

Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 27 tháng 2 năm 2026

Mục lục

I	Lô-gích	
	và phương pháp lập luận diễn dịch	3
1	Giải tích vị từ	5
1.1	Thành tố cấu tạo của giải tích vị từ	5
1.1.1	Hạng thức	5
1.1.2	Vị từ	6
1.1.3	Lượng từ	6
1.1.4	Quy tắc xây dựng công thức	7
1.1.5	Tự do hay phụ thuộc?	7
1.2	Phương pháp lập luận diễn dịch (tiếp)	9
1.2.1	Quy tắc đổi tên biến ràng buộc	9
1.2.2	Tính chất giao hoán của lượng từ phổ quát	9
1.2.3	Tính chất phân phối của lượng từ phổ quát đối với phép hội	9
1.2.4	Cụ thể hóa lượng từ phổ quát	10
1.2.5	Tính chất lượng từ rỗng	10
	Tài liệu tham khảo	13

Phần 1

Lô-gích
và phương pháp lập luận diễn dịch

1.

Giải tích vị từ

Ở chương về giải tích mệnh đề, chúng ta đã làm quen với mệnh đề, các phép nối mệnh đề và làm một số chuyển đổi từ ngôn ngữ thông thường sang dạng lô-gích kí hiệu. Một chút suy ngẫm sẽ đưa chúng ta đến một kết luận hiển nhiên rằng cấu trúc “ngữ pháp” cơ bản như thế này không thể nào đủ cho các lập luận thông thường trong cuộc sống vật lí. Lập luận lô-gích bằng giải tích mệnh đề không mạnh bằng ngữ pháp tiếng Việt thông thường ở những khoản như:

- Phân biệt các từ loại — danh từ, động từ, tính từ,...;
- Phân tích cấu trúc nội tại của câu để xác định mối quan hệ giữa chủ thể và hành động (chủ ngữ và vị ngữ);
- Diễn đạt các khái niệm về số lượng và phạm vi của đối tượng;
- Xác định các mối liên hệ phức tạp giữa nhiều thực thể khác nhau trong cùng một mệnh đề (ví dụ: quan hệ sở hữu, quan hệ huyết thống);
- Thể hiện các sắc thái về thời gian (đã, đang, sẽ) và các trạng thái tình thái (có lẽ, chắc chắn, bắt buộc).

Lô-gích không được dùng để thay thế ngôn ngữ, nhưng cần phải đủ để có thể biểu diễn các sự vật, sự việc một cách khách quan và có hệ thống. Điều này yêu cầu mở rộng giới hạn của giải tích mệnh đề. Để làm như vậy, chúng ta cần một vài định nghĩa mới.

1.1 Thành tố cấu tạo của giải tích vị từ

Trong giải tích mệnh đề, mệnh đề đơn là thành tố nhỏ nhất và không thể chia nhỏ ra được. Ở trong giải tích vị từ, mệnh đề còn có thể chia nhỏ thành các bộ phận, giống như một câu có thể được chia ra thành các từ và cụm từ cấu thành vậy.

1.1.1 Hạng thức

Nếu nói là “biến” hay “ẩn” thì chắc sẽ quen hơn so với từ “hạng thức”. Bạn đọc đã làm toán rồi thì sẽ quen với việc biến số được dùng để thay thế các số chưa biết hay các số không xác định nhằm thể hiện một số tính chất không phụ thuộc vào biến số. Trong lô-gích, hạng thức cũng có vai trò tương tự. Lấy ví dụ.

“Đã rất nhiều lần anh đi học muộn rồi!”

là tương đương với

“Đây là lần thứ N anh đi học muộn rồi!”

và trong ví dụ này, N được thay thế cho số lần đi học muộn trong câu đầu tiên. Hạng thức không cần phải biểu diễn bất cứ sự vật hay hiện tượng cụ thể gì cả, như “ x ” trong

$$“x > 3”$$

nhưng việc hiểu rằng x đại diện cho một số nào đó vẫn có một giá trị nhất định. Qua đó, chúng ta có thể thấy **hạng thức** là các thực thể đại diện cho các đối tượng.

1.1.2 Vị từ

Xét các mệnh đề sau:

- “Quả táo có màu đỏ.”;
- “Hoa hồng có màu đỏ.”;
- “Cờ Việt Nam có màu đỏ.”.

Các mệnh đề đều có cụm “có màu đỏ”, cho nên chúng ta có thể đặt một hạng thức x và đưa các mệnh đề về dạng “ x có màu đỏ”. Tương tự, với các mệnh đề

- “Định luật bảo toàn năng lượng là định luật vật lí có tính ứng dụng cao.”,
- “Định luật I nhiệt động lực học là định luật vật lí có tính ứng dụng cao.”,
- “Định luật Ohm là định luật vật lí có tính ứng dụng cao.”,

chúng ta có thể viết chúng dưới dạng chung là “ y là định luật vật lí có tính ứng dụng cao.”. Các bộ phận “có màu đỏ” và “là định luật vật lí có tính ứng dụng cao” là các khẳng định về thuộc tính của một đối tượng hoặc mối quan hệ giữa các đối tượng, và qua đó được gọi là **vị từ**. Vị từ thường có vai trò như các *vị ngữ* trong câu, tuy nhiên, vị trí của vị từ có thể thay đổi tùy thuộc vào cấu trúc ngữ pháp của mệnh đề.

Quay trở lại về ví dụ vị từ “có màu đỏ”. Chúng ta có thể viết dưới dạng kí hiệu dạng chung của các mệnh đề là

$$R(x).$$

Khi này, R đã thay thế cho phần vị từ đã nhắc đến. Xét một ví dụ khác:

“Việt Nam nằm gần biển hơn so với Lào.”.

Chúng ta hoàn toàn có thể viết mệnh đề này dưới dạng $S(q)$ với S có nghĩa là “nằm gần biển hơn so với Lào” hay $T(q)$ với T có nghĩa là “Việt Nam nằm gần biển hơn so với (quốc gia này)”, nhưng sẽ tổng quát hơn nếu chúng ta thực hiện thay thế cả hai quốc gia bởi hạng thức:

“ v nằm gần biển hơn so với q .”

và kí hiệu bởi $B(v, q)$. Nếu như vị từ không có hạng thức thì sao? Nó sẽ trở thành một trạng thái của tồn tại hay một tính chất bao trùm lên mọi khái niệm, và có kí hiệu là $N()$ hoặc N giống như một mệnh đề.

1.1.3 Lượng từ

Có mệnh đề sau với hạng thức x :

“ x là một thủ đô.”.

Đây không phải là mệnh đề, do chúng ta chưa xác định x là nơi nào, hay x có phải là nơi chốn hay không. Có thể thay thế x bởi một đại từ cụ thể, nhưng chúng ta không cần phải làm thế bởi lô-gích cho phép rút ra các mệnh đề đúng hoặc sai bằng cách mở rộng mệnh đề về thủ đô đó. Chúng ta có thể thêm “với mọi”:

“Với mọi x , x là một thủ đô.”

để thành một mệnh đề sai, hay có thể thêm “tồn tại”:

“Tồn tại x , x là một thủ đô.”

để trở thành một mệnh đề đúng. Từ đó, bạn đọc có thể thấy hai kiểu lượng từ. **Lượng từ phổ quát** có phạm vi ảnh hưởng toàn cục, được kí hiệu bởi \forall . Quay trở lại ví dụ, gọi vị từ “là một thủ đô” là $T()$, kí hiệu được mệnh đề là

$$\forall x, T(x)$$

hoặc

$$(\forall x)(T(x)).$$

Lượng từ tồn tại có phạm vi ảnh hưởng cụ thể, kí hiệu là \exists . Mệnh đề “tồn tại” được viết lại là:

$$\exists x, T(x).$$

Có thể kết hợp nhiều lượng từ trong một mệnh đề:

$$\exists x, \forall y, x \text{ yêu } y.$$

1.1.4 Quy tắc xây dựng công thức

Việc mở rộng thêm các bộ phận mới cho phép định nghĩa lại mệnh đề theo một cách chặt chẽ hơn. Nhưng trước khi đi đến với phương pháp xây dựng mệnh đề, chúng ta sẽ tìm hiểu một khái niệm yếu hơn — *công thức*.

Một **công thức nguyên tử** là một vị từ đi kèm với đầy đủ những hạng thức cần thiết. Do vậy, “ $R(x)$ ”, “ $a + b = c$ ”, “bông hoa h có màu đỏ” đều là các công thức nguyên tử. Từ đó, chúng ta có định nghĩa **công thức** theo các quy tắc truy hồi như sau:

1. Mọi công thức nguyên tử đều là công thức;
2. Với mọi công thức P , $\neg(P)$ đều là công thức;
3. Với mọi công thức P và Q , $(P) \wedge (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \implies (Q)$, $(P) \iff (Q)$, $(P) \uparrow (Q)$, $(P) \downarrow (Q)$, $(P) \Leftarrow (Q)$, $(P) \Rrightarrow (Q)$, $(P) \nRightarrow (Q)$, $(P) \nLeftarrow (Q)$, $(P) \oplus (Q)$, $(P) \odot (Q)$ đều là công thức;
4. Với mọi công thức P và hạng thức x , $\forall x, (P)$ và $\exists x, (P)$ đều là công thức;
5. Những biểu thức khác không thể được lập từ sự kết hợp các quy tắc ở trên không là công thức.

Định nghĩa này đã cho phép chuẩn hóa các cảm nhận mà chúng ta đã coi như là hiển nhiên từ trước¹. Và qua định nghĩa, chúng ta có thể phân biệt giữa những mệnh đề có nghĩa và những mệnh đề vô nghĩa như “ $X \wedge \Leftarrow YZ \odot$ ”.

1.1.5 Tự do hay phụ thuộc?

Như quy tắc thực hiện thứ tự các phép nối mệnh đề, chúng ta có một số quy tắc để giúp việc giải giá trị chân lý của các mệnh đề trong giải tích vị từ dễ dàng hơn.

Trước hết, chúng ta đến với khái niệm **tầm ảnh hưởng** của lượng từ. Theo một cách cơ học nhất có thể, tầm ảnh hưởng của một lượng từ là lượng từ đi kèm với công thức *đầy đủ* nhỏ nhất liền sau lượng từ đó. Để hiểu thế nào là công thức đầy đủ, chúng ta đưa ra một vài ví dụ về tầm ảnh hưởng của $\exists x$:

- $\forall y, \underbrace{\exists x, (x \neq y \wedge \forall z, z \text{ là một người bạn tốt})}_{\text{tầm ảnh hưởng}}$,
- $\forall y, \underbrace{\exists x, x \neq y}_{\text{tầm ảnh hưởng}} \wedge \forall z, z \text{ là một người bạn tốt}$.

Mặc dù trong cả hai ví dụ được đưa ra, công thức $x \neq y$ đều thỏa mãn là công thức nhỏ nhất liền sau $\exists x$, công thức này không đầy đủ ở ví dụ thứ nhất do bị đặt trong dấu ngoặc đơn.

Lượng từ có tầm ảnh hưởng đến hạng thức, có nghĩa là hạng thức bị phụ thuộc vào lượng từ. Hiểu theo cách cụ thể hơn, tại một vị trí nhất định, hạng thức **bị phụ thuộc** vào lượng từ khi và chỉ khi chúng nằm trong tầm ảnh hưởng của lượng từ có sử dụng hạng thức đó. Hạng thức tại một vị trí được gọi là **tự do** nếu và chỉ nếu chúng không bị phụ thuộc bởi bất cứ lượng từ nào. Chẳng hạn, trong công thức

$$\exists x, x \neq y,$$

x phụ thuộc vào lượng từ $\exists x$ và y là hạng thức tự do.

Tác giả sử dụng cụm từ “tại một vị trí” bởi vì một hạng thức có thể vừa tự do, vừa phụ thuộc tại các vị trí khác nhau trong công thức, như trong

$$v > 0 \wedge \forall v, v^2 > 0.$$

Sau khi chúng ta có thể phân biệt được sự tự do và phụ thuộc của hạng thức, chúng ta có cách định nghĩa về mặt cú pháp cho mệnh đề:

Một **mệnh đề** là một công thức không có hạng thức tự do tại bất cứ vị trí nào trong công thức đó.

Định nghĩa này không chỉ đảm bảo tính chất vốn có của mệnh đề được đưa ra bởi định nghĩa cũ — chỉ đúng hoặc sai — mà còn thể hiện sự khác biệt cơ bản giữa mệnh đề và công thức.

Bài 1: Phiên dịch các mệnh đề sau thành dưới dạng kí hiệu. Trình bày rõ các kí hiệu dành cho các hạng thức, vị từ và mệnh đề con nếu có.

¹Định nghĩa này được viết theo kiểu định nghĩa hay được đưa ra ở trong nhiều tài liệu. Tuy nhiên, không có một nhóm các quy tắc nào có thể thực sự chặt chẽ định nghĩa thế nào là công thức, bởi vì cần phải có một tập hợp các vị từ và hạng thức sơ cấp đầy đủ phản ánh toàn bộ yêu cầu phản ánh ngôn ngữ, nhưng tập này là vô cùng. Hơn nữa, trong một ngôn ngữ lập luận thật sự chặt chẽ, chúng ta sẽ cần phải định nghĩa các phép toán mới như trong $x + y$.

1. “Tất cả những người hay khoe mẽ thì không đẹp.”;
2. “Một số sinh viên nam ở trường đại học Trăm khoa đồng tính nam.”;
3. “Có sinh viên năm nhất và năm tư đều phải học lại môn Giải tích.”;
4. “Không có việc gì khó, chỉ sợ lòng không bền.”;
5. “Đào núi và lấp biển, quyết chí ắt làm nên.”.

Lời giải bài 1:

Nhắc lại, cách hiểu của tác giả có thể khác với bạn đọc. Lời giải được đưa ra mang tính chất tham khảo.

1. Gọi n kí hiệu cho hạng thức “người”. Kí hiệu các vị từ:

- $K()$: “(người) hay khoe mẽ”,
- $D()$: “(người) đẹp”.

Để phục vụ việc chuyển đổi sang dạng kí hiệu, viết lại câu thành

“Với tất cả mọi người, nếu người đó hay khoe mẽ thì người đó không đẹp.”.

Kí hiệu hóa:

$$\forall n, (K(n) \implies \neg D(n)).$$

2. Gọi l kí hiệu cho hạng thức “sinh viên nam ở trường đại học Trăm khoa”. Chỉ có một vị từ là $N()$: “(...) đồng tính nam”.

Cụm từ “một số” tương đương với từ “tồn tại”, do vậy, có kí hiệu hóa mệnh đề như sau:

$$\exists l, N(l).$$

3. Gọi m và b kí hiệu cho “sinh viên năm nhất” và “sinh viên năm tư”. Vị từ “phải học lại môn Giải tích” kí hiệu là $G()$. Viết lại câu:

“Tồn tại sinh viên năm nhất và tồn tại sinh viên năm tư sao cho sinh viên năm nhất và sinh viên năm tư này đều phải học lại môn Giải tích.”.

Kí hiệu hóa:

$$\exists m, \exists b, (G(m) \wedge G(b)).$$

4. Viết lại câu:

“Nếu có lòng bền bỉ, thì không tồn tại bất kỳ việc gì là khó cả.”.

Kí hiệu:

- Mệnh đề “lòng bền bỉ”: B ,
- Hạng thức “việc”: v ,
- Vị từ “(việc) khó”: $K()$.

Kí hiệu hóa là

$$B \implies \neg(\exists v, K(v)).$$

5. Viết lại câu:

“Với mọi việc, nếu quyết chí thì làm nên việc đó.”.

Kí hiệu:

- Mệnh đề “quyết chí”: Q ,
- Hạng thức “việc”: v ,
- Vị từ “làm nên (việc)”: $L()$.

Kí hiệu hóa mệnh đề ban đầu là

$$\forall v, (Q \implies L(v)).$$

6.

1.2 Phương pháp lập luận diễn dịch (tiếp)

Khi làm quen với giải tích mệnh đề, chúng ta đã sử dụng bảng giá trị chân lý và một vài quy tắc thay thế để lập luận. Những phương pháp này hoạt động hiệu quả do chúng ta chỉ có hữu hạn trường hợp để xem xét. Nhưng đối với giải tích vị từ, chúng ta phải mở rộng công cụ dùng để lập luận do không thể quét hết toàn bộ trường hợp được bao quát bởi một lượng từ.

1.2.1 Quy tắc đổi tên biến ràng buộc

Chúng ta sẽ đi đến một quy tắc lập luận tuy trông tương đối hiển nhiên nhưng có một vai trò vô cùng quan trọng.

Quy tắc đổi tên biến ràng buộc: Cho một mệnh đề có hạng thức. Sẽ nhận được mệnh đề tương đương nếu thay thế mọi sự xuất hiện của một hạng thức nhất định bằng hạng thức khác.

Ví dụ:

$$\forall x, A(x) \iff \forall y, A(y).$$

Sự khác biệt duy nhất giữa hai mệnh đề là sự thay thế hạng thức, hay chính xác hơn là cách kí hiệu hạng thức. Có thể thấy rõ ràng rằng về mặt ngữ nghĩa, hai mệnh đề là như nhau.

1.2.2 Tính chất giao hoán của lượng từ phổ quát

Đối với giao tiếp thông thường, không ai quan trọng hóa thứ tự của các cụm “với mọi” với nhau. Nhiều khi, người ta sẽ tổng hợp thành một lần nói “với mọi” nếu cần tổng quát hóa nhiều thành phần. Do được xây dựng dựa trên nền tảng thế giới vật lý, lượng từ phổ quát trong lô-gic cũng có tính chất tương tự. Chúng ta luôn có **tính chất giao hoán của lượng từ phổ quát** như sau

$$\forall x, \forall y, L(x, y) \iff \forall y, \forall x, L(x, y).$$

Điều này cho phép viết $\forall(x, y), L(x, y)$ mà không làm mất nghĩa mệnh đề nhưng tác giả sẽ hạn chế viết như vậy do, thứ nhất, kí hiệu $\forall(x, y)$ trông khá giống kí hiệu vị từ, và thứ hai, ít sách có kí hiệu này.

1.2.3 Tính chất phân phối của lượng từ phổ quát đối với phép hội

Chúng ta cần nhiều hơn những quy tắc trên để có thể nâng cao khả năng lập luận. Dưới đây là một ví dụ về lập luận theo cấu trúc tam đoạn luận cổ điển:

Giả thiết	“Mọi sinh viên ngành kĩ thuật đều phải học vật lí.”; “Mọi sinh viên trường đại học Trầm khoa đều thuộc ngành kĩ thuật.” .
Kết luận	“Mọi sinh viên trường đại học Trầm khoa đều phải học vật lí.”

Gọi biểu diễn $K()$ cho vị từ “(sinh viên) ngành kĩ thuật”, $V()$ cho vị từ “(sinh viên) phải học vật lí”, $T()$ cho “(sinh viên) trường đại học Trầm khoa”. Chúng ta kí hiệu hóa lập luận được đưa ra như sau:

Giả thiết	$\forall x, (K(x) \implies V(x))$ $\forall x, (T(x) \implies K(x))$.
Kết luận	$\forall x, (T(x) \implies V(x))$

Kết hợp giả thiết thành một mệnh đề G :

$$\forall x, (K(x) \implies V(x)) \wedge \forall x, (T(x) \implies K(x)).$$

Để tiếp tục lập luận, chúng ta cần sự trợ giúp của một quy tắc lập luận mới — **tính chất phân phối của lượng từ phổ quát đối với phép hội**:

Nếu hai mệnh đề con có cùng lượng từ và được kết nối bởi phép nối hội thì có thể kết hợp hai công thức nằm trong tầm ảnh hưởng của lượng từ thành một công thức bởi phép hội để tạo thành một mệnh đề tương đương, hay

$$\forall x, A(x) \wedge \forall x, B(x) \iff \forall x, (A(x) \wedge B(x)).$$

Sử dụng quy tắc thay thế, thay $A(x)$ và $B(x)$ lần lượt bởi $K(x) \implies V(x)$ và $T(x) \implies K(x)$, chúng ta có:

$$G \iff \forall x, ((K(x) \implies V(x)) \wedge (T(x) \implies K(x))).$$

Có $(P \implies Q) \wedge (Q \implies R) \implies (P \implies R)$ đúng với mọi mệnh đề P, Q, R cho nên

$$G \implies \forall x, (T(x) \implies V(x)).$$

Chúng ta đã kiểm chứng được kết luận.

Bạn đọc có thể thấy sự thay thế là hơi khập khiễng, do quy tắc thay thế chỉ áp dụng được đối với mệnh đề, không phải công thức. Tuy nhiên, do các công thức như $A(x)$ và $K(x) \implies V(x)$ chỉ có một hạng thức x phụ thuộc vào lượng từ $\forall x$, cho nên có thể coi hai công thức này là **mệnh đề phụ thuộc vào lượng từ** và lập luận trên chúng như mệnh đề.

1.2.4 Cụ thể hóa lượng từ phổ quát

Xét một lập luận khác mà chúng ta dễ dàng cảm nhận là đúng:

Giả thiết	“Mọi sinh viên ngành kĩ thuật đều phải học vật lí.”; “Ê-mô-ri-ô là sinh viên ngành kĩ thuật.”.
Kết luận	“Ê-mô-ri-ô phải học vật lí.”

Với cách kí hiệu hóa tương tự, chúng ta có

Giả thiết	$\forall x, (K(x) \implies V(x))$ $K(e)$
Kết luận	$V(e)$

với e viết tắt cho “Ê-mô-ri-ô”. Việc lập luận dẫn một cách tự nhiên đến với quy tắc tiếp theo — **quy tắc cụ thể hóa biến phổ quát** hoặc **phép loại bỏ lượng từ phổ quát**:

$\forall x, A(x) \implies A(e)$ với e là một hạng thức đã xác định, hay nói suông sã hơn, nếu một tính chất đúng với toàn cục thì nó cũng đúng với bộ phận.

Gọi hợp các giả thiết là G , với quy tắc này, chúng ta có

$$\begin{aligned} G &\implies (K(e) \implies V(e)) \wedge (K(e)); \\ G &\implies V(e) \quad (\text{quy tắc khẳng định}). \end{aligned}$$

Kết luận được khẳng định từ giả thiết.

1.2.5 Tính chất lượng từ rỗng

Có bớt đi thì cũng sẽ phải có thêm vào. Với A là một mệnh đề (không phụ thuộc vào hạng thức x),

$$\begin{cases} A \iff \forall x, A \\ A \iff \exists x, A \end{cases}.$$

Có thể thấy được tại sao tính chất này có tên là **tính chất lượng từ rỗng**, bởi vì nếu A không có hạng thức x , các lượng từ ảnh hưởng đến x sẽ không có giá trị trên A .

Bài 2: Dấu \leq là một dấu có nhiều ứng dụng quan trọng trong toán học, nhưng khái niệm so sánh xuất hiện trong gần như toàn bộ mọi lĩnh vực trong đời sống. Nếu như Ê-mô-ri-ô viết

$$\text{“Cam} \leq \text{táo.”},$$

mọi người sẽ hiểu Ê-mô-ri-ô không thích cam hơn táo. Đưa về kí hiệu dưới dạng vị từ, Ê-mô-ri-ô có thể viết

$$V_{\leq}(\text{cam}, \text{táo}).$$

Chúng ta có thể nhận thấy ngay một số tính chất của \leq , mà chúng ta sẽ coi như là giả thiết trong bài tập này:

- $\forall x, \forall y, (V_{\leq}(x, y) \vee V_{\leq}(y, x));$
- $\forall x, \forall y, \forall z, (V_{\leq}(x, y) \wedge V_{\leq}(y, z) \implies V_{\leq}(x, z)).$

Dấu \leq là sự kết hợp của dấu $<$ với dấu $=$ mà chúng ta có thể định nghĩa chúng như sau (những định nghĩa này cũng được coi là giả thiết):

- $\forall x, \forall y, (V_{=}(x, y) \iff V_{\leq}(x, y) \wedge V_{\leq}(y, x));$
- $\forall x, \forall y, (V_{<}(x, y) \iff \neg V_{\leq}(y, x)).$

Chúng minh rằng

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x, V_{=}(x, x);$ | 6. $\forall x, \forall y, \forall z, (V_{=}(x, y) \wedge V_{=}(y, z) \implies V_{=}(x, z));$ |
| 2. $\forall x, \forall y, (V_{=}(x, y) \iff V_{=}(y, x));$ | 7. $\forall x, \forall y, \forall z, (V_{<}(x, y) \wedge V_{<}(y, z) \implies V_{<}(x, z));$ |
| 3. $\forall x, \forall y, (V_{<}(x, y) \implies V_{\leq}(x, y));$ | 8. $\forall x, \forall y, \forall z, (V_{=}(x, y) \wedge V_{<}(y, z) \implies V_{<}(x, z));$ |
| 4. $\forall x, \forall y, (V_{<}(x, y) \uparrow V_{<}(y, x));$ | 9. $\forall x, \forall y, \forall z, (V_{<}(x, y) \wedge V_{=}(y, z) \implies V_{<}(x, z)).$ |
| 5. $\forall x, \forall y, (V_{=}(x, y) \iff V_{<}(x, y) \downarrow V_{<}(y, x));$ | |

Lời giải bài 2:

Gọi hợp của các giả thiết là G .

1. Kết hợp tính chất phân phối của lượng từ phổ quát với phép hội với tính chất rút gọn, có

$$G \implies \forall x, \forall y, \left((V_{=}(x, y) \iff V_{\leq}(x, y) \wedge V_{\leq}(y, x)) \wedge (V_{\leq}(x, y) \vee V_{\leq}(y, x)) \right).$$

Loại bỏ lượng từ phổ quát $\forall y$ bằng việc thế y bởi x ,

$$G \implies \forall x, \left((V_{=}(x, x) \iff V_{\leq}(x, x) \wedge V_{\leq}(x, x)) \wedge (V_{\leq}(x, x) \vee V_{\leq}(x, x)) \right).$$

Tiếp tục sử dụng các tính chất của giải tích mệnh đề,

$$\begin{aligned} G &\implies \forall x, \left((V_{=}(x, x) \iff V_{\leq}(x, x)) \wedge V_{\leq}(x, x) \right) && \text{(tính chất lũy đẳng);} \\ G &\implies \forall x, \left((V_{=}(x, x) \implies V_{\leq}(x, x)) \wedge (V_{\leq}(x, x) \implies V_{=}(x, x)) \wedge V_{\leq}(x, x) \right) \\ &&& \text{(định nghĩa phép tương đương);} \\ G &\implies \forall x, \left((V_{\leq}(x, x) \implies V_{=}(x, x)) \wedge V_{\leq}(x, x) \right) && \text{(tính chất rút gọn);} \\ G &\implies \forall x, V_{=}(x, x) && \text{(quy tắc khẳng định).} \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

2. Từ giả thiết, có

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_{=}(x, y) \iff V_{\leq}(x, y) \wedge V_{\leq}(y, x)). \quad (1.1)$$

Với quy tắc đổi tên biến ràng buộc, đổi x và y lần lượt bởi y và x để được

$$G \implies \forall y, \forall x, (V_{=}(y, x) \iff V_{\leq}(y, x) \wedge V_{\leq}(x, y)).$$

Do tính chất giao hoán của lượng từ,

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_{=}(y, x) \iff V_{\leq}(y, x) \wedge V_{\leq}(x, y)).$$

Kết hợp với tính chất giao hoán của phép tuyển để suy ra

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_{=}(y, x) \iff V_{\leq}(x, y) \wedge V_{\leq}(y, x)). \quad (1.2)$$

Hội giữa (1.1) và (1.2), thông qua tính chất phân phối,

$$G \implies \forall x, \forall y, \left((V_{=}(x, y) \iff V_{\leq}(x, y) \wedge V_{\leq}(y, x)) \wedge (V_{=}(y, x) \iff V_{\leq}(x, y) \wedge V_{\leq}(y, x)) \right).$$

Chúng ta có thể chứng minh bằng việc tích hợp thêm tính chất bắc cầu

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_{=}(x, y) \iff V_{=}(y, x)).$$

3. Chúng ta có thể khẳng định sự hiển nhiên của $(P \vee Q) \wedge \neg P \implies Q$ của bảng giá trị chân lí 1.1.

Bảng 1.1: Bảng giá trị chân lí của $(P \vee Q) \wedge \neg Q \implies P$

P	Q	$(P \vee Q) \wedge \neg Q \implies P$	$(P \vee Q) \wedge \neg Q \implies P$
Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	S	S
S	S	S	S

Sử dụng quy tắc thay thế, đổi P và Q lần lượt bởi $V_{\leq}(x, y)$ và $V_{\leq}(y, x)$, chúng ta có

$$G \implies \forall x, \forall y, ((V_{\leq}(x, y) \vee V_{\leq}(y, x)) \wedge \neg V_{\leq}(y, x) \implies V_{\leq}(x, y)).$$

Từ định nghĩa,

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_{<}(x, y) \iff \neg V_{\leq}(y, x)).$$

Qua đó, kết hợp hai mệnh đề, sử dụng thay thế cơ bản để có

$$\begin{aligned} G &\implies \forall x, \forall y, ((V_{\leq}(x, y) \vee V_{\leq}(y, x)) \wedge V_{<}(x, y) \implies V_{\leq}(x, y)); \\ G &\implies \forall x, \forall y, (V_{<}(x, y) \implies V_{\leq}(x, y)) \quad (\text{tính chất rút gọn}). \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

4. Chúng ta có

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_{\leq}(x, y) \vee V_{\leq}(y, x)),$$

và bảng 1.2.

Bảng 1.2: Bảng giá trị chân lí của $P \vee Q \implies \neg P \uparrow \neg Q$

P	Q	$P \vee Q \implies \neg P \uparrow \neg Q$	$P \vee Q \implies \neg P \uparrow \neg Q$
Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	S	S
S	S	S	S

Điều này chứng minh

$$G \implies \forall x, \forall y, (\neg V_{\leq}(x, y) \uparrow \neg V_{\leq}(y, x)).$$

Chúng ta cũng đã có

$$G \implies \forall x, \forall y, (\neg V_{\leq}(y, x) \iff V_{<}(x, y)),$$

sử dụng quy tắc đổi tên biến ràng buộc và tính chất giao hoán của lượng từ \forall để đảo vị trí x và y trong vị từ:

$$G \implies \forall x, \forall y, (\neg V_{\leq}(x, y) \iff V_{<}(y, x)).$$

Từ các kết quả đã có, sử dụng thay thế tương đương để được

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_{<}(y, x) \uparrow V_{<}(x, y)).$$

Để thấy điều phải chứng minh.

5. Trước khi thực hiện biến đổi, chúng ta sẽ thực hiện một vài phân tích. Từ giả thiết, chúng ta có:

$$\begin{cases} G \implies \forall x, \forall y, (V_=(x, y) \iff V_<(x, y) \wedge V_<(y, x)) \\ G \implies \forall x, \forall y, (V_<(x, y) \iff \neg V_<(y, x)) \end{cases}.$$

Thay thế hạng thức phụ thuộc trên mệnh đề thứ hai và hoán đổi vị trí hai lượng từ để được

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_<(y, x) \iff \neg V_<(x, y)).$$

Sau khi có những điều cần thiết này, thực hiện biến đổi.

$$\begin{aligned} G &\implies \forall x, \forall y, (V_=(x, y) \iff V_<(y, x) \wedge V_<(x, y)); \\ G &\implies \forall x, \forall y, (V_=(x, y) \iff \neg \neg V_<(y, x) \wedge \neg \neg V_<(x, y)) && \text{(tính chất phủ định kép);} \\ G &\implies \forall x, \forall y, (V_=(x, y) \iff \neg V_<(x, y) \wedge \neg V_<(y, x)) && \text{(thay thế tương đương);} \\ G &\implies \forall x, \forall y, (V_=(x, y) \iff \overline{V_<(x, y) \vee V_<(y, x)}) && \text{(định luật De Morgan)} \\ G &\implies \forall x, \forall y, (V_=(x, y) \iff V_<(x, y) \downarrow V_<(y, x)) && \text{(định nghĩa của phép phủ định hội).} \end{aligned}$$

Chúng ta có điều phải chứng minh.

6. Chúng ta có định nghĩa

$$G \implies \forall x, \forall y, (V_=(x, y) \iff V_<(x, y) \wedge V_<(y, x)).$$

Sử dụng quy tắc đổi biến,

$$\begin{cases} G \implies \forall y, \forall z, (V_=(y, z) \iff V_<(y, z) \wedge V_<(z, y)) \\ G \implies \forall x, \forall z, (V_=(x, z) \iff V_<(x, z) \wedge V_<(z, x)) \end{cases}.$$

Sử dụng tính chất lượng từ rộng và tính chất giao hoán của lượng từ để có các kết luận

$$\begin{cases} G \implies \forall x, \forall y, \forall z, (V_=(x, y) \iff V_<(x, y) \wedge V_<(y, x)) \\ G \implies \forall x, \forall y, \forall z, (V_=(y, z) \iff V_<(y, z) \wedge V_<(z, y)) \\ G \implies \forall x, \forall y, \forall z, (V_=(x, z) \iff V_<(x, z) \wedge V_<(z, x)) \end{cases}. \quad (1.3)$$

Để tiện lợi cho việc viết, chúng ta sẽ phân tích riêng thành phần mệnh đề phụ thuộc. Từ các kết luận vừa đưa ra, với mọi x, y và z , chúng ta có

$$V_=(x, y) \wedge V_=(y, z) \iff (V_<(x, y) \wedge V_<(y, x)) \wedge (V_<(y, z) \wedge V_<(z, y)).$$

Sử dụng kết hợp các tính chất giao hoán và kết hợp,

$$V_=(x, y) \wedge V_=(y, z) \iff (V_<(x, y) \wedge V_<(y, z)) \wedge (V_<(z, y) \wedge V_<(y, x)). \quad (1.4)$$

Từ giả thiết, với mọi x, y, z ,

$$V_<(x, y) \wedge V_<(y, z) \implies V_<(x, z). \quad (1.5)$$

Thế x, y, z lần lượt thành z, y, x , chúng ta có:

$$\forall z, \forall y, \forall x, (V_<(z, y) \wedge V_<(y, x) \implies V_<(z, x)).$$

Từ tính chất giao hoán của các lượng từ toàn cục

$$\forall x, \forall y, \forall z, (V_<(z, y) \wedge V_<(y, x) \implies V_<(z, x)). \quad (1.6)$$

(1.4), (1.5) và (1.6) cho được với mọi x, y và z :

$$V_=(x, y) \wedge V_=(y, z) \iff V_<(x, z) \wedge V_<(z, x).$$

Kết hợp với (1.3) để có

$$\forall x, \forall y, \forall z, (V_=(x, y) \wedge V_=(y, z) \iff V_=(x, z)).$$

Điều phải chứng minh.

7.

Tài liệu tham khảo - Toán

- [1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] Irving H Anellis. Peirce's truth-functional analysis and the origin of the truth table. *History and Philosophy of Logic*, 33(1):87–97, 2012.
- [3] Daniel W Cunningham. *A logical introduction to proof*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation, 2000.
- [5] Patrick Suppes. *Introduction to logic*. Courier Corporation, 2012.

Tài liệu tham khảo - Vật lí