Calcolo Combinatorio

Pietro Poluzzi

Febbraio 2020

Indice

1 Introduzione al calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio studia il numero di modi in cui è possibile raggruppare, disporre od ordinare gli elementi di un insieme finito.

1.1 Funzione fattoriale

Definizione

n fattoriale si esprime con **n!** ed indica il prodotto dei primi n numeri naturali, escluso lo zero. Siano $0! = 1$ e $1! = 1$, allora:
$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)... \cdot 2 \cdot 1$ con $n \geq 2$
La definizione può essere espressa con una sorta di *funzione ricorsiva*:
$n! = n \cdot (n-1)!$

1.2 Coefficienti binomiali

Definizione

Siano $n, k \in \mathbb{N}$ e $0 < k \leq n$, il coefficiente binomiale di n e k è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.2.1 Legge della classi complementari

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dimostrazione:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}$$

1.2.2 Formula di ricorrenza

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

La formula di ricorrenza è utile quando si conosce il valore del coefficiente binomiale per un dato valore di k e si devono trovare i valori delle classi successive o precedenti.

2 Disposizioni

2.1 Disposizioni semplici

Definizione

Siano $n, k \in \mathbb{N}$ e $0 < k \leq n$, le disposizioni semplici di n elementi di classe k sono tutti i gruppi di k elementi che differiscono per almeno un elemento o per l'ordine con cui gli elementi sono collocati.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

Questa espressione può essere semplificata utilizzando i numeri fattoriali:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio

$$\begin{aligned} D_{7,3} = & 7 \cdot (7-1) \cdot (7-3+1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \\ D_{7,3} = & \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \end{aligned}$$

2.2 Disposizioni con ripetizione

Definizione

Siano $n, k \in \mathbb{N}$ e $0 < k \leq n$, le disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k sono tutti i gruppi di k elementi che differiscono per almeno un elemento o per l'ordine con cui gli elementi sono collocati.

$$D'_{n,k} = n^k$$

Esempio

$$D'_{22,3} = 22^3 = 10648$$

3 Permutazioni

3.1 Permutazioni semplici

Definizione

Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, le permutazioni semplici di n elementi sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per il loro ordine.

$$P_n = n!$$

Esempio

Si intende trovare tutti i numeri di 6 cifre distinte si possono scrivere utilizzando gli elementi dell'insieme $A = \{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

3.2 Permutazioni con ripetizione

Definizione

Siano $n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e $0 < k \leq n$, le permutazioni con ripetizione di n elementi, di cui k ripetuti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per il loro ordine.

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$$

Esempio

Si vuole calcolare i modi in cui 5 sedie possono essere occupate da 3 persone. Si deve quindi calcolare il numero di permutazioni di 5 elementi, 2 dei quali (le sedie vuote) sono ripetuti.

$$P_k^{(2)} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

4 Combinazioni

4.1 Combinazioni semplici

Definizione

Siano $n, k \in \mathbb{N} - \{0\}, 0 < k \leq n$, le combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k sono tutti i gruppi di k elementi che differiscono per almeno un elemento ma non per l'ordine.

$$C_{n,\,k} = \frac{D_{n,\,k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Esempio

Dato un insieme $A = \{1, 15, 23, 44, 56\}$ che rappresenti i numeri di 5 bici, si vuole calcolare come queste possono essere assegnate a 2 piloti.

$$C_{5,\,2} = \frac{D_{5,\,2}}{P_2} = \frac{5!}{3!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

Si ottiene lo stesso risultato applicando alle combinazioni semplici la definizione di coefficiente binomiale:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

4.2 Combinazioni con ripetizione

Definizione

Siano $n, k \in \mathbb{N} - \{0\}, 0 < k \leq n$, le combinazioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k sono tutti i gruppi di k elementi che soddisfino i seguenti requisiti:

- ogni elemento può essere ripetuto fino a k volte
- l'ordine con cui si presentano gli elementi non ha importanza
- il numero di volte che il quale un elemento compare è diverso

$$C'_{n,\,k} = C_{n+k-1,\,k} = \frac{n \cdot (n+k-1) \cdot (n+k-2) ... \cdot (n+1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Esempio

Si vuole calcolare in quanti modi diversi si possono distribuire 6 libri in 4 scaffali diversi. **N.B.** Alcuni scaffali possono rimanere vuoti.

$$C'_{4,\,6} = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!\cdot(9-6)!} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 3!} =$$
$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!} = \frac{504}{6} = 84$$

5 Binomio di Newton

Per calcolare le potenze di un binomio con esponente maggiore di 3, si ricorre al triangolo di Tartaglia. I lati obliqui del triangolo sono formati da diversi 1, mentre ogni coefficiente interno è la somma dei due coefficienti della riga precedente che sono alla sua destra e alla sua sinistra. La potenza con esponente n ha il seguente sviluppo: $(A+B)^n = (...)A^nB^0 + (...)A^{n-1}B^1 + ... + A^0B^n$
Siano (...) i coefficienti dell'n-esima riga. Si prenda come esempio $n = 4$: $(A+B)^4 = 1A^4B^0 + 4A^3B^1 + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$

Si indichi con k la posizione di un numero della riga e sia $k = 0$ il primo numero a sinistra. La k-esima posizione dell'n-esima riga è occupata dal numero che corrisponde al coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$

I coefficienti binomiali si possono usare per lo sviluppo di $(A+B)^n$ ottenendo la formula del binomio di Newton:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^nB^0 + \binom{n}{1}A^{n-1}B^1 + ... + \binom{n}{n-1}A^1B^{n-1} + \binom{n}{n}A^0B^n$$

La formula può essere scritta più sinteticamente utilizzando il simbolo della **sommatoria**: si ricordi infatti che $\sum\limits_{k=0}^{n}$ significa *somma dei termini che si ottengono quando k varia da 0 a n*, allora la formula del binomio di Newton è riscritta come segue:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k$$

Esempio

$$(a+b)^6 =$$
$$= \binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5b+\binom{6}{2}a^4b^2+\binom{6}{3}a^3b^3+\binom{6}{4}a^2b^4+\binom{6}{5}ab^5+\binom{6}{6}b^6 =$$
$$= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

5.1 Formula di Stifel

Definizione
Nel triangolo di Tartaglia, ogni coefficiente è la somma dei due coefficienti della riga precedente a destra e sinistra.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$