

Soluciones Numéricas para Dinámica de Fluidos con FreeFEM⁺⁺

XXXIII CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
UNIVERSIDAD DE ANTOFAGASTA - CHILE

Pitágoras Pinheiro de Carvalho
pitagorascarvalho@gmail.com

Coordenação de Matemática
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

07 / 08 / 2025
(Segundo día)



XXXIII COMCA



Índice

1. Poisson

2. Stokes

- 2.1. Stokes Estacionário
- 2.2. Stokes Evolutivo

3. Navier-Stokes :

- 3.1. Navier Stokes Estacionário :
- 3.2. Navier Stokes Evolutivo :

4. Referências

Parte 1: Película de jabón - Resolución y visualización

Película de jabón con contorno fijo (Dirichlet homogéneo), y $f = -1$.



Parte 1: Película de jabón - Resolución y visualización

Película de jabón con contorno fijo (Dirichlet homogéneo), y $f = -1$.

Código inicial: malla, espacio funcional y formulación del problema.



Parte 1: Película de jabón - Resolución y visualización

Película de jabón con contorno fijo (Dirichlet homogéneo), y $f = -1$.

Código inicial: malla, espacio funcional y formulación del problema.

```
int nn = 50; // Puntos en borde
```



Parte 1: Película de jabón - Resolución y visualización

Película de jabón con contorno fijo (Dirichlet homogéneo), y $f = -1$.

Código inicial: malla, espacio funcional y formulación del problema.

```
int nn = 50; // Puntos en borde
```

```
func f = -1; // gravedad
func ue = (x^2 + y^2 - 1)/4; // solución exacta
```



Parte 1: Película de jabón - Resolución y visualización

Película de jabón con contorno fijo (Dirichlet homogéneo), y $f = -1$.

Código inicial: malla, espacio funcional y formulación del problema.

```
int nn = 50; // Puntos en borde
```

```
func f = -1; // gravedad
func ue = (x^2 + y^2 - 1)/4; // solución exacta
```

```
border a(t=0, 2*pi){x = cos(t); y = sin(t); label = 1;} // Dominio parametrizado
```



Parte 1: Película de jabón - Resolución y visualización

Película de jabón con contorno fijo (Dirichlet homogéneo), y $f = -1$.

Código inicial: malla, espacio funcional y formulación del problema.

```
int nn = 50; // Puntos en borde
```

```
func f = -1; // gravedad
func ue = (x^2 + y^2 - 1)/4; // solución exacta
```

```
border a(t=0, 2*pi){x = cos(t); y = sin(t); label = 1;} // Dominio parametrizado
```

```
mesh Th = buildmesh(a(nn)); // Crear Malla
plot(Th); // Plot el Dominio Mallado
```



Parte 1: Película de jabón - Resolución y visualización

Película de jabón con contorno fijo (Dirichlet homogéneo), y $f = -1$.

Código inicial: malla, espacio funcional y formulación del problema.

```
int nn = 50; // Puntos en borde
```

```
func f = -1; // gravedad
func ue = (x^2 + y^2 - 1)/4; // solución exacta
```

```
border a(t=0, 2*pi){x = cos(t); y = sin(t); label = 1;} // Dominio parametrizado
```

```
mesh Th = buildmesh(a(nn)); // Crear Malla
plot(Th); // Plot el Dominio Mallado
```

```
// Espacio de Soluciones aproximadas
fespace Vh(Th, P1); // Vh espacio de Elementos Finitos & P1 Polinomios Interpoladores
Vh u, v; // Elementos de Vh
```



Parte 1: Película de jabón

```
problem laplace (u, v) = int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ) // Primera parte
```



Parte 1: Película de jabón

```
problem laplace (u, v) = int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ) // Primera parte
```

```
- int2d(Th)( f*v ) // Segunda parte
```



Parte 1: Película de jabón

```
problem laplace (u, v) = int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ) // Primera parte
```

```
- int2d(Th)( f*v ) // Segunda parte
```

```
+ on(1, u=0) // Dirichlet condicion
```



Parte 1: Película de jabón

```
problem laplace (u, v) = int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ) // Primera parte
```

```
- int2d(Th)( f*v ) // Segunda parte
```

```
+ on(1, u=0) // Dirichlet condicion
```

```
;
```



Parte 1: Película de jabón

```
problem laplace (u, v) = int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ) // Primera parte
```

```
- int2d(Th)( f*v ) // Segunda parte
```

```
+ on(1, u=0) // Dirichlet condicion
```

```
;
```

```
laplace; // Resuelve el problema
```



Parte 1: Película de jabón

```
problem laplace (u, v) = int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) ) // Primera parte
```

```
- int2d(Th)( f*v ) // Segunda parte
```

```
+ on(1, u=0) // Dirichlet condicion
```

```
;
```

```
laplace; // Resuelve el problema
```

```
plot(u, value = true, wait = true); // Visualizar la solución en cada actualización
```



Resolución y cálculo del error

```
Vh err = u - ue; // Definir la variable que computa el error
```



Resolución y cálculo del error

```
Vh err = u - ue; // Definir la variable que computa el error
```

```
plot(err, value = true, wait = true); // Plota el error
```



Resolución y cálculo del error

```
Vh err = u - ue; // Definir la variable que computa el error
```

```
plot(err, value = true, wait = true); // Plota el error
```

```
// Error con norma L2
cout << "error L2 = " << sqrt(int2d(Th)(err^2)) << endl;
```



Resolución y cálculo del error

```
Vh err = u - ue; // Definir la variable que computa el error
```

```
plot(err, value = true, wait = true); // Plota el error
```

```
// Error con norma L2
cout << "error L2 = " << sqrt(int2d(Th)(err^2)) << endl;
```

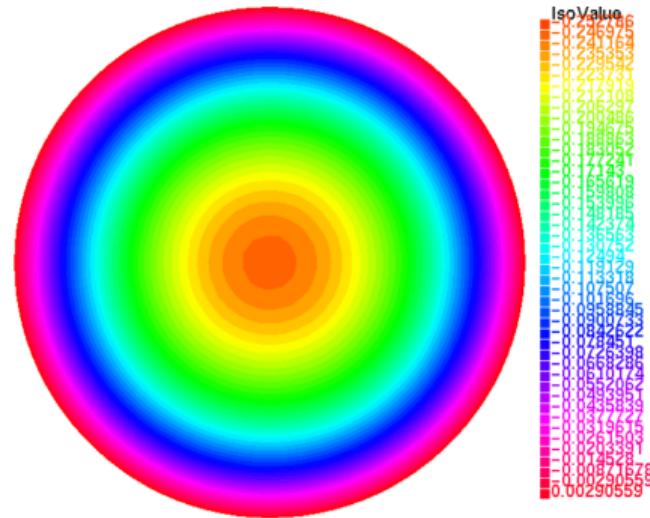
```
// Error con norma H10
cout << "error H10 = " << sqrt(int2d(Th)((dx(u)-x/2)^2) + int2d(Th)((dy(u)-y/2)^2)) << endl;
```

Error en la norma L2 : $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x) - u_h(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

Error en la norma H1 : $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x) - \nabla u_h(x)|^2 dx \right)^{1/2}$.

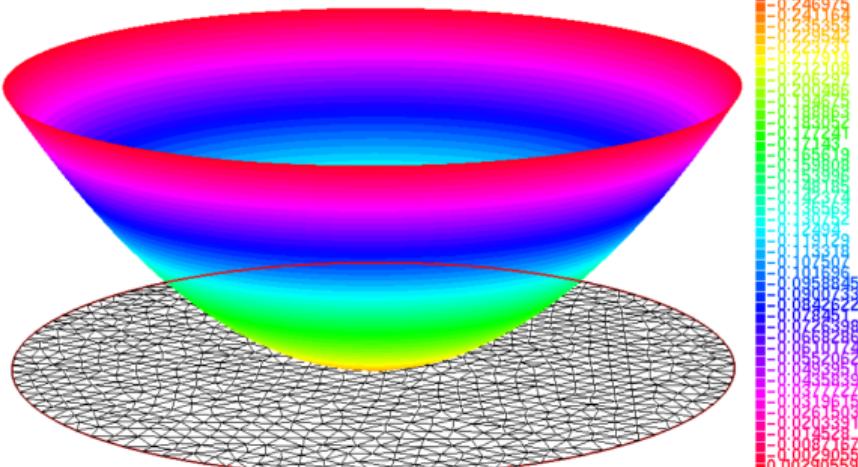
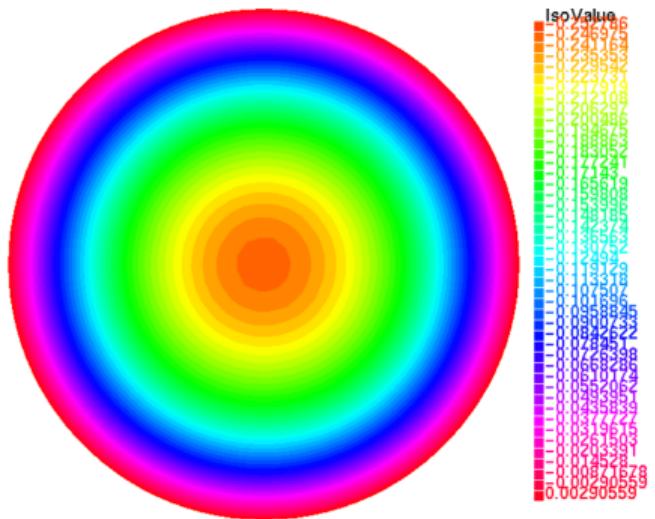


Plots Poisson





Plots Poisson

Figura: State u

error L2 = 9.19452e-05 , error H10 = 0.0183127



Armazenar os dados

```
load "iovtk" // para los formatos vtk e vtu (poner en linea 1)
real[int] errL2(10), errH1(10);
for (int i = 1; i < 10; i++)
{
    errL2[i-1] = sqrt(int2d(Th)( (u - ue)^2 )); // norma L2 del error
    errH1[i-1] = sqrt(int2d(Th)( (u - ue)^2 + (dx(u) - dx(ue))^2 + (dy(u) - dy(ue))^2 ) ); // norma
        H1 del error

    ofstream file1("ErrL2.txt");
    file1 << errL2(0:i) << endl; // Salva los errores L2 en .txt

    ofstream file2("ErrH1.txt");
    file2 << errH1(0:i) << endl; // Salva los errores H1 en .txt
}
savevtk("Th.vtk", Th); // (MALLA PARAVIEW)
int[int] ffolder=[1,1];
savevtk("ustate.vtu", Th, u, dataname="Solucion", order=ffolder); // (Solucion PARAVIEW)
```



Índice

1. Poisson

2. Stokes

- 2.1. Stokes Estacionário
- 2.2. Stokes Evolutivo

3. Navier-Stokes :

- 3.1. Navier Stokes Estacionário :
- 3.2. Navier Stokes Evolutivo :

4. Referências



XXXIII COMCA

Congreso Matemática Capricornio
Universidad de Antofagasta

Esquemas para Stokes

- **Estacionário**



Ecuaciones de Stokes (Caso estacionario)

Modelan el flujo lento y viscoso de un fluido, donde la inercia es despreciable frente a la viscosidad.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

- \mathbf{u} vector velocidad del fluido;



Ecuaciones de Stokes (Caso estacionario)

Modelan el flujo lento y viscoso de un fluido, donde la inercia es despreciable frente a la viscosidad.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

- \mathbf{u} vector velocidad del fluido;
- $\nu > 0$ viscosidad cinemática del fluido,



Ecuaciones de Stokes (Caso estacionario)

Modelan el flujo lento y viscoso de un fluido, donde la inercia es despreciable frente a la viscosidad.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

- \mathbf{u} vector velocidad del fluido;
- $\nu > 0$ viscosidad cinemática del fluido, $\nu \Delta \mathbf{u}$ es el término de difusión viscosa;



Ecuaciones de Stokes (Caso estacionario)

Modelan el flujo lento y viscoso de un fluido, donde la inercia es despreciable frente a la viscosidad.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

- \mathbf{u} vector velocidad del fluido;
- $\nu > 0$ viscosidad cinemática del fluido, $\nu \Delta \mathbf{u}$ es el término de difusión viscosa;
- p es la presión del fluido;



Ecuaciones de Stokes (Caso estacionario)

Modelan el flujo lento y viscoso de un fluido, donde la inercia es despreciable frente a la viscosidad.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

- \mathbf{u} vector velocidad del fluido;
- $\nu > 0$ viscosidad cinemática del fluido, $\nu \Delta \mathbf{u}$ es el término de difusión viscosa;
- p es la presión del fluido;
- \mathbf{f} representa la fuerza externa aplicada (por ejemplo, gravedad);



Ecuaciones de Stokes (Caso estacionario)

Modelan el flujo lento y viscoso de un fluido, donde la inercia es despreciable frente a la viscosidad.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

- \mathbf{u} vector velocidad del fluido;
- $\nu > 0$ viscosidad cinemática del fluido, $\nu \Delta \mathbf{u}$ es el término de difusión viscosa;
- p es la presión del fluido;
- \mathbf{f} representa la fuerza externa aplicada (por ejemplo, gravedad);
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ impone la incompresibilidad del fluido;



Ecuaciones de Stokes (Caso estacionario)

Modelan el flujo lento y viscoso de un fluido, donde la inercia es despreciable frente a la viscosidad.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^d \quad (d = 2, 3), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

- \mathbf{u} vector velocidad del fluido;
- $\nu > 0$ viscosidad cinemática del fluido, $\nu \Delta \mathbf{u}$ es el término de difusión viscosa;
- p es la presión del fluido;
- \mathbf{f} representa la fuerza externa aplicada (por ejemplo, gravedad);
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ impone la incompresibilidad del fluido;
- ∇p es el gradiente de presión, que impulsa o resiste el movimiento del fluido.



XXXIII COMCA

Congreso Matemática Capricornio
Universidad de Antofagasta

Stokes

Stokes ($\nu = 1$)



Forma débil 2D (o 3D) (TEMAM [2] / [3], Glowinski [4])

Obtener $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbf{V}(\Omega)$:

$$\mathbf{V}(\Omega) = \left\{ \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^2 \mid \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \right\}$$

que satisaga:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \quad \text{para todo } v \in V.$$

Aquí se utiliza la existencia de $p \in H^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{u} = \nabla p$, si se cumple:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in V.$$



Formulación (Otra forma débil...)

Otra forma débil se obtiene al imponer:

$$\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)^2; \quad W = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}.$$

Multiplicando la primera ecuación en (1) por $v \in \mathbf{V}$, y la segunda por $q \in W$, seguida de la integración sobre Ω y una aplicación de la fórmula de Green, se obtiene:



Formulación (Otra forma débil...)

Otra forma débil se obtiene al imponer:

$$\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)^2; \quad W = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}.$$

Multiplicando la primera ecuación en (1) por $v \in \mathbf{V}$, y la segunda por $q \in W$, seguida de la integración sobre Ω y una aplicación de la fórmula de Green, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} p = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q = 0.$$



Formulación (Otra forma débil...)

Otra forma débil se obtiene al imponer:

$$\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)^2; \quad W = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}.$$

Multiplicando la primera ecuación en (1) por $v \in \mathbf{V}$, y la segunda por $q \in W$, seguida de la integración sobre Ω y una aplicación de la fórmula de Green, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} p = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q = 0. \quad (2)$$

Así, se obtiene la forma débil de (1), que consiste en encontrar $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times W$ tal que:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned}$$

para todo $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times W$.



Formulación (Galerkin)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i$$

y

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q$$



Formulación (Galerkin)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i$$

y

$$b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q$$

Ahora, consideramos espacios de elementos finitos $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ y $W_h \subset W$, y asumimos las siguientes funciones base:



Formulación (Galerkin)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \quad \text{y} \quad b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q$$

Ahora, consideramos espacios de elementos finitos $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ y $W_h \subset W$, y asumimos las siguientes funciones base:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_h &= V_h \times V_h, \quad V_h = \{v_h \mid v_h = v_1 \phi_1 + \cdots + v_{M_V} \phi_{M_V}\} \\ W_h &= \{q_h \mid q_h = q_1 \varphi_1 + \cdots + q_{M_W} \varphi_{M_W}\}.\end{aligned}$$



Formulación (Galerkin)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \quad \text{y} \quad b(\mathbf{u}, q) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q$$

Ahora, consideramos espacios de elementos finitos $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ y $W_h \subset W$, y asumimos las siguientes funciones base:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_h &= V_h \times V_h, \quad V_h = \{v_h \mid v_h = v_1 \phi_1 + \cdots + v_{M_V} \phi_{M_V}\} \\ W_h &= \{q_h \mid q_h = q_1 \varphi_1 + \cdots + q_{M_W} \varphi_{M_W}\}.\end{aligned}$$

La forma débil discreta es: encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ tal que:

$$\begin{aligned}a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in W_h\end{aligned}\tag{3}$$



Método 1: (LBB) (see e.g. [5], Theorem 10.4)

Suponga que:



Método 1: (LBB) (see e.g. [5], Theorem 10.4)

Suponga que:

- Existe una constante $\alpha_h > 0$ tal que se cumple:

Método 1: (LBB) (see e.g. [5], Theorem 10.4)

Suponga que:

- Existe una constante $\alpha_h > 0$ tal que se cumple:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{para todo } \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h,$$

con

Método 1: (LBB) (see e.g. [5], Theorem 10.4)

Suponga que:

- Existe una constante $\alpha_h > 0$ tal que se cumple:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{para todo } \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h,$$

con

$$\mathbf{Z}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \mid b(\mathbf{w}_h, q_h) = 0 \quad \text{for all } q_h \in W_h\}$$

Método 1: (LBB) (see e.g. [5], Theorem 10.4)

Suponga que:

- Existe una constante $\alpha_h > 0$ tal que se cumple:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{para todo } \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h,$$

con

$$\mathbf{Z}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \mid b(\mathbf{w}_h, q_h) = 0 \quad \text{for all } q_h \in W_h\}$$

- Existe una constante $\beta_h > 0$ (**LBB**) tal que:



Método 1: (LBB) (see e.g. [5], Theorem 10.4)

Suponga que:

- Existe una constante $\alpha_h > 0$ tal que se cumple:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{para todo } \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h,$$

con

$$\mathbf{Z}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \mid b(\mathbf{w}_h, q_h) = 0 \quad \text{for all } q_h \in W_h\}$$

- Existe una constante $\beta_h > 0$ (**LBB**) tal que:

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta_h \|q_h\|_{0,\Omega} \quad \text{para todo } q_h \in W_h$$



Método 1: (LBB) (see e.g. [5], Theorem 10.4)

Suponga que:

- Existe una constante $\alpha_h > 0$ tal que se cumple:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{para todo } \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h,$$

con

$$\mathbf{Z}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \mid b(\mathbf{w}_h, q_h) = 0 \quad \text{for all } q_h \in W_h\}$$

- Existe una constante $\beta_h > 0$ (**LBB**) tal que:

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta_h \|q_h\|_{0,\Omega} \quad \text{para todo } q_h \in W_h$$

Entonces, tenemos una solución única (\mathbf{u}_h, p_h) y una constante $C > 0$ en (3) que satisface

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in W_h} \|p - q_h\|_{0,\Omega} \right).$$



Formulación Matricial

Sea

$$A = (A_{ij}), \quad A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i, \quad i, j = 1, \dots, M_v$$

$$\mathbf{B} = (B_{ij}^x, B_{ij}^y), \quad \begin{cases} B_{ij}^x = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \varphi_i \\ B_{ij}^y = - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \varphi_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, M_W; \quad j = 1, \dots, M_V;$$

si escribe:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_h \\ \{p_h\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h \\ 0 \end{pmatrix}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}^* = \left\{ \begin{array}{l} Bx^T \\ By^T \end{array} \right\} \quad \mathbf{U}_h = \left\{ \begin{array}{l} \{u_{1,h}\} \\ \{u_{2,h}\} \end{array} \right\} \quad \mathbf{F}_h = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \int_{\Omega} f_1 \phi_i \right\} \\ \left\{ \int_{\Omega} f_2 \phi_i \right\} \end{array} \right\}.$$



Método 2: (Penalización) (see [5])

Este método consiste en reemplazar (3) por un problema más regular, o sea obtener $(\mathbf{v}_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathbf{V}_h \times \tilde{W}_h$ que cumple



Método 2: (Penalización) (see [5])

Este método consiste en reemplazar (3) por un problema más regular, o sea obtener $(\mathbf{v}_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathbf{V}_h \times \tilde{W}_h$ que cumple



Método 2: (Penalización) (see [5])

Este método consiste en reemplazar (3) por un problema más regular, o sea obtener $(\mathbf{v}_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathbf{V}_h \times \tilde{W}_h$ que cumple

$$a(\mathbf{u}_h^\epsilon, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^\epsilon) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

$$b(\mathbf{u}_h^\epsilon, q_h) - \epsilon(p_h^\epsilon, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \tilde{W}_h$$

con $\tilde{W}_h \subset L^2(\Omega)$.



Método 2: (Penalización) (see [5])

Este método consiste en reemplazar (3) por un problema más regular, o sea obtener $(\mathbf{v}_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathbf{V}_h \times \tilde{W}_h$ que cumple

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h^\epsilon, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^\epsilon) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h^\epsilon, q_h) - \epsilon(p_h^\epsilon, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in \tilde{W}_h \end{aligned}$$

con $\tilde{W}_h \subset L^2(\Omega)$. Formalmente tenemos

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{u}_h^\epsilon = \epsilon p_h^\epsilon},$$



Método 2: (Penalización) (see [5])

Este método consiste en reemplazar (3) por un problema más regular, o sea obtener $(\mathbf{v}_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathbf{V}_h \times \tilde{W}_h$ que cumple

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h^\epsilon, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^\epsilon) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h^\epsilon, q_h) - \epsilon(p_h^\epsilon, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in \tilde{W}_h \end{aligned}$$

con $\tilde{W}_h \subset L^2(\Omega)$. Formalmente tenemos

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{u}_h^\epsilon = \epsilon p_h^\epsilon},$$

y su forma algebraica:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & B^* \\ B & -\epsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_h^\epsilon \\ \{p_h^\epsilon\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Método 2: (Penalización) (see [5])

Este método consiste en reemplazar (3) por un problema más regular, o sea obtener $(\mathbf{v}_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathbf{V}_h \times \tilde{W}_h$ que cumple

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h^\epsilon, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^\epsilon) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h^\epsilon, q_h) - \epsilon(p_h^\epsilon, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in \tilde{W}_h \end{aligned}$$

con $\tilde{W}_h \subset L^2(\Omega)$. Formalmente tenemos

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{u}_h^\epsilon = \epsilon p_h^\epsilon},$$

y su forma algebraica:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & B^* \\ B & -\epsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_h^\epsilon \\ \{p_h^\epsilon\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Método 2: (Penalización) (see [5])

Este método consiste en reemplazar (3) por un problema más regular, o sea obtener $(\mathbf{v}_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathbf{V}_h \times \tilde{W}_h$ que cumple

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h^\epsilon, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^\epsilon) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h^\epsilon, q_h) - \epsilon(p_h^\epsilon, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in \tilde{W}_h \end{aligned}$$

con $\tilde{W}_h \subset L^2(\Omega)$. Formalmente tenemos

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{u}_h^\epsilon = \epsilon p_h^\epsilon},$$

y su forma algebraica:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & B^* \\ B & -\epsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_h^\epsilon \\ \{p_h^\epsilon\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Existe una constante $C > 0$ independiente de ϵ tal que

$$\boxed{\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^\epsilon\|_{1,\Omega} + \|p_h - p_h^\epsilon\|_{0,\Omega} \leq C\epsilon}.$$



Stokes Estacionario (Simulación)

Encontrar la velocidad $\mathbf{u} = (u, v)$ y la presión p tales que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4 \\ \mathbf{u} = (1, 0)^T & \text{en } \Gamma_3 \end{cases}$$



Stokes Estacionario (Simulación)

Encontrar la velocidad $\mathbf{u} = (u, v)$ y la presión p tales que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4 \\ \mathbf{u} = (1, 0)^T & \text{en } \Gamma_3 \end{cases}$$

en su forma débil

$$\int_{\Omega} [\nu \nabla u \cdot \nabla v - p \nabla \cdot v - q \nabla \cdot u] = 0,$$

- ν es la viscosidad cinemática,
- Ω una cavidad cuadrada, y Γ_i sus bordes.



Stokes Estacionario (PENALIZACIÓN)

```
real nu=1;  
mesh Th=square(2^6, 2^6);
```



Stokes Estacionario (PENALIZACIÓN)

```
real nu=1;  
mesh Th=square(2^6, 2^6);
```

```
fespace Vh(Th, P2); Vh u, v, uu, vv;  
fespace Qh(Th, P1); Qh p, pp;
```



Stokes Estacionario (PENALIZACIÓN)

```
real nu=1;
mesh Th=square(2^6, 2^6);
```

```
fespace Vh(Th, P2); Vh u, v, uu, vv;
fespace Qh(Th, P1); Qh p, pp;
```

```
problem Stokes([u,v,p] , [uu,vv,pp] , solver=LU)
  = int2d(Th)( nu*( dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu) + dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv) )
  - p*(dx(uu) + dy(vv)) - pp*(dx(u) + dy(v)) - p*pp*1.e-6 )
```



Stokes Estacionario (PENALIZACIÓN)

```
real nu=1;
mesh Th=square(2^6, 2^6);
```

```
fespace Vh(Th, P2); Vh u, v, uu, vv;
fespace Qh(Th, P1); Qh p, pp;
```

```
problem Stokes([u,v,p] , [uu,vv,pp] , solver=LU)
  = int2d(Th)( nu*( dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu) + dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv) )
  - p*(dx(uu) + dy(vv)) - pp*(dx(u) + dy(v)) - p*pp*1.e-6 )
```

```
+ on(1, 2, 4, u=0, v=0) + on(3, u=1, v=0);
```



Stokes Estacionario (PENALIZACIÓN)

```
real nu=1;
mesh Th=square(2^6, 2^6);
```

```
fespace Vh(Th, P2); Vh u, v, uu, vv;
fespace Qh(Th, P1); Qh p, pp;
```

```
problem Stokes([u,v,p] , [uu,vv,pp] , solver=LU)
  = int2d(Th)( nu*( dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu) + dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv) )
  - p*(dx(uu) + dy(vv)) - pp*(dx(u) + dy(v)) - p*pp*1.e-6 )
```

```
+ on(1, 2, 4, u=0, v=0) + on(3, u=1, v=0);
```

```
Stokes;
```

```
plot([u,v],p, value=true, wait=true);
```



Stokes Estacionário (PENALIZACIÓN)

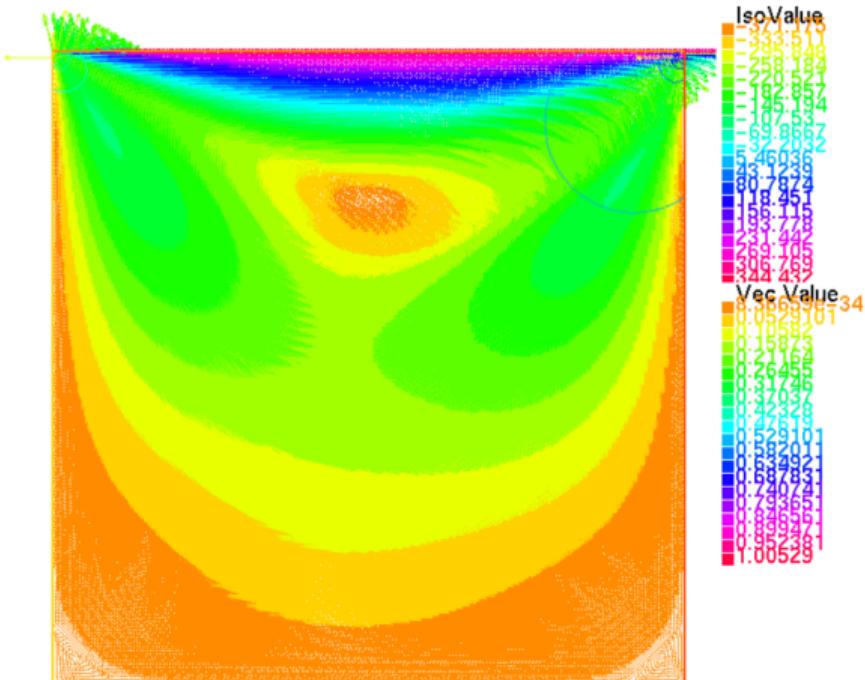


Figura: Velocidade e Pressão



XXXIII COMCA

Congreso Matemática Capricornio
Universidad de Antofagasta

Esquemas para Stokes

- **Evolutivo**



Stokes-Evolutivo (PENALIZACIÓN)

Obtener $\mathbf{u} = (u, v)$ e p tales que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \\ \mathbf{u} = (1, 0)^T & \text{em } \Gamma_3, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

em sua forma débil

Stokes-Evolutivo (PENALIZACIÓN)

Obtener $\mathbf{u} = (u, v)$ e p tales que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{em } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \\ \mathbf{u} = (1, 0)^T & \text{em } \Gamma_3, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

em sua forma debil

$$\int_{\Omega} \left[\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} v + \nu \nabla u^m \cdot \nabla v - p^m \nabla \cdot v - q \nabla \cdot u^m \right] = 0,$$



Stokes-Evolutivo (PENALIZACIÓN)

Obtener $\mathbf{u} = (u, v)$ e p tales que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \\ \mathbf{u} = (1, 0)^T & \text{en } \Gamma_3, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

en sua forma débil

$$\int_{\Omega} \left[\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} v + \nu \nabla u^m \cdot \nabla v - p^m \nabla \cdot v - q \nabla \cdot u^m \right] = 0,$$

- $\nu = 0.01$ es la viscosidad cinemática;
- Δt el paso de tiempo,



Stokes-Evolutivo (PENALIZACIÓN)

Obtener $\mathbf{u} = (u, v)$ e p tales que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{en } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \\ \mathbf{u} = (1, 0)^T & \text{en } \Gamma_3, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

en sua forma débil

$$\int_{\Omega} \left[\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} v + \nu \nabla u^m \cdot \nabla v - p^m \nabla \cdot v - q \nabla \cdot u^m \right] = 0,$$

- $\nu = 0.01$ es la viscosidad cinemática;
- Δt el paso de tiempo, con $T = 1$ el tiempo final;
- Ω una cavidad cuadrada, y Γ_i sus bordes.



XXXIII COMCA

Congreso Matemática Capricornio
Universidad de Antofagasta

Stokes evolutivo (semiimplícito Euler temporal)

Taylor-Hood ($P2/P1$)



XXXIII COMCA

Congreso Matemática Capricornio
Universidad de Antofagasta

Stokes evolutivo (semiimplícito Euler temporal)

Taylor-Hood (P_2/P_1)

```
real nu=0.01, T=1., dt=0.1; //Constantes reales
int m, M= T/dt; //Constantes enteras
mesh Th=square(2^6, 2^6); //Mallado
```



Stokes evolutivo (semiimplícito Euler temporal)

Taylor-Hood (P_2/P_1)

```
real nu=0.01, T=1., dt=0.1; //Constantes reales
int m, M= T/dt; //Constantes enteras
mesh Th=square(2^6, 2^6); //Mallado
```

```
fespace Vh(Th, P2), Qh(Th, P1); //Espacios de Elementos Finitos
```



Stokes evolutivo (semiimplícito Euler temporal)

Taylor-Hood (P_2/P_1)

```
real nu=0.01, T=1., dt=0.1; //Constantes reales
int m, M= T/dt; //Constantes enteras
mesh Th=square(2^6, 2^6); //Mallado
```

```
fespace Vh(Th, P2), Qh(Th, P1); //Espacios de Elementos Finitos
```

```
Vh u, v, uu, vv, uold, vold; //Espacio de terminos de velocidad
Qh p, pp; //Espacio de terminos de presion
```



Stokes evolutivo (semiimplícito Euler temporal)

Taylor-Hood (P_2/P_1)

```
real nu=0.01, T=1., dt=0.1; //Constantes reales
int m, M= T/dt; //Constantes enteras
mesh Th=square(2^6, 2^6); //Mallado
```

```
fespace Vh(Th, P2), Qh(Th, P1); //Espacios de Elementos Finitos
```

```
Vh u, v, uu, vv, uold, vold; //Espacio de terminos de velocidad
Qh p, pp; //Espacio de terminos de presion
```

```
problem SE([u,v,p], [uu,vv,pp], init=m)
  = int2d(Th)( (u*uu + v*vv)/dt
  + nu*(dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu) + dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv) ) //Velocidad
```



Stokes evolutivo (semiimplícito Euler temporal)

Taylor-Hood (P_2/P_1)

```
real nu=0.01, T=1., dt=0.1; //Constantes reales
int m, M= T/dt; //Constantes enteras
mesh Th=square(2^6, 2^6); //Mallado
```

```
fespace Vh(Th, P2), Qh(Th, P1); //Espacios de Elementos Finitos
```

```
Vh u, v, uu, vv, uold, vold; //Espacio de terminos de velocidad
Qh p, pp; //Espacio de terminos de presion
```

```
problem SE([u,v,p], [uu,vv,pp], init=m)
  = int2d(Th)( (u*uu + v*vv)/dt
  + nu*(dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu) + dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv) ) //Velocidad
```

```
  - p*pp*1.e-6 - p*(dx(uu) + dy(vv)) - pp*(dx(u) + dy(v)) )//Presion
```



Stokes evolutivo (semiimplícito de Euler temporal P2/P1)

```
- int2d(Th)( (uold*uu + vold*vv)/dt ) //Solucion retrasada
```



Stokes evolutivo (semiimplícito de Euler temporal P2/P1)

```
- int2d(Th)( (uold*uu + vold*vv)/dt ) //Solucion retrasada  
+ on(1, 2, 4, u=0, v=0) + on(3, u=1, v=0); //Condicion de Frontera
```



Stokes evolutivo (semiimplícito de Euler temporal P2/P1)

```
- int2d(Th)( (uold*uu + vold*vv)/dt ) //Solucion retrasada  
  
+ on(1, 2, 4, u=0, v=0) + on(3, u=1, v=0); //Condicion de Frontera  
  
//Iteracion del metodo  
for(m=0; m<M; m++){  
    SE; // Llama el problema  
    uold=u; //actualiza la primera coordenada  
    vold=v; //Actualizar la segunda coordenada  
    plot([u,v], value=true, fill=true, wait=false); //plota velocidad  
    plot( p, value=true, fill=true, wait=false); //plota pression  
}
```

Stokes Evolutivo ($T = \Delta t$)

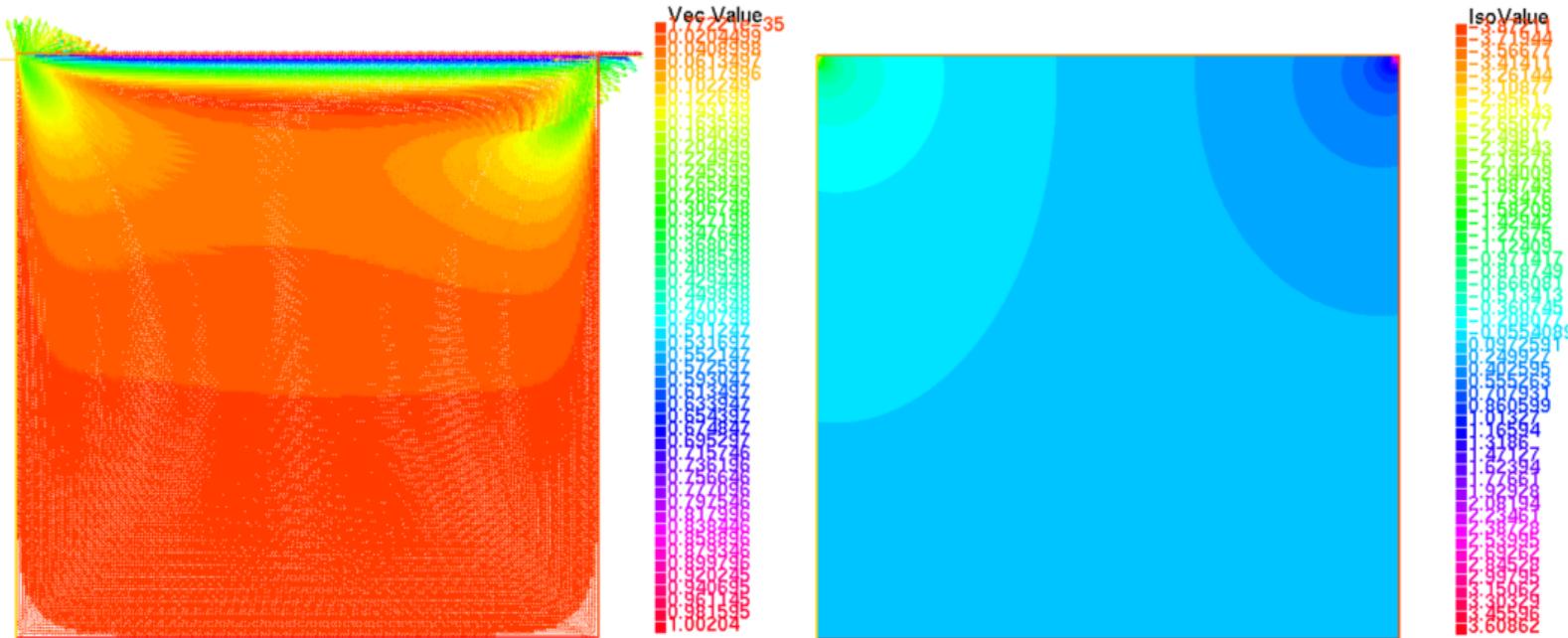


Figura: Velocidade e Pressão no tempo $T = 0.1$

Stokes Evolutivo ($T = 10\Delta t$)

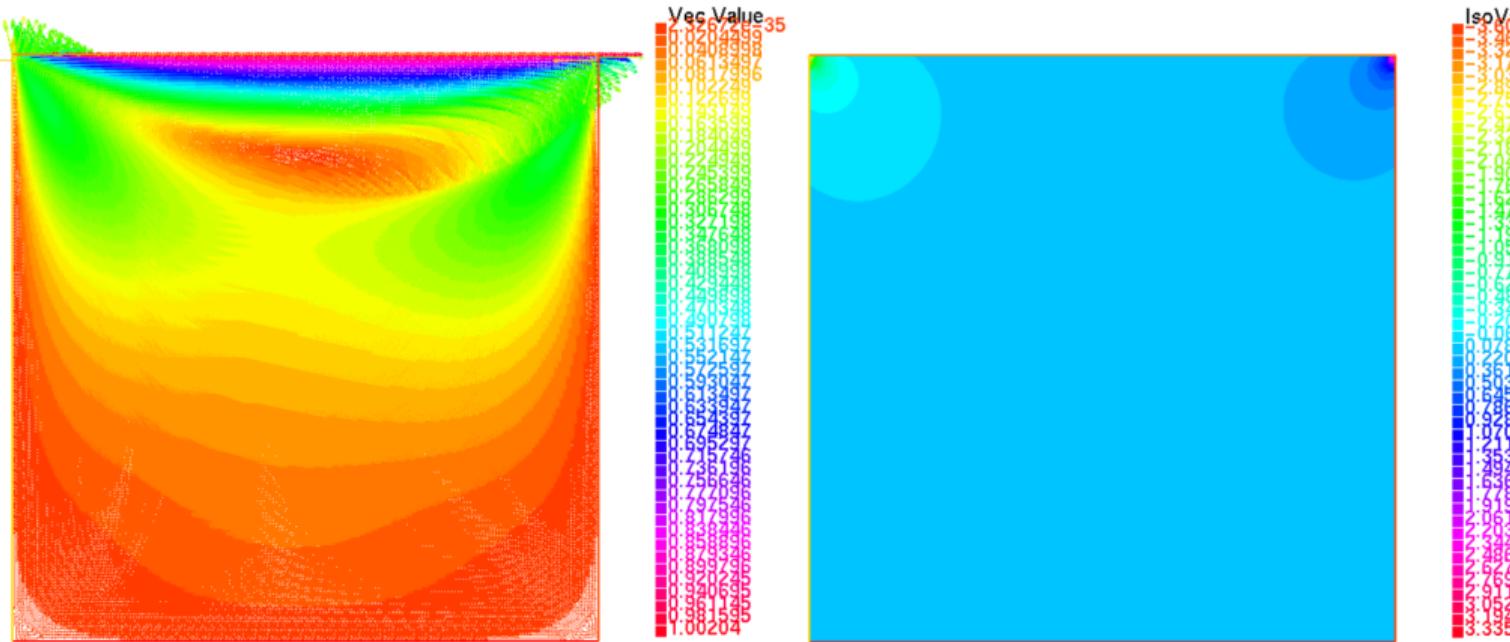


Figura: Velocidade e Pressão no tempo $T = 1$



Índice

1. Poisson

2. Stokes

- 2.1. Stokes Estacionário
- 2.2. Stokes Evolutivo

3. Navier-Stokes :

- 3.1. Navier Stokes Estacionário :**
- 3.2. Navier Stokes Evolutivo :**

4. Referências



Esquemas para Navier-Stokes

- **Estacionário**



Ecuaciones de Navier-Stokes (Estacionarias)

Dominio: $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Espacios funcionales:

- $V(\mathbf{g}) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 ; \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ en } \partial\Omega\}$
- $V = V(\mathbf{0})$
- $Q = L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) ; \int_{\Omega} p \, dx = 0 \right\},$



Ecuaciones de Navier-Stokes (Estacionarias)

Dominio: $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Espacios funcionales:

- $V(\mathbf{g}) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2 ; \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ en } \partial\Omega\}$
- $V = V(\mathbf{0})$
- $Q = L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega) ; \int_{\Omega} p \, dx = 0 \right\},$

ver [1, 2, 3, 4, 5] y otros muchos ...



Esquemas para Navier-Stokes

- Evolutivo

Fluido Dinâmico (Escoamento no Espaço × Tiempo)

Navier–Stokes (Fluido Laminar):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p = f & \text{em } \Omega \times [0, T], \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{em } \Omega \times [0, T], \\ u(0) = u_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \\ u = \phi_D & \text{em } \Gamma_D \text{ (Dirichlet).} \end{array} \right. \quad (4)$$



Navier-Stokes Flow (I)

```

mesh Th=square(2^6, 2^6);
fespace Vh(Th, P2), Qh(Th, P1);
Vh u, v, uu, vv, uold, vold;
Qh p, pp;
real nu=0.01, T=1., dt = 0.01;
int m, M= T/dt;

problem NavierStokes([u,v,p], [uu,vv,pp], init=m, solver=LU)
    = int2d(Th)( (u*uu + v*vv)/dt
    + nu*( dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu) + dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv) )
    - p*pp*1.e-6 - p*( dx(uu) + dy(vv) ) - pp*( dx(u) + dy(v) )
    + ( uold*dx(u) + vold*dy(u) )*uu + ( uold*dx(v) + vold*dy(v) )*vv )
    - int2d(Th)( (uold*uu+vold*vv)/dt )
    + on(1, 2, 4, u=0, v=0) + on(3, u=1, v=0);

for(m=0; m<M; m++){
    NavierStokes; uold=u; vold=v;
    plot(p,value=true, fill=true, wait=false);
}

```



Navier-Stokes Flow (II)

```

mesh Th=square(2^6,2^6);
fespace Vh(Th,P2), Qh(Th,P1);
Vh u,v,uu,vv, uold,vold;
Qh p,pp;
real nu=0.01, T=1., dt = 0.01;
int m, M= T/dt;

problem NS([u,v,p],[uu,vv,pp], init=m, solver=Crout) =
int2d(Th)( (u*uu+v*vv)/dt + nu*(dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu)
+ dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv))
- p*pp*1.e-6 - p*(dx(uu) +dy(vv))- pp*(dx(u)+dy(v)))
- int2d(Th) (( uold(x-uold(x,y)*dt,y-uold(x,y)*dt)*uu
+ vold(x-uold(x,y)*dt,y-uold(x,y)*dt)*vv )/dt)
+ on(1,2,4,u=0,v=0) + on(3,u=1,v=0);

for(m=0;m<M;m++){
  NS; uold=u; vold=v;
  plot(p,value=true, fill=true, wait=false);
}
  
```



El problema aproximado :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega_h} u_h^{n+1} v_h \, d\Omega_h - \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega_h} (u_h^n \circ X_h^n) v_h \, d\Omega_h + \mu \int_{\Omega_h} \nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h \, d\Omega_h \\ - \int_{\Omega_h} p_h^{n+1} (\nabla \cdot v_h) \, d\Omega_h = \int_{\Omega_h} f_h^{n+1} v_h \, d\Omega_h, \\ \int_{\Omega_h} (\nabla \cdot u_h^{n+1}) q_h \, d\Omega_h = 0, \\ \forall v_h \in \mathbb{V}_h^N \text{ and } q_h \in W_h^N, \\ u_h^{n+1} = \phi_D^{n+1} \quad \text{on} \quad \Gamma_{inlet}^h, \\ u_h^{n+1} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{wall}^h, \end{array} \right. \quad (5)$$

Diferencias Clave con el Flujo en Cavidad

- **Término de convección** utiliza el operador convect:
 - Más preciso para el flujo alrededor de obstáculos
 - Maneja el método de características para la convección
- **Condiciones de contorno** cambiadas:
 - $\text{on}(1,2,3,u=0,v=0)$: No deslizamiento en 3 lados
 - $\text{on}(4,u=1,v=0)$: Entrada de flujo en el lado 4
- **Interpretación física:**
 - Modela el flujo alrededor de un cilindro (cuando se combina con la definición del obstáculo)
 - Muestra patrones de desprendimiento de vórtices



Navier-Stokes Flow (III)

```

mesh Th=square(2^6,2^6);
fespace Vh(Th,P2), Qh(Th,P1);
Vh u,v,uu,vv, uold,vold;
Qh p,pp;
real nu=0.01, T=1., dt = 0.01;
int m, M= T/dt;

problem NS([u,v,p],[uu,vv,pp], init=m, solver=Crout)
  = int2d(Th)( (u*uu+v*vv)/dt
  + nu*(dx(u)*dx(uu) + dy(u)*dy(uu) + dx(v)*dx(vv) + dy(v)*dy(vv))
  - p*pp*1.e-6 - p*(dx(uu) +dy(vv))- pp*(dx(u)+dy(v)))
  - int2d(Th)((convection([uold,vold],-dt,uold)*uu + convection([uold,vold],-dt,vold)*vv)/dt)
  + on(1,2,3,u=0,v=0) + on(4,u=1,v=0);

for(m=0;m<M;m++){
  NS; uold=u; vold=v;
  plot(p,value=true, fill=true, wait=false);
}

```

Aspectos Numéricos

Discretización

- Elementos Taylor-Hood P2-P1
- Paso de tiempo implícito
- Solver Crout para el sistema lineal

Parámetros

- $Re = 100 (\nu=0.01)$
- $\Delta t = 0.1$ (CFL 4)
- Malla de resolución 40×40

Índice

1. Poisson

2. Stokes

- 2.1. Stokes Estacionário
- 2.2. Stokes Evolutivo

3. Navier-Stokes :

- 3.1. Navier Stokes Estacionário :
- 3.2. Navier Stokes Evolutivo :

4. Referências



Referencias Bibliográficas

-  F. Hecht. [New development in FreeFem++](#). J. Numer. Math., 20(3-4):251–265, 2012.
-  Roger Temam, [Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis](#). 1977.
-  Roger Temam, [Navier–Stokes equations: theory and numerical analysis](#). Vol. 343. American Mathematical Society, 2024.
-  Roland Glowinski. [Finite element methods for incompressible viscous flow](#). Handbook of numerical analysis, v. 9, p. 3-1176, 2003.
-  Roberts, J. E., Thomas, J. M. (1991). [Mixed and hybrid methods](#). Elsevier.

¡Gracias por su presencia en la parte 2!

¿Preguntas?