1 Soluzione primale e duale

1.1 Primale

- Risolvi il sottosistema dato dai vincoli di base
- La soluzione X è **ammissibile** se tutti i vincoli sono rispettati.
- La soluzione X è **degenere** se almeno un vincolo non di base è soddisfatto con l'*uguale*.

1.2 Duale

- Scrivere il problema in forma duale.
- Risolvi il sottosistema dato dalle colonne di base.
- La soluzione Y è **ammissibile** se tutte le componenti $Y_i \geq 0$.
- La soluzione X è **degenere** se almeno una componente di base $Y_i = 0$.

2 Simplesso primale

- Data una base si trovano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni di base primale e duale.
- Indice uscente: $h = min\{i \in N | Y_i < 0\}$.
- Calcolare $W = -A_b^{-1}$ e W^h la colonna di indice h.
- Per ogni indice non di base i calcolare $R_i = \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h}$.
(Tip: calcolare prima il denominatore: se è < 0 scartarlo)
- Indice entrante: $\Theta = min\{R_i | A_i W^h > 0\}$.

3 Simplesso duale

- Data una base si trovano $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni di base primale e duale.
- Indice entrante: $k = min\{i \in N | b_i - A_i\bar{x} < 0\}$.
- Calcolare $W = -A_b^{-1}$ e W^i la colonna di indice i.
- Per ogni indice non di base i calcolare $R_i = \frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i}$.
(Tip: calcolare prima il denominatore: se è < 0 scartarlo)
- Indice uscente: $h = min\{R_i | -A_i W^h > 0\}$.

4 Soluzione e potenziale di flusso

4.1 Soluzione di base

- Gli archi sono partizionati in T (incognite), U (saturati), L (azzerati).
Dedurre i bilanci degli archi in T partendo dalle foglie, e fissando il flusso degli archi in U alla loro capacità massima.
- La soluzione è **ammissibile** se tutti gli archi in T sono ≥ 0.
- La soluzione è **degenere** se un arco di T è saturato oppure 0.

4.2 Potenziale di base

- π_i è il costo per raggiungere il nodo i utilizzando gli archi di T. Se un arco viene percorso al contrario, il costo è considerato negativo. Il primo nodo ha costo 0.
- Per ogni arco $(i,j) \notin T$ calcolare $C^{\pi}_{i,j} = \pi_i - \pi_j + C_{i,j}$.
- Se esiste almeno un $C^{\pi}_{i,j} < 0$ con $(i,j) \in L$, oppure se esiste almeno un $C^{\pi}_{i,j} > 0$ con $(i,j) \in U$, la soluzione è **non ammissibile**.
- Se esiste almeno un $C^{\pi}_{i,j} = 0$ con $(i,j) \in L \vee (i,j) \in U$, allora la soluzione è **degenere**.

5 Simplesso su reti

- Calcolare flusso e potenziale di base partendo dagli archi T e U dati.
- Arco entrante:
$(p,q) = min(\{(i,j) \in L | C^{\pi}_{i,j} < 0\} \cup \{(i,j) \in U | C^{\pi}_{i,j} > 0\})$
(il minimo è riferito all'ordine lessicografico)
- Inserito il nuovo arco, questo formerà un ciclo con gli altri archi di T. Consideriamo il ciclo in verso concorde a (p,q) se apparteneva a L, discorde se apparteneva a U.
- Calcolare $\Theta^+ = min\{U_{i,j} - \bar{x}_{i,j} | (i,j) \in C^+\}$
$\Theta^- = min\{\bar{x}_{i,j} | (i,j) \in C^-\}$
Infine $\Theta = min(\Theta^+, \Theta^-)$ (in caso di parità vince Θ^-).
- Arco uscente: arco associato a Θ.

6 Altri algoritmi su grafi

6.1 Cammino di costo minimo — Dijkstra

- Si inizia visitando la radice, con tutti i costi pari a ∞.
- Aggiornare i costi per raggiungere i vari nodi partendo dal nodo visitato se inferiori a quelli attuali.
- Aggiungere all'insieme Q i nodi diventati raggiungibile. Il prossimo nodo da visitare è il più economico in Q.

6.2 Algoritmo FFEK

- Trovare il cammino aumentante: scrivere la stella dalla radice. I nodi estratti in questo modo sono una coda con politica FIFO.
- Aggiungere in coda la stessa uscente del prossimo nodo.
- Il cammino termina appena si estrae l'ultimo nodo.
- Trovare $\delta = min\{r_{i,j} | (r,j) \in Cammino\}$ e aggiornare le $\bar{x}_{i,j}$ degli archi coinvolti sommandoci δ.
- Aggiornare il grafo residuo sottraendo δ agli archi coinvolti e aggiungendola nel verso opposto.
- L'algoritmo termina quando non si riesce a costruire un cammino aumentante. I nodi riusciti a visitare formano N_s, gli altri N_t.

7 Taglio di Gomory

- Risolvere il rilassato continuo del problema utilizzando il metodo grafico (nei problemi di minimo si prende il primo punto di intersezione del vincolo con l'asse, nei problemi di massimo si prende il secondo). **Nota:** approssima la soluzione trovata (per eccesso nei problemi di minimo, per difetto nei problemi di massimo).
- L'altro limite si trova approssimando le $\bar{x}_i$.
- Scrivere il sistema rendendo i vincoli equazioni e inserendo variabili di scarto (negative se problema di min.).
- Calcolare le variabili di scarto nella soluzione del RC per capire quali indici sono di base, dopodichè $\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$.
- Scrivere $\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{r,j}\} \bar{x}_j \geq \{(X_{RC})_r\}$. Poi sostituire alle variabili di scarto quello che si ricava a partire dai vincoli. Alla fine deve rimanere una disequazione con parametri x_1 e x_2. (**Nota:** $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$)

8 Cicli Hamiltoniani — Branch and Bound

8.1 K-Albero

- Aggiungere i 2 archi più economici raggiungibili da K.
- Andando in ordine crescente di costo, aggiungere gli $n-2$ archi che non formano cicli tra di loro.

8.2 Nodo più vicino

- Algoritmo greedy: a partire dalla radice si sceglie sempre il percorso più economici per raggiungere il prossimo nodo. Ricordarsi di sommare il costo per tornare dall'ultimo nodo al primo.

8.3 Branch and Bound

- Partire dalla radice $P_{1,1}$, ogni figlio instanzia una variabile del tipo $x_{i,j}$ che se uguale a 1 indica che l'arco (i,j) deve essere incluso nel K-Albero, se invece uguale a 0 l'arco non è utilizzabile.
- Se $V_I(P_{i,j}) \geq V_S(P)$, tagliare l'arco.
- Se $P_{i,j} = \{\}$, tagliare l'arco.
- Se $V_I(P_{i,j}) < V_S(P)$ e V_I è generata da un ciclo hamiltoniano, tagliare l'arco e aggiornare $V_S(P)$.