

Ôn tập Vật Lý

Bùi Nhật Minh

Ngày 12 tháng 2 năm 2026

Mục lục

Lời giới thiệu	3
Kiểm thử đơn vị	4
0.1 Chữ Nôm	4
0.2 Màu chữ	4
I Kiến thức toán học nền tảng	5
1 Lập luận trong toán học	7
1.1 Mệnh đề ghép và các phép nối mệnh đề	7
1.1.1 Phép đổi	8
1.1.2 Bảng giá trị chân lí	8
1.1.3 Phép hội	8
1.1.4 Phép tuyển	9
1.1.5 Phép kéo theo và phép hệ quả	10
1.1.6 Phép đẳng giá	11
1.1.7 Phép tuyển chọn	11
1.1.8 Thứ tự giải giá trị chân lí của mệnh đề của các phép nối	12
1.2 Phương pháp lập luận lô-gích	22
1.2.1 Điều kiện cho lập luận lô-gích	22
1.2.2 Định nghĩa chứng minh	22
1.2.3 Quy tắc thay thế trong chứng minh lô-gích	24
1.2.4 Mâu thuẫn	32
Tài liệu tham khảo	34

Lời giới thiệu

Kiểm thử đơn vị

0.1 Chữ Nôm

Kiểm thử chữ Nôm nghiêng và đậm: 世, 墓, 世, 墓.
Một vài chữ Nôm khác: 振, 禮, 鮑, 客.

0.2 Màu chữ

- Màu chữ xanh da trời
- Màu chữ đỏ đậm
- Màu chữ xanh lam đậm

Phần 1

Kiến thức toán học nền tảng

Phần này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đúng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Ví dụ, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khi nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn (bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán), mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh¹. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường, không phải là cõi tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách “tôn giáo hóa”. Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

¹Albert Einstein (1879 – 1955)

1.

Lập luận trong toán học

1.1 Mệnh đề ghép và các phép nối mệnh đề

Hãy xem xét câu sau:

"Hôm nay trời mưa và hội thao đã phải lùi lịch."

Đây rõ ràng là một mệnh đề do chúng ta có thể dễ dàng xác định được tính đúng sai của nó. Câu hỏi quan trọng hơn cần được đặt ra là chúng ta đã xác định tính chính xác của câu này như thế nào. Một cách tự nhiên, chúng ta sẽ xem xét từng phần "hôm nay trời mưa" và "hội thao đã phải lùi lịch". Từ tính đúng sai của hai vế, tính đúng sai của mệnh đề ban đầu được xác định. Đây là một ví dụ của **mệnh đề phức hợp** (hay **mệnh đề phức**), một mệnh đề được cấu tạo từ một hoặc một số **mệnh đề thành phần** và các **phép nối mệnh đề**.

Trong toán học, chúng ta hay sử dụng 5 phép nối mệnh đề (lần đầu được đề xuất bởi Phrây-go¹):

- Phép **đôi** — \neg , ', !;
- Phép **hội** hoặc phép **và** — \wedge hoặc $\&$, \cdot ;
- Phép **tuyển** hoặc phép **hoặc** — \vee hoặc \parallel , $+$;
- Phép **kéo theo** — \implies hoặc \Rightarrow , \rightarrow , \supset ;
- Phép **đẳng giá** hoặc phép **tương đương lô-gích** — \iff hoặc \Leftrightarrow , \leftrightarrow , $\Leftarrow\Rightarrow$, \equiv .

Đi kèm với những phép nối này, với sự phát triển của điện tử số, người ta đề xuất thêm những phép nối mệnh đề khác:

- Phép **phủ định hội** — \uparrow hoặc $\overline{\wedge}$;
- Phép **phủ định tuyển** — \downarrow hoặc $\overline{\vee}$;
- Phép **hệ quả** — \iff hoặc $\Leftarrow\rightarrow$, \subset ;
- Phép **phủ định kéo theo** — $\not\Rightarrow$ hoặc $\not\rightarrow$, $\not\Rightarrow\Leftarrow$, $\not\rightarrow\Leftarrow$, $\not\supset$;
- Phép **phủ định hệ quả** — $\not\Leftarrow$ hoặc $\not\Leftarrow\rightarrow$, $\not\Leftarrow\Leftarrow$, $\not\Leftarrow\Leftarrow\rightarrow$;
- Phép **phủ định đẳng giá** — $\not\iff$ hoặc $\not\iff\Leftarrow$, $\not\iff\Leftarrow\rightarrow$;
- Phép **tuyển chọn** hoặc phép **tuyển lại trừ** — \oplus hoặc V , $\not\oplus$ ², $\not\equiv$;
- Phép **phủ định tuyển chọn** — \odot .

Kết hợp với chúng là hai dấu ngoặc, ngoặc đơn đóng —) — và ngoặc đơn mở — (³ — để xác định thứ tự giải giá trị lô-gích của mệnh đề phức hợp.

¹Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925)

²Kí hiệu giống với phủ định đẳng giá không phải là do trùng hợp.

³Có thể dùng thêm ngoặc vuông — [] — hay ngoặc nhọn — {} — nếu cần tăng khả năng nhận diện của mệnh đề phức hợp.

1.1.1 Phép đổi

Thông thường, để phủ định một câu khẳng định, chúng ta hay dùng từ “không” hay những từ gần nghĩa như “chưa” hay “chẳng”. Ví dụ, có thể phủ định câu “Cơm hôm nay ngon.” thành “Cơm hôm nay *không* ngon.”. Cần phải để ý rằng, với những câu phức tạp hơn như ví dụ về hội thao ở trước đó thì việc thêm các chữ “không” như

“Hôm nay trời *không* mưa *và* hội thao đã *không* phải lùi lịch.”

là không thỏa đáng. Cách viết đúng cần phải phủ định toàn bộ câu chứ không chỉ một vế. Có thể viết mệnh đề phủ định như sau, tuy sẽ khá dài dòng:

“*Không* phải *trường hợp* *rằng* hôm nay trời mưa và hội thao đã phải lùi lịch.”.

Để tăng tính khái quát hóa và rút gọn mệnh đề, chúng ta có thể sử dụng kí hiệu, tuy rằng câu sau đó nhìn sẽ hơi kì, kiểu như:

“ $\neg(\text{cơm hôm nay ngon})$ ”

hay

“ $\neg(\text{hôm nay trời mưa và hội thao đã phải lùi lịch})$ ”.

Nhìn chung, nếu P là một mệnh đề thì phủ định của nó sẽ có kí hiệu là $\neg P$ hoặc \overline{P} . Nếu P đúng thì $\neg P$ sai và ngược lại, nếu P sai thì $\neg P$ đúng.

1.1.2 Bảng giá trị chân lí

Trước khi đi đến những phép nối phức tạp hơn, chúng ta sẽ đề cập đến khái niệm bảng giá trị chân lí. Khi sử dụng các phép toán lô-gích để tạo ra mệnh đề phức hợp thì chúng ta cần phải xem xét các trường hợp có thể của các **giá trị chân lí**, một cách nói văn hoa hơn cho cụm từ “tính đúng sai”, của từng mệnh đề thành phần. Khi mà số mệnh đề thành phần lớn lên thì số lượng trường hợp cũng tăng theo theo cấp số nhân. Để tránh việc phải viết nhiều, **bảng giá trị chân lí** đã được khai sinh⁴.

Chúng ta sẽ lấy ví dụ ngay trên phép nối mệnh đề chúng ta vừa được tiếp cận. Khi xây dựng bảng giá trị chân lí, tác giả sẽ viết tắt “Đ” và “S” lần lượt cho mệnh đề có giá trị chân lí đúng và sai.

Bảng 1.1: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép đổi

P	$\neg P$
Đ	S
S	Đ

1.1.3 Phép hội

Trong hệ thống an ninh ngân hàng, thông thường, để đăng nhập vào tài khoản, có thể bạn đọc sẽ cần P : “nhập đúng mật khẩu” và Q : “nhập đúng mã OTP⁵”. Chỉ khi P *và* Q đúng thì bạn đọc mới được phép sử dụng các sản phẩm của ngân hàng.

Trong ngôn ngữ tự nhiên, chúng ta thường dùng từ “và” để nối hai ý tưởng lại với nhau. Trong logic học, việc kết hợp hai mệnh đề P và Q để tạo thành một mệnh đề mới được gọi là phép hội. Mệnh đề này được biểu diễn bằng lời là “ P và Q ”, kí hiệu là

$$P \wedge Q.$$

Mệnh đề này có tính “khắt khe”: nó chỉ đúng khi cả P và Q đồng thời cùng đúng. Nếu ít nhất một trong hai mệnh đề thành phần bị sai, kết quả của phép hội sẽ là sai, thể hiện dưới dạng bảng giá trị chân lí 1.2.

⁴Đây có vẻ là một khái niệm đơn giản, bởi vì lập bảng là một thao tác đã được thực hiện thường xuyên suốt lịch sử loài người, tuy nhiên, không có quá nhiều tài liệu lịch sử nói về bảng giá trị chân lí. Tài liệu sớm nhất mà tác giả tìm được cho thấy sự sử dụng của kiểu bảng này xuất phát từ thế kỷ XIX[2]. Có thể, trường hợp thứ nhất, người xưa thấy việc viết (hay nói, biết chữ là một thứ xa xỉ) các mệnh đề lô-gích phức hợp là bình thường, hoặc, trường hợp thứ hai với khả năng xảy ra cao hơn, kiến thức lịch sử của tác giả còn hạn hẹp.

⁵One Time Password — Mật khẩu dùng một lần.

Bảng 1.2: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép hội

P	Q	$P \wedge Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

Giả sử rằng bạn đọc thấy bữa ăn buổi hôm nay rất ngon, do sự nhiệt tình của bạn bồi bàn. Bạn đọc đã vào được phần mềm ngân hàng của mình và định cho bo cho bồi bàn một chút tiền. Tuy nhiên, bạn đọc lại nhìn thấy bảng ghi chính sách của quán: "Khách hàng không được phép đưa tiền bo cho nhân viên của quán". Nếu bạn đọc vừa P : là khách hàng của quán, và Q : đưa tiền bo cho nhân viên, thì bạn đọc đã vi phạm chính sách rằng *không phải rằng P và Q* . Bạn đọc đành đưa ra đề nghị với nhà hàng là bạn muốn được phục vụ lại bởi bồi bàn này trong những lần sau.

Nếu phép hội đại diện cho sự "đồng thuận tuyệt đối", thì phép phủ định hội (còn gọi là phép toán Sép-pho⁶) lại đại diện cho sự phủ nhận của sự đồng thuận đó. Phủ định hội của P và Q được kí hiệu là

$$P \uparrow Q.$$

Mệnh đề này chỉ sai trong trường hợp duy nhất là cả P và Q đều đúng.

Bảng 1.3: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép phủ định hội

P	Q	$P \uparrow Q$
Đ	Đ	S
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	Đ

1.1.4 Phép tuyển

Ê-mô-ri muốn được nhập học tại trường U-ni-véc-xi-tô chẳng hạn, đương nhiên Ê-mô-ri cần phải tìm hiểu điều kiện xét tuyển của trường này. Với ngành học mà Ê-mô-ri mong muốn, có yêu cầu rằng Ê-mô-ri cần phải có P : tổng điểm thi trung học phổ thông quốc gia từ 24 điểm trở lên, hoặc Q : có giải thành phố từ giải ba trở lên. Do đó, Ê-mô-ri muốn được tuyển vào trường theo ngành này cần phải có thành tích *P hoặc Q*.

Mệnh đề phfts " P tuyển Q " có kí hiệu $P \vee Q$. Mệnh đề này đúng khi tối thiểu một trong hai mệnh đề đầu vào đúng, và chỉ sai khi cả hai mệnh đề đầu vào đều sai. Bảng 1.4 cho giá trị chân lí của mệnh đề tuyển.

Bảng 1.4: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép tuyển

P	Q	$P \vee Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

Ý nghĩa của từ "hoặc" trong toán học hơi khác với ý nghĩa thông thường. Khi người ta nói "hoặc", người ta hay ám chỉ một trong số các trường hợp liệt kê ra là đúng. Trong lô-gích, cả hai mệnh đề đúng vẫn làm cho mệnh đề phfts hợp đúng. Như trong ví dụ ở trên, nếu Ê-mô-ri được cả hai thành tích thì càng tăng khả năng vào trường, đúng không?

Trường U-ni-véc-xi-tô là một trường đại học, tuy không phải là giàu có nhưng cũng có đủ điều kiện cơ sở vật chất để sắm 2 máy chủ. Trường khá yên tâm với hệ thống của mình do chỉ khi không phải trường hợp rằng P : máy chủ thứ nhất hoạt động hoặc Q : máy chủ thứ hai hoạt động thì khi đó hệ thống mới sập hoàn toàn — *không phải rằng P hoặc Q* .

⁶Henry Maurice Sheffer (1882 – 1964)

Tương tự với phép tuyển, phép hội cũng có “anh em” phủ định tương ứng. Mệnh đề **tuyển phủ định** $P \downarrow Q$ sai khi tồn tại một mệnh đề sai trong hai mệnh đề P và Q .

Bảng 1.5: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép phủ định tuyển

P	Q	$P \downarrow Q$
D	D	S
D	S	S
S	D	S
S	S	D

1.1.5 Phép kéo theo và phép hệ quả

Đây lại là một phép nối nữa mà ý nghĩa của nó (có thể) khác với ý nghĩa thông thường. Đây là phép cũng gây nhiều lỗi lập luận lô-gích nhất. Mệnh đề với phép kéo theo $P \implies Q$ chỉ sai khi P không suy ra Q , điều này tương đương, và chỉ tương đương, với có P mà không có Q . Bạn đọc nên để ý kĩ hai dòng cuối cùng của bảng giá trị chân lí 1.6.

Bảng 1.6: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép kéo theo

P	Q	$P \implies Q$
D	D	D
D	S	S
<i>S</i>	<i>D</i>	<i>D</i>
<i>S</i>	<i>S</i>	<i>D</i>

Hãy xem xét một ví dụ minh họa. Không biết rằng bạn đọc đã từng được bố mẹ hứa hẹn thưởng cho một món theo sở thích khi được điểm 10 bao giờ chưa, còn đối với tác giả là có rồi. Nếu chúng ta xét mệnh đề: “Nếu P : con đạt điểm 10, thì Q : bố sẽ tặng con một cuốn sách.”, chúng ta sẽ có 3 trường hợp xảy ra:

- Trường hợp D \implies D: Con được 10 điểm và bố tặng sách. Lời hứa được thực hiện và mệnh đề này là đúng;
- Trường hợp D \implies S: Con được 10 điểm nhưng bố không tặng sách. Lời hứa không được thực hiện và mệnh đề này là sai;
- Trường hợp S \implies D/S: Con không được 10 điểm. Trong trường hợp này, dù người bố có tặng sách hay không thì cũng *không vi phạm lời hứa* ban đầu. Cho nên, mệnh đề là đúng.

Vậy trường hợp duy nhất mà lời hứa bị phá vỡ — *P kéo theo Q* sai — là khi người con không được tặng sách mặc dù được điểm 10.

Phép kết nối xét theo chiều ngược lại của phép kéo theo chính là phép hệ quả. Tương tự như phép kéo theo, mệnh đề hệ quả $P \iff Q$ chỉ sai khi P không được kéo theo từ Q như được thể hiện ở bảng 1.7.

Bảng 1.7: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép hệ quả

P	Q	$P \iff Q$
D	D	D
D	S	D
S	D	S
S	S	D

Không phải lúc nào trong cuộc sống mà cũng có mối quan hệ kéo theo – hệ quả rõ ràng. Ví dụ, nhiều người thường quan niệm rằng P : thành công là do Q : đọc sách tự cải thiện bản thân⁷. Tuy nhiên, Bác Hồ đã tự mình bôn ba năm châu bốn biển và sau đó thành công trong việc tìm xác định được đường lối phù hợp với đất nước Việt Nam lúc bấy giờ và dẫn dắt được đất nước qua quãng thời gian bế tắc. Rõ ràng là do

⁷Là sách self-help đó. Làm ơn đừng đọc.

Bác đọc những tác phẩm mang tính cách mạng cao (mà không phải sách tự cải thiện bản thân), cho nên có thể nói rằng Bác Hồ đã làm cho phản mệnh đề $P \iff Q$ đúng, hay nói cách khác, là ví dụ cho sự **phủ định hệ quả P do Q** .

Đảo của phép kéo theo và phép hệ quả, phủ định kéo theo $P \not\Rightarrow Q$ và **phủ định hệ quả $P \not\Leftarrow Q$** có bảng giá trị chân lí như ở bảng 1.8.

Bảng 1.8: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép phủ định kéo theo và phủ định hệ quả

P	Q	$P \not\Rightarrow Q$	$P \not\Leftarrow Q$
D	D	S	S
D	S	D	S
S	D	S	D
S	S	S	S

1.1.6 Phép đẳng giá

Giống như các trường đại học khác, U-ni-véc-xi-tô cũng xét tốt nghiệp sinh viên theo số tín chỉ tích lũy và các môn điều kiện. Sinh viên P : được công nhận tốt nghiệp khi và chỉ khi Q : Sinh viên tích lũy đủ số tín chỉ và đã qua các môn điều kiện. Nếu như có sinh viên xong các điều kiện môn mà không được xét bằng, hoặc chưa học xong mà đã có bằng, thì **P tương đương Q** sai, và có một sự nhầm lẫn/gian lận nào đó ở đây.

Phép này đại diện cho sự “cùng tiến, cùng lùi”. Mệnh đề có chứa phép đẳng giá $P \iff Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề con cấu thành P và Q cùng đúng hoặc cùng sai.

Bảng 1.9: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép đẳng giá

P	Q	$P \iff Q$
D	D	D
D	S	S
S	D	S
S	S	D

Lấy một ví dụ tương tự, É-mô-ri cần phải lập trình thông báo lỗi của một hệ thống cơ bản với quy định: “ P : Đèn tín hiệu xanh, khi và chỉ khi Q : hệ thống đang chạy”. Hệ thống có lỗi, hay vi phạm quy định, đồng nghĩa với **P không đẳng giá với Q** , đèn xanh mà hệ thống không chạy, hoặc đèn tắt mà hệ thống vẫn chạy. Đây là hệ thống có vai trò vô cùng quan trọng, do nó cho cái nhìn tổng quát về tổng thể hoạt động hệ thống và giúp nhanh chóng phát hiện sự cố.

Phủ định đẳng giá $P \not\iff Q$ thể hiện việc bác bỏ khẳng định rằng hai mệnh đề luôn cùng đúng hoặc cùng sai.

Bảng 1.10: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép đẳng giá

P	Q	$P \not\iff Q$
D	D	S
D	S	D
S	D	D
S	S	S

1.1.7 Phép tuyển chọn

É-mô-ri đi ăn cùng với một nhóm bạn trong một cửa hàng đồ ăn nhanh. Khi chọn một bộ các món ăn và uống, nhóm bạn được phép P : sử dụng nước cam, hoặc Q : sử dụng nước táo, tuy nhiên nhà hàng không cho phép chọn cả hai loại nước. Nhóm bạn của É-mô-ri, khi này, phải thực hiện **tuyển chọn P hoặc Q** .

Khác với phép tuyển (hoặc sao cũng được), phép tuyển chọn $P \oplus Q$ bắt buộc phải chọn duy nhất một trong hai khả năng. Nếu chọn cả hai hoặc bỏ cả hai, mệnh đề $P \oplus Q$ sẽ sai.

Bảng 1.11: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép tuyển chọn

P	Q	$P \oplus Q$
D	D	S
D	S	D
S	D	D
S	S	S

Phép đối của phép tuyển chọn có tên là phép phủ định tuyển chọn. Khi chúng ta cần biểu diễn không phải là chọn một trong hai thì chúng ta sử dụng phép nối lô-gích này. Hai phép tuyển chọn và phủ định tuyển chọn thường được ghép chung vào cùng một nhóm, cho nên chúng cũng có kí hiệu gần giống nhau. Nếu như phép tuyển chọn được kí hiệu bằng một vòng tròn bao một dấu cộng, phép phủ định tuyển chọn được kí hiệu là một vòng tròn nhưng bao dấu nhân chấm: $P \odot Q$.

Bảng 1.12: Bảng giá trị chân lí của mệnh đề với phép phủ định tuyển chọn

P	Q	$P \odot Q$
D	D	D
D	S	S
S	D	S
S	S	D

1.1.8 Thứ tự giải giá trị chân lí của mệnh đề của các phép nối

Giống như thứ tự các phép tính số học để tính giá trị các biểu thức số học⁸, để xác định giá trị chân lí của mệnh đề có nhiều phép nối, các phép nối mệnh đề cũng có sắp xếp thứ tự từ mức ưu tiên cao đến ưu tiên thấp như sau:

0. Thực hiện các phép bên trong cặp dấu ngoặc — () — trước, ngoài ngoặc sau
1. Phủ định — \neg (mức ưu tiên cao nhất);
2. Nhóm hội — Phép hội — \wedge — và phép phủ định hội — \uparrow ;
3. Nhóm tuyển — Phép tuyển — \vee — và phép phủ định tuyển — \downarrow ;
4. Nhóm tuyển chọn — Phép tuyển chọn — \oplus — và phép phủ định tuyển chọn — \odot ;
5. Nhóm suy luận — Phép kéo theo — \implies , phép hệ quả — \iff , phép phủ định kéo theo — $\not\implies$, phép phủ định hệ quả — $\not\iff$, phép đẳng giá — \iff — và phép phủ định đẳng giá — $\not\iff$ (mức ưu tiên thấp nhất).

Để xác định giá trị chân lí của một mệnh đề phức hợp gồm nhiều phép nối, thực hiện các phép từ mức ưu tiên cao nhất đến những phép có mức yêu tiên thấp hơn. Nếu các phép có cùng một mức độ ưu tiên thì thực hiện theo quy tắc **kết hợp trái** — thực hiện từ trái qua phải, ngoại trừ phép đối tuân theo **kết hợp phải** hay thực hiện từ phải qua trái⁹. Ví dụ:

- $P \vee Q \wedge R$ được giải giá trị chân lí như $P \vee (Q \wedge R)$,

⁸Như các bạn sẽ thấy, thứ tự của phép tính chỉ mang tính chất gợi ý. Nó có tác dụng nhất khi nó được giới thiệu cho những người mới học toán làm quen với thứ tự tính toán thông dụng. Ngược lại, nó sẽ ít có tác dụng khi biểu thức bị viết mập mờ hay trái với trực giác của con người. Ví dụ:

- $8 \div 2(1+1)$ (Bằng 2 hay bằng 8?),
- $400 + 50 \div 9$ (Rất nhiều người sẽ bảo đáp số là 50 chứ không phải $405\frac{5}{9}$, nhất là khi biểu thức được đọc ra.),
- $9x^2 \div 3x$ (Sẽ không có ai bảo biểu thức này bằng $3x^3$, ngoại trừ... có tính.).

⁹Không phải mọi tài liệu đều chấp nhận thứ tự tính toán này. Cụ thể, các tài liệu đó có thể có

- nhóm suy luận hai chiều (\iff và $\not\iff$) có mức ưu tiên thấp hơn nhóm suy luận một chiều,
- các phép kéo theo và phép tương đương có tính chất kết hợp phải.

Cho nên, khi viết các mệnh đề phức hợp dưới dạng biểu thức, không nên coi thứ tự được đưa ra ở đây như một chân lí và bỏ qua những dấu ngoặc cần thiết, nhưng cũng không nên lạm dụng dấu ngoặc tránh gây khó đọc.

- $\neg\neg P$ được giải giá trị chân lí như $\neg(\neg P)$ (giống như $- - 3 = -(-3)$),
- $P \odot Q \oplus R$ được giải giá trị chân lí như $(P \odot Q) \oplus R$,
- $P \not\Rightarrow Q \uparrow R \not\Leftrightarrow \neg S$ được giải giá trị chân lí như $(P \not\Rightarrow (Q \uparrow R)) \not\Leftrightarrow (\neg S)$.

Ngoài ra, cần phải để ý rằng, có nhiều tài liệu hay lạm dụng kí hiệu (hoặc ngôn ngữ) khi viết $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ và $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$ với ngầm hiểu rằng hai mệnh đề này lần lượt là $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ và $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)$ chứ không phải là $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ và $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$. Để tiện cho ban đọc theo dõi, tác giả sẽ tuân theo quy chuẩn đã được đưa ra.

Bài 1: Xây dựng bảng giá trị chân lí của các mệnh đề sau:

1. $\neg P \Rightarrow Q$;
2. $(P \Leftrightarrow Q) \vee \neg Q$;
3. $P \wedge (Q \Rightarrow R)$;
4. $P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$;
5. $Q \Rightarrow R \wedge R \vee \neg P$;
6. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q \Rightarrow P)$;
7. $P \uparrow (Q \downarrow \neg P)$;
8. $Q \Leftarrow R \odot \neg P \wedge Q$;
9. $P \not\Rightarrow Q \not\Rightarrow R \not\Leftrightarrow Q \not\Rightarrow R$;
10. $P \oplus Q \vee R \not\Leftrightarrow (Q \downarrow R) \wedge (P \downarrow \neg R)$.

Lời giải bài 1:

1. Để ý đến thứ tự các phép nối, dấu \neg sẽ được thực hiện trước \Rightarrow . Thực hiện xây dựng như ở bảng sau.

Bảng 1.13: Bảng giá trị chân lí của $\neg P \Rightarrow Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \Rightarrow Q$
D	D	S	D
D	S	S	D
S	D	S	D
S	S	D	S

Có thể thực hiện viết bảng giá trị chân lí dưới dạng rút gọn như ở bảng 1.14. Sau khi thực hiện xong một phép nối, có thể viết ở ngay dưới mệnh đề cần tìm giá trị chân lí thay vì tách thành cột riêng để tiết kiệm giấy nếu như mệnh đề dài.

2.

Bảng 1.14: Bảng giá trị chân lí (rút gọn) của $\neg P \Rightarrow Q$

P	Q	$\neg P$	\Rightarrow	Q	$\neg P \Rightarrow Q$
D	D	S	D	D	D
D	S	S	D	D	D
S	D	D	S	D	D
S	S	D	S	S	S

Bảng 1.15: Bảng giá trị chân lí của $(P \Leftrightarrow Q) \vee \neg Q$

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$	\vee	$\neg Q$	$(P \Leftrightarrow Q) \vee \neg Q$
D	D	D	D	D	D
D	S	D	S	D	D
S	D	S	D	S	S
S	S	S	S	D	D

3. Khi một mệnh đề phức hợp cho cùng giá trị chân lí ở nhiều trường hợp khác nhau, và trong các trường hợp đó một số mệnh đề thành phần có cùng giá trị chân lí, chúng ta có thể rút gọn bảng bằng cách:

- Giữ nguyên những mệnh đề thành phần có giá trị giống nhau;
- Thay những mệnh đề thành phần thay đổi bằng ký hiệu X .

Ví dụ như ở bảng 1.16, nhận thấy rằng khi P sai thì mệnh đề phức hợp luôn sai, nên các cột Q và R và những cột có phần mệnh đề liên quan đến hai mệnh đề này ở hàng thứ năm được thay bởi những chữ X .

Bảng 1.16: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \wedge (Q \Rightarrow R)$
Đ	Đ	Đ	Đ D Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ S Đ	S
Đ	S	Đ	Đ D S	Đ
Đ	S	S	Đ D S	Đ
S	X	X	S S X	S

4.

Bảng 1.17: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$

P	Q	R	$P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$	$P \wedge Q \vee Q \wedge \neg R$
Đ	Đ	Đ	Đ D Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ D Đ	Đ
S	Đ	Đ	S S Đ	S
S	Đ	S	S D Đ	Đ
X	S	X	S S S	S

5.

Bảng 1.18: Bảng giá trị chân lí của $Q \Rightarrow R \wedge R \vee \neg P$

P	Q	R	$Q \Rightarrow R \wedge R \vee \neg P$	$Q \Rightarrow R \wedge R \vee \neg P$
Đ	Đ	Đ	Đ D Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ S S	S
S	Đ	Đ	Đ D Đ	Đ
S	Đ	S	Đ D S	Đ
X	S	X	S D X	Đ

6. Do giới hạn của khổ giấy, bảng giá trị chân lí 1.19 sẽ được tách làm hai phần.

Bảng 1.19: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q \Rightarrow P)$

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q \Rightarrow P)$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q \Rightarrow P)$
Đ	X	X	Đ X X	Đ
S	Đ	X	Đ D Đ	S
S	S	Đ	Đ D Đ	Đ
S	S	S	Đ S S	S

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (R \Rightarrow Q \Rightarrow P)$
Đ	X	X	Đ
S	Đ	X	S
S	S	Đ	Đ
S	S	S	S

7.

Bảng 1.20: Bảng giá trị chân lí của $P \uparrow (Q \downarrow \neg P)$

P	Q	$P \uparrow (Q \downarrow \neg P)$	$P \uparrow (Q \downarrow \neg P)$
Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	D	S
S	X	S	D

8.

Bảng 1.21: Bảng giá trị chân lí của $Q \Leftarrow R \odot \neg P \wedge Q$

P	Q	R	$Q \Leftarrow R \odot \neg P \wedge Q$	$Q \Leftarrow R \odot \neg P \wedge Q$
X	S	Đ	S	Đ
X	S	S	S	S
X	Đ	X	D	Đ

9.

Bảng 1.22: Bảng giá trị chân lí của $P \not\Rightarrow Q \not\Rightarrow R \not\Rightarrow Q \not\Rightarrow R$

P	Q	R	$P \not\Rightarrow Q \not\Rightarrow R \not\Rightarrow Q \not\Rightarrow R$	$P \not\Rightarrow Q \not\Rightarrow R \not\Rightarrow Q \not\Rightarrow R$
Đ	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	S	S	S
X	S	S	X	S
X	X	Đ	X	S

10.

Bảng 1.23: Bảng giá trị chân lí của $P \oplus Q \vee R \Leftrightarrow (Q \downarrow R) \wedge (P \downarrow \neg R)$

P	Q	R	$P \oplus Q \vee R \Leftrightarrow (Q \downarrow R) \wedge (P \downarrow \neg R)$	$P \oplus Q \vee R \Leftrightarrow (Q \downarrow R) \wedge (P \downarrow \neg R)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	D	S
Đ	S	Đ	D	S
Đ	S	S	D	S
S	Đ	Đ	S	D
S	Đ	S	D	S
S	Đ	D	S	D
S	S	Đ	S	D
S	S	S	S	S

P	Q	R	$P \oplus Q \vee R \Leftrightarrow (Q \downarrow R) \wedge (P \downarrow \neg R)$
Đ	Đ	Đ	S
Đ	Đ	S	S
Đ	S	Đ	S
Đ	S	S	D
S	Đ	Đ	D
S	Đ	S	D
S	Đ	D	S
S	S	Đ	D
S	S	S	S

Bài 2: Gọi **V** là một mệnh đề đúng và **M** là một mệnh đề sai nào đó. Sử dụng bảng giá trị chân lí, chúng

minh các mệnh đề sau luôn đúng¹⁰ với mọi giá trị chân lí của P , Q và R .

- $P \vee \mathbf{V}$ (tính chất¹¹ thống trị với phép tuyển);
- $\overline{P \wedge M}$ (tính chất thống trị với phép hội);
- $P \wedge \mathbf{V} \iff P$ (tính chất đồng nhất với phép hội);
- $P \vee \mathbf{M} \iff P$ (tính chất đồng nhất với phép tuyển);
- $P \vee \neg P$ (tính chất loại trừ trung gian¹²);
- $\overline{P \wedge \neg P}$ (tính chất không mâu thuẫn¹³);
- $\neg \overline{P} \iff P$ (tính chất phủ định kép);
- $P \wedge P \iff P$ (tính chất lũy đẳng với phép hội);
- $P \vee P \iff P$ (tính chất lũy đẳng với phép tuyển);
- $P \wedge Q \iff Q \wedge P$ (tính giao hoán với phép hội);
- $P \vee Q \iff Q \vee P$ (tính giao hoán với phép tuyển);
- $\overline{P \vee Q} \iff \neg P \wedge \neg Q$ (định luật Đờ Moóc-gơn¹⁴, phần 1);
- $\overline{P \wedge Q} \iff \neg P \vee \neg Q$ (định luật Đờ Moóc-gơn, phần 2);
- $P \implies P \vee Q$ (tính chất cộng);
- $P \wedge Q \implies P$ (tính chất rút gọn);
- $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$ (định nghĩa phép kéo theo);
- $(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$ (tính chất phản đảo);
- $(P \implies Q) \wedge P \implies Q$ (quy tắc khẳng định¹⁵);
- $(P \implies Q) \wedge \neg Q \implies \neg P$ (quy tắc phủ định¹⁶);
- $(P \vee Q) \wedge \neg P \implies Q$ (tam đoạn luận tuyển);
- $P \iff Q \iff P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ (định nghĩa phép tương đương, phần 1);
- $(P \iff Q) \iff (P \implies Q) \wedge (P \iff Q)$ (định nghĩa phép tương đương, phần 2);
- $(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$ (tính chất giao hoán với phép tương đương);
- $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$ (tính chất kết hợp với phép hội);
- $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$ (tính chất kết hợp với phép tuyển);
- $((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$ (tính chất kết hợp với phép tương đương);
- $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R)$ (tính chất phân phối, phần 1);
- $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \wedge (Q \vee R)$ (tính chất phân phối, phần 2);
- $(P \implies Q) \wedge (P \implies R) \iff (P \implies (Q \wedge R))$ (tính chất phân phối, phần 3);
- $(P \implies Q) \vee (P \implies R) \iff (P \implies (Q \vee R))$ (tính chất phân phối, phần 4);
- $(P \implies Q) \wedge (Q \implies R) \implies (P \implies R)$ (tính chất bắc cầu).

¹⁰Mệnh đề luôn đúng còn được gọi là **mệnh đề hằng đúng**.

¹¹Các tính chất còn được gọi là **luật**.

¹²Tính chất này chỉ rằng một mệnh đề hoặc đúng, hoặc phủ định của nó đúng; không tồn tại khả năng trung gian.

¹³Tính chất này khẳng định Không thể có một mệnh đề vừa đúng vừa sai cùng lúc và theo cùng một nghĩa.

¹⁴Augustus De Morgan (1806 – 1871)

¹⁵Tên La-tinh: modus ponens.

¹⁶Tên La-tinh: modus tollens.

Lời giải bài 2:

Bảng 1.24: Bảng giá trị chân lí của $P \vee V$ và $\overline{P \wedge M}$

P	$P \vee V$	$P \vee V$	$\neg (P \wedge M)$	$\overline{P \wedge M}$
X	X D Đ	Đ	D X S S	Đ

Bảng 1.25: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge V \Leftrightarrow P$ và $P \vee M \Leftrightarrow P$

P	$P \wedge V \Leftrightarrow P$	$P \wedge V \Leftrightarrow P$	$P \vee M \Leftrightarrow P$	$P \vee M \Leftrightarrow P$
Đ	Đ Đ Đ Đ D Đ	Đ	Đ Đ S D Đ	Đ
S	S S Đ D S	Đ	S S S D S	Đ

Bảng 1.26: Bảng giá trị chân lí của $P \vee \neg P$ và $\overline{P \wedge \neg P}$

P	$P \vee \neg P$	$P \vee \neg P$	$\neg (P \wedge \neg P)$	$\overline{P \wedge \neg P}$
Đ	Đ D S Đ	Đ	D Đ S S Đ	Đ
S	S D Đ S	Đ	D S S Đ S	Đ

Bảng 1.27: Bảng giá trị chân lí của $\overline{\neg P} \Leftrightarrow P$

P	$\neg (\neg P) \Leftrightarrow P$	$\neg (\neg P) \Leftrightarrow P$	$\overline{\neg P} \Leftrightarrow P$
Đ	Đ S Đ D Đ	Đ	Đ
S	S Đ S D S	Đ	Đ

Bảng 1.28: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge P \Leftrightarrow P$ và $P \vee P \Leftrightarrow P$

P	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	$P \vee P \Leftrightarrow P$	$P \vee P \Leftrightarrow P$
Đ	Đ Đ Đ Đ D Đ	Đ	Đ Đ Đ D Đ	Đ
S	S S S S D S	Đ	S S S D S	Đ

Bảng 1.29: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

P	Q	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
Đ	Đ	Đ Đ Đ Đ D Đ	Đ
Đ	S	Đ S S S D S	Đ
S	Đ	Đ S S Đ D Đ	Đ
S	S	Đ S S S D S	Đ

Bảng 1.30: Bảng giá trị chân lí của $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

P	Q	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
Đ	Đ	Đ Đ Đ Đ D Đ	Đ
Đ	S	Đ Đ S S D S	Đ
S	Đ	Đ S Đ Đ D Đ	Đ
S	S	Đ S S S D S	Đ

Bảng 1.31: Bảng giá trị chân lí của $\overline{P \vee Q} \iff \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$\neg (P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$	$\overline{P \vee Q} \iff \neg P \wedge \neg Q$
D	D	S D D D D	D
D	S	S D D D S	D
S	D	S S D D D	D
S	S	D S S S D	D

Bảng 1.32: Bảng giá trị chân lí của $\overline{P \wedge Q} \iff \neg P \vee \neg Q$

P	Q	$\neg (P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$	$\overline{P \wedge Q} \iff \neg P \vee \neg Q$
D	D	S D D D D	D
D	S	D D S S S	D
S	D	D S S D D	D
S	S	D S S S D	D

Bảng 1.33: Bảng giá trị chân lí của $P \implies P \vee Q$

P	Q	$P \implies P \vee Q$	$P \implies P \vee Q$
D	X	D D D X	D
S	X	S D S X X	D

Bảng 1.34: Bảng giá trị chân lí của $P \wedge Q \implies P$

P	Q	$P \wedge Q \implies P$	$P \wedge Q \implies P$
D	X	D X X D D	D
S	X	S S X D S	D

Bảng 1.35: Bảng giá trị chân lí của $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$

P	Q	$P \implies Q \iff \neg P \vee Q$	$P \implies Q \iff \neg P \vee Q$
D	D	D D D D S D D	D
D	S	D S S S S D S S	D
S	X	S D X D S D X X	D

Bảng 1.36: Bảng giá trị chân lí của $(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$

P	Q	$(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$	$(P \implies Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$
D	D	D D D D S D D S D	D
D	S	D S S S S D S D S	D
S	X	S D X D S D X X X	D

Bảng 1.37: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	\wedge	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$
Đ	S	Đ	S	S	Đ
S	S	S	Đ	S	S
X	Đ	X	Đ	X	X

Bảng 1.38: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	\wedge	$\neg Q$	\Rightarrow	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ
S	X	S	Đ	X	X	X	Đ

Bảng 1.39: Bảng giá trị chân lí của $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$

P	Q	$(P \vee Q)$	\wedge	$\neg P$	\Rightarrow	Q	$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$
Đ	S	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ
S	S	S	S	S	Đ	S	Đ
X	Đ	X	Đ	Đ	X	X	Đ

Bảng 1.40: Bảng giá trị chân lí của $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	\Leftrightarrow	$P \wedge Q$	\vee	$\neg P$	\wedge	$\neg Q$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ
S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	S
S	S	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ

P	Q	$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$
Đ	Đ	
Đ	S	
S	Đ	
S	S	

Bảng 1.41: Bảng giá trị chân lí của $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q)$	\Leftrightarrow	$(P \Rightarrow Q)$	\wedge	$(P \Leftarrow Q)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S	Đ	S
S	Đ	S	S	Đ	Đ	S
S	S	S	Đ	S	Đ	S

P	Q	$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q)$
Đ	Đ	
Đ	S	
S	Đ	
S	S	

Bảng 1.42: Bảng giá trị chân lí của $(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$

P	Q	$(P \iff Q) \iff (Q \iff P)$
D	D	D
D	S	D
S	D	D
S	S	D

Bảng 1.43: Bảng giá trị chân lí của $(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)$
D	D	D	D
S	X	X	D
X	S	X	D
X	X	S	D

Bảng 1.44: Bảng giá trị chân lí của $(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)$
S	S	S	D
D	X	X	D
X	D	X	D
X	X	D	D

Bảng 1.45: Bảng giá trị chân lí của $((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$

P	Q	R	$((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$
D	D	D	D
D	D	S	D
D	S	D	D
D	S	S	D
S	D	D	D
S	D	S	D
S	S	D	D
S	S	S	D

P	Q	R	$((P \iff Q) \iff R) \iff (P \iff (Q \iff R))$
D	D	D	
D	D	S	
D	S	D	
D	S	S	
S	D	D	
S	D	S	
S	S	D	
S	S	S	

Bảng 1.46: Bảng giá trị chân lí của $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	\wedge	$(P \vee R)$	\iff	$P \vee (Q \wedge R)$
D	X	X	D	D	X	D	D X X X
S	S	X	S	S	S	X	S S S S X
S	D	D	S	D	D	S	D D D D D
S	D	S	S	D	S	S	D S S D S S

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \iff P \vee (Q \wedge R)$
D	X	X	
S	S	X	
S	D	D	
S	D	S	

Bảng 1.47: Bảng giá trị chân lí của $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \wedge (Q \vee R)$

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	\vee	$(P \wedge R)$	\iff	$P \wedge (Q \vee R)$
S	X	X	S	S	X	D	S S X X X
D	D	X	D	D	D	D	D D D D X
D	S	D	D	S	D	D	D D S D D
D	S	S	D	S	S	D	D S S S S S

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \wedge (Q \vee R)$
S	X	X	
D	D	X	
D	S	D	
D	S	S	

Bảng 1.48: Bảng giá trị chân lí của $(P \implies Q) \wedge (P \implies R) \iff (P \implies Q \wedge R)$

P	Q	R	$(P \implies Q)$	\wedge	$(P \implies R)$	\iff	$(P \implies Q \wedge R)$
S	X	X	S	D	X	D	S D X X X
D	S	X	D	S	S	D	S S S X
D	D	D	D	D	D	D	D D D D D
D	D	S	D	D	S	D	D S D S S

P	Q	R	$(P \implies Q) \wedge (P \implies R) \iff (P \implies Q \wedge R)$
D	X	X	
D	S	X	
D	D	D	
D	D	S	

Bảng 1.49: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \vee R)$

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q)$	\vee	$(P \Rightarrow R)$	\Leftrightarrow	$(P \Rightarrow Q \vee R)$
S	X	X	S	D	X	D	S
D	D	X	D	D	D	X	D
D	S	D	D	S	D	D	D
D	S	S	D	S	S	D	S

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \vee R)$
S	X	X	
D	D	X	
D	S	D	
D	S	S	

Bảng 1.50: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q)$	\wedge	$(Q \Rightarrow R)$	\Rightarrow	$(P \Rightarrow R)$
X	X	D	X	X	D	X	D
S	X	S	S	D	X	X	S
D	D	S	D	D	S	D	D
D	S	S	D	S	S	D	S

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
X	X	D	
S	X	S	
D	D	S	
D	S	S	

1.2 Phương pháp lập luận lô-gích

1.2.1 Điều kiện cho lập luận lô-gích

Quá trình lập luận lô-gích được kiểm soát bởi những bộ quy luật hết sức đơn giản, đơn giản tới mức mà cả tác giả và bạn đọc đều có thể và đã từng làm theo. Có rất nhiều yêu cầu về mặt kĩ thuật cần phải quan tâm khi xây dựng một bộ quy luật lập luận mà khuôn khổ cuốn sách này không có khả năng đề cập. Tác giả sẽ chỉ đưa ra các điều kiện cơ bản nhưng quan trọng nhất khi lập luận lô-gích diễn dịch:

- Điều kiện về **tính ổn định**: Bộ quy luật lập luận không thể vừa chứng minh một mệnh đề và đồng thời là phủ định của nó. Hiểu theo cách khác, bộ quy luật không thể chứng minh đồng thời P và $\neg P$ cùng đúng;
- Điều kiện về **tính hoàn thiện**: Bộ quy luật lập luận cần phải cho phép chứng minh *tất cả* các kết luận có thể từ một nhóm các giả thiết nhất định.

1.2.2 Định nghĩa chứng minh

Từ các điều kiện, chúng ta lại đặt câu hỏi, thế nào là chứng minh? Để tránh định nghĩa lặp “chứng minh là một quá trình lập luận”, tác giả sẽ đưa ra một định nghĩa đơn giản như sau: Nếu như cho biết W , mệnh đề X chứng minh mệnh đề Y khi và chỉ khi $X \Rightarrow Y$ (dưới điều kiện W)¹⁷.

¹⁷Từ giờ trở đi, mỗi mệnh đề được đưa ra sẽ được mặc định là đúng.

Nếu có nhiều mệnh đề cho giả thiết X_1, X_2, \dots, X_n , thì khi này mệnh đề giả thiết tổng là hợp của tất cả các giả thiết con

$$X = X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n = \bigwedge_{i=1}^n X_i.$$

Một cách tương tự, chúng ta cũng có thể định nghĩa điều kiện tổng W và kết luận tổng Y .

$$W = W_1 \wedge W_2 \wedge \cdots \wedge W_n = \bigwedge_{i=1}^n W_i;$$

$$Y = Y_1 \wedge Y_2 \wedge \cdots \wedge Y_n = \bigwedge_{i=1}^n Y_i.$$

Do chúng ta chưa xây dựng hệ thống số cho nên việc kí hiệu bằng dấu \cdots hay dấu \wedge lớn sẽ là hơi lạm dụng. Do đó, với trường hợp xác định được số lượng các mệnh đề, nên viết đầy đủ và tường minh toàn bộ biểu thức thay vì viết tắt.

Ngoài ra, bạn đọc cũng có thể đã để ý rằng tác giả tách một phần gọi là “điều kiện” mặc dù hoàn toàn có thể đưa điều kiện vào trong phần giả thiết. Sở dĩ tác giả làm như vậy là do thực tế, khi chứng minh phần lớn các bài toán, chúng ta cũng sẽ ngầm hiểu một số điều kiện nhất định — định nghĩa, tính chất, hay kết quả đã có. Ví dụ, kể đến về một định lí quen thuộc:

“Nếu x là một số thực thì $x^2 \geq 0$.”

Một học sinh khá của cấp trung học cơ sở hoàn toàn có thể hiểu và lí giải được điều này sử dụng các tính chất của số thực được cung cấp. Học sinh muốn chứng minh định lí đó sẽ không cần phải chép lại cả quyển sách giáo khoa và đưa toàn bộ lí thuyết vào phần giả thiết, mà sẽ chỉ tập trung vào ý tưởng cốt lõi nhất và sự hiểu biết rằng người đọc (chủ yếu là giáo viên) sẽ biết về các tính chất của số thực được sử dụng trong chứng minh.

Xét một ví dụ cơ bản cho việc chứng minh, giả sử có giả thiết như sau:

1. “Nếu trời mưa thì sân vận động sẽ ướt.”;
2. “Trời đang mưa.”

và chứng minh kết luận “Sân vận động thì ướt”. Để thực hiện chứng minh, chuyển sang dưới dạng kí hiệu

- P : “Trời mưa.”;
- Q : “Sân vận động ướt.”.

Qua đó, chúng ta có thể viết lại lập luận này dưới dạng như sau:

Giả thiết	$P \Rightarrow Q$	P	Q
	P		
Kết luận			

Mệnh đề mà chúng ta cần khẳng định đúng để hoàn thành chứng minh là $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$. Thực vậy, có bảng 1.51.

Bảng 1.51: Bảng giá trị chân lí của $(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	\wedge	P	\Rightarrow	Q
D	D	D	D	D	D	D
D	S	D	S	S	D	D
S	D	S	D	D	S	D
S	S	S	D	S	S	D

Vậy, từ giả thiết, chúng ta có kết được kết luận. Điều phải chứng minh.

Từ định nghĩa chứng minh, chúng ta cũng có định nghĩa của **không chứng minh**: X không chứng minh Y nếu tồn tại giá trị chân lí của X và Y để $X \Rightarrow Y$ sai.

Ví dụ, một phép ngụy biện thường xuyên được sử dụng là ngụy biện khẳng định hệ quả:

Giả thiết	$X \Rightarrow Y$
	Y
Kết luận	X

Sử dụng bảng giá trị chân lí, chúng ta có ngay điều không chứng minh.

Bảng 1.52: Bảng giá trị chân lí của $(X \Rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow X$

X	Y	$(X \Rightarrow Y)$	\wedge	$Y \Rightarrow X$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S
S	Đ	S	Đ	Đ
S	S	S	Đ	S
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S
S	S	S	S	Đ

Bài 3: Cho X và Y là hai mệnh đề thỏa mãn $X \Leftrightarrow Y$. Chứng minh rằng X chứng minh Y và Y chứng minh X .

Lời giải bài 3:

Viết lại đề bài dưới dạng giả thiết – kết luận:

Giả thiết	$X \Leftrightarrow Y$
Kết luận	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$

Sử dụng bảng giá trị chân lí:

Bảng 1.53: Bảng giá trị chân lí của $(X \Leftrightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$

X	Y	$(X \Leftrightarrow Y)$	\Rightarrow	$(X \Rightarrow Y)$	\wedge	$(Y \Rightarrow X)$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ
S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S
S	S	S	Đ	Đ	S	Đ
X	Y	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$				
Đ	Đ					
Đ	S					
S	Đ	Đ				
S	S					

chứng ta có điều phải chứng minh.

1.2.3 Quy tắc thay thế trong chứng minh lô-gích

Nếu như mỗi lần chứng minh, chúng ta phải lôi bảng giá trị chân lí thì sẽ gặp vấn đề khi một mệnh đề lớn có quá nhiều mệnh đề con cấu thành. Trong tương lai, chúng ta sẽ xây dựng các kiến trúc toán học cơ bản. Để làm được điều đó, chúng ta sẽ cần rất nhiều các định nghĩa và tiên đề. Chúng ta cần một hệ thống quy tắc để lập luận hoặc chứng minh.

- **Quy tắc thứ nhất:** Cho $A \Rightarrow B$. Khi thay đồng thời các mệnh đề A trong 蘇 bởi B để có được mệnh đề 客 thì có được $\text{蘇} \Rightarrow \text{客}$ hay 蘇 chứng minh 客 .
- **Quy tắc thứ hai:** Cho $A \Leftrightarrow B$. Khi thay đồng thời các mệnh đề A trong 蘇 bởi B để có được mệnh đề 客 thì có được $\text{蘇} \Leftrightarrow \text{客}$.
- **Quy tắc thứ ba:** Cho 尊 có mệnh đề A làm mệnh đề con. Nếu 尊 đúng không phụ thuộc vào giá trị chân lí của A thì mệnh đề 尊 vẫn đúng khi thay đồng thời tất cả các mệnh đề A trong 尊 bằng mệnh đề B bất kì.

Để thuận tiện cho việc lập luận, sẽ sử dụng các kết quả đã có của bài 2 ở trang 15.

Bài 4: Chứng minh rằng $\overline{\neg A \vee B} \vee A \wedge \neg C \iff A \wedge \overline{B \wedge C}$ với A, B và C là các mệnh đề bất kì.

Lời giải bài 4: Có $\overline{P \vee Q} \iff \neg P \wedge \neg Q$ đúng với mọi mệnh đề P và Q theo định luật Đò Moóc-gơn. Thay mệnh đề P và Q lần lượt bởi A và B , chúng ta có

$$\overline{\neg A \vee B} \iff \neg(\neg A) \wedge \neg B.$$

Lại có $\overline{\neg P} \iff P$ với mọi P theo tính chất phủ định kép cho nên $\neg(\neg A) \iff A$. Do đó

$$\overline{\neg A \vee B} \iff A \wedge \neg B.$$

Như một hệ quả,

$$\overline{\neg A \vee B} \vee A \wedge \neg C \iff A \wedge \neg B \vee A \wedge \neg C.$$

Theo tính chất phân phôi, $P \wedge Q \vee P \wedge R \iff P \wedge (Q \vee R)$ với mọi P, Q, R ,

$$A \wedge \neg B \vee A \wedge \neg C \iff A \wedge (\neg B \vee \neg C).$$

Suy ra, $\overline{\neg A \vee B} \vee A \wedge \neg C \iff A \wedge (\neg B \vee \neg C)$.

Định luật Đò Moóc-gơn vẫn còn một hệ thức nữa là $\neg P \vee \neg Q \iff \overline{P \wedge Q}$, dẫn đến $(\neg B \vee \neg C) \iff \overline{B \wedge C}$ nếu đổi P bởi B và Q bởi C . Do đó

$$A \wedge (\neg B \vee \neg C) \iff A \wedge \overline{B \wedge C}.$$

Vậy $\overline{\neg A \vee B} \vee A \wedge \neg C \iff A \wedge \overline{B \wedge C}$. Chúng ta có điều cần phải chứng minh.

Bài 5: Biết rằng, lô-gích khó hoặc nhiều người thích học nó, và nếu làm khoa học là dễ thì lô-gích là không khó. Sử dụng lập luận diễn dịch, chứng minh rằng nếu không phải rằng nhiều người thích học lô-gích, làm khoa học là không dễ dàng.

Lời giải bài 5: Đặt biến cho các mệnh đề:

- L : “Lô-gích khó.”;
- A : “Nhiều người thích học lô-gích.”;
- S : “Làm khoa học là dễ dàng.”.

Chúng ta có bộ giả thiết – kết luận như sau:

Giả thiết	$L \vee A$ (“Lô-gích khó hoặc nhiều người thích học nó.”)
	$S \implies \neg L$ (“Nếu làm khoa học là dễ thì lô-gích là không khó.”)
Kết luận	$\neg A \implies \neg S$ (“Nếu không phải rằng nhiều người thích học lô-gích, làm khoa học là không dễ dàng.”)

Viết lại dưới dạng kí hiệu, chúng ta cần chứng minh rằng

$$(L \vee A) \wedge (S \implies \neg L) \implies (\neg A \implies \neg S).$$

Trước hết, để ý rằng $A \implies \neg \neg A$ (theo tính chất phủ định kép) nên

$$L \vee A \iff L \vee \neg(\neg A).$$

Do tính chất giao hoán của phép tuyễn,

$$L \vee \neg(\neg A) \iff \neg(\neg A) \vee L.$$

Theo định nghĩa phép kéo theo, $\neg P \vee Q \iff (P \implies Q)$ với mọi P và Q nên

$$\neg(\neg A) \vee L \iff (\neg A \implies L).$$

Kết hợp lại ba mệnh đề tương đương này, chúng ta có

$$L \vee A \iff (\neg A \implies L).$$

Theo tính chất phản đảo,

$$(S \implies \neg L) \iff (\neg(\neg L) \implies \neg S).$$

Kết hợp với tính chất phủ định kép,

$$(S \Rightarrow \neg L) \Leftrightarrow (L \Rightarrow \neg S).$$

Qua đó, xét về giả thiết của mệnh đề cần chứng minh:

$$(L \vee A) \wedge (S \Rightarrow \neg L) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow L) \wedge (L \Rightarrow \neg S).$$

Ngoài ra, theo tính chất bắc cầu,

$$(\neg A \Rightarrow L) \wedge (L \Rightarrow \neg S) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg S).$$

Do vậy,

$$(L \vee A) \wedge (S \Rightarrow \neg L) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg S).$$

Điều phải chứng minh.

Bài 6: Xác định xem các kết luận sau có thể được chứng minh từ các giả thiết được cho sử dụng lập luận diễn dịch hay không.

	Giả thiết	Nếu máy chủ hoạt động bình thường và đường truyền mạng ổn định thì người dùng có thể truy cập dữ liệu; Người dùng đang không truy cập được dữ liệu.
1.	Kết luận	Máy chủ đang gặp sự cố.
2.	Giả thiết	Âm nhạc đang làm cho Qua-di thư giãn, hoặc là tiếng ồn làm cho Qua-di đau đầu; Nếu Qua-di đeo tai nghe chống ồn, thì tiếng ồn không làm cho Qua-di đau đầu; Thực tế là Qua-di đang đeo tai nghe chống ồn.
	Kết luận	Âm nhạc đang làm cho Qua-di thư giãn.
3.	Giả thiết	Nếu bây giờ là tháng 12, thì tháng liền trước là tháng 11; Nếu tháng trước là tháng 11, thì 6 tháng trước (bây giờ) là tháng 6; Nếu tháng sau là tháng 1, thì bây giờ là tháng 12; Tháng liền trước là tháng 11.
	Kết luận	Bây giờ đang là tháng 12.
4.	Giả thiết	Chỉ khi hoàng tử tiêu diệt được ma vương và cứu được công chúa thì vương quốc mới thái bình; Nếu vương quốc thái bình hoặc nhà vua băng hà, bầu trời sẽ không có màu tím; Nếu hoàng tử không cứu được công chúa, bầu trời sẽ có màu tím; Nhà vua chưa băng hà và bầu trời không có màu tím.
	Kết luận	Hoàng tử đã cứu được công chúa.
5.	Giả thiết	Nếu Tu-ba-na thức khuya học bài và không uống cà phê, Tu-ba-na sẽ mệt mỏi vào sáng ngày hôm sau; Nếu Tu-ba-na mệt mỏi vào sáng ngày hôm sau, bạn ấy sẽ không thể thi tốt hoặc sẽ ngủ gật trong giờ thi; Ở giờ thi sáng nay, Tu-ba-na đã không quay cờ nhưng bạn ấy vẫn không thi tốt.
	Kết luận	Tu-ba-na đã thức khuya học bài vào ngày trước hôm thi.

Lời giải bài 6:

- Đặt biến cho các mệnh đề:

- N : “Máy chủ hoạt động bình thường.”;
- C : “Đường truyền mạng ổn định.”;
- D : “Người dùng có thể truy cập được dữ liệu.”.

“Máy chủ gặp sự cố.” tương đương với “Máy chủ đang không hoạt động bình thường.”, hay $\neg N$.

Viết lại hệ thống giả thiết – kết luận dưới dạng lô-gích:

$$\frac{\begin{array}{c|cc} \text{Giả thiết} & N \wedge C \implies D \\ \hline & \neg D \end{array}}{\begin{array}{c|c} \text{Kết luận} & \neg N \end{array}}.$$

Lập luận này là không sắc đáng, do tồn tại bộ giá trị chân lí cho C, D , và N khiến cho lập luận sai. Cụ thể, sau khi giải giá trị chân lí của mệnh đề $(N \wedge C \implies D) \wedge \neg D \implies \neg N$ với mệnh đề C và D sai và N là mệnh đề đúng —

C	D	N	$(N \wedge C \implies D) \wedge \neg D \implies \neg N$
S	S	Đ	D S S Đ S Đ Đ S S Đ

chúng ta có mệnh đề cần chứng minh sai. Do vậy, kết luận không suy ra được từ giả thiết.

2. Đặt biến:

- R : “Âm nhạc (đang) làm cho Qua-di thư giãn.”;
- B : “Tiếng ồn làm cho Qua-di đau đầu.”;
- H : “Qua-di (đang) đeo tai nghe chống ồn.”.

Kí hiệu hóa:

$$\frac{\begin{array}{c|cc} \text{Giả thiết} & R \vee B \\ \hline & H \implies \neg B \\ & H \end{array}}{\begin{array}{c|c} \text{Kết luận} & R \end{array}}.$$

Do tính chất kết hợp của phép hội nén

$$(R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H \iff (R \vee B) \wedge ((H \implies \neg B) \wedge H).$$

Có $(H \implies \neg B) \wedge H \implies \neg B$ ($(P \implies Q) \wedge P \implies Q$) nên

$$(R \vee B) \wedge ((H \implies \neg B) \wedge H) \implies (R \vee B) \wedge \neg B.$$

Từ tính chất phân phôi, chúng ta có

$$(R \vee B) \wedge \neg B \iff R \wedge \neg B \vee B \wedge \neg B.$$

Theo tính chất phủ định kép, $B \wedge \neg B \iff \neg(B \wedge \neg B)$. Lại có $\neg(B \wedge \neg B)$ luôn đúng do tính chất không mâu thuẫn nên $\neg(B \wedge \neg B)$ sai. Kết hợp lại, có được $B \wedge \neg B \iff M$ với M là một mệnh đề sai nào đó.

Do vậy $(R \vee B) \wedge \neg B \iff R \wedge \neg B \vee M$. Thêm tính chất đồng nhất, có $R \wedge \neg B \vee M \iff R \wedge \neg B$, và theo tính chất rút gọn, $R \wedge \neg B \implies R$.

Kết hợp tất cả các kết quả đã có, chúng ta có thể có quá trình lập luận như sau:

$$\begin{aligned} (R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H &\iff (R \vee B) \wedge ((H \implies \neg B) \wedge H) \\ (R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H &\implies (R \vee B) \wedge \neg B \\ (R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H &\implies R \wedge \neg B \vee B \wedge \neg B \\ (R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H &\implies R \wedge \neg B \\ (R \vee B) \wedge (H \implies \neg B) \wedge H &\implies R. \end{aligned}$$

Vậy, kết luận có thể suy ra được từ giả thiết.

3. Trông đáp án của câu này có vẻ hiển nhiên, nhưng thực chất không phải như vậy. Kí hiệu các mệnh đề:

- D : “Bây giờ (đang) là tháng 12.”;
- U : “Tháng (liền) trước là tháng 11.”;
- S : “6 tháng trước (bây giờ) là tháng 6.”;
- M : “Tháng (liền) sau là tháng 1..”

Chuyển giả thiết và kết luận sang dưới dạng kí hiệu:

Giả thiết	$D \Rightarrow U$ $U \Rightarrow S$ $M \Rightarrow D$. U
Kết luận	D

Chỉ có một trường hợp khiến cho phép lập luận thất bại:

D	M	S	U	$(D \Rightarrow U) \wedge (U \Rightarrow S) \wedge (M \Rightarrow D) \wedge U$
S	S	Đ	Đ	S Đ Đ Đ Đ Đ Đ Đ Đ S Đ S Đ Đ
$D \Rightarrow U \wedge U \Rightarrow S \wedge M \Rightarrow D \wedge U \Rightarrow D$				
S S Đ Đ				Đ S S

Nhưng chỉ cần một trường hợp là đủ để chứng minh không còn hợp lệ.

Cũng có thể nhìn câu này theo một hướng khác. Lập luận này chỉ hợp lệ nếu có điều kiện đi kèm. Nếu như chúng ta không sử dụng lịch thông thường mà sử dụng một loại lịch đặc biệt mà trước tháng 12 lại có một tháng 11A thì sao? Bài tập này càng nhấn mạnh cần phải có một “nền tảng” chung trong việc giải quyết vấn đề trước khi đề cập đến những yếu tố chi tiết.

4. Đặt biến các mệnh đề:

- L : “Hoàng tử tiêu diệt được ma vương.”;
- P : “Hoàng tử cứu được công chúa.”;
- N : “Vương quốc mới thái bình.”;
- I : “Nhà vua băng hà.”;
- R : “Bầu trời có màu tím.”.

Kí hiệu hóa:

Giả thiết	$L \wedge P \Rightarrow N$ $N \vee I \Rightarrow \neg R$ $\neg P \Rightarrow R$ $\neg I \wedge \neg R$
Kết luận	P

Viết tắt $(L \wedge P \Rightarrow N) \wedge (N \vee I \Rightarrow \neg R) \wedge (\neg I \wedge \neg R)$ bởi M . Thực hiện liên tiếp các phép “biến đổi” thông qua các tính chất, nhận xét:

$$\begin{aligned}
 M &\iff ((L \wedge P \Rightarrow N) \wedge (N \vee I \Rightarrow \neg R)) \wedge (\neg I \wedge \neg R) \quad (\text{thứ tự tính toán}); \\
 M &\iff ((L \wedge P \Rightarrow N) \wedge (N \vee I \Rightarrow \neg R)) \\
 &\quad \wedge ((\neg I \wedge \neg R) \wedge (\neg I \wedge \neg R)) \quad (\text{tính chất kết hợp của phép hối}); \\
 M &\implies (\neg I \wedge \neg R) \quad (\text{tính chất rút gọn}).
 \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất rút gọn một lần nữa để có $\neg I \wedge \neg R \implies \neg R$. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
 M &\implies (\neg I \wedge \neg R) \wedge \neg R; \\
 M &\implies \neg P \quad (\text{quy tắc phủ định});
 \end{aligned}$$

$$M \implies P \quad (\text{tính chất phủ định kép}).$$

Qua đó, chúng ta có điều phải chứng minh. Bạn đọc cũng có thể thực hiện bài tập này thông qua bảng giá trị chân lí, nhưng khí đó, bạn đọc sẽ phải xét... mà thôi, bạn đọc có thể tham khảo bảng 1.54 nếu bạn đọc không muốn phải ghét bản thân như tác giả đã từng khi thực hiện lập bảng này¹⁸. Ngoài ra, bạn đọc cũng sẽ mất đi cơ hội được thường thức nghệ thuật của sự lập luận do bị thay thế bởi sự cơ học của phương pháp.

Bảng 1.54: Bảng giá trị chân lí của $(L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R) \wedge (\neg P \implies R) \wedge (\neg I \wedge \neg R) \implies P$

I	L	N	P	R	$(L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R) \wedge (\neg P \implies R) \wedge (\neg I \wedge \neg R) \implies P$
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ
Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ
Đ	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	Đ	Đ	S	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	Đ
Đ	Đ	S	Đ	S	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ
Đ	S	Đ	Đ	S	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	S	Đ
Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	S	Đ
Đ	S	S	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	Đ
S	Đ	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	S	Đ
S	Đ	Đ	S	S	Đ
S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	Đ
S	Đ	S	Đ	S	Đ
S	Đ	S	S	Đ	Đ
S	Đ	S	S	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	S	Đ
S	S	Đ	S	Đ	Đ
S	S	Đ	S	S	Đ
S	S	S	Đ	Đ	Đ
S	S	S	Đ	S	Đ
S	S	S	S	Đ	Đ

¹⁸Bạn đọc có thể kiểm tra lại bảng 1.54 để trải nghiệm cảm giác của tác giả lúc viết đáp án. Khi càng tăng nhiều biến thì số trường hợp cần phải kiểm tra cũng tăng theo theo cấp số nhân.

I	L	N	P	R	$(L \wedge P \implies N) \wedge (N \vee I \implies \neg R)$	\wedge	$(\neg$	P	\implies	$R)$
D	D	D	D	D	S		S	D	D	D
D	D	D	D	S	D		D	S	D	S
D	D	D	S	D	S		S	D	S	D
D	D	D	S	S	D		S	D	S	S
D	D	S	D	D	S		S	S	D	D
D	D	S	D	S	S		S	S	D	S
D	D	S	S	D	S		S	D	S	D
D	D	S	S	S	D		S	D	S	S
D	S	D	D	D	S		S	D	D	D
D	S	D	D	S	D		D	S	D	S
D	S	D	S	D	S		S	D	S	D
D	S	D	S	S	D		S	D	S	S
D	S	S	D	D	S		S	S	D	D
D	S	S	D	S	D		D	S	D	S
D	S	S	S	D	S		S	D	S	D
S	D	D	D	D	S		S	D	D	D
S	D	D	D	S	D		D	S	D	S
S	D	D	S	D	S		S	D	S	D
S	D	D	S	S	D		S	D	S	S
S	D	S	D	D	S		S	S	D	D
S	D	S	D	S	S		S	S	D	S
S	D	S	S	D	D		D	D	S	D
S	D	S	S	S	D		S	D	S	S
S	S	D	D	D	S		S	D	D	D
S	S	D	D	S	D		D	S	D	S
S	S	D	S	S	D		S	D	S	S
S	S	S	D	D	D		D	S	D	D
S	S	S	D	S	D		D	S	D	S
S	S	S	S	D	D		D	D	S	D
S	S	S	S	S	D		S	D	S	S

I	L	N	P	R	$(L \wedge P \Rightarrow N) \wedge (N \vee I \Rightarrow \neg R)$ $\wedge (\neg P \Rightarrow R)$	\wedge	$(\neg$	I	\wedge	\neg	$R)$	\Rightarrow	P
D	D	D	D	D	S	S	S	D	S	S	D	D	D
D	D	D	D	S	D	S	S	D	S	D	S	D	D
D	D	D	S	D	S	S	S	D	S	S	D	D	S
D	D	D	S	S	S	S	S	D	S	D	S	D	S
D	D	S	D	D	S	S	S	D	S	S	D	D	D
D	D	S	D	S	S	S	S	D	S	D	S	D	D
D	D	S	S	D	S	S	S	D	S	S	D	D	S
D	D	S	S	S	S	S	S	D	S	D	S	D	S
D	S	D	D	D	S	S	S	D	S	S	D	D	D
D	S	D	D	S	D	S	S	D	S	D	S	D	D
D	S	D	S	D	S	S	S	D	S	S	D	D	S
D	S	D	S	S	S	S	S	D	S	D	S	D	S
D	S	S	D	D	S	S	S	D	S	S	D	D	D
D	S	S	D	S	D	S	S	D	S	D	S	D	D
D	S	S	S	D	S	S	S	D	S	S	D	D	S
S	D	D	D	D	S	S	D	S	S	S	D	D	D
S	D	D	D	S	D	D	D	S	D	D	S	D	D
S	D	D	S	D	S	S	D	S	S	S	D	D	S
S	D	D	S	S	S	S	D	S	D	D	S	D	S
S	D	S	D	D	S	S	D	S	S	S	D	D	D
S	D	S	D	S	S	S	D	S	D	D	S	D	D
S	D	S	S	D	S	S	D	S	S	S	D	D	S
S	S	D	D	D	S	S	D	S	S	S	D	D	D
S	S	D	D	S	D	D	D	S	D	D	S	D	D
S	S	D	S	D	S	S	D	S	S	S	D	D	S
S	S	S	D	D	D	S	D	S	D	D	S	D	D
S	S	S	D	S	D	S	D	S	D	D	S	D	S
S	S	S	S	D	S	S	D	S	S	S	D	D	S
S	S	S	S	D	S	S	D	S	D	D	S	D	D
S	S	S	S	D	S	S	D	S	S	S	D	D	S

5. Đặt biến:

- N : “Tu-ba-na thức khuya học bài.”;
- K : “Tu-ba-na uống cà phê.”;
- L : “Tu-ba-na mệt mỏi (vào sáng ngày thi).”;
- B : “Tu-ba-na thi tốt (vào sáng ngày thi).”;
- D : “Tu-ba-na ngủ gật trong giờ thi.”;
- Q : “Tu-ba-na đã quay cờp.”

Kí hiệu hóa giả thiết và kết luận:

Giả thiết	$N \wedge \neg K \implies L$ $L \implies \neg B \vee D$ $\neg Q \wedge \neg B$	
Kết luận	N	

Không có bất cứ lí do nào để chứng minh này có thể hợp lí được cả, bởi vì nếu chúng ta đặt giá trị chân lí của tất cả các mệnh đề con là sai:

B	D	K	L	N	Q	$N \wedge \neg K \implies L$
S	S	S	S	S	S	S S Đ S Đ S

B	D	K	L	N	Q	$L \implies \neg B \vee D$
S	S	S	S	S	S	S Đ Đ S S S

B	D	K	L	N	Q	$\neg Q \wedge \neg B$
S	S	S	S	S	S	Đ S Đ Đ S

B	D	K	L	N	Q	$(N \wedge \neg K \implies L) \wedge (L \implies \neg B \vee D) \wedge (\neg Q \wedge \neg B) \implies N$
S	S	S	S	S	S	Đ Đ Đ Đ Đ S S

thì chúng ta có thể thấy rằng kết luận N không được suy ra từ giả thuyết.

Vậy, giả thiết không chứng minh được kết luận.

1.2.4 Mâu thuẫn

Từ một số giả thiết cho trước, chúng ta có thể chứng minh các mệnh đề khác, nhưng không có nghĩa là nó thực sự “đúng”. Hãy tưởng tượng rằng bạn đọc đang đi xem ảo thuật. Ảo thuật gia dẫn dắt bạn đọc thông qua một câu chuyện của một quả bóng mà trong đó có những hành động được miêu tả rất chi tiết. Chiếc cốc úp vào quả bóng, di chuyển trên bàn trực tiếp dưới con mắt của bạn đọc. Bạn đọc nửa tin vào lời của ảo thuật gia, nửa tin vào thị giác của mình rằng quả bóng vẫn ở dưới cái cốc, nhưng cuối cùng, kết quả là quả bóng lại biến mất mà lại xuất hiện trong tay của nhà ảo thuật gia. Đúng là kết luận bạn đọc đưa ra — quả bóng nằm dưới cái cốc — là hợp lí từ câu chuyện của nhà ảo thuật gia, nhưng nó chỉ “đúng” nếu như ảo thuật gia thực hiện hành động thật như lời nói mà không có sự dụng kĩ thuật tay. Nói cách khác, các giả thiết mà nhà ảo thuật gia đưa ra chứng minh được kết luận của bạn đọc, nhưng kết luận chỉ thật sự hợp lí nếu như giả thiết là không có mâu thuẫn.

Mâu thuẫn được định nghĩa là khi giả thiết không thể nhận giá trị chân lí đúng. Viết dưới dạng kí hiệu, X bị mâu thuẫn nếu $X \implies M$ với M là một mệnh đề sai nào đó. Chúng ta không bao giờ muốn làm việc với giả thiết có mâu thuẫn, do nó có thể chứng minh mọi thứ. Thật vậy, gọi Y là mệnh đề bất kì. Do X luôn sai nên $X \implies Y$ luôn đúng do định nghĩa của phép kéo theo. Vậy X chứng minh Y .

“Thế không phải mong ước của con người là khám phá mọi thứ, chứng minh mọi thứ hay sao?” — Bạn đọc có thể hỏi. Đúng là như vậy, nhưng sẽ khá vô dụng nếu chúng ta chứng minh được một mệnh đề và cả phủ định của nó nữa. Để ý rằng lập luận trong chứng minh trên không phụ thuộc vào Y . Do đó, chúng ta hoàn toàn có thể có $X \implies \neg Y$. Điều này không có nghĩa $Y \wedge \neg Y$, chỉ là khẳng định rằng phép chứng minh là không có giá trị nếu như điều kiện đầu vào đã sai.

Để chứng minh giả thiết X bị mâu thuẫn, chúng ta chứng minh $X \implies M$. Để chứng minh giả thiết X không có mâu thuẫn, tương tự như chứng minh thông thường, chúng ta chỉ ra một trường hợp để $X \implies M$ sai.

Bài 7: Cho các giả thiết sau. Xét xem những giả thiết đó có bị mâu thuẫn hay không.

- | | |
|---|--|
| 1. $P \vee Q, \neg P, \neg Q;$ | 4. $P \oplus Q, P \odot Q;$ |
| 2. $P \uparrow R, P, Q \wedge R;$ | 5. $P \oplus Q, Q \odot R, R \oplus P;$ |
| 3. $P \implies Q \Leftarrow R, \neg P, \neg Q, \neg R;$ | 6. $A \odot B, B \oplus C, C \odot D, D \Leftarrow A.$ |

Lời giải bài 7:

Với toàn bộ các phần, gọi M là mệnh đề sai nào đó.

1. Thực hiện biến đổi lên giả thiết:

$$\begin{aligned}
 (P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q &\iff (P \wedge \neg P \vee Q \wedge \neg P) \wedge \neg Q \quad (\text{tính chất phân phối}); \\
 (P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q &\iff (\mathbf{M} \vee \neg P \wedge Q) \wedge \neg Q \quad (\text{tính không mâu thuẫn và tính giao hoán}); \\
 (P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q &\iff (\neg P \wedge Q) \wedge \neg Q \quad (\text{tính đồng nhất với phép tuyển}); \\
 (P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q &\iff \neg P \wedge (Q \wedge \neg Q) \quad (\text{tính chất kết hợp}); \\
 (P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q &\iff \neg P \wedge \mathbf{M} \quad (\text{tính chất không mâu thuẫn}); \\
 (P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q &\iff \mathbf{M} \quad (\text{tính chất thống trị}).
 \end{aligned}$$

Có $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$ chứng minh một mệnh đề sai. Do đó, giả thiết có mâu thuẫn.

2.

Bảng 1.55: Bảng giá trị chân lí của $(P \uparrow R) \wedge P \wedge (Q \wedge R)$

P	Q	R	$(P \uparrow R) \wedge P \wedge (Q \wedge R)$
Đ	Đ	Đ	
Đ	Đ	S	
Đ	S	Đ	
Đ	S	S	
S	Đ	Đ	
S	Đ	S	
S	S	Đ	
S	S	S	

S

Với mọi trường hợp, giả thiết đều có giá trị chân lí sai, cho nên giả thiết bị mâu thuẫn.

Có thể sử dụng lập luận rằng để giả thiết $P \uparrow R$ đúng thì không thể P và R cùng đúng, nhưng giả thiết thứ hai cho P , và giả thiết thứ ba — $Q \wedge R$ — hiển nhiên chứng minh R . Chúng ta thấy được điều mâu thuẫn.

3. Giả thiết là không mâu thuẫn, dưới trường hợp sau:

P	Q	R	$(P \Rightarrow Q \Leftarrow R) \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
S	S	S	

Đây cũng là trường hợp duy nhất mà giả thiết không có mâu thuẫn.

4. Để $P \oplus Q$ đúng thì P và Q phải không cùng giá trị chân lì, nhưng để $P \odot Q$ đúng thì P và Q phải giống nhau về giá trị chân lí. Vậy, mâu thuẫn.

Lập luận được kiểm tra lại bằng bảng giá trị chân lí 1.56.

Bảng 1.56: Bảng giá trị chân lí của $(P \oplus Q) \wedge (P \odot Q)$

P	Q	$(P \oplus Q) \wedge (P \odot Q)$	$(P \oplus Q) \wedge (P \odot Q)$
Đ	Đ		
Đ	S		
S	Đ		
S	S		

S

5. Giả thiết là không có mâu thuẫn. Ví dụ:

P	Q	R	$(P \oplus Q) \wedge (Q \odot R) \wedge (R \oplus P)$
Đ	S	S	

6. Bảng 1.57 cho thấy rằng giả thiết luôn mâu thuẫn.

Bảng 1.57: Bảng giá trị chân lí của $(A \odot B) \wedge (B \oplus C) \wedge (C \odot D) \wedge (D \iff A)$

A	B	C	D	$(A \odot B)$	\wedge	$(B \oplus C)$	\wedge	$(C \odot D)$	\wedge	$(D \iff A)$									
Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ
Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	S	S	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ
S	Đ	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	S	Đ	S	Đ	Đ	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	S	S	Đ	S	Đ	S	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	S	S
S	S	S	S	Đ	S	S	S	S	S	Đ	S	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ	S

Để có thể sử dụng lập luận thông thường, có thể thấy là để $A \odot B$ và $C \odot D$ đúng thì mỗi mệnh đề trong cặp A và B , C và D phải có giá trị chân lí giống nhau. Thêm vào đó, $B \oplus C$ dẫn đến B và C khác giá trị chân lí. Do vậy A và D khác giá trị chân lí. Tuy nhiên $D \iff A$ khi và chỉ khi D và A cùng đúng hoặc cùng sai, dẫn đến mâu thuẫn.

Tài liệu tham khảo - Toán

- [1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] Irving H Anellis. Peirce's truth-functional analysis and the origin of the truth table. *History and Philosophy of Logic*, 33(1):87–97, 2012.
- [3] Daniel W Cunningham. *A logical introduction to proof*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Granino Arthur Korn and Theresa M Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation, 2000.
- [5] Patrick Suppes. *Introduction to logic*. Courier Corporation, 2012.

Tài liệu tham khảo - Vật lí