Chapitre 1 : INTRODUCTION AUX ESPACES METRIQUES

I- Distances et normes.

1- Distances

Définition : Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X, toute application

d : X −→ R, vérifiant, ∀ x y z ∈ X :

(D1) d(x, y) = 0 ⇐⇒ x = y

(D2) d(x, y) = d(y, x)

(D3) d(x, z) ≤ d(x, y) + d(y, z) (Inégalité triangulaire)

Exemple :

Montrer que l'application d : [0, +∞[×[0, +∞[−→ R

(x, y) −→ d(x, y) = |x − y|

est une distance sur [0, +∞[

2- Normes :

Définition :

Une norme sur un espace vectoriel E sur K = R ou C, est une application notée N ou || || définie par N : E −→ R

x−→ N(x) =$\|x\|$ et vérifiant , ∀ x, y ∈ E et ∀α ∈ K

(N1) $\|\alpha x\|$ = |α|$\|x\|$

(N2) $\|x\|$ = 0 ⇒ x = 0

(N3) $\|x + y\|$ ≤ $\|x\| + \|y\|$

Exemple :

Montrer que l'application définie de IR² vers IR par $\forall(x, y) \in IR^2, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur IR²

Définition :

1. Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble non vide et d est une distance sur X.

2. Un espace vectoriel normé sur K = R ou C est un couple (E, || ||) où E est un espace vectoriel sur K et || || est une norme sur E.

Théorème :

|| || étant une norme sur un ensemble E alors d définie dans E² par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance appelée distance associée à la norme.

II- Boules.

Définition :

Soit (X,d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et r $\in R_+$

1. On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble $B_o(x_0,r) = \{x \in X / d(x_0, x) < r\}$

2. On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r, l'ensemble $B_f(x_0,r) = \{x \in X / d(x_0, x) \leq r\}$

Remarque :

Les boules sont des intervalles dans IR et des disques dans IR².

Exemple :

1- IR étant muni de la distance définie par la valeur absolue, caractériser la boule ouverte de centre -2 et de rayon 5.

2- **IR²** étant mini de la distance associée à la norme $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ caractériser dans IR² la boule fermée de centre (-1 ;2) et de rayon 3.

Définition :

Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée, s'il existe une boule fermée $B_f(x_0,r)$ telle que A ⊆ $B_f(x_0,r) \Longleftrightarrow d(x_0,x) \leq$ r ∀ x ∈ A

Exemple :

Dans IR muni de la distance usuelle cad la valeur absolue, les ensembles $C_1 = [-3,3[\cup]4,11[\cup\{31\}$, $C_2 =]12,17[$ et $C_3 =]-3,11[\cup\{20\}\cup]21,+\infty,[$ sont-ils bornés ?

Définition : Diamètre

- Soit (X,d) un espace métrique. Soient A et B deux parties non vide de X. On appelle distance entre A et B la valeur d(A,B) = inf{d(x,y),x ∈ A,y ∈ B}.
- On appelle diamètre d'une partie A non vide de X, notée diam(A), la valeur diam(A) =sup{d(x,y), x ∈ A, y ∈ A}.

Rappel : L'inf d'un ensemble est son plus grand minorant et son sup est son plus petit majorant.

Exemple :

On munit R de la distance usuelle. Soit A = {−1} et B = $\{\frac{n}{1-n}$, n ≥ 2}.

Montrer que d(A,B) = 0.

III- Ouverts et fermés d'un espace métrique

Soit (X,d) un espace métrique.

Définition : Ouvert

Une partie θ de X est dit ouverte si ∀ x ∈ θ, il existe une boule ouverte $B_o(x_0,r)$ de centre x_0 et de rayon r telle $B_o(x_0,r)$ ⊆ θ. Les ensembles ∅ et X sont des ouverts.

Définition :

Une partie F de X est dit fermée si son complémentaire C_F est une partie ouverte.
Les ensembles ∅ et X sont des fermés.

Proposition :

Soit (X,d) un espace métrique .
- Toute boule ouverte est un ouvert.
- Tout ouvert θ de X est réunion de boules ouvertes.
- Toute boule fermée est fermée.

Théorème : (Propriétés des ouverts)

Soit (X,d) un espace métrique, alors on a :
1. X et ∅ sont des ouverts.
2. Si $(\theta_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors $\bigcup_{\alpha\in I}\theta_\alpha$ est un ouvert
3. Si $(\theta_i)_{1\le i\le n}$ est une famille finie d'ouverts, alors $\bigcap_{1\le i\le n}\theta_i$ est un ouvert.

Théorème : (Propriétés des fermés)

Soit (X,d) un espace métrique, alors on a :
1. X et ∅ sont des fermés.
2. Si $(\theta_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une famille quelconque de fermés, alors $\bigcap_{\alpha\in I}\theta_\alpha$ est un fermé
3. Si $(\theta_i)_{1\le i\le n}$ est une famille finie de fermés, alors $\bigcup_{1\le i\le n}\theta_i$ est un fermé.

Définition : Voinage

Soit (X,d) un espace métrique. Soient x ∈ X , V ⊆ X , on dit que V est un voisinage de x s'il existe $B_o(x_0,r)$⊆ V.

Proposition : Soit (X,d) un espace métrique; θ est un ouvert de X si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.

Exemple : Dans R muni de la distance usuelle soit V =]−∞,−2]∪[4,7[
V est il un voisinage de −5 ; 4 et 5 ?

IV- Intérieurs et Adhérences.

1- Intérieur.

Définition :

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A ⊆ X non vide et x ∈ A.
X est un point intérieur à A , s'il existe un voisinage v_x de x tel que v_x⊆ A
L'ensemble des points intérieur à A est noté $\dot{A}$

2- Adhérence.

Définition :

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A ⊆ X non vide et x ∈ X.
x est un point adhérent de A si et seulement si ∀ v_x ,voisinage de x , $v_x \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$
L'ensemble des points adhérents à A est noté $\bar{A}$.

3- Point d'accumulation.

Définition :

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A $\subseteq$ X non vide. Un élément $x \in$ X est dit point d'accumulation de A si pour tout voisinage v_x de x , on a : $(v_x \backslash \{x\}) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$

4- Point isolé.

Définition :

Soit (X,d) un espace métrique. Soit A $\subseteq$ X non vide et $x \in$ A.

x est un point isolé à A s'il existe un voisinage , v_x de x tel que $v_x \cap \mathrm{A} = \{x\}$

Exemple :

IR étant muni de la distance usuelle , soit $V = [-2 , 5[\text{U}\{8\}$

1- Dire si -2 ; 5 et 8 sont des points adhérents , intérieurs ; d'accumulation ou isolés de A.
2- Donner l'intérieur et l'adhérence de A