Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 7 tháng 10 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu

0.

Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

0.1 Hệ các số thực

0.1.1 Số thực

Phần này đề cập các yếu tố đại số cơ bản của **số thực**, cụ thể là những hệ thức mà trong đó số thực tương tác với một số hữu hạn các **phép cộng** và **phép nhân**.

Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp số thực. Nếu a, b, c đều thuộc $\mathbb{R}$, với phép cộng và phép nhân mang ý nghĩa thông thường, có:

- $a + b$ và $a \times b$ (hay $a \cdot b$, ab) đều thuộc $\mathbb{R}$;
- $a + b = b + a$ và $ab = ba$ (**tính giao hoán**);
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ và $a(bc) = (ab)c$ (**tính kết hợp**);
- $a(b + c) = ab + ac$ (**tính phân phối**);
- $a \times 1 = a$ (**đơn vị**);
- $a + 0 = a$ và $a \times 0 = 0$ (**số không**);
- $a + c = b + c \implies a = b$ (**tính giản ước được**);
- Nếu $c \neq 0$, $ac = bc \implies a = b$ (**tính giản ước được**).

Mỗi a chỉ tồn tại một **số đối** $-a$ duy nhất sao cho $a + (-a) = 0$ và nếu $a \neq 0$, tồn tại một **số nghịch đảo** $\frac{1}{a}$ duy nhất sao cho $a \times \frac{1}{a} = 1$. **Phép trừ** được định nghĩa là

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$$

và **phép chia** được định nghĩa là

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}.$$

Trên tập số thực, không có nghịch đảo của 0.

0.1.2 Số tự nhiên và quy nạp toán học

Một tập số thường xuyên được đề cập ngoài tập số thực là tập **số tự nhiên** $\mathbb{N}$. Chúng ta sẽ đồng nhất tập này với tập các số nguyên không âm $\{0; 1; 2; 3; \cdots\}$[2]. Ngoài những tính chất thừa hưởng từ tập số thực, tập số tự nhiên có tính chất sau mà tập số thực không có. Ví dụ, mỗi một tập không rỗng các sô tự nhiên luôn tồn tại phần tử nhỏ nhất.

Về mặt chặt chẽ toán học, số tự nhiên là tập số đầu tiên được xây dựng, và chúng được dựa trên hệ tiên đề Pê-a-nô[3]. Hệ tiên đề đó phát biểu rằng nếu tồn tại một tập hợp P thỏa mãn

- Tồn tại duy nhất một phần tử $0 \in P$;
- Với mỗi $n \in P$ tồn tại duy nhất một số liền sau thuộc P, gọi là $s(n)$;
- Với mọi $n \in P$ thì $s(n) \neq 0$;
- Nếu m và n là hai số thuộc P, $s(m) = s(n) \implies m = n$;
- Gọi A là tập con của P, nếu $0 \in A$ và nếu có $n \in A \implies s(n) \in A$ thì $A = P$

thì (P, s) là một **mẫu** hay **mô hình** cho số tự nhiên.

Tiên đề cuối cùng là nền tảng cho phép chứng minh **quy nạp**. Nếu $n = 0$ thỏa mãn một mệnh đề $Q(0)$ nào đó và nếu giả sử $Q(n)$ đúng suy ra $Q(s(n))$ cũng đúng thì $Q(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n. Mở rộng tính chất này, chúng ta có **quy nạp đủ**: nếu $n = 0$ thỏa mãn một mệnh đề $Q(0)$ nào đó và nếu giả sử $Q(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n không vượt quá k suy ra $Q(k + 1)$ cũng đúng thì $Q(n)$ đúng với mọi n.

[2]Trong nhiều tài liệu nước ngoài, tập số tự nhiên không bao gồm số 0.

[3]Giuseppe Peano (1858–1932).

0.1.3 Số nguyên và số hữu tỉ

Từ tập số tự nhiên, chúng ta có thể xây dựng tập **số nguyên** bằng việc kết hợp các dạng số, n và $-n$ với n là số tự nhiên nào đó. Kí hiệu tập số nguyên là $\mathbb{Z}$. Trong một vài trường hợp, chúng ta sẽ chỉ quan tâm đến só dương, khi này, có tập số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$ hay $\mathbb{N}^*$.

Mở rộng tập số nguyên, các số có dạng $\frac{a}{b}$ với a là số nguyên và b là số nguyên khác 0 tạo thành tập **số hữu tỉ** kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

Để xây dựng số thực thì sẽ cần những khái niệm cao cấp hơn. Một số thực có thể được định nghĩa là giới hạn của một dãy số hữu tỉ. Các số thực không phải số hữu tỉ thì là **số vô tỉ**. Tuy rằng hiện tại chúng ta chưa đề cập đến định nghĩa toán học chặt chẽ của số thực, nhưng khả năng cao là bạn đọc đã có làm quen với nhiều số thực như $\sqrt{2}$ hay π. Do đó, tác giả sẽ thừa nhận các tính chất của số thực, và sẽ xây dựng lại định nghĩa khi điều kiện cho phép.

Tài liệu tham khảo

[1] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review.* Courier Corporation, 2000.

[2] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis.* Springer Science & Business Media, 2011.