1 Modelli

1.1 Primale standard

$$\begin{cases} \max \;\; c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

1.2 Duale standard

$$\begin{cases} \max \;\; c^T x \\ y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1.3 Primale ausiliario

Data una base non ammissibile B, definiamo l'insieme dei vincoli soddisfatti $U = \{i \in N | A_i \bar{x} \leq b_i\}$ e l'insieme dei vincoli non soddisfatti $V = \{i \in N | A_i \bar{x} > b_I\}$. Il problema ausiliario è:

$$\begin{cases} \max \;\; -\sum\limits_{i \in V} \varepsilon_i \\ A_i x \leq b_i & \forall i \in B \cup U \\ A_i x - \varepsilon_i \leq b_i & \forall i \in V \\ -\varepsilon_i \leq 0 & \forall i \in V \end{cases}$$

1.4 Produzione

$$\begin{cases} max \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i & \forall i \in \{1, ..., m\} \\ x_j \geq 0 & \forall j \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

1.5 Assegnamento di costo minimo

$x_{i,j} = 1$ indica che la persona i svolge il lavoro j.

$$\begin{cases} \min \; cx \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1 & \forall i \in \{1, ..., n\} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1 & \forall j \in \{1, ..., n\} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1.6 Flusso di costo minimo

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j}x_{i,j} \\ \sum_{(p,i)\in A} x_{p,i} - \sum_{(i,q)\in A} x_{i,q} = b_i & \forall i \in N \\ l_{i,j} \le x_{i,j} \le u_{i,j} & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

1.7 Flusso di costo minimo non capacitato

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ Ex = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

1.8 Potenziale su reti non capacitate

$$\begin{cases} \max\ \pi^T b \\ \pi^T E \le c^T \end{cases}$$

1.9 Flusso massimo

$$\begin{cases} \max\ v \\ Ex = b \\ 0 \le x \le u \end{cases}$$

con

$$b_i = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $v = \sum_{(s,j)\in A} x_{s,j} = \sum_{(i,t)\in A} x_{i,t}$

1.10 TSP — Commesso viaggiatore

1.10.1 Asimmetrico

$$\begin{cases} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j}x_{i,j} \\ \sum_{i\in N, i\neq j} x_{i,j} = 1 & \forall j \in N \\ \sum_{j\in N, j\neq i} x_{i,j} = 1 & \forall i \in N \\ \sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{i,j} \ge 1 & \forall S \subset N, S \neq \emptyset \\ x_{i,j} \in \{0,1\} & \forall (i.j) \in A \end{cases}$$

1.10.2 Simmetrico

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{(i,j)\in A} c_{i,j}x_{i,j} \\ \sum\limits_{(h,i)\in A} x_{h,i} + \sum\limits_{(i,k)\in A} x_{i,k} = 2 & \forall i \in N \\ \sum\limits_{(i,j)\in A, i\in S, j\notin S} x_{i,j} + \sum\limits_{(i,j)\in A, i\notin S, j\in S} x_{i,j} \geq 1 & \forall S \subset N, 1 \leq |S| \leq \left\lceil \frac{|N|}{2} \right\rceil \\ x_{i,j} \in \{0,1\} & \forall (i.j) \in A \end{cases}$$

1.11 Taglio di capacità minima (duale MAX-FLOW)

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{(i,j)\in A} u_{i,j}\mu_{i,j} \\ \pi_i - \pi_j + \mu_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \\ \pi_A - \pi_S = 1 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

1.12 Zaino

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \leq p \\ x_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, ..., n \end{cases}$$

2 Programmazione lineare

- Un poliedro in R^n è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di R^n.
- **Combinazione convessa**: un punto $x \in R^n$ è combinazione convessa di $x_1, ..., x_m \in R^n$ se esistono dei valori $\lambda_1, ..., \lambda_m \in (R)$ tali che $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$.
- **Vertice**: punto non esprimibile come combinazione convessa di altri punti del poliedro.
- Una direzione di recessione d è un vettore tale che: $x + \lambda d \in P$, $\forall x \in P$.
- **Weyl – rappresentazione dei poliedri**: Dato un poliedro P, esistono un sottinsieme finito $v = \{v^1, ..., v^m\}$ di P e un insieme finito $E = \{e^1, ..., e^p\}$ (eventualmente anche vuoti) tali che:
  $P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$.
- **Teorema fondamentale della PL**: Se il problema (P) ha un valore ottimo finito allora esiste un vertice v^k del poliedro P che ha valore ottimo.
- **Dualità forte**: Dato il problema (P) e il suo duale (D), se i rispettivi poliedri sono non vuoti allora $-\infty < v(P) = v(D) < +\infty$.

- **Scarti complementari**: date $\bar{x}$ e $\bar{y}$ soluzioni ammissibili per (P) e (D), sono soluzioni ottime se e solo se $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.
(Conseguenza della dualità forte, infatti $c^T\bar{x} = \bar{y}^T b = \bar{y}^T A\bar{x}$).

- Una soluzione di base è ammissibile se è solo se è un vertice del poliedro associato al problema.

- Il simplesso è un algoritmo che parte da un vertice del poliedro e si sposta ad ogni iterazione su un vertice adiacente (caso non degenere), oppure rimane sullo stesso vertice ma con una base diversa nel caso degenere.

- Regole anticiclo di Bland per simplesso primale:
$h = min\{i | y_i < 0, i \in N\}$
$k = min\{i | \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i W^h} > 0, i \in N\}$

- Regole anticiclo di Bland per simplesso duale:
$k = \min\{i \in N | b_i - A_i\bar{x} < 0\}$
$h = \min\{\frac{\bar{y}_i}{-A_k W^i} | -A_k W^i > 0\}$

- I problemi ausiliari (standard e duale) servono a trovare una base ammissibile partendo da una base non ammissibile e la relativa soluzione.

- Se il valore ottimo di $(P_{aux}) < 0$ allora (P) non ha soluzioni ammissibili (sostituire il $<$ con $>$ nel caso del duale).
Se il valore ottimo di $(P) = 0$ allora esiste una base ammissibile per (P) che si costruisce a partire dalla base ottima di (P_{aux}).

- **Simplesso primale**

3 Programmazione lineare su reti

- Un albero di copertura su un grafo è un albero composto da $n - 1$ archi che toccano tutti i nodi una sola volta senza creare cicli.

- Un sottinsieme di archi di un grafo è una base del problema se è solo se è un albero di copertura.

- **Bellman**: dato T un albero di copertura che genera un flusso di base ammissibile, se $C^{\pi}_{i,j} \leq 0 \; \forall (i,j) \in L$, con $C^{\pi}_{i,j} = \Pi_i - \Pi_j + C_{i,j}$, la soluzione è ottima.

- **Bellman su reti capacitate**: data una tripartizione T, L, U che genera un flusso di base ammissibile, se $C^{\pi}_{i,j} \leq 0 \; \forall (i,j) \in L$, e $C^{\pi}_{i,j} \geq 0 \; \forall (i,j) \in U$, allora la soluzione è ottima.

- **Taglio**: un taglio è una partizione dei nodi di una rete in due insiemi N_s e N_t in modo che $N_s \cup N_t = N$ e $N_s \cap N_t = \emptyset$.
Il taglio è **ammissibile** se N_s contiene almeno l'origine s e N_t contiene almeno la destinazione t.

- **Archi diretti/indiretti**: dato un taglio (N_s, N_t) sono definiti gli insiemi di archi diretti e indiretti:
$A^+ = \{(i,j) \in A | i \in N_s, j \in N_t\}$
$A^- = \{(i,j) \in A | i \in N_t, j \in N_s\}$

- **Capacità del taglio**: $u(N_s, N_t) = \sum\limits_{(i,j) \in A^+} u_{i,j}$.
  (ovvero la somma delle capacità degli archi diretti)
- **Flusso sul taglio**: $x(N_s, N_t) = \sum\limits_{(i,j) \in A^+} x_{i,j} - \sum\limits_{(i,j) \in A^-} x_{i,j}$.
  (differenza tra il flusso degli archi diretti e il flusso degli archi indiretti)
- **Potenziale di base**: $C^{\pi}_{i,j} = \Pi_i - \Pi_j + C_{i,j}$ è ammissibile se tutti i costi ridotti degli archi di L sono positivi e tutti i costi ridotti degli archi di U sono negativi. Inoltre è degenere se esiste un costo ridotto uguale a 0.

4 Programmazione lineare intera

- **Equivalenza tra PL e PLi**: dato un problema di PLi esiste un problema di PL equivalente che ha come soluzione ottima lo stesso valore del problema di PLi.
- **Disuguaglianza valida**: una disuguaglianza del tipo $\pi^T x \leq \pi_0$ è detta *valida* se vale $\forall x \in \Omega$.
- **Piano di taglio**: disuguaglianza valida per Ω per cui vale $\pi^T \bar{x} > \pi_0$.
- **Piano di Gomory**: piano di taglio dato da: $\sum_{j \in N} \{\tilde{a}_{r,j}\} x_j \geq \{\tilde{b}_r\}$. Dove $\tilde{A} = A_B^{-1} A_N$ e $\tilde{b} = \bar{x}_B$.