dễ dàng xác định được tính đúng sai của nó. Câu hỏi quan trọng hơn cần được đặt ra là chúng ta đã xác định tính chính xác của câu này như thế nào. Một cách tự nhiên, chúng ta sẽ xem xét từng phần “hôm nay trời mưa” và “hội thao đã phải lùi lịch”. Từ tính đúng sai của hai vế, tính đúng sai của mệnh đề ban đầu được xác định. Đây là một ví dụ của **mệnh đề phức hợp** (hay **mệnh đề phức**), một mệnh đề được cấu tạo từ một hoặc một số **mệnh đề thành phần** và các **phép nối mệnh đề**.

Trong toán học, chúng ta hay sử dụng 5 phép nối mệnh đề (lần đầu được đề xuất bởi Phrây-gơ¹):

- Phép **đối** — \neg , \sim , $'$, $!$;
- Phép **hội** hoặc phép **và** — \wedge hoặc $\&$, \cdot ;
- Phép **tuyển** hoặc phép **hoặc** — \vee hoặc \parallel , $+$;
- Phép **kéo theo** — \implies hoặc \Rightarrow , \rightarrow , \supset ;
- Phép **đẳng giá** hoặc phép **tương đương lô-gích** — \iff hoặc \Leftrightarrow , \leftrightarrow , \Leftrightarrow , \equiv .

Đi kèm với những phép nối này, với sự phát triển của điện tử số, người ta đề xuất thêm những phép nối mệnh đề khác:

- Phép **phủ định hội** — $\overline{\wedge}$ hoặc \uparrow ;
- Phép **phủ định tuyển** — $\overline{\vee}$ hoặc \downarrow ;
- Phép **hệ quả** — \Leftarrow hoặc \Leftarrow , \leftarrow ;
- Phép **phủ định kéo theo** — \nRightarrow hoặc \nRightarrow , \nrightarrow ;
- Phép **phủ định hệ quả** — \nLeftarrow hoặc \nLeftarrow , \nleftarrow ;
- Phép **phủ định đẳng giá** — \niff hoặc \niff , \nleftrightarrow ;
- Phép **tuyển chọn** hoặc phép **tuyển lại trừ** — \oplus hoặc \vee , \nrightarrow , \nrightarrow ;
- Phép **phủ định tuyển chọn** — \odot .

Kết hợp với chúng là hai dấu ngoặc, ngoặc đơn đóng — $)$ — và ngoặc đơn mở — $($ — để xác định thứ tự giải giá trị lô-gích của mệnh đề phức hợp.

¹Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925)

²Có thể dùng thêm ngoặc vuông — $[]$ — hay ngoặc nhọn — $\{\}$ — nếu cần tăng khả năng nhận diện của mệnh đề phức hợp.

1.1.1 Phép đối

Thông thường, để phủ định một câu khẳng định, chúng ta hay dùng từ “không” hay những từ gần nghĩa như “chưa” hay “chẳng”. Ví dụ, có thể phủ định câu “Cơm hôm nay ngon.” thành “Cơm hôm nay *không* ngon.”. Tuy nhiên, với những câu phức tạp hơn như ví dụ về hội thao ở trước đó thì việc thêm các chữ “không” như

“Hôm nay trời *không* mưa *và* hội thao đã *không* phải lùi lịch.”

là không thỏa đáng. Cách viết đúng sẽ khá dài dòng:

“*Không phải trường hợp rằng* hôm nay trời mưa và hội thao đã phải lùi lịch.”.

Sử dụng kí hiệu thì sẽ dễ dàng hơn, tuy nhìn hơi kì, kiểu như:

“ \neg (cơm hôm nay ngon)”

hay

“ \neg (hôm nay trời mưa và hội thao đã phải lùi lịch).”.

Nhìn chung, nếu P là một mệnh đề thì phủ định của nó sẽ có kí hiệu là $\neg P$ hoặc \overline{P} . Nếu P đúng thì $\neg P$ sai và ngược lại, nếu P sai thì $\neg P$ đúng.

1.1.2 Bảng giá trị chân lí

Trước khi đi đến những phép nối phức tạp hơn, chúng ta sẽ đề cập đến khái niệm bảng giá trị chân lí. Khi sử dụng các phép toán lô-gích để tạo ra mệnh đề phức hợp thì chúng ta cần phải xem xét các trường hợp có thể của các **giá trị chân lí**, một cách nói văn hoa hơn cho cụm từ “tính đúng sai”, của từng mệnh đề thành phần. Khi mà số mệnh đề thành phần lớn lên thì số lượng trường hợp cũng tăng theo theo cấp số nhân. Để tránh việc phải viết nhiều, **bảng giá trị chân lí** đã được khai sinh³.

Chúng ta sẽ lấy ví dụ ngay trên phép nối mệnh đề chúng ta vừa được tiếp cận. Khi xây dựng bảng giá trị chân lí, tác giả sẽ viết tắt “Đ” và “S” lần lượt cho mệnh đề có giá trị chân lí đúng và sai.

Bảng 1.1: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép đối

P	$\neg P$
Đ	S
S	Đ

1.1.3 Phép hội

Trong hệ thống an ninh ngân hàng, thông thường, để đăng nhập vào tài khoản, có thể bạn đọc sẽ cần P : “nhập đúng mật khẩu” và Q : “nhập đúng mã OTP”⁴. Chỉ khi **P và Q** đúng thì bạn đọc mới được phép sử dụng các sản phẩm của ngân hàng.

Trong ngôn ngữ tự nhiên, chúng ta thường dùng từ “và” để nối hai ý tưởng lại với nhau. Trong logic học, việc kết hợp hai mệnh đề P và Q để tạo thành một mệnh đề mới được gọi là phép hội. Mệnh đề này được biểu diễn bằng lời là “ P và Q ”, kí hiệu là

$$P \wedge Q.$$

Mệnh đề này có tính “khất khe”: nó chỉ đúng khi cả P và Q đồng thời cùng đúng. Nếu ít nhất một trong hai mệnh đề thành phần bị sai, kết quả của phép hội sẽ là sai, thể hiện dưới dạng bảng giá trị chân lí 1.2.

³Đây có vẻ là một khái niệm đơn giản, bởi vì lập bảng là một thao tác đã được thực hiện thường xuyên xuyên suốt lịch sử loài người, tuy nhiên, không có quá nhiều tài liệu lịch sử nói về bảng giá trị chân lí. Tài liệu sớm nhất mà tác giả tìm được cho thấy sự sử dụng của kiểu bảng này xuất phát từ thế kỉ XIX[2]. Có thể, trường hợp thứ nhất, người xưa thấy việc viết (hay nói, biết chữ là một thứ xa xỉ) các mệnh đề lô-gích phức hợp là bình thường, hoặc, trường hợp thứ hai với khả năng xảy ra cao hơn, kiến thức lịch sử của tác giả còn hạn hẹp.

⁴One Time Password — Mật khẩu dùng một lần.

Bảng 1.2: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép hội

P	Q	$P \wedge Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

Giả sử rằng bạn đọc thấy bữa ăn buổi hôm nay rất ngon, do sự nhiệt tình của bạn bồi bàn. Bạn đọc đã vào được phần mềm ngân hàng của mình và định cho bo cho bồi bàn một chút tiền. Tuy nhiên, bạn đọc lại nhìn thấy bảng ghi chính sách của quán: "Khách hàng không được phép đưa tiền bo cho nhân viên của quán". Nếu bạn đọc vừa P : là khách hàng của quán, và Q : đưa tiền bo cho nhân viên, thì bạn đọc đã vi phạm chính sách rằng *không phải rằng P và Q* . Bạn đọc đành đưa ra đề nghị với nhà hàng là bạn muốn được phục vụ lại bởi bồi bàn này trong những lần sau.

Nếu phép hội đại diện cho sự "đồng thuận tuyệt đối", thì phép phủ định hội (còn gọi là phép toán Sép-phơ⁵) lại đại diện cho sự phủ nhận của sự đồng thuận đó. Phủ định hội của P và Q được kí hiệu là

$$P \uparrow Q.$$

Mệnh đề này chỉ sai trong trường hợp duy nhất là cả P và Q đều đúng.

Bảng 1.3: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép phủ định hội

P	Q	$P \uparrow Q$
Đ	Đ	S
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	Đ

1.1.4 Phép tuyển

Ê-mô-ri muốn được nhập học tại trường U-ni-véc-xi-ta-tô chẳng hạn, đương nhiên Ê-mô-ri cần phải tìm hiểu điều kiện xét tuyển của trường này. Với ngành học mà Ê-mô-ri mong muốn, có yêu cầu rằng Ê-mô-ri cần phải có P : tổng điểm thi trung học phổ thông quốc gia từ 24 điểm trở lên, hoặc Q : có giải thành phố từ giải ba trở lên. Do đó, Ê-mô-ri muốn được tuyển vào trường theo ngành này cần phải có thành tích *P hoặc Q* .

Mệnh đề phức " P tuyển Q " có kí hiệu $P \vee Q$. Mệnh đề này đúng khi tối thiểu một trong hai mệnh đề đầu vào đúng, và chỉ sai khi cả hai mệnh đề đầu vào đều sai. Bảng 1.4 cho giá trị chân lí của mệnh đề tuyển.

Bảng 1.4: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép tuyển

P	Q	$P \vee Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

Ý nghĩa của từ "hoặc" trong toán học hơi khác với ý nghĩa thông thường. Khi người ta nói "hoặc", người ta hay ám chỉ một trong số các trường hợp liệt kê ra là đúng. Trong lô-gích, cả hai mệnh đề đúng vẫn làm cho mệnh đề phức hợp đúng. Như trong ví dụ ở trên, nếu Ê-mô-ri được cả hai thành tích thì càng tăng khả năng vào trường, đúng không?

Trường U-ni-véc-xi-ta-tô là một trường đại học, tuy không phải là giàu có nhưng cũng có đủ điều kiện cơ sở vật chất để sắm 2 máy chủ. Trường khá yên tâm với hệ thống của mình do chỉ khi không phải trường hợp rằng P : máy chủ thứ nhất hoạt động hoặc Q : máy chủ thứ hai hoạt động thì khi đó hệ thống mới sập hoàn toàn — *không phải rằng P hoặc Q* .

⁵Henry Maurice Sheffer (1882 – 1964)

Tương tự với phép tuyển, phép hội cũng có “anh em” phủ định tương ứng. Mệnh đề **tuyển phủ định** $P \downarrow Q$ sai khi tồn tại một mệnh đề sai trong hai mệnh đề P và Q .

Bảng 1.5: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép phủ định tuyển

P	Q	$P \downarrow Q$
Đ	Đ	S
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	Đ

1.1.5 Phép kéo theo và phép hệ quả

Đây lại là một phép nối nữa mà ý nghĩa của nó (có thể) khác với ý nghĩa thông thường. Đây là phép cũng gây nhiều lỗi lập luận lô-gích nhất. Mệnh đề với phép **kéo theo** $P \implies Q$ chỉ sai khi P không suy ra Q , điều này tương đương, và chỉ tương đương, với có P mà không có Q . Bạn đọc nên để ý kĩ hai dòng cuối cùng của bảng giá trị chân lí 1.6.

Bảng 1.6: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép kéo theo

P	Q	$P \implies Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
<i>S</i>	<i>Đ</i>	<i>Đ</i>
<i>S</i>	<i>S</i>	<i>Đ</i>

Hãy xem xét một ví dụ minh họa. Không biết rằng bạn đọc đã từng được bố mẹ hứa hẹn thưởng cho một món theo sở thích khi được điểm 10 bao giờ chưa, còn đối với tác giả là có rồi. Nếu chúng ta xét mệnh đề: “Nếu P : con đạt điểm 10, thì Q : bố sẽ tặng con một cuốn sách.”, chúng ta sẽ có 3 trường hợp xảy ra:

- Trường hợp $\text{Đ} \implies \text{Đ}$: Con được 10 điểm và bố tặng sách. Lời hứa được thực hiện và mệnh đề này là đúng;
- Trường hợp $\text{Đ} \implies \text{S}$: Con được 10 điểm nhưng bố không tặng sách. Lời hứa không được thực hiện và mệnh đề này là sai;
- Trường hợp $\text{S} \implies \text{Đ/S}$: Con không được 10 điểm. Trong trường hợp này, dù người bố có tặng sách hay không thì cũng *không vi phạm lời hứa* ban đầu. Cho nên, mệnh đề là đúng.

Vậy trường hợp duy nhất mà lời hứa bị phá vỡ — *P kéo theo Q sai* — là khi người con không được tặng sách mặc dù được điểm 10.

Phép kết nối xét theo chiều ngược lại của phép kéo theo chính là phép hệ quả. Tương tự như phép kéo theo, mệnh đề **hệ quả** $P \longleftarrow Q$ chỉ sai khi P không được kéo theo từ Q như được thể hiện ở bảng 1.7.

Bảng 1.7: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép hệ quả

P	Q	$P \longleftarrow Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	S
S	S	Đ

Không phải lúc nào trong cuộc sống mà cũng có mối quan hệ kéo theo – hệ quả rõ ràng. Ví dụ, nhiều người thường quan niệm rằng P : thành công là do Q : đọc sách tự cải thiện bản thân⁶. Tuy nhiên, Bác Hồ đã tự mình bôn ba năm châu bốn biển và sau đó thành công trong việc tìm xác định được đường lối phù hợp với đất nước Việt Nam lúc bấy giờ và dẫn dắt được đất nước qua quãng thời gian bế tắc. Rõ ràng là do

⁶Là sách self-help đó. Làm ơn đừng đọc.

Bác đọc những tác phẩm mang tính cách mạng cao (mà không phải sách tự cải thiện bản thân), cho nên có thể nói rằng Bác Hồ đã làm cho mệnh đề $P \Leftarrow Q$ đúng, hay nói cách khác, là ví dụ cho sự *phủ định hệ quả P do Q* .

Đảo của phép kéo theo và phép hệ quả, **phủ định kéo theo $P \Rightarrow Q$** và **phủ định hệ quả $P \Leftarrow Q$** có bảng giá trị chân lí như ở bảng 1.8.

Bảng 1.8: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép phủ định kéo theo và phủ định hệ quả

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftarrow Q$
Đ	Đ	S	S
Đ	S	Đ	S
S	Đ	S	Đ
S	S	S	S

1.1.6 Phép đẳng giá

Giống như các trường đại học khác, U-ni-véc-xi-ta-tô cũng xét tốt nghiệp sinh viên theo số tín chỉ tích lũy và các môn điều kiện. Sinh viên P : được công nhận tốt nghiệp khi và chỉ khi Q : Sinh viên tích lũy đủ số tín chỉ và đã qua các môn điều kiện. Nếu như có sinh viên xong các điều kiện môn mà không được xét bằng, hoặc chưa học xong mà đã có bằng, thì *P tương đương Q* sai, và có một sự nhầm lẫn/gian lận nào đó ở đây.

Phép này đại diện cho sự “cùng tiến, cùng lùi”. Mệnh đề có chứa phép **đẳng giá $P \iff Q$** đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề con cấu thành P và Q cùng đúng hoặc cùng sai.

Bảng 1.9: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép tương đương

P	Q	$P \iff Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	Đ

1.1.7 Phép tuyển chọn

Ê-mô-ri đi ăn cùng với một nhóm bạn trong một cửa hàng đồ ăn nhanh. Khi chọn một bộ các món ăn và uống, nhóm bạn được phép P : sử dụng nước cam, hoặc Q : sử dụng nước táo, tuy nhiên nhà hàng không cho phép chọn cả hai loại nước. Nhóm bạn của Ê-mô-ri, khi này, phải thực hiện *tuyển chọn P hoặc Q* .

Khác với phép tuyển (hoặc sao cũng được), phép tuyển chọn **$P \oplus Q$** bắt buộc phải chọn duy nhất một trong hai khả năng. Nếu chọn cả hai hoặc bỏ cả hai, mệnh đề $P \oplus Q$ sẽ sai.

Bảng 1.10: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép tuyển chọn

P	Q	$P \oplus Q$
Đ	Đ	S
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

1.1.8 Thứ tự giải giá trị chân lí của mệnh đề của các phép nối

Giống như thứ tự các phép tính số học⁷ để tính giá trị các biểu thức số học, để xác định giá trị chân lí của mệnh đề có nhiều phép nối, các phép nối mệnh đề cũng có sắp xếp thứ tự⁸ từ mức ưu tiên cao đến ưu tiên thấp như sau:

1. Phép đối — \neg (mức ưu tiên cao nhất);

⁷[...], thứ mà con người phát minh ra [...]

⁸[...] và vẫn chưa có sự thống nhất [...]

2. Phép và $— \wedge$;
3. Phép hoặc $— \vee$;
4. Phép kéo theo $— \implies$, phép hệ quả $— \Leftarrow$ và phép tương đương $— \iff$ (mức ưu tiên thấp nhất).

Với các phép ở trên cùng một mức, có thể quy ước xử lý theo nhiều cách khác nhau: thứ tự xuất hiện (từ trái qua phải), kết hợp tính toán từ trái qua phải với thứ tự phép kéo theo đi trước phép tương đương, hoặc yêu cầu sử dụng các dấu ngoặc để sắp xếp thứ tự. Trong cuốn sách này, tác giả sẽ sử dụng quy ước *từ trái qua phải* là chủ yếu, kèm với việc sử dụng dấu ngoặc để giúp tăng khả năng đọc khi cần thiết.

Cần phải để ý rằng trong nhiều tài liệu, người ta hay lạm dụng kí hiệu (hay ngôn ngữ) khi viết $P \implies Q \implies R$ và $P \iff Q \iff R$ với ngầm hiểu rằng hai mệnh đề này lần lượt là $(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)$ và $(P \iff Q) \wedge (Q \iff R)$ chứ không phải là $(P \implies Q) \implies R$ và $(P \iff Q) \iff R$.

Bài 1: Xây dựng bảng giá trị chân lí của các mệnh đề sau:

1. $\neg P \implies Q$;
2. $(P \iff Q) \vee \neg Q$;
3. $P \wedge (Q \implies R)$;
4. $P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$;
5. $Q \implies R \wedge R \vee \neg P$;
6. $(P \implies Q) \implies (R \implies Q \implies P)$.

Lời giải bài 1:

1. Để ý đến thứ tự các phép nối, dấu \neg sẽ được thực hiện trước \implies . Thực hiện xây dựng như ở bảng sau.

Bảng 1.11: Bảng giá trị chân lí cho bài 1 phần 1

P	Q	$\neg P$	$\neg P \implies Q$
Đ	Đ	S	Đ
Đ	S	S	Đ
S	Đ	S	Đ
S	S	Đ	S

Có thể thực hiện viết bảng giá trị chân lí dưới dạng rút gọn như ở bảng 1.12. Sau khi thực hiện xong một phép nối, có thể viết ở ngay dưới mệnh đề cần tìm giá trị chân lí thay vì tách thành cột riêng để tiết kiệm giấy nếu như mệnh đề dài.

Bảng 1.12: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho phần 1 bài 1

P	Q	\neg	P	\implies	Q	$\neg P \implies Q$
Đ	Đ	S	Đ	<i>Đ</i>	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	<i>Đ</i>	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	<i>Đ</i>	Đ	Đ
S	S	Đ	S	<i>S</i>	S	S

2.

Bảng 1.13: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho phần 2 bài 1

P	Q	$(P \iff Q)$	\vee	\neg	Q	$(P \iff Q) \vee \neg Q$
Đ	Đ	Đ	Đ	<i>Đ</i>	S	Đ
Đ	S	Đ	S	<i>Đ</i>	Đ	Đ
S	Đ	S	S	<i>S</i>	S	S
S	S	S	S	<i>Đ</i>	Đ	Đ

3. Khi một mệnh đề phức hợp cho cùng giá trị chân lí ở nhiều trường hợp khác nhau, và trong các trường hợp đó một số mệnh đề thành phần có cùng giá trị chân lí, chúng ta có thể rút gọn bảng bằng cách:

- Giữ nguyên những mệnh đề thành phần có giá trị giống nhau;
- Thay những mệnh đề thành phần thay đổi bằng ký hiệu X .

Ví dụ như ở bảng 1.14, nhận thấy rằng khi P sai thì mệnh đề phức hợp luôn sai, nên các cột Q và R và những cột có phần mệnh đề liên quan đến hai mệnh đề này ở hàng thứ năm được thay bởi những chữ X .

Bảng 1.14: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho phần 3 bài 1

P	Q	R	$P \wedge (Q \Rightarrow R)$					$P \wedge (Q \Rightarrow R)$
Đ	Đ	Đ	Đ	\mathcal{D}	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	\mathcal{S}	Đ	S	S	S
Đ	S	Đ	Đ	\mathcal{D}	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	\mathcal{D}	S	Đ	S	Đ
S	X	X	S	\mathcal{S}	X	X	X	S

4.

Bảng 1.15: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho phần 4 bài 1

P	Q	R	$P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$							$P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	\mathcal{D}	Đ	S	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	\mathcal{D}	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	S	Đ	\mathcal{S}	Đ	S	S	S
S	Đ	S	S	S	Đ	\mathcal{D}	Đ	Đ	Đ	Đ
X	S	X	X	S	S	\mathcal{S}	S	S	X	S

5.

Bảng 1.16: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho phần 5 bài 1

P	Q	R	$Q \Rightarrow R \wedge R \vee \neg P$							$Q \Rightarrow R \wedge R \vee \neg P$
Đ	Đ	Đ	Đ	\mathcal{D}	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	\mathcal{S}	S	S	S	S	S	S
S	Đ	Đ	Đ	\mathcal{D}	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	\mathcal{D}	S	S	S	Đ	Đ	Đ
X	S	X	S	\mathcal{D}	X	X	X	X	X	Đ

6. Do giới hạn của khổ giấy, bảng giá trị chân lí sẽ được tách làm hai phần.

Bảng 1.17: Bảng giá trị chân lí rút gọn cho phần 6 bài 1

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q \Rightarrow P)$								
Đ	X	X	Đ	X	X	\mathcal{D}	X	X	X	Đ	Đ
S	Đ	X	S	Đ	Đ	\mathcal{S}	X	Đ	Đ	S	S
S	S	Đ	S	Đ	S	\mathcal{D}	Đ	S	S	Đ	S
S	S	S	S	Đ	S	\mathcal{S}	S	Đ	S	S	S

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q \Rightarrow R)$								
Đ	X	X	Đ								
S	Đ	X	S								
S	S	Đ	Đ								
S	S	S	S								

Bài 2: Gọi V là một mệnh đề đúng và M là một mệnh đề sai nào đó. Sử dụng bảng giá trị chân lí, chứng minh các mệnh đề sau luôn đúng⁹ với mọi giá trị chân lí của P , Q và R .

⁹Mệnh đề luôn đúng còn được gọi là **mệnh đề hằng đúng**.

- $P \vee V$ (tính chất thống trị với phép tuyển);
- $\overline{P \wedge M}$ (tính chất thống trị với phép hội);
- $P \wedge V \iff P$ (tính chất¹⁰ đồng nhất với phép hội);
- $P \vee M \iff P$ (tính chất đồng nhất với phép tuyển);
- $P \vee \neg P$ (tính chất loại trừ trung gian¹¹);
- $\overline{P \wedge \neg P}$ (tính chất không mâu thuẫn¹²);
- $\neg \overline{P} \iff P$ (tính chất phủ định kép);
- $P \wedge P \iff P$ (tính chất lũy đẳng với phép hội);
- $P \vee P \iff P$ (tính chất lũy đẳng với phép tuyển);
- $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ (tính giao hoán với phép hội);
- $P \vee Q \iff Q \vee P$ (tính giao hoán với phép tuyển);
- $\overline{P \vee Q} \iff \neg P \wedge \neg Q$ (định luật Đờ Moóc-gơn¹³, phần 1);
- $\overline{P \wedge Q} \iff \neg P \vee \neg Q$ (định luật Đờ Moóc-gơn, phần 2);
- $P \implies P \vee Q$ (tính chất cộng);
- $P \wedge Q \implies P$ (tính chất rút gọn);
- $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$ (định nghĩa phép kéo theo);
- $(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$ (tính chất phản đảo);
- $(P \implies Q) \wedge P \implies Q$ (quy tắc khẳng định¹⁴);
- $(P \implies Q) \wedge \neg Q \implies \neg P$ (quy tắc phủ định¹⁵);
- $(P \vee Q) \wedge \neg P \implies Q$ (tam đoạn luận tuyển);
- $P \iff Q \iff P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ (định nghĩa phép tương đương, phần 1);
- $(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (P \impliedby Q)$ (định nghĩa phép tương đương, phần 2);
- $(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$ (tính chất giao hoán với phép tương đương);
- $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$ (tính chất kết hợp với phép hội);
- $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$ (tính chất kết hợp với phép tuyển);
- $((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$ (tính chất kết hợp với phép tương đương);
- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R)$ (tính chất phân phối, phần 1);
- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \wedge (Q \vee R)$ (tính chất phân phối, phần 2);
- $(P \implies Q) \wedge (P \implies R) \iff (P \implies Q \wedge R)$ (tính chất phân phối, phần 3);
- $(P \implies Q) \vee (P \implies R) \iff (P \implies Q \vee R)$ (tính chất phân phối, phần 4);
- $(P \implies Q) \wedge (Q \implies R) \implies (P \implies R)$ (tính chất bắc cầu).

¹⁰Các tính chất còn được gọi là **luật**.

¹¹Tính chất này chỉ rằng một mệnh đề hoặc đúng, hoặc phủ định của nó đúng; không tồn tại khả năng trung gian.

¹²Tính chất này khẳng định Không thể có một mệnh đề vừa đúng vừa sai cùng lúc và theo cùng một nghĩa.

¹³Augustus De Morgan (1806 – 1871)

¹⁴Modus ponens.

¹⁵Modus tollens.

Lời giải bài 2:

Bảng 1.18: Bảng giá trị chân lí của $P \vee V$ và $\overline{P \wedge M}$

P	$P \vee V$	$P \vee V$	$\neg (P \wedge M)$	$\overline{P \wedge M}$
X	X Đ Đ	Đ	Đ X S S	Đ

Bảng 1.19: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge V \iff P$ và $P \vee M \iff P$

P	$P \wedge V \iff P$	$P \wedge V \iff P$	$P \vee M \iff P$	$P \vee M \iff P$
Đ	Đ Đ Đ Đ Đ	Đ	Đ Đ S Đ Đ	Đ
S	S S Đ Đ Đ	Đ	S S S Đ S	Đ

Bảng 1.20: Bảng giá trị chân lí của $P \vee \neg P$ và $\overline{P \wedge \neg P}$

P	$P \vee \neg P$	$P \vee \neg P$	$\neg (P \wedge \neg P)$	$\overline{P \wedge \neg P}$
Đ	Đ Đ S Đ Đ	Đ	Đ Đ S S Đ	Đ
S	S S Đ Đ S	Đ	Đ S S Đ S	Đ

Bảng 1.21: Bảng giá trị chân lí của $\neg \overline{P} \iff P$

P	$\neg (\neg P) \iff P$	$\neg \overline{P} \iff P$
Đ	Đ S Đ Đ Đ	Đ
S	S Đ S Đ S	Đ

Bảng 1.22: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge P \iff P$ và $P \vee P \iff P$

P	$P \wedge P \iff P$	$P \wedge P \iff P$	$P \vee P \iff P$	$P \vee P \iff P$
Đ	Đ Đ Đ Đ Đ	Đ	Đ Đ Đ Đ Đ	Đ
S	S S S S S	Đ	S S S S S	Đ

Bảng 1.23: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge Q \iff Q \wedge P$

P	Q	$P \wedge Q \iff Q \wedge P$	$P \wedge Q \iff Q \wedge P$
Đ	Đ	Đ Đ Đ Đ Đ	Đ
Đ	S	Đ S S Đ S	Đ
S	Đ	S S Đ Đ S	Đ
S	S	S S S S S	Đ

Bảng 1.24: Bảng giá trị chân lí của $P \vee Q \iff Q \vee P$

P	Q	$P \vee Q \iff Q \vee P$	$P \vee Q \iff Q \vee P$
Đ	Đ	Đ Đ Đ Đ Đ	Đ
Đ	S	Đ Đ S Đ S	Đ
S	Đ	S Đ Đ Đ S	Đ
S	S	S S S S S	Đ

Bảng 1.25: Bảng giá trị chân lí của $\overline{P \vee Q} \iff \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	\neg	$(P \vee Q)$	\iff	\neg	$P \wedge \neg Q$	$\overline{P \vee Q} \iff \neg P \wedge \neg Q$
Đ	Đ	S	Đ	Đ	$\textcolor{red}{Đ}$	S	Đ
Đ	S	S	Đ	S	$\textcolor{red}{Đ}$	S	Đ
S	Đ	S	S	Đ	$\textcolor{red}{Đ}$	Đ	S
S	S	Đ	S	S	$\textcolor{red}{Đ}$	Đ	S

Bảng 1.26: Bảng giá trị chân lí của $\overline{P \wedge Q} \iff \neg P \vee \neg Q$

P	Q	\neg	$(P \wedge Q)$	\iff	\neg	$P \vee \neg Q$	$\overline{P \wedge Q} \iff \neg P \vee \neg Q$
Đ	Đ	S	Đ	Đ	$\textcolor{red}{Đ}$	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	$\textcolor{red}{Đ}$	S	Đ
S	Đ	Đ	S	Đ	$\textcolor{red}{Đ}$	Đ	S
S	S	Đ	S	S	$\textcolor{red}{Đ}$	Đ	S

Bảng 1.27: Bảng giá trị chân lí của $P \implies P \vee Q$

P	Q	$P \implies P \vee Q$	$P \vee Q$
Đ	X	Đ	Đ
S	X	S	S

Bảng 1.28: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge Q \implies P$

P	Q	$P \wedge Q \implies P$	$P \wedge Q$
Đ	X	Đ	Đ
S	X	S	S

Bảng 1.29: Bảng giá trị chân lí của $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$

P	Q	$P \implies Q \iff \neg P \vee Q$	$P \vee Q$
Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S
S	X	Đ	Đ

Bảng 1.30: Bảng giá trị chân lí của $(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$

P	Q	$(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$	$(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$
Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S
S	X	Đ	Đ

Bảng 1.31: Bảng giá trị chân lí của $(P \implies Q) \wedge P \implies Q$

P	Q	$(P \implies Q) \wedge P \implies Q$								$(P \implies Q) \wedge P \implies Q$
Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S		Đ
S	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	S		Đ
X	Đ	X	Đ	Đ	X	X	Đ	Đ		Đ

Bảng 1.32: Bảng giá trị chân lí của $(P \implies Q) \wedge \neg Q \implies \neg P$

P	Q	$(P \implies Q) \wedge \neg Q \implies \neg P$										$(P \implies Q) \wedge \neg Q \implies \neg P$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ		Đ
Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ		Đ
S	X	S	Đ	X	X	X	X	Đ	Đ	S		Đ

Bảng 1.33: Bảng giá trị chân lí của $(P \vee Q) \wedge \neg P \implies Q$

P	Q	$(P \vee Q) \wedge \neg P \implies Q$								$(P \vee Q) \wedge \neg P \implies Q$
Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ
S	S	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ
X	Đ	X	Đ	Đ	X	X	X	Đ	Đ	Đ

Bảng 1.34: Bảng giá trị chân lí của $P \iff Q \iff P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$P \iff Q \iff P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$													
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	
Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	S	Đ	S	
S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	
S	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	

P	Q	$P \iff Q \iff P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$	
Đ	Đ	Đ	
Đ	S		
S	Đ		
S	S		

Bảng 1.35: Bảng giá trị chân lí của $(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (P \impliedby Q)$

P	Q	$(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (P \impliedby Q)$											
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	
Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	
S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	
S	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	

P	Q	$(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (P \impliedby Q)$	
Đ	Đ	Đ	
Đ	S		
S	Đ		
S	S		

Bảng 1.36: Bảng giá trị chân lí của $(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$

P	Q	$(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$								$(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ

Bảng 1.37: Bảng giá trị chân lí của $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$											$(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
S	X	X	S	S	X	S	X	Đ	S	S	X	X	X	Đ
X	S	X	X	S	S	S	X	Đ	X	S	S	S	X	Đ
X	X	S	X	X	X	S	S	Đ	X	S	X	S	S	Đ

Bảng 1.38: Bảng giá trị chân lí của $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$											$(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$
S	S	S	S	S	S	S	S	Đ	S	S	S	S	S	Đ
Đ	X	X	Đ	Đ	X	Đ	X	Đ	Đ	Đ	X	X	X	Đ
X	Đ	X	X	Đ	Đ	Đ	X	Đ	X	Đ	Đ	Đ	X	Đ
X	X	Đ	X	X	X	Đ	Đ	Đ	X	Đ	X	Đ	Đ	Đ

Bảng 1.39: Bảng giá trị chân lí của $((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$

P	Q	R	$((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$											
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	S
Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S
S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S
S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ
S	S	S	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S

P	Q	R	$((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$
Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	
Đ	S	Đ	
Đ	S	S	
S	Đ	Đ	
S	Đ	S	
S	S	Đ	
S	S	S	

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R)$												
Đ	X	X	Đ	Đ	X	Đ	Đ	Đ	X	Đ	Đ	X	X	X	
S	S	X	S	S	S	S	S	X	X	Đ	S	S	S	S	
S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	
S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R)$												
Đ	X	X	Đ												
S	S	X													
S	Đ	Đ													
S	Đ	S													

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \wedge (Q \vee R)$
S	X	X	S S X S S S X D S S X X X
D	D	X	D D D D D X X D D D D D X
D	S	D	D S S D D D D D D D S D D
D	S	S	D S S S D S S D D S S S S

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \wedge (Q \vee R)$
S	X	X	D
D	D	X	
D	S	D	
D	S	S	

P	Q	R	$(P \implies Q) \wedge (P \implies R) \iff (P \implies Q \wedge R)$												
S	X	X	S	Đ	X	Đ	S	Đ	X	Đ	S	Đ	X	X	X
Đ	S	X	Đ	S	S	S	Đ	X	X	Đ	Đ	S	S	S	X
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S

P	Q	R	$(P \implies Q) \wedge (P \implies R) \iff (P \implies Q \wedge R)$		
Đ	X	X	Đ		
Đ	S	X			
Đ	Đ	Đ			
Đ	Đ	S			

Bảng 1.43: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \vee R)$

P	Q	R	$(P \implies Q) \vee (P \implies R) \iff (P \implies Q \vee R)$												
S	X	X	S	Đ	X	Đ	S	Đ	X	Đ	S	Đ	X	X	X
Đ	Đ	X	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	X	X	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	X
Đ	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	S

P	Q	R	$(P \implies Q) \vee (P \implies R) \iff (P \implies Q \vee R)$
S	X	X	Đ
Đ	Đ	X	
Đ	S	Đ	
Đ	S	S	

Bảng 1.44: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$										
X	X	Đ	X	X	X	Đ	X	Đ	Đ	Đ	X	Đ	Đ
S	X	S	S	Đ	X	X	X	X	S	Đ	S	Đ	S
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S
Đ	S	S	Đ	S	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	S

Tài liệu tham khảo - Toán

- [1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] Irving H Anellis. Peirce's truth-functional analysis and the origin of the truth table. *History and Philosophy of Logic*, 33(1):87–97, 2012.
- [3] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation, 2000.

Tài liệu tham khảo - Vật lí