Hartshorne solution 4.1

Pistol Dagger

1

> 曲線 X 上の点 P について、P 以外で正則であるような非定数の有理型関数は存在するか？

P は因子として ample であるため、ある自然数 n があって nP は very ample となる。nP の完備線形系が定める射影埋め込み $j\colon X \to \mathbb{P}^d$ を考えると、$nP \subset X$ はある超平面 H について $j^{-1}(H)$ と表示されることが理解される。よって $X \setminus P$ は $\mathbb{A}^d$ に埋め込まれた多様体であるため、かつこれは点ではないため、$\mathbb{A}^d$ により誘導される非定数な関数が存在する。

あるいは Riemann-Roch theorem を用いても定量的に解くことができる。

2

> 曲線 X 上の点 $P_1, \ldots, P_n$ について、$P_\bullet$ では極であって、それ以外で正則であるような有理型関数は存在するか？

同様の方法で $j\colon X \to \mathbb{P}^n$ で $j^{-1}(H) = a(P_1 + \ldots + P_n)$ なるようなものがとれる。このとき簡単のため $H = (x_0)$ で切り出されるとする。$H \cap X$ は有限点であるから、$\frac{\sum b_\bullet x_\bullet}{x_0}$ であって $H \cap X$ を極のままにする関数が存在する。よって、この関数を引き戻しは $P_1, \ldots, P_n$ を極とし、それ以外の点で正則な関数となる。

3

> X を integral, separated, regular, one-dimensional scheme であって of finite type over k かつ not proper over k とする。このとき X は affine である。

X の関数体を K とする - このとき、C_K を次のようなスキームとする。点としては K/k のなかの DVR R であって K を商体に持つもの全体として、位相は補有限位相をいれ、また関数の層は $\Gamma(U) := \bigcap_{P \in U} R_P$ と定める。

これがスキームであることを確認する。まず環付き空間となっていることはよく、局所環付き空間であることについては、$\mathcal{O}_P \subset R_P$ はよく、また $x \in R_P$ について、$x \in R_Q$ なる Q 全体の集合は補有限であるため、よい。

$P \in C_K$ が与えられたとき、$x \in R_P$ を任意にとると、$x \in R_Q$ なる Q について $k[x]$ の整閉包を R とおくと、$R \subset R_Q$ が成り立つ。ここで R は Dedekind 環であることに注意すると、$\{x \in R_Q\} \subset C_K$ は環付き空間として $\mathrm{Spec}(R)$ に同型である。よってこれはスキームとなる。

X の各点 P について、$\mathcal{O}_P \subset K$ は DVR である - よって、$X \to C_K$ なる位相空間の射を取ることができ

る。また、$U \subset X$ について $\Gamma(U) = \bigcup_{P \in U} \mathcal{O}_P$ が示されるため、$X \to C_K$ は自然に環付き空間の射となる。X の開集合 $\mathrm{Spec}(R)$ に射を制限するとこれは開部分スキームを定めるため、よって $X \to C_K$ はスキームの射である。

separated であるため、center の uniqueness より、$X \to C_K$ は単射である - ここまでのことから、X は C_K の開部分スキームであることがわかる。

Hartshorne, I 章あるいは II 章の理論により C_K は projective であることはすでに理解されている。このとき $D = C_K \setminus X$ をとると、nD はやがて very ample となるため、X は affine となる。

4

separated, one-dimensional scheme of finite type over k であって、どの既約成分も proper でないような X について、これが affine であることを示せ。

話は integral, separated, one-dimensional, of finite type に帰着させることができ、Ex.III.4.2 によれば finite surjective $X \to Y$ であって X が affine ならば Y もまた affine であるため、正規化 $\widetilde{X} \to X$ を考えると、$\widetilde{X}$ が proper ならばその像も proper となるはずゆえ、$\widetilde{X}$ は affine. よって話は終わる。

5

effective divisor D について $\dim|D| \leq \deg(D)$ が成り立ち、等号は $D = 0$ あるいは $g = 0$ の際に実現される。

Riemann-Roch より、$l(D) - l(K-D) = \deg(D) + 1 - g$ が成り立ち、よって $l(D) - g = l(D) - l(K) \leq l(D) - l(K-D) = \deg(D) + 1 - g$ が成り立ち、これは命題の前半をいう。後半については、$l(K) = l(K-D)$ が成り立つ条件について考えればよい。

$D \neq 0$ とすると、$l(K) = l(K-P)$ なる P が存在する。すると Riemann-Roch より $l(P) = 2$ となって、これは $g = 0$ を imply する。

6

X を種数 g の curve とすると、degree が $g+1$ 以下の $X \to \mathbb{P}^1$ なる有限射が存在する。

$X \to \mathbb{P}^1$ なる degree d の有限射を構成するためには、X 上の degree d の因子 D であって basepoint-free なものを構成すればよい。

ここで、basepoint-free とは、すなわち任意の $P \in X$ について、$\mathcal{L}(D)$ の元 f が存在して $D + (f)$ の support に P がないようにできることをいう - これは $l(D-P) = l(D) - 1$ と同値である。

basepoint-free な因子があれば、k は無限体であるため、線型空間は芯に部分な線型空間の有限和では表されないため、D_1, D_2 であって support を共有しないものがとれる。したがって、$X \to \mathbb{P}^1$ なる射が構成される。

ここで、$X \to \mathbb{P}^1$ が finite となる条件について復習する - X は projective scheme であり、surjective ならば quasi-finite であるため、これは finite となる。よって finite でないということは、これは一点を経由することになり、$\deg(D) = 0$ となってしまう。逆に $\deg(D) = 0$ ならば、$X \to \mathbb{P}^1$ は一点を経由する。

basepoint-free であるためには、effective な divisor と線形同値でなければならないことは先に言及しておく。

degree が $g+1$ 以下の因子について、これらがすべて basepoint-free でなかったとすると、degree $d \leq g+1$ の任意の effective divisor と線形同値な D について、ある $P \in X$ が存在して $0 \leq l(D) = l(D-P)$ が成り立ち、帰納的に $P = P_1, \ldots, P_d$ が存在して $0 \leq l(D) = l(D - P_1 - \ldots - P_d) = 0$ が理解される。

このとき、Riemann-Roch theorem に degree が $g+1$ の effective divisor を代入すると、左辺は高々 1 で抑えられ、右辺は 2 以上となるため、矛盾する。よって、degree が $g+1$ 以下なる $\mathbb{P}^1$ への射が存在する。

7

$X \to \mathbb{P}^1$ なる degree 2 の射を持つ種数 2 以上の curve X について、これを hyperelliptic という。
(a) 種数が 2 のとき、$|K|$ は hyperelliptic curve としての構造を定めることをみよ。
(b) 任意の $g \geq 2$ について、種数 g の hyperelliptic curve が存在することを示せ。

$|K|$ は basepoint-free である - 実際、$l(K) = 1$ であり、かつ $l(K-P) = 1$ ならば $X \cong \mathbb{P}^1$ となってしまうため、よい。また K の degree は 2 である。よってこれは hyperelliptic structure を定める。

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の $(g+1, 2)$ 型の因子であって nonsingular なものは Bertini の定理によって存在がいえる - さらに、あるファイバーと横断的に交わるようにしておく。この種数を計算すると、g と一致し、また一方の $\mathbb{P}^1$ への射影を考えると、ファイバーと因子との交差は長さ 2 であるから、この射影は degree 2 であることが理解される。

8

X を integral projective curve とする。このとき、完全系列

$$0 \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to f_* \mathcal{O}_X \to \bigoplus_P \widetilde{\mathcal{O}_P}/\mathcal{O}_P \to 0$$

が得られる。このとき δ_P を $\widetilde{\mathcal{O}_P}/\mathcal{O}_P$ の length とする。
(a) $p_a(X) = p_a(\widetilde{X}) + \sum \delta_P$ を示せ。
(b) $p_a(X) = 0$ ならば X は $\mathbb{P}^1$ と同型であることを示せ。
(c) P が node あるいは ordinary cusp であるとき $\delta_P = 1$ であることを示せ。

完全系列については、局所的には $\widetilde{R}/R$ であって、これは局所化すると $\widetilde{R_\mathfrak{p}}/R_\mathfrak{p}$ とかけるためよい。

(a) p_a の記述を思い出せばよい。ただし f が finite であることに注意する必要はある。

(b) (a) より、$p_a(\tilde{X}) \geq 0$ でありまた $\delta \geq 0$ であったため、X は非特異であってさらに $\mathbb{P}^1$ である。

(c) ? 長くなるため、あとにまわす。

9

X を integral projective 1-dimensional scheme over k とする。このとき、X_{reg} を regular locus とする。
(a) D を regular locus に support をもつ divisor とする - このとき $\chi(\mathcal{L}(D)) = \deg(D) + 1 - p_a(X)$ が成り立つ。
(b) 任意の X 上の Cartier divisor は very ample Cartier divisor の差でかけることを確認せよ。
(c) 任意の X 上の line bundle は regular locus に support をもつ divisor D によって $\mathcal{L}(D)$ のかたちでかけることを示せ。
(d) X が locally c.i. であるとき、ω_X° なる dualizing sheaf は line bundle であるため、これに対応する因子を K と表記すると、次の Riemann-Roch の定理が成り立つ。

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - p_a.$$

(a) については、$D = 0$ の場合は明らかである。摩天楼層だけズレる部分も計算すれば一般の場合で明らかである。

(b) Cartier divisor とは、$\Gamma(\mathcal{K}^*) \to \Gamma(\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ の cokernel の元であるが、これは X が integral であるため line bundle $\mathcal{L}$ と対応する。このとき、very ample divisor H をとると、$\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(D)^{\otimes n}$ は globally generated であり、よって $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}(D)^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}(D)$ は very ample となる。

(c) (b) を使わなくても示せるが、せっかく示したので使って示す。埋め込みを用意して、特異点と被らない超平面で切り出せばよい。

(d) Serre duality により明らか。

10

X を integral projective scheme over k であって $p_a = 1$ なるものとする。さらに locally c.i. とする。このとき、regular point P_0 を固定すると、$P \mapsto \mathcal{L}(P - P_0)$ は X_{reg} から $\mathrm{Pic}^\circ(X)$ への全単射になっている。

本文中の類似の議論と完全にパラレルに示される。

11　8, (c)

domain R について、これが N-1 であるとは、商体での整閉包が R-finite であることをいう。また N-2, Japanese であるとは、任意の商体の有限次拡大のもとでの整閉包が R-finite であることをいう。

Nagata ring とは、Noetherian ring R であって、任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ について $R/\mathfrak{p}$ が Japanese であることをいう。

- R を Nagata ring とし、$R \to S$ を essentially of finite type ring map とする。さらに、S は reduced であるとする。このとき S のなかでの R の整閉包は R-finite である。

実際、S は Noetherian であるため、極小素イデアル $\mathfrak{q}_\bullet$ について $\prod S_{\mathfrak{q}_\bullet}$ に埋め込まれ、よって S につい

て以下これを体としてよい。$R \to S$ の kernel を $\mathfrak{p}$ とすると、S は $R/\mathfrak{p}$ 上 essentially of finite type であるから、$R/\mathfrak{p}$ の商体上有限生成拡大体であり、よって代数的な部分は有限拡大となっている。よって Nagata ring の定義より、S での整閉包は有限 R-finite module となっている。

ここまでの設定のもとで、reduced 1-dimensional Nagata ring について δ-invariant なる数値を定める。

- $(A, \mathfrak{m})$ を 1-次元 Nagata ring として、さらに reduced とする。このとき、A' を A の total ring のなかでの整閉包とする。すれば、A' は normal Nagata ring となり、A'/A は finite length となる。

先程の議論から、A' は A-finite である。A' が normal であることは normal ring の一般論より明らかで、$A \to A'$ が finite であることから Nagata ring の一般論より A' は Nagata である - 実際 Noether 性はよく、素イデアルごとの N-2 性のみ確認すればよい。これは次の補題による。

- $R \subset S$ を quasi-finite extension of domains とし、R を N-2, Noetherian とする。このとき S は N-2 である。

実際には finite のレベルで示せばよくて - この場合は明らかである。quasi-finite のレベルでは、stacks にその証明が載っている。

f を A の nonzerodivisor とすると、A_f は A の total ring となり、$A \to A' \to A_f$ なる射の図式をみれば、A'/A は $\mathfrak{m}$ にのみ stalk をもつため、finite length である。

よって、A'/A の length として A の δ-invariant を定める。

次に、A の completion $\widehat{A}$ の δ-invariant についてみていく。

そもそも $\widehat{A}$ は reduced 1-dimensional Nagata ring であるか？

- Noetherian local ring A についてこれが analytically unramified であるとは、$\widehat{A}$ が reduced であることをいう。

analytically unramified に関する基本的事実に関して復習していく。まず $R \to \widehat{R}$ は faithfully flat であるから特に単射であり、R が analytically unramified ならば R は reduced である。

また、R が reduced であったとして、$\mathfrak{q}_\bullet$ が極小素イデアルであったとして、さらに $R/\mathfrak{q}_\bullet$ が analytically unramified であったとする。このとき R は analytically unramified である。実際、$R \to \prod R/\mathfrak{q}_\bullet$ の完備化は単射であるから、主張は従う。

また、Noetherian local Nagata domain が analytically unramified であることを示す - これが完了すれば A: reduced Nagata ring について、$\widehat{A}$ が reduced であることを確認できる。

工事中

ここまでの議論により、$\widehat{A}$ の δ-invariant は A の δ-invariant と一致する。よって、δ-invariant を計算するには completion のデータがあれば充分である。

よって、具体的な node, ordinary cusp をもつ特異な曲線について算術種数を計算すればよい。