Hartshorne solution 4.2

Pistol Dagger

1

> $\mathbb{P}^n$ が単連結であることを示せ。

mathoverflow に書いてあった解答 - $X \to \mathbb{P}^n$ を étale covering としたとき、smooth ゆえに X は regular である。X を connected と仮定すると、帰納法の仮定より $X \cap H$ は connected となり、よって $\mathbb{P}^{n-1}$ と同型となる。flat かつ projective より、fiber の点の個数は変わらず、全単射である。

fiberwise isomorphism より、universally injective である。universally injective かつ étale は open immersion であるので、所望の射は同型となる。実際、これをみるためには universally homeomorphism かつ étale としてよく、homeomorphism ならば affine である。さらに $X \to S$ についてこれをいずれも affine としてよく、proper + affine $\Rightarrow$ finite らしいが、今の状況では finite は成り立っているので割愛。

Noetherian setting として細かいことを割愛すると、$A \to B$ とすれば B は locally free A-module となっている。

geometric point への base change を考えると、rank が 1 であることが理解される。よって構造射は同型となって、すべてが示された。lovelylittlelemmas.rjprojects.net/locally-free-algebras/ などを参考。

2

> k を標数が 2 でない代数閉体とする。
> (a) X を genus 2 curve とすると、標準因子 K は埋め込み $f\colon X \to \mathbb{P}^1$ を定める。このとき、f はちょうど 6 点で分岐しており、X はこのような方法で $\mathbb{P}^1$ 上の順序づけられていない 6 点集合を、$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ での商のもとで定めることを示せ。

(a) $\mathrm{ch}(k) \neq 2$ より、f は separable となる。よって、Hurwitz の定理を適用することができる。ramification divisor の degree は 6 であり、ramification index は 2 であるため、ちょうどこれは 6 点を定める。$X \to \mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^1$ の自己同型でちょうどズレるので、命題が示される。

> (b) 逆に $\mathbb{P}^1$ の 6 点が与えられたとする。簡単のために無限遠点を避けて $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ とする。このとき、X を $z^2 = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_6)$ によって切り出される代数曲線とする。このとき、X が種数 2 であり、かつ $p\colon X \to \mathbb{P}^1$ を射影とするとき f が標準因子の定める射と一致することを確認されよ。さらにこのとき分岐点が $\alpha_\bullet$ に一致することも確認されよ。

(b) X の構成をちゃんとやると、$\mathrm{Spec} k[x,z]/(z^2 - \prod(x-\alpha_\bullet))$ と $\mathrm{Spec} k[\widetilde{x}, \widetilde{z}]/(\widetilde{z}^2 - \prod(1-\alpha_\bullet \widetilde{x}))$ の貼り

合わせを $\mathbb{P}^1$ に送ったものとなり、これは nonsingular なスキーム X を作り、$X \to \mathbb{P}^1$ は finite ゆえに X は curve となる。

f の degree は 2 であることはよく、また ramification point はちょうど $\alpha_\bullet$ に一致することはファイバーの点の個数を計算すれば得られる。実際、$\mathbb{P}^2$ を $z^2 - f(x)$ で切り出した超曲面を C としたとき、C の normalization $\tilde{C}$ があるわけで、$\tilde{C} \to \mathbb{P}^1$ を考えればよい。また計算によって $g(X) = 2$ であることも確認できる。

また、この射 p が定める可逆層を $\mathcal{L}(D)$ とすると、$l(D) \leq 2$ かつ $\deg(D) = 2$ という状況になっている。ここで、$l(D) - l(K - D) = 1$ かつ $\deg(K - D) = 0$ より、D は K と線形同値であることがわかる。よって、p は f_K と $\mathbb{P}^1$ での同型を除いて等しい。

(c) $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ の同型によって三点をそれぞれ 0, 1, ∞ に送ることができる。この方法によって、$\mathbb{P}^1$ の三点 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ であって $0, 1, \infty, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ で分岐するようにできる。

(c) その通りです。

(d) $k \setminus \{0, 1\}$ の三点組の集合について、(c) の方法で Σ_6 の作用を定めることができる。

(d) その通りです。

(e) この方法によって、genus 2 curve の分類が完了する。

(e) X を genus 2 curve として、$X \to \mathbb{P}^1$ を degree 2 map とする。このとき、$K(X)$ は $k(x)$ 上 2 次拡大であるため、$z^2 = f(x)$ なる方法で切り出される。ただし $f(x)$ はここでは平方因子を持たないものとする。

$\mathbb{P}^2$ を $z^2 - f(x)$ で切り出して得られる超曲面、と思ったがこれは $(0 : 0 : 1)$ に特異点を持つことを思い出しておく。δ-invariant が今興味あるケースだと多分 8 くらいあるのだろうか、そんな気がする。

$f(x)$ は平方因子を持たない、といったが、すると $\prod(x - \alpha_\bullet)$ と表示できるため、先ほどの方法で非特異曲線を作ることができる。(ここで、奇数次数の場合には無限遠点で分岐する形になることに注意する。)

すると、f の次数が $2g + 1$ あるいは $2g + 2$ の場合においては種数が 2 の曲線となることが理解される。よって X が種数 2 の (obviously hyperelliptic) curve であるならば $z^2 - f(x)$ で切り出されるときの f は 5 あるいは 6 次でかける。しかし 5 次の場合は変数変換によって 6 次式に変更できる。よって、ここまでの観察によって種数 2 の curve の分類が完了する。

3

$X \subset \mathbb{P}^2$ を次数 d の平面曲線とする。$P \in X$ について、$T_P(X)$ によって P での X の接線を表すものとする。このとき、$(\mathbb{P}^2)^*$ を $\mathbb{P}^2$ の双対平面として、$P \mapsto T_P(X)$ によって得られる $X \to (\mathbb{P}^2)^*$ を双対曲線という。

ここまでのフレームワークを再設定しておく。まず、V を k 上 3 次元ベクトル空間として、その基底 x_0, x_1, x_2 を設定しておく。このとき、$\mathbb{P}(V) = \mathbf{Proj}(\mathrm{Sym}(V))$ を射影空間とする。また、$\mathbb{P}(V^*) = \mathbf{Proj}(\mathrm{Sym}(V))$ を双対空間とする。

$X \subset \mathbb{P}(V)$ なる nonsingular curve について、$X \to \mathbb{P}(V^*)$ を定める方法について考えたい。X は k-scheme であるため、自然な構造射 $\mathrm{st}_X \colon X \to \mathrm{Spec}(k)$ があり、$X \to \mathbb{P}(V^*)$ を与えることは、$\mathrm{st}_X^*(\widetilde{V^*}) \to \mathcal{L}$ なる X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ への全射を与えることと同値である。

この方法について述べると - $X \subset \mathbb{P}(V)$ がイデアル層 $\mathcal{J}$ によって切り出されるとする。このとき、

$$0 \to \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V)} \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}(V)} = \mathcal{H}om(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{O}_X) \to 0$$

なる exact sequence がとれる。さらに Euler sequence により

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V)} \to 0$$

なる図式も用意されている。

よって、$V^* \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{N}_{X/\mathbb{P}(V)}(-1)$ なる全射が自然に構成されるが、これは双対曲線 $X \to \mathbb{P}(V^*)$ に対応する。

これは計算すると、$[x_i^*]$ なる双対基底について、$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2(1)$ の $D(x_j)$ での生成元 $\frac{f}{x_j^{\deg(f)-1}}$ を $\frac{f_i}{x_j^{\deg(f)-1}}$ に移す対応を充てることが理解される。

(a) L を $\mathbb{P}^2$ 内の直線であって、X に接しないものとする。このとき、$\varphi\colon X \to L$ を、$P \in X$ について $T_P(X) \cap L$ を充てる射とする。このとき、φ が P で分岐することの必要充分条件として、次のいずれかが成り立つということが挙げられる。

- $P \in L$,
- P は X の inflection point である。

このことから、X には inflection point は高々有限個であることが理解される。

代数曲線 $X \subset \mathbb{P}^2$ について、また接線 $T_P(X) \subset \mathbb{P}^2$ について、$X \cap T_P(X)$ の P における length が 3 以上の点のことを inflection point という。

$Q = T_P(X) \cap L$ とし、$T = T_P(X)$ とする。$\mathcal{O}_{L,Q} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*,T} \to \mathcal{O}_{X,P}$ による uniformizer の行き先についてみる。

座標変換を施して、有限部分でみたときには、$L = (x_0)$ とすると、$X = (f)$ とかけて、$P = (P_0, P_1) \in X$ について $P_1 + \frac{f_0(P)}{f_1(P)} P_0$ を充てる対応となる。さらに $f_1(P) \neq 0$ としてよい。ある点 P において $P_1 + \frac{f_0(P)}{f_1(P)} P_0 = 0$ とすると (これは座標変換によって可能である)、$k[x_0, x_1]/(f, f_1 x_1 + f_0 x_0)_P$ の length こそが ramification number となる。

結局よくわかっていない。

4

X を $x^3 y + y^3 z + z^3 x = 0$ なる標数 3 の体上の曲線とする。このとき、すべての点が inflection point であって、dual curve がもとの curve と同型であるが、$X \to X^*$ が inseparable であることを示せ。

自明です。

5

genus $g > 1$ curve X over an algebraic closed field k of characteristic 0 についてその自己同型群が高々位数 $84(g-1)$ のものであることを示す。
このとき G を $\mathrm{Aut}(X)$ とすれば G は $K(X)$ に作用しその不変体を L とおくと、これは $X \to Y$ なる order $n = |G|$ の射を誘導する。
(a) $P \in X$ を ramification point としてその degree を r とすると、$g(P)$ はいずれも ramification point of degree r となる。また、$g^{-1}(g(P))$ はちょうど $\frac{n}{r}$ 点となる。よって軌道を $P_\bullet$ とすると

$$\frac{2g-2}{n} = 2g(Y) - 2 + \sum_{\bullet} \left(1 - \frac{1}{r_\bullet}\right)$$

が成り立つ。
(b) $n \leq 84(g-1)$ を示せ。

curve X の関数体 $K(X)$ に有限群 G が作用している状況について考える。$P \in X$ は、これは $K(X)/k$ 上の valuation ring R_P に対応する。また、$R_P \cap L$ は P の $\pi\colon X \to Y = X/G$ への行き先であると理解される。

このとき、P と gP は必ずおなじ点 $\pi(P)$ に移ることが理解される。逆に、異なる軌道のものが存在するとき、Q と P が異なる G-軌道にあり $\pi(P)$ に移るとする。このとき、gQ の任意の点で消えておらず P で消えているような (かつ Q の軌道と P の軌道で定義されているような) 関数を探す - このような関数があれば、norm をとることによって矛盾を導くことができる。

このような関数については素イデアル避けで終わる気がする - どうやってもいい気がするが、一点を抜けば affine であるため、可換環論に素イデアル避けで終わる。

よって、Y の点の fiber は G-軌道と一致することが理解される。

6

$f\colon X \to Y$ なる degree n の curve の射について、$\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(Y)$ なる押し出しを考えることができる。
(a) X 上の因子 D について、$\det(f_*\mathcal{L}(D)) \cong \det(f_*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{L}(f_*(D))$ が成り立つことを示せ。
(b) よって f_* は $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$ を誘導する。これによって $f_* \circ f^*$ は n 倍写像となる。
(c) $\det(f_*\Omega_X) \cong \det(f_*\mathcal{O}_X)^{-1} \otimes \Omega_Y^{\otimes n}$ が成り立つことを示せ。
(d) f が separable であるとする - $B := f_*R$ とする、これを branch divisor という。このとき、$(\det(f_*\mathcal{O}_X)^2 \cong \mathcal{L}(-B)$ が成り立つ。

(a) について、まず f が flat であることを思いだすと、

$$0 \to \mathcal{L}(D') \to \mathcal{L}(D) \to \mathcal{O}_{D'-D} \to 0$$

なる完全系列により

$$0 \to f_*\mathcal{L}(D') \to f_*\mathcal{L}(D) \to f_*\mathcal{O}_{D'-D} \to 0$$

なる列を得ることができる。

この完全系列の絶対値をとれば示される。ここで $\mathcal{O}_{D'-D}$ の絶対値について計算する - $\mathcal{O}_D$ とは、$\mathcal{O}_{nP}$ の直和である。

$A \to B$ について $B/\mathfrak{q}$ の A での determinant をとるとはどういうこと？ でもこれってよくよく考えたら $A/\mathfrak{p}$ と同型ですよね、なのでそれで大丈夫です。

一般に $B/\mathfrak{q}^n$ とかの場合は？ $A/\mathfrak{p}^n \to B/\mathfrak{q}^n$ は同型であることが簡単に理解される (NAK とか) ため、determinant は計算できる。

(b) 分岐に関することを思いだせばよく、P の引き戻しは $\sum_{Q \in f^{-1}(P)} e_Q Q$ になり、よって押し出しは nP.

(c) hint 通りやればいい - 絶対値の計算だけ気をつければいい - rank n の locally free sheaf $\mathcal{F}$ について $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}$ の determinant は $\det(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{E}^{\otimes n}$ に一致することが理解される。より、$\det(f_* \Omega_X) \cong \det((f_* \mathcal{O}_X)^{-1} \otimes \Omega_Y) \cong \det(f_* \mathcal{O}_X)^{-1} \otimes \Omega_Y^{\otimes n}$ が成り立つ。

(d) $f^* \Omega_Y \otimes \Omega_X^{-1} \cong \mathcal{L}(-R)$ なる式が成り立っている。また、$\det(f_* \mathcal{L}(R)) \cong \det(f_* \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{L}(B)$ なる式より、また $\det(f_* \mathcal{L}(R)) \cong \det(\Omega_Y^{-1} \otimes f_* \Omega_X) \cong \Omega_Y^{\otimes -n} \otimes \det(f_* \Omega_X) \cong \det(f_* \mathcal{O}_X)^{-1}$ が成り立つ。よって主張が導かれる。

7

Y を標数 2 でない体 k 上の曲線とする。このとき、Y 上の degree 2, étale cover X を分類することを考える。
(a) $f \colon X \to Y$ なる degree 2, étale covering について、$\mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ の cokernel を $\mathcal{L}$ とおくと $\mathcal{L}$ は $\mathrm{Pic}(Y)$ の 2-torsion な元となる。
(b) $\mathcal{L}$ を $\mathrm{Pic}(Y)$ の 2-torsion な元としたとき、$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{L})$ は Y 上の degree 2, étale covering となる。
(c) この対応によって分類が完了する。

曲線のあいだの étale な射について考える。$f \colon X \to Y$ が étale であったならば、flat + of f.p. から open, よって全射ゆえに finite である。この finite étale 射について、これはつねに flat であるから、étale と unramified は同値 - これは分岐因子 R が消えていることと同値である。

Y が曲線であることから、X はまず体上有限型であることが理解され、$X \to Y$ が finite であるなら X は separated, さらに $X \to \mathrm{Spec}(k)$ は regular であるため、X は smooth - よって特に connected component は regular variety となってさらに curve となる。

(a) X が disconnected の場合は Y のコピー二枚となるのでよい。X が curve の場合は、$A \to B$ として環の射を考えると B/A は A-torsion free より $\mathcal{L}$ は可逆層。またさきの結果より $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ は自明となる。

(b) f.flat は明らかで、さらに étale をいうのは unramified を言えばよいが、これは微分が消えることをいえばよい - すると finite étale が構成される。

(c) (a)-構成から始める。X が Y の二枚コピーであったとすると、$\mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ の cokernel は $\mathcal{O}_Y$ となって、また (b)-構成は逆となる。

$\mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ の $\mathcal{O}_Y$-module としての split を trace によって構成できる。このとき、$\mathcal{L}^{\otimes 2} \to (f_* \mathcal{O}_X)^{\otimes 2} \to f_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ なる方法で非零な射を構成できる。よってこれは同型となる。これは $f_* \mathcal{O}_X$ が (b)-構成に登場する algebra と同型であることを示す。