Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

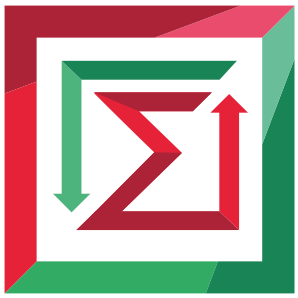
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

НГТУ
НЭТИ

Кафедра теоретической и прикладной информатики

Лабораторная работа №2
по дисциплине «Основы теории машинного обучения»

УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИИ



Факультет:	ПМИ
Группа:	ПМИМ-01
Студенты:	Ершов П.К. Малышкина Е.Д. Слободчикова А.Э.
Вариант:	4
Преподаватель:	Попов А.А.

Новосибирск

2021

1. **Цель.**

Разработать программу, реализующую поиск М-оценок параметров итерационным МНК.

2. **Содержание работы.**

1. Изучить методы устойчивого оценивания параметров регрессии и метод поиска значений оценок.
2. Выбрать полиномиальную невысокого порядка (квадратичную, кубическую) модель зависимости отклика y от одного фактора x. По данной модели сгенерировать экспериментальные данные, содержащие выбросы. Выбросы можно смоделировать, увеличив в несколько раз (в несколько десятков раз) величину ошибки в нескольких точках выборки. Проконтролировать наличие выбросов в выборке визуально. Сформировать несколько выборок с различной степенью засорения. Степень засорения варьировать от 1 до 25% с шагом в 4-5%.
3. Разработать программу, реализующую поиск М-оценок параметров итерационным МНК или по методу псевдонаблюдений для функции потерь, указанной в варианте.
4. Выбрать несколько значений параметра функции потерь (включая указанные в варианте) и найти значения М-оценок для каждого из них. В качестве начального приближения оценок в алгоритме итерационного МНК можно взять истинные значения параметров или можно произвести поиск глобального оптимума путем многократного применения итерационного МНК из различных начальных приближений. Вычислить МНК-оценку. Сравнить качество всех полученных оценок по величинам $(\hat{\theta} - \theta)^T(\hat{\theta} - \theta)$, $MSE = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}(x_i) - r(x_i))^2)^{\frac{1}{2}}$, где $r(x_i)$ - незашумленный выход объекта. Выбрать значение параметра функции потерь, дающее наилучшее качество при заданной степени засорения.

5. Оформить отчет, включающий в себя

– постановку задачи; – полученный набор данных и значения ошибок наблюдений;

– оценки параметров и результаты их сравнения;

1) для наилучшей из оценок: значения весов наблюдений w на последней итерации, значения $y, \hat{y}, y - \hat{y}$, оценку параметра σ;

– графики, отражающие качество оценивания (один из двух вариантов):

1) график зависимостей от фактора x измеренных значений y и прогнозных значений $\hat{y}$ для МНК-оценки и для наилучшей из Моценок (пример графика см. в конце п. 3.1).

2) два графика – график наблюдений и график зависимостей от фактора x истинных значений отклика и прогнозных значений $\hat{y}$ для МНКоценки и для наилучшей из М-оценок

– текст программы.

3. Исходные данные.

Дана модель:

$y(x) = \theta_1 x^2 + \theta_2 x + \theta_3 + e$, где $\theta^0 = (-0.05, 0.25, 0.5)$, а e = 5.

Значит $y(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}25x + 0{,}5 + 5$.

Вариант задания:

№	Название	$\rho(z)$	$w(z)$	Параметр
4	биквадратная Тьюки	$\begin{cases} \frac{z^6}{6c^4} - \frac{z^4}{2c^2} + \frac{z^2}{2}, \lvert z\rvert < c \\ \frac{c^2}{6}, \lvert z\rvert \geq c \end{cases}$	$\begin{cases} \left[1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]^2, \lvert z\rvert < c \\ 0, \lvert z\rvert \geq c \end{cases}$	4.6856

4. Исследование:

Сгенерируем наблюдения для разных уровней зашумлённости (выбросы выделены оранжевым цветом):

% Шума	0%	5%	10%	15%	20%	25%
Наблюдения	15	15,458	15,458	15,458	15,458	15,458
	12,286	11,985	11,985	11,985	11,985	11,985
	10,067	10,648	10,648	10,648	10,648	10,648
	8,299	7,998	7,998	7,998	0,781	0,781
	6,941	6,143	6,143	6,143	6,143	6,143
	5,953	6,152	6,152	6,152	6,152	6,152
	5,292	5,895	20,365	20,365	20,365	20,365
	4,917	5,445	5,445	5,445	5,445	5,445
	4,787	5,213	5,213	5,213	5,213	5,213
	4,859	5,204	5,204	5,204	5,204	5,204
	5,093	4,981	4,981	4,981	2,284	2,284
	5,447	5,186	5,186	5,186	5,186	-1,08
	5,88	5,46	5,46	5,46	5,46	5,46
	6,349	6,939	6,939	6,939	6,939	6,939
	6,814	6,149	6,149	6,149	6,149	6,149
	7,232	7,17	7,17	7,17	7,17	5,677
	7,563	7,314	7,314	7,314	7,314	7,314
	7,765	6,791	6,791	6,791	6,791	6,791
	7,796	6,872	6,872	6,872	6,872	6,872
	7,615	7,747	7,747	10,923	10,923	10,923
	7,18	7,647	7,647	7,647	7,647	7,647
	6,45	5,865	5,865	5,865	5,865	5,865
	5,383	14,628	14,628	14,628	14,628	14,628
	3,938	3,382	3,382	3,382	3,382	3,382
	2,073	1,082	1,082	1,082	1,082	1,082
	-0,253	-0,85	-0,85	-0,85	-0,85	-0,85
	-3,082	-0,974	-0,974	-0,974	-0,974	-0,974
	-6,455	-7,504	-7,504	-7,504	-7,504	-7,504
	-10,414	-10,404	-10,404	-10,404	-10,404	-10,404
	-15	-14,849	-14,849	-14,849	-14,849	-14,849

В качестве алгоритма оценки параметров функции потерь будем использовать итерационный МНК.

Для нахождения наилучших θ проварьируем параметр c : [3.37, 4.685, 6, 7.315, 8.63, 9.945].

Засорение 5%.

w	y	$\hat{y}$	$\hat{y} - y$
1	15.458	15.475	1.741e-02
1	11.985	12.578	0.5931
1	10.648	10.209	-0.4390
1	7.998	8.324	0.3256
1	6.143	6.879	0.7361
1	6.152	5.830	-0.3221
1	5.895	5.133	-0.7621
1	5.445	4.744	-0.7013
1	5.213	4.619	-0.5938
1	5.204	4.715	-0.4895
1	4.981	4.986	4.891e-03
1	5.186	5.389	0.2030
1	5.460	5.881	0.4209
1	6.939	6.416	-0.5235
1	6.149	6.951	0.8018
1	7.170	7.442	0.2723
1	7.314	7.845	0.5311
0.999	6.791	8.116	0.1325
0.999	6.872	8.211	0.1340
1	7.747	8.086	0.3393
1	7.647	7.697	4.990e-02
1	5.865	7.000	0.1135
0.9015	14.628	5.950	-0.8678
1	3.382	4.505	0.1123
0.999	1.082	2.619	0.1536
1	-0.850	0.249	0.1098
0.999	-0.974	-2.649	-0.1676
0.999	-7.504	-6.120	0.1384
1	-10.404	-10.206	0.1977
1	-14.849	-14.953	-0.1044

c	$\hat{\theta}$				MSE	$(\hat{\theta} - \theta)^T(\hat{\theta} - \theta)$
3.37	4.86633029	0.59015686	0.27677857	-0.05341439	1.37679e-01	2.6724602e-02
4.685	4.87862788	0.57651741	0.27411963	-0.05300906	1.08046e-01	2.1176916e-02
6	4.87452259	0.58107969	0.27500794	-0.05314471	1.17509e-01	2.2953783e-02
7.315	4.86472058	0.5919422	0.27712661	-0.05346744	1.41839e-01	2.7501765e-02
8.63	4.86448746	0.59220089	0.27717702	-0.05347513	1.42447e-01	2.7615320e-02
9.945	4.87165411	0.58425212	0.27562747	-0.05323891	1.24384e-01	2.4238345e-02

$\hat{\sigma}$ =-0,38744.

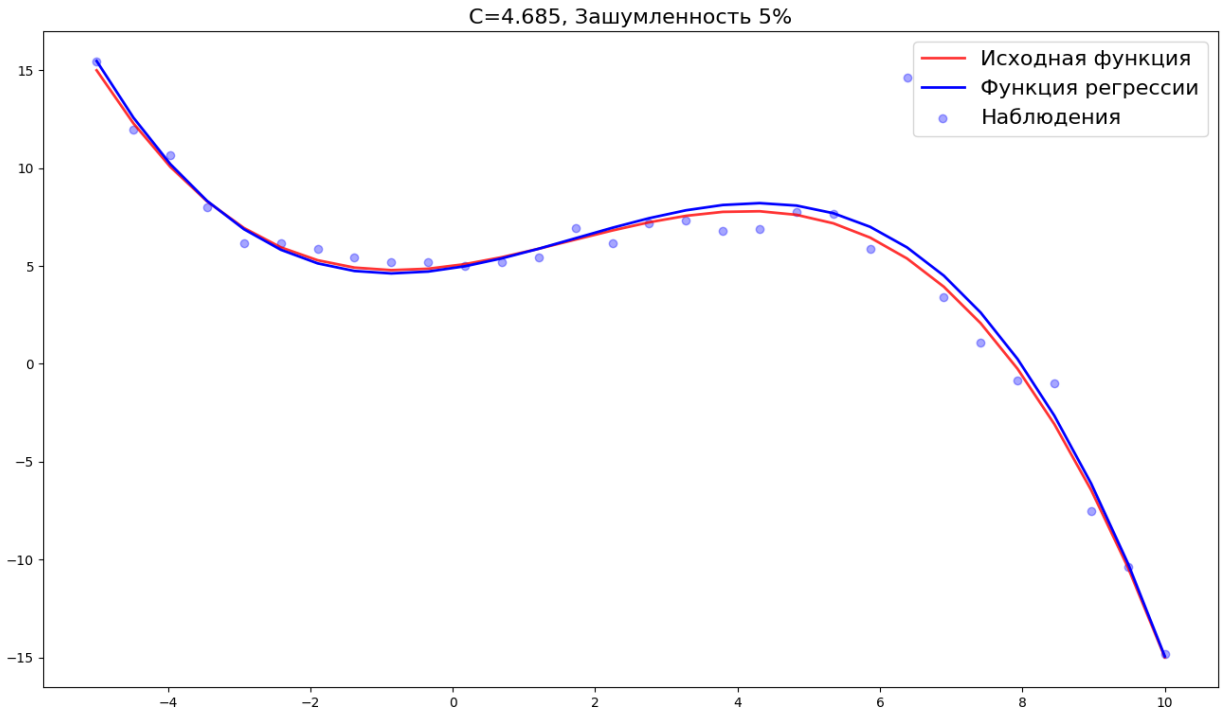


Рисунок 1. Графики наблюдений, функции регрессии и исходной функции для наилучшего значения М-оценки

Засорение 10%.

w	y	$\hat{y}$	$\hat{y} - y$
1	15.458	15.642	0.1841
1	11.985	13.098	1.113
1	10.648	11.012	0.3642
1	7.998	9.344	1.346
1	6.143	8.057	1.914
1	6.152	7.110	0.9581
0.9153	20.365	6.465	-13.90
1	5.445	6.084	0.6388
1	5.213	5.927	0.7143
1	5.204	5.956	0.7523
1	4.981	6.132	1.151
1	5.186	6.416	1.230
1	5.460	6.769	1.309
1	6.939	7.152	0.2128
1	6.149	7.527	1.378
1	7.170	7.854	0.6842
1	7.314	8.095	0.7810
1	6.791	8.211	1.420
1	6.872	8.164	1.292
1	7.747	7.913	0.1662
1	7.647	7.421	-0.2259
1	5.865	6.649	0.7840
0.9841	14.628	5.557	-9.071

1	3.382	4.108	0.7256
1	1.082	2.261	1.179
1	-0.850	-0.021	0.8284
1	-0.974	-2.778	-1.804
1	-7.504	-6.048	1.456
1	-10.404	-9.871	0.5331
1	-14.849	-14.285	0.5643

C	$\hat{\theta}$				MSE	$(\hat{\theta}-\theta)^T(\hat{\theta}-\theta)$
3.37	6.15707123	0.36824809	0.22226842	-0.04629675	6.67319e-01	1.3569551
4.685	6.16226277	0.36747191	0.22207078	-0.04627152	6.72478e-01	1.3692124
6	6.05963406	0.38300155	0.22601257	-0.04677555	5.74918e-01	1.1370988
7.315	6.16002538	0.36780859	0.22215637	-0.04628246	6.70255e-01	1.3639225
8.63	6.1072094	0.37578526	0.22418209	-0.0465414	6.19035e-01	1.2420205
9.945	6.16285209	0.36738213	0.22204804	-0.04626861	6.73062e-01	1.3706077

$\hat{\sigma}$ =1,19767.

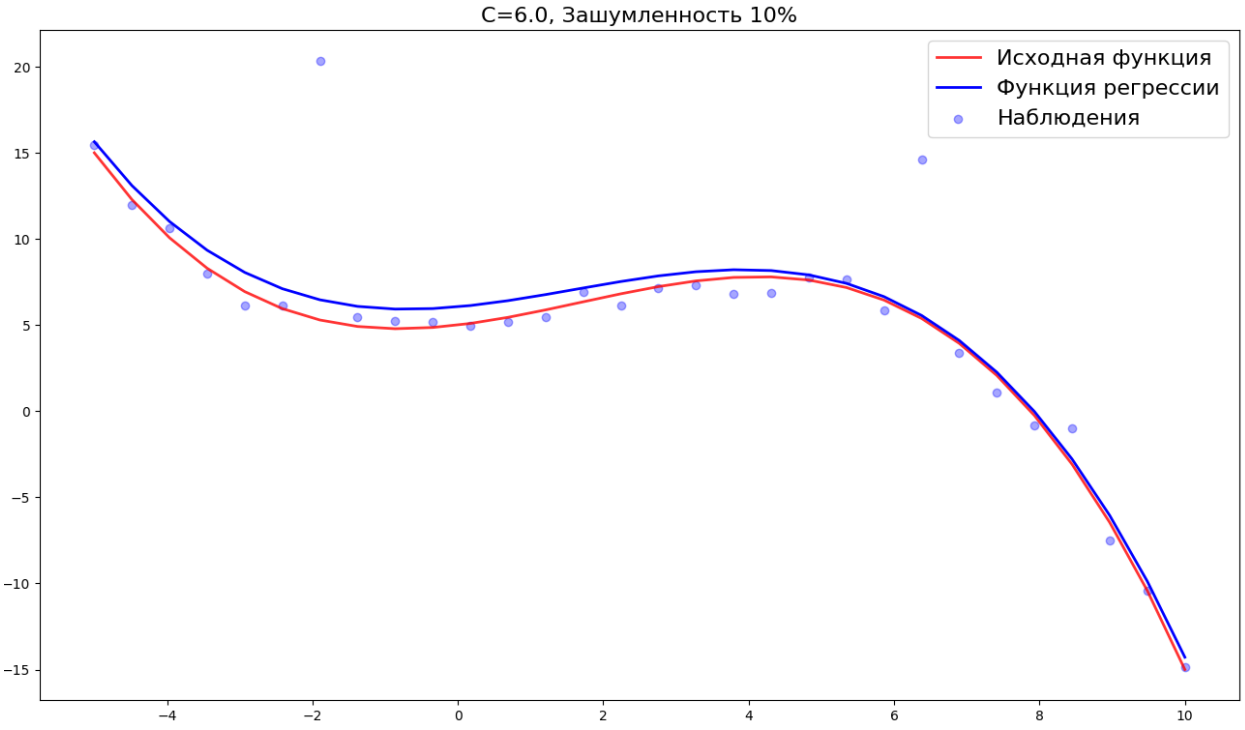


Рисунок 2. Графики наблюдений, функции регрессии и исходной функции для наилучшего значения М-оценки

Засорение 15%.

w	y	$\hat{y}$	$\hat{y} - y$
1	15.458	15.726	0.2684
1	11.985	13.147	1.162
1	10.648	11.036	0.3886
1	7.998	9.354	1.356
1	6.143	8.061	1.918
1	6.152	7.117	0.9649
0.9697	20.365	0.6482	-13.88
1	5.445	6.116	0.6703
1	5.213	5.979	0.7661
1	5.204	6.032	0.8282
1	4.981	6.235	1.254
1	5.186	6.548	1.362
1	5.460	6.931	1.471
1	6.939	7.344	0.4042
1	6.149	7.747	1.598
1	7.170	8.101	0.9306
1	7.314	8.365	1.051
1	6.791	8.500	1.709
1	6.872	8.467	1.595
1	10.923	8.224	-2.699
1	7.647	7.732	8.526e-02
1	5.865	6.952	1.088
0.9951	14.628	5.844	-8.784
1	3.382	4.367	0.9854
1	1.082	2.483	1.400
1	-0.850	0.150	0.9995
1	-0.974	-2.671	-1.697
1	-7.504	-6.019	1.485
1	-10.404	-9.935	0.4694
1	-14.849	-14.458	0.3910

C	$\hat{\theta}$				MSE	$(\hat{\theta} - \theta)^T(\hat{\theta} - \theta)$
3.37	6.1858691	0.43105816	0.22890809	-0.04782688	7.63683e-01	1.4114881
4.685	6.1532922	0.43611722	0.23018341	-0.04799067	7.32758e-01	1.3345606
6	6.17807197	0.43227721	0.22921482	-0.04786632	7.56224e-01	1.3928765
7.315	6.19017955	0.4304028	0.2287419	-0.04780561	7.67880e-01	1.4218278
8.63	6.1641079	0.43443968	0.22976037	-0.04793635	7.42934e-01	1.3598593
9.945	6.19028755	0.43038608	0.22873768	-0.04780507	7.67984e-01	1.4220875

$\hat{\sigma}$ =-1,46144.

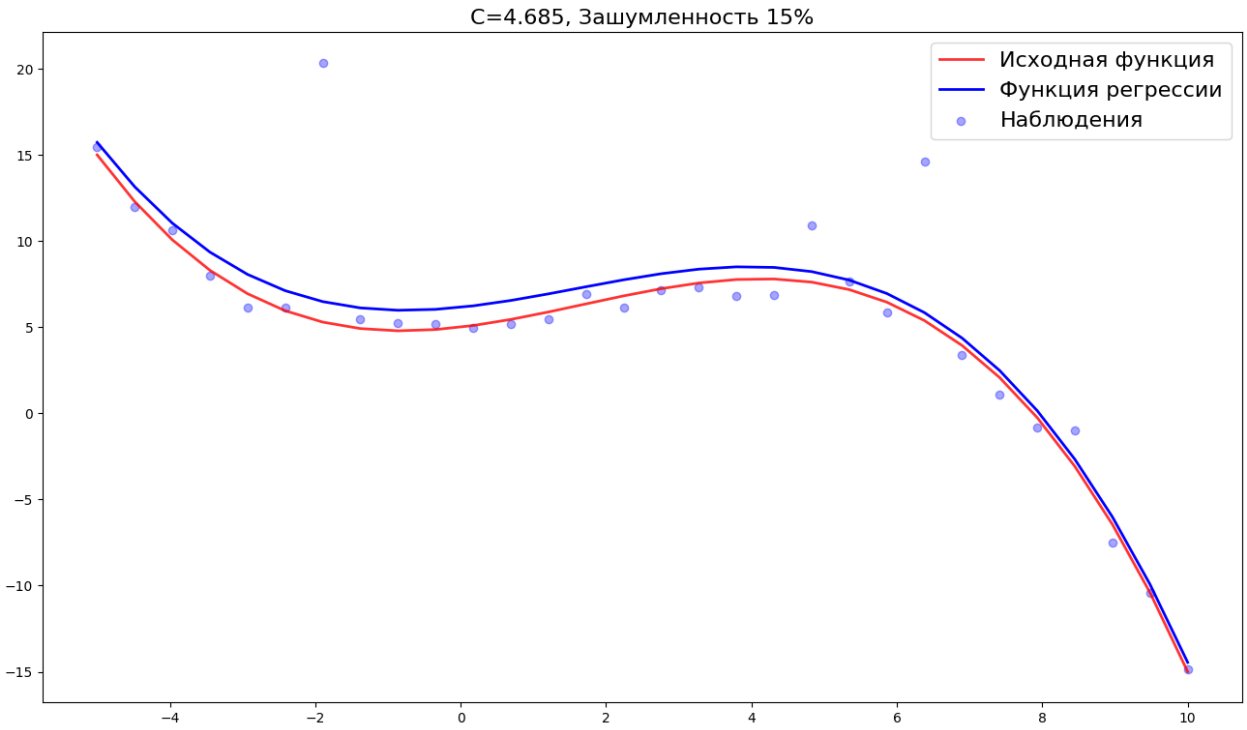


Рисунок 3. Графики наблюдений, функции регрессии и исходной функции для наилучшего значения М-оценки

Засорение 20%.

w	y	$\hat{y}$	$\hat{y} - y$
1	15.458	14.740	-0.7181
1	11.985	12.152	0.1678
1	10.648	10.049	-0.5987
0.9961	0.781	8.388	7.607
1	6.143	7.128	0.9852
1	6.152	6.228	7.577e-02
0.9422	20.365	5.646	-14.72
1	5.445	5.342	-0.1037
1	5.213	5.273	6.031e-02
1	5.204	5.400	0.1959
0.9998	2.284	5.680	3.396
1	5.186	6.073	0.8864
1	5.460	6.536	1.076
1	6.939	7.029	9.016e-02
1	6.149	7.511	1.362
1	7.170	7.940	0.7704
1	7.314	8.276	0.9613
1	6.791	8.475	1.684
1	6.872	8.499	1.627
0.9999	10.923	8.305	-2.618
1	7.647	7.851	0.2042
1	5.865	7.098	1.233
0.9934	14.628	6.003	-8.625

1	3.382	4.525	1.143
1	1.082	2.623	1.541
1	-0.850	0.256	1.106
1	-0.974	-2.618	-1.644
1	-7.504	-6.039	1.465
1	-10.404	-10.050	0.3543
1	-14.849	-14.691	0.1583

C	$\hat{\theta}$				MSE	$(\hat{\theta}-\theta)^T(\hat{\theta}-\theta)$
3.37	5.63757158	0.57648024	0.2328783	-0.04934391	3.01825e-01	4.1264033e-01
4.685	5.5824306	0.58501617	0.23516752	-0.04963416	2.83460e-01	3.4667329e-01
6	5.57222487	0.58669078	0.23559014	-0.04968876	2.80498e-01	3.3516433e-01
7.315	5.62911035	0.57775913	0.23323131	-0.0493883	2.98803e-01	4.0210787e-01
8.63	5.62872861	0.5778187	0.23324713	-0.04939032	2.98670e-01	4.0163644e-01
9.945	5.61912872	0.57930988	0.23364489	-0.04944082	2.95369e-01	3.8987824e-01

$\hat{\sigma}$ = -0,81482.

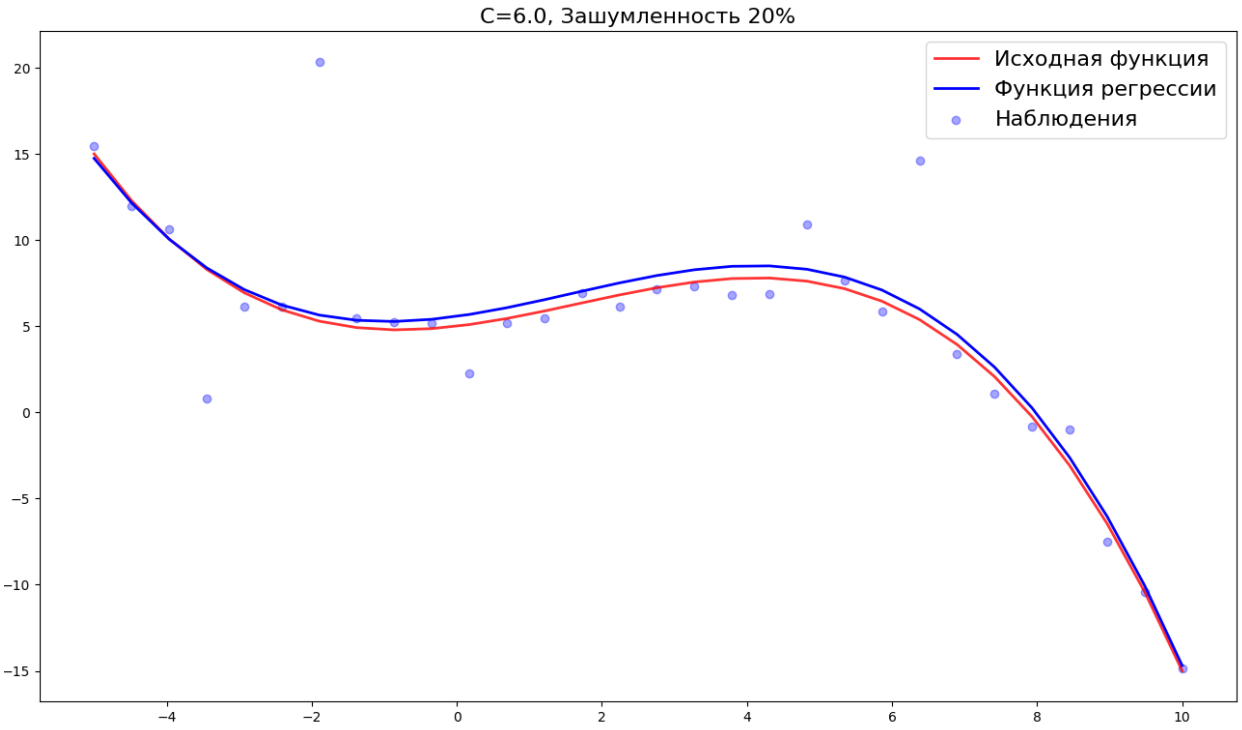


Рисунок 4. Графики наблюдений, функции регрессии и исходной функции для наилучшего значения М-оценки

Засорение 25%.

w	y	$\hat{y}$	$\hat{y} - y$
1	15.458	15.227	-0.2304
1	11.985	12.415	0.4301
1	10.648	10.116	-0.5315
1	0.781	8.288	7.507
1	6.143	6.889	0.7462
1	6.152	5.874	-0.2777
1	20.365	5.201	-15.16
1	5.445	4.828	-0.6174
1	5.213	4.711	-0.5024
1	5.204	4.807	-0.3974
1	2.284	5.073	2.789
1	-1.080	5.467	6.547
1	5.460	5.945	0.4849
1	6.939	6.464	-0.4752
1	6.149	6.982	0.8.329
1	5.677	7.456	1.778
1	7.314	7.842	0.5275
1	6.791	8.098	1.306
1	6.872	8.180	1.309
1	10.923	8.047	-2.876
1	7.647	7.654	6.600e-03
1	5.865	6.959	1.094
1	14.628	5.919	-8.709
1	3.382	4.491	1.109
1	1.082	2.632	1.549
1	-0.850	0.299	1.149
1	-0.974	-2.551	-1.577
1	-7.504	-5.960	1.544
1	-10.404	-9.973	0.4313
1	-14.849	-14.631	0.2181

C	$\hat{\theta}$				MSE	$(\hat{\theta} - \theta)^T(\hat{\theta} - \theta)$
3.37	4.94973551	0.56797314	0.26551135	-0.05182182	1.10028e-01	7.3907880e-03
4.685	4.8979711	0.57628443	0.26764878	-0.05209657	1.14196e-01	1.6545085e-02
6	4.81182098	0.59014967	0.27120664	-0.05255419	1.26066e-01	4.3994551e-02
7.315	4.96790739	0.5650603	0.26476181	-0.0517255	1.09097e-01	5.4836664e-03
8.63	4.96617551	0.56533822	0.2648333	-0.05173469	1.09175e-01	5.6362151e-03
9.945	4.96787138	0.56506608	0.2647633	-0.05172569	1.09099e-01	5.4867764e-03

$\hat{\sigma}$ =-0,83090.

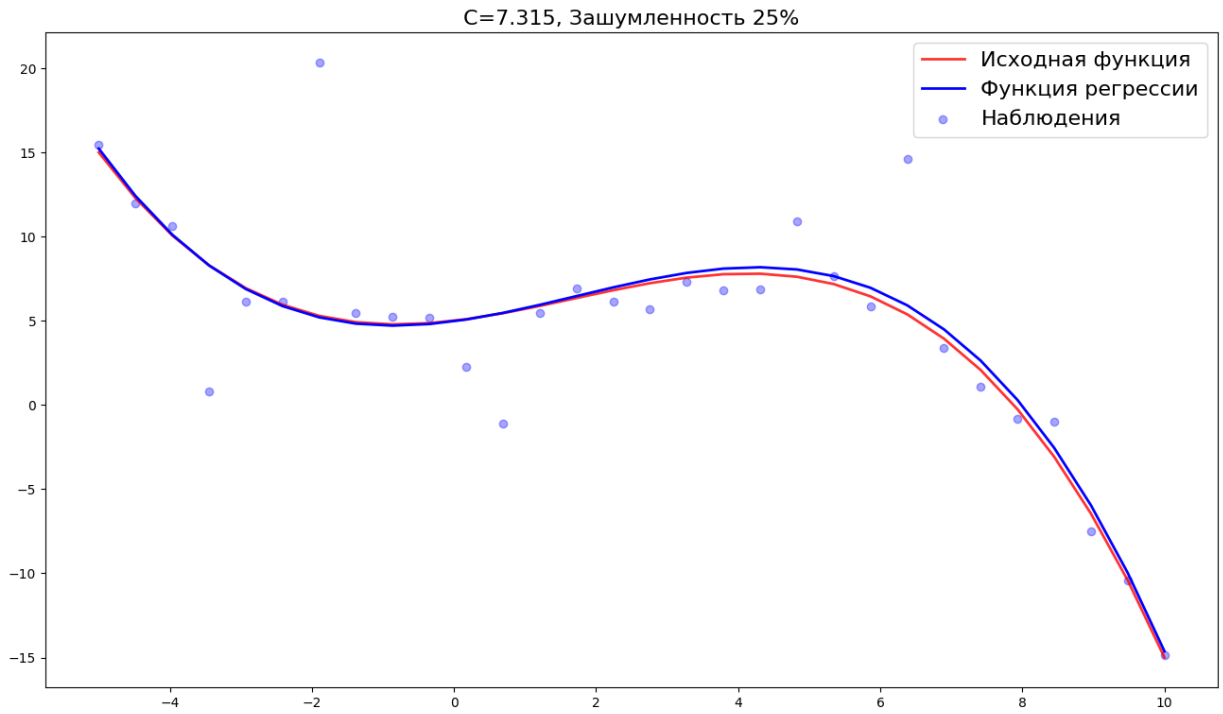


Рисунок 5. Графики наблюдений, функции регрессии и исходной функции для наилучшего значения М-оценки

5. Текст программы:

```
import argparse
import statistics
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

import numpy as np
from tabulate import tabulate

from my_types import positive_float, restricted_int, percent_float, restricted_float,
required_length

mad_const = 0.67449  # Check - Median absolute deviation
exp_const = np.exp(1)

params = {'axes.labelsize': 16,
          'axes.titlesize': 16,
          'legend.fontsize': 16,
          'figure.figsize': (16, 9)}
plt.rcParams.update(params)


def f(x):
    return np.array([np.ones(len(x)), np.array(x), np.array(x * x), np.array(x * x * x)]).T


def w(z, c):
    if np.abs(z.all()) < c:
        return 1 - np.power(np.power((z / c), 2), 2)
    else:
        return 0


def MSE(y, y_hat):
    return np.square(y_hat - y).mean()


def error(theta, theta_est):
    diff = theta_est - theta
    return np.dot(diff.T, diff)


def generate_dataset(size, noise_percent, sigma=1.0, scale=15, verbose=False):
    lb = -5
    hb = 10
    exception_count = 0
    theta = np.array([5, 0.5, 0.25, -0.05])
    x = np.linspace(lb, hb, size)
    y = np.dot(f(x), theta)
    y_hat = y.copy()

    if noise_percent > 0:
        exception_count = int(np.round(noise_percent * size))
        gaussian_noise = np.random.normal(0, sigma, size)
        for pos in np.random.choice(size, size=exception_count, replace=False):
            gaussian_noise[pos] *= scale
        y_hat = y_hat + gaussian_noise

    if verbose:
        print("Размер выборки равен: {}".format(size))
        print("Сгенерировано выбросов: {}".format(exception_count))
    return theta, x, y, y_hat


def IRLS(x, y, theta, sigma, c, delta, max_iter=1000):
    X = f(x)
    diagW = []
    iters = 0
    for i in range(max_iter):
        r = y - np.dot(X, theta)
        diagW = w(r / sigma, c)
        if(diagW.all() != 0):
            W = np.diag(diagW)
        else:
            W = 0
```

```
        theta_next = np.dot(np.linalg.inv(X.T.dot(W).dot(X)), (X.T.dot(W).dot(y)))
        sigma = statistics.median(r) / mad_const

        max_theta_diff = np.max(np.abs((theta_next - theta) / theta))
        theta = theta_next

        if max_theta_diff < delta:
            iters = i + 1
            break

    return theta, sigma, diagW, iters


def single_exec(x, y_true, y_noise, c, theta, sigma, delta, noise, plot):
    theta_hat, sigma_hat, diagW, iters = IRLS(x=x, y=y_noise, theta=theta, sigma=sigma, c=c,
delta=delta)
    y_hat = np.dot(f(x), theta_hat)

    mse = MSE(y_true, y_hat)
    theta_error = error(theta, theta_hat)

    if plot:
        plt.figure()
        plt.title("C={}, Зашумленность {:.0%}".format(c, noise))
        plt.scatter(x, y_noise, c='b', alpha=0.35, label="Наблюдения")
        plt.plot(x, y_true, 'r', lw=2, label='Исходная функция', alpha=0.8)
        plt.plot(x, y_hat, 'b', lw=2, label='Функция регрессии')
        plt.legend()
        plt.show()
    return theta_hat, sigma_hat, mse, theta_error, diagW, iters


def main(c_array, theta_init, sigma_init, delta, size, noise_percent, verbose, plot):
    table = []
    hidden_results = []

    theta_true, x, y_true, y_noise = generate_dataset(size, noise_percent, sigma=0.5,
verbose=verbose, scale=25)

    if not theta_init:
        theta_init = theta_true
    if not sigma_init:
        sigma_init = statistics.median(y_noise)

    if verbose:
        # print(tabulate(y_noise.reshape(-1, 1), ["Y"], floatfmt='.3f'))
        print('sigma_init = {}'.format(sigma_init))
        print('theta_init = {}'.format(theta_init))
        print('Среднее = {}'.format(y_noise.mean()))

    for arg_c in c_array:
        theta_hat, sigma_hat, mse, theta_error, diagW, iters = single_exec(x, y_true, y_noise,
arg_c, theta_init,
                                                                           sigma_init, delta,
                                                                           noise_percent,
                                                                           plot)
        table.append([arg_c, theta_hat, mse, theta_error, iters])
        hidden_results.append([diagW, sigma_hat])

    header = ["C", "Theta_Hat", "MSE", "Theta_Error", "Iters"]
    print("\nOriginal thetas:", theta_true)
    print(tabulate(table, header, tablefmt="fancy_grid", floatfmt=('g', '', '.5e', '.7e',)))

    print('\nЛучшие параметры модели:')
    best_idx = table.index(min(table, key=lambda arg: arg[3]))
    theta_hat = table[best_idx][1]

    print("C =", table[best_idx][0])
    print("Theta_Hat:", theta_hat)
    print("Sigma_Hat:", hidden_results[best_idx][1])

    if verbose:
        y_hat = np.dot(f(x), theta_hat)
        data = np.array([hidden_results[best_idx][0],
                         y_noise,
                         y_hat,
                         (y_hat - y_noise)
```

```
                        ]).T
        print(tabulate(data, ["w", "y", "y_hat", "diff"], tablefmt="fancy_grid",
                       floatfmt=('.3e', '.3f', '.3f', '.7e',)))
        df = pd.DataFrame(data=data, columns=["w", "y", "y_hat", "diff"])
        df['w'] = df['w'].map(lambda param: '{:.3e}'.format(param))
        df['y'] = df['y'].map(lambda param: '{:.3f}'.format(param))
        df['y_hat'] = df['y_hat'].map(lambda param: '{:.3f}'.format(param))
        df['diff'] = df['diff'].map(lambda param: '{:.3e}'.format(param))
        df.to_excel("./out.xlsx")


if __name__ == '__main__':
    parser = argparse.ArgumentParser()

    parser.add_argument('-c', required=True, type=positive_float, nargs='+',
help='Коэффициент(ы) C.')
    parser.add_argument('--size', type=restricted_int, help='Размер выборки. (default:
%(default)s)', default=64)
    parser.add_argument('--noise-percent', type=percent_float, help='Процент зашумленности
(default: %(default)s).',
                        default=0.0)
    parser.add_argument('--theta', type=restricted_float, nargs='*',
                        help='Начальное приближение theta. (default: Theta Ист.)',
default=None,
                        action=required_length(4))
    parser.add_argument('--sigma', type=positive_float, help='Начальная оценка sigma.
(default: Медиана Y_Noise)',
                        default=None)
    parser.add_argument('--delta', type=positive_float,
                        help='Условие сходимости для thetas в ИМНК. (default: %(default)s)',
                        default=0.05)

    parser.add_argument('-v', '--verbose', action='store_true', help='Включить расширенный
лог. (default: %(default)s)')
    parser.add_argument('-p', '--plot', action='store_true', help='Визуализировать результаты.
(default: %(default)s)')
    parser.add_argument('--seed', type=restricted_int,
                        help='Задает начальные условия для генератора случайных чисел.
(default: %(default)s)',
                        default=69)
    args = parser.parse_args()

    np.random.seed(args.seed)

    main(args.c, args.theta, args.sigma, args.delta, args.size, args.noise_percent,
args.verbose, args.plot)
```