Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 3 tháng 12 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu

0. Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 – 1955)

0.1 Hệ các số thực

0.1.1 Số thực

Các ngành toán học đều có nhiều khái niệm, định lí, chứng minh trên các vật thể khác nhau, nhưng tổng quát trong đấy vẫn có nhiều điểm chung. Một cái chung như vậy là việc sử dụng **dấu bằng**, $=$, để biểu diễn quan hệ giống nhau. Ở trong khuôn khổ cuốn sách này, chúng ta sẽ hiểu một cách nôm na rằng hai vế sẽ bằng nhau khi và chỉ khi hai vế có giá trị bằng nhau.

Phần đầu tiên này đề cập các yếu tố đại số cơ bản của **số thực**, cụ thể là những hệ thức mà trong đó số thực tương tác với một số hữu hạn các **phép cộng** và **phép nhân**.

Gọi $\mathbb{R}$ là tập hợp số thực. Nếu a, b, c đều thuộc $\mathbb{R}$, với phép cộng và phép nhân mang ý nghĩa thông thường, có:

- $a + b$ và $a \cdot b$ (hay $a \times b$, ab) đều thuộc $\mathbb{R}$;
- $a + b = b + a$ và $a \cdot b = b \cdot a$ (**tính giao hoán**);
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ và $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (**tính kết hợp**);
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (**tính phân phối**);
- $a \cdot 1 = a$ (**đơn vị**);
- $a + 0 = a$ và $a \cdot 0 = 0$ (**số không**);
- $a + c = b + c \implies a = b$ (**tính giản ước được**);
- Nếu $c \neq 0$, $a \cdot c = b \cdot c \implies a = b$ (**tính giản ước được**).

Tính chất giao hoán cho phép viết $a + b + c$ và $a \cdot b \cdot c$ mà không phần phải quan tâm đến thứ tự tính toán của các phép tính trong hai biểu thức này. Một điều cần lưu ý là không phải mọi thực thể trong toán học đều đơn giản như vậy. Lấy ví dụ, phép nhân có hướng hai véc-tơ, một phép tính thường xuyên được sử dụng trong vật lí, vừa không có tính giao hoán, vừa không có tính kết hợp.

Mỗi a chỉ tồn tại một **số đối** $-a$ duy nhất sao cho $a + (-a) = 0$ và nếu $a \neq 0$, tồn tại một **số nghịch đảo** $\frac{1}{a}$ duy nhất sao cho $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Từ đó, chúng ta có được định nghĩa của hai phép tính cơ bản còn lại. **Phép trừ** được định nghĩa là phép cộng với số đối:

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b)};$$

và **phép chia** được định nghĩa như phép nhân với số nghịch đảo

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}}.$$

Trên tập số thực, không có nghịch đảo của 0.

Khi nhân hai số mà có liên quan đến số đối, chúng ta thực hiện có kết quả dựa vào bảng như sau:

Bảng 0.1: Bảng nhân hai số có sự tồn tại của số đối

$\cdot$	m	$-m$
n	mn	$-mn$
$-n$	$-mn$	mn

0.1.2 So sánh các số thực

Nếu chúng ta muốn biểu diễn a không bằng b, chúng ta có thể kí hiệu $\boldsymbol{a \neq b}$.

Trong $\mathbb{R}$ cũng tồn tại quan hệ thứ tự toàn phần $\leq$, **nhỏ hơn hoặc bằng**[2], thỏa mãn các tính chất sau:

[2]Còn những kí hiệu khác cho dấu nhỏ hơn hoặc bằng là $\leqq$, $\leqslant$.

- $\leq$ có tính bắc cầu: với mọi $a; b; c \in \mathbb{R}$, nếu $a \leq b$ và $b \leq c$ thì $a \leq c$;
- $\leq$ có tính phản xạ: với mọi $a \in \mathbb{R}$ thì $a \leq a$;
- $\leq$ có tính phản đối xứng: với mọi $a; b \in \mathbb{R}$, nếu $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases}$ thì $a = b$;
- $\leq$ có tính toàn phần: với mọi $a; b \in \mathbb{R}$ thì $a \leq b$ hoặc $b \leq a$.

Từ $\leq$, chúng ta có thể định nghĩa các kí hiệu so sánh khác, bao gồm $\boldsymbol{<}$ (**nhỏ hơn**), $\boldsymbol{\leq}$ (**nhỏ hơn hoặc bằng**)[3], $\boldsymbol{>}$ (**lớn hơn**)[4] như sau:

- $\boldsymbol{a < b \iff \begin{cases} a \leq b \\ a \neq b \end{cases}}$;
- $\boldsymbol{a \geq b \iff b \leq a}$;
- $\boldsymbol{a > b \iff b < a}$.

Ngoài sự so sánh đơn lẻ, chúng ta còn có thể so sánh một cách toàn cục. Với A là một tập con của $\mathbb{R}$ và x là một phần tử trong $\mathbb{R}$, định nghĩa:

- x là **chặn trên** của A nếu $y \leq x$ với mọi y trong A;
- x là **chặn dưới** của A nếu $x \leq y$ với mọi y trong A.

Trong cả hai định nghĩa đó, nếu x thuộc A thì x sẽ là **phần tử lớn nhất** và **phần tử nhỏ nhất** tương ứng. Chúng ta có thể kí hiệu phần tử lớn nhất là $\mathbf{ptln}\,(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{Max}\,(\boldsymbol{A})$ hay $\mathbf{max}\,(\boldsymbol{A})$ và phần tử nhỏ nhất là $\mathbf{ptnn}\,(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{min}\,(\boldsymbol{A})$ và $\mathbf{Min}\,(\boldsymbol{A})$. Có thể nhận thấy rằng nếu A có phần tử lớn nhất thì nó chỉ có đúng một phần tử như vậy. Thực vậy, nếu x và y cùng là phần tử lớn nhất của A, thì theo định nghĩa phần tử lớn nhất của x và $y \in A$ nên $y \leq x$. Tương tự, có $x \leq y$. Theo tính phản xạ của $\leq$, suy ra được $x = y$.

Các số trong $\mathbb{R}$ làm chặn trên của A tạo thành một tập hợp. Nếu tập hợp đó có phần tử nhỏ nhất thì phần tử đó có tên là **biên trên** (hay **chặn trên đúng**) và được kí hiệu là $\mathbf{sup}\,(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{Sup}\,(\boldsymbol{A})$ hoặc $\mathbf{sup}_{\mathbb{R}}\,(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{Sup}_{\mathbb{R}}\,(\boldsymbol{A})$. Tương tự, số lớn nhất trong các chặn dưới của A thì gọi là **biên dưới**, hay **chặn dưới đúng** và kí hiệu là $\mathbf{inf}\,(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{Inf}\,(\boldsymbol{A})$ hoặc $\mathbf{inf}_{\mathbb{R}}\,(\boldsymbol{A})$, $\mathbf{Inf}_{\mathbb{R}}\,(\boldsymbol{A})$[5].

Những phép so sánh không bằng cũng có những tính chất đại số như những phép bằng. Cụ thể, với x, y, z là các số thực,

- $\boldsymbol{x \leq y \iff x + z \leq y + z}$;
- $\boldsymbol{\begin{cases} x \leq y \\ z \geq 0 \end{cases} \iff x \cdot z \leq y \cdot z}$.

Bài 1: Cho $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} w \leq y \\ x \leq z \end{cases}$. Chứng minh rằng $w + x \leq y + z$.

Lời giải bài 1:

Có $w \leq y$ nên $w + x \leq y + x$. Tương tự, cũng có $x \leq z \iff x + y \leq z + y$. Theo tính chất bắc cầu, chúng ta có:

$$w + x \leq x + y \leq y + z.$$

Qua đó, chúng ta có điều phải chứng minh.

Bài 2: Cho $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq w \leq y \\ 0 \leq x \leq z \end{cases}$. Chứng minh rằng $w \cdot x \leq y \cdot z$.

Lời giải bài 2:

[3] Còn những kí hiệu khác cho dấu lơn hơn hoặc bằng là $\geqq$, $\geqslant$.

[4] Ngoài những dấu được kể, còn những dấu mang tính chất so sánh như $\nless$ (không nhỏ hơn), $\ngtr$ (không lớn hơn), $\nleq$, $\nleqq$ hay $\nleqslant$ (không nhỏ hơn hoặc bằng), $\ngeq$, $\ngeqq$ hay $\ngeqslant$ (không lớn hơn hoặc bằng), và những dấu bị nguyền rủa $\lessgtr$ (nhỏ hơn hoặc lớn hơn), $\lesseqgtr$ hay $\lesseqqgtr$ (nhỏ hơn, lớn hơn hoặc bằng).

[5] Phần lớn các kí hiệu hàm trong toán không phân biệt hoa thường. Tuy nhiên, có một vài tài liệu có sự phân biệt trong một số hàm đặc biệt như arg và Arg. Cho nên, đừng lười và đừng lẫn lộn hoa thường!

Tương tự như bài trước, có

$$\begin{cases}\begin{cases} w \le y \\ x \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le z \\ w \ge 0 \end{cases}\end{cases} \implies \begin{cases} w \cdot x \le y \cdot x \\ x \cdot y \le z \cdot y \end{cases} \implies w \cdot x \le y \cdot z.$$

Chúng ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases} w \le y \\ x < z \end{cases}$. Chứng minh rằng $w + x < y + z$.

Lời giải bài 3:

Có $x < z \implies x \le z$, cho nên $w + x \le y + z$.

Giả sử $w + x = y + z$. Có $w \le y$ nên $w + x \le x + y$. Từ đây, suy ra được $y + z \le x + y \iff z \le x$.

Tuy nhiên, nếu kết hợp kết luận này với điều kiện đã có $x < z$ hay $x \le z$ và $x \ne z$ thì sẽ xảy ra mâu thuẫn. Do đó, điều giả sử là sai. Theo chứng minh phản chứng, có $w + x < y + z$, điều phải chứng minh.

Bài 4: Cho x, y là số thực và z là một số thực âm. Chứng minh nếu $x \le y$ thì $x \cdot z \ge y \cdot z$.

Lời giải bài 4:

Do z là một số thực âm, cho nên:

$$\begin{aligned} & z < 0 \\ \implies & z \le 0 \\ \iff & z + (-z) \le -z \\ \iff & 0 \le -z. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Giả sử $x \le y$. Với $-z$ là số không âm theo (0.1), nhân cả hai vế của $x \le y$ với $-z$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} & x \cdot (-z) \le y \cdot (-z) \\ \implies & -x \cdot z \le -y \cdot z \\ \iff & -x \cdot z + x \cdot z + y \cdot z \le -y \cdot z + \cdot z + y \cdot z \\ \iff & y \cdot z \le x \cdot z. \end{aligned}$$

Chúng ta có điều phải chứng minh.

0.1.3 Số tự nhiên và quy nạp toán học

Một tập số thường xuyên được đề cập ngoài tập số thực là tập **số tự nhiên** $\mathbb{N}$. Chúng ta sẽ đồng nhất tập này với tập các số nguyên không âm $\{0; 1; 2; 3; \cdots\}$[6]. Ngoài những tính chất đại số cơ bản thừa hưởng từ tập số thực, tập số tự nhiên có một số tính chất mà tập số thực không có. Ví dụ, mỗi một tập không rỗng các sô tự nhiên luôn tồn tại phần tử nhỏ nhất. Điều này có thể được chứng minh thông qua quy nạp[7] mà sẽ được nhắc đến sau. Nhưng trước hết, chúng ta hãy quay ngược lịch sử một chút.

Về mặt chặt chẽ toán học, số tự nhiên là tập số đầu tiên được xây dựng, và chúng được dựa trên hệ tiên đề Pê-a-nô[8]. Hệ tiên đề đó phát biểu rằng nếu tồn tại một tập hợp P thỏa mãn

- Tồn tại duy nhất một phần tử $0 \in P$;
- Với mỗi $n \in P$ tồn tại duy nhất một số liền sau thuộc P, gọi là $s(n)$;
- Với mọi $n \in P$ thì $s(n) \ne 0$;
- Nếu m và n là hai số thuộc P, $s(m) = s(n) \implies m = n$;

[6] Trong nhiều tài liệu nước ngoài, tập số tự nhiên không bao gồm số 0.

[7] Có ngầm định rằng không thể chứng minh bằng quy nạp trên tập số thực, mặc dù trong thực tế hoàn toàn có thể làm như vậy. Tác giả dự đoán lí do chủ yếu mà quy nạp thực không hay được đề cập là do, trái với quy nạp trên số tự nhiên, các đề thi Toán không cho phép thực hiện phương pháp cần nhiều yếu tố giải tích này.

[8] Giuseppe Peano (1858 – 1932).

- Gọi A là tập con của P, nếu $0 \in A$ và nếu có $n \in A \implies s(n) \in A$ thì $A = P$.

thì (P, s) là một **mẫu** hay **mô hình** cho số tự nhiên.

Tiên đề cuối cùng là nền tảng cho phép chứng minh **quy nạp**. Nếu $n = 0$ thỏa mãn một mệnh đề $Q(0)$ nào đó và nếu giả sử $Q(n)$ đúng suy ra $Q(s(n))$ cũng đúng thì $Q(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n. Mở rộng tính chất này, chúng ta có **quy nạp đủ**: nếu $n = 0$ thỏa mãn một mệnh đề $Q(0)$ nào đó và nếu giả sử $Q(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n không vượt quá k suy ra $Q(k+1)$ cũng đúng thì $Q(n)$ đúng với mọi n.

0.1.4 Số nguyên và số hữu tỉ

Từ tập số tự nhiên, chúng ta có thể xây dựng tập **số nguyên** bằng việc kết hợp các dạng số, n và $-n$ với n là số tự nhiên nào đó. Kí hiệu tập số nguyên là $\mathbb{Z}$. Trong một vài trường hợp, chúng ta sẽ chỉ quan tâm đến só dương, khi này, có tập số nguyên dương $\mathbb{Z}_+$ hay $\mathbb{N}^*$.

Mở rộng tập số nguyên, các số có dạng $\frac{a}{b}$ với a là số nguyên và b là số nguyên khác 0 tạo thành tập **số hữu tỉ** kí hiệu là $\mathbb{Q}$.

Để xây dựng số thực thì sẽ cần những khái niệm cao cấp hơn. Một số thực có thể được định nghĩa là giới hạn của một dãy số hữu tỉ. Các số thực không phải số hữu tỉ thì là **số vô tỉ**. Tuy rằng hiện tại chúng ta chưa đề cập đến định nghĩa toán học chặt chẽ của số thực, nhưng khả năng cao là bạn đọc đã có làm quen với nhiều số thực như $\sqrt{2}$ hay π. Do đó, tác giả sẽ thừa nhận các tính chất của số thực, và sẽ xây dựng lại định nghĩa khi điều kiện cho phép.

0.1.5 Phép mũ

Khái niệm và kí hiệu cho phép nhân bắt đầu có tính ứng dụng cao khi việc lặp lại nhiều lần phép cộng trở nên tốn kém. Tương tự, khi mà viết phép nhân lặp lại nhiều lần chở nên không khả thi thì chúng ta cần một phép toán mới: **phép mũ**. Định nghĩa phép mũ như sau: Với $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}_+$ thì

$$\boldsymbol{x^n = \prod_{i=1}^{n}(x) = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ lần}}}.$$

Gọi tên chuyên ngành của các thành phần trong phép mũ, x là cơ số, và n là số mũ. Một cách định nghĩa chặt chẽ hơn là sử dụng truy hồi: Với $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}_+$ thì

- $\boldsymbol{x^1 = x}$, và;
- $\boldsymbol{x^{n+1} = x^n x}$ với mọi số nguyên dương n.

Phép mũ có một số tính chất như nhau: Với x và y là hai số thực và m, n là hai số nguyên dương thì

- $\boldsymbol{x^m x^n = x^{m+n}}$;
- $\boldsymbol{\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0)}$;
- $\boldsymbol{x^m y^m = (xy)^m}$;
- $\boldsymbol{\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^m \quad (y \neq 0)}$;
- $\boldsymbol{(x^m)^n = x^{mn}}$.

Chúng ta sẽ mở rộng định nghĩa với số mũ bằng 0. Coi như là các tính chất vẫn đúng, chúng ta có

$$x^0 = x^{n-n} = \frac{x^n}{x^n} = 1.$$

Để ý rằng chúng ta đã thực hiện phép chia trong quá trình xác định x^0. Do đó, chúng ta cần đảm bảo rằng $x \neq 0$. Nói ngắn gọn, định nghĩa $\boldsymbol{x^0 = 1}$ với $x \neq 0$. Trong tài liệu này, không xác định giá trị với 0^0.

Từ những định nghĩa này, chúng ta có một vài phép biến đổi cơ bản. Với $n \in \mathbb{N}$ thì $1^n = 1$, và $0^n = 0$ với $n \neq 0$. Ngoài ra, để ý rằng

$$(-1)^{2n} = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1$$
$$(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1.$$

Từ đây, chúng ta có những đẳng thức quen thuộc:

$$(-x)^{2m} = (-1 \times x)^{2m} = (-1)^{2m} x^{2m}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times x^{2m} = x^{2m} \\ (-x)^{2m+1} &= (-1 \times x)^{2m+1} = (-1)^{2m+1} x^{2m+1} \\ &= -1 \times x^{2m+1} = -x^{2m+1}. \end{aligned}$$

Cũng có những tính chất liên quan đến số mũ mà không phải là đẳng thức. Nếu x và y là hai số thực dương thỏa mãn $x < y$ thì $x^m < y^m$ với mọi số nguyên dương m.

Chúng ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Hiển nhiên rằng với $m = 1$, điều cần chứng minh đúng. Đến bước quy nạp, giả sử rằng $x^m < y^m$ đúng với số nguyên dương $m = k$. Khi đó,

$$\begin{aligned} & x^{k+1} = x^k x \\ \Longrightarrow\ & x^{k+1} < y^k x < y^k y \\ \Longrightarrow\ & x^{k+1} < y^{k+1} \end{aligned}$$

và qua đó chúng ta có giả thiết đúng với $k+1$. Sử dụng nguyên lí quy nạp để có $x^m < y^m$ luôn đúng. Như một hệ quả, có định lí quen thuộc phát biểu như sau: Cho x là số thực dương, $x < 1 \iff x^n < 1$ và $x > 1 \iff x^n > 1$ với mọi số nguyên dương n.

Bài 5: Sử dụng định nghĩa truy hồi, chứng minh rằng với mọi số thực x số nguyên dương m và n thì $x^m x^n = x^{m+n}$ và $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ nếu $x \neq 0$.

Lời giải bài 5:

Chúng ta sẽ chứng minh các tính chất $x^m x^n = x^{m+n}$ bằng cách quy nạp theo n. Hiển nhiên, $x^m x^1 = x^m x = x^{m+1}$. Giả sử $x^m x^n = x^{m+n}$ đúng với số nguyên dương $n = k$. Khi đó,

$$\begin{aligned} x^{m+k+1} &= x^{m+k} \times x && \text{(định nghĩa truy hồi)} \\ &= x^m x^k \times x && \text{(quy nạp)} \\ &= x^m x^{k+1} \end{aligned}$$

và qua đó chúng ta có giả thiết đúng với $k+1$. Sử dụng nguyên lí quy nạp để có $x^m x^n = x^{m+n}$ luôn đúng.

Sử dụng tính chất này, với $x \neq 0$, có:

$$\begin{aligned} & x^{m-n} x^n = x^{(m-n)+n} = x^m \\ \iff\ & x^{m-n} = \frac{x^m}{x^n}. \end{aligned}$$

Chúng ta có điều phải chứng minh.

Bài 6: Sử dụng định nghĩa truy hồi, chứng minh rằng với mọi số thực x và y và số nguyên dương m thì $x^m y^m = (xy)^m$.

Lời giải bài 6:

Một lần nữa, chúng ta lại chứng minh bằng quy nạp theo m. Điều cần chứng minh hiển nhiên đúng với $m = 1$. Giả sử $x^m y^m = (xy)^m$ đúng với số nguyên dương $m = k$. Khi đó,

$$\begin{aligned} x^{k+1} y^{k+1} &= x^k x y^k y && \text{(định nghĩa truy hồi)} \\ &= (xy)^k xy && \text{(quy nạp)} \\ &= (xy)^{k+1} \end{aligned}$$

và qua đó chúng ta có giả thiết đúng với $k+1$. Sử dụng nguyên lí quy nạp để có $x^m y^m = (xy)^m$ luôn đúng.

Bài 7: Sử dụng định nghĩa truy hồi, chứng minh rằng với mọi số thực x và số nguyên dương m, n thì $(x^m)^n = x^{mn}$.

Lời giải bài 7:

Chứng minh bằng quy nạp theo n. Điều cần chứng minh hiển nhiên đúng với $n = 1$. Giả sử $(x^m)^n = x^{mn}$ đúng với số nguyên dương $n = k$. Khi đó,

$$\begin{aligned} (x^m)^{k+1} &= (x^m)^k x^m && \text{(định nghĩa truy hồi)} \\ &= x^{mk} x^m && \text{(quy nạp)} \\ &= x^{mk+m} = x^{m(k+1)} \end{aligned}$$

và qua đó chúng ta có giả thiết đúng với $k+1$. Sử dụng nguyên lí quy nạp để có $(x^m)^n = x^{mn}$ luôn đúng.

0.1.6 Khai căn

Nhắc tới số vô tỉ $\sqrt{2}$, chúng ta cần phải đề cập tới **phép khai căn**. Có câu nói rằng ngược của phép cộng là phép trừ, ngược của phép nhân là phép chia, ngược của phép lũy thừa là phép khai căn.

Cho x là một số thực không âm, và n là một số nguyên dương. Chúng ta sẽ thống nhất với nhau rằng tồn tại duy nhất một số thực không âm y thỏa mãn $y^n = x$. Từ đây, chúng ta có định nghĩa phép khai căn như sau:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x \qquad (y \geq 0)} .$$

n được gọi là **bậc** của phép khai căn. Nếu $n = 2$, người ta thường viết tắt $\boldsymbol{\sqrt{x}}$ thay vì $\boldsymbol{\sqrt[2]{x}}$.

Với $m,n \in \mathbb{Z}_+$ và $x, y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ bất kì, có những tính chất như sau:

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x}; \\ \sqrt[n]{xy} &= \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}; \\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad (y \neq 0) . \end{aligned}}$$

Giống như với số thực, chúng ta sẽ khẳng định tính chính xác của phép khai căn này nếu có cơ hội.

Tài liệu tham khảo

[1] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review.* Courier Corporation, 2000.

[2] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis.* Springer Science & Business Media, 2011.