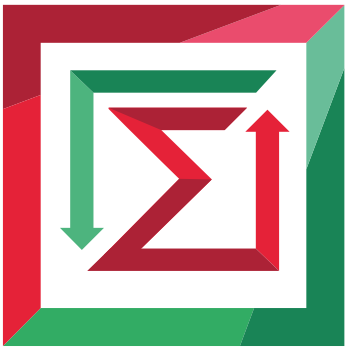
Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

НГТУ
НЭТИ

Кафедра теоретической и прикладной информатики

Лабораторная работа № 5
по дисциплине «Программные Средства Защиты Информации»
Обмен ключами по схеме Диффи-Хеллмана



ФАКУЛЬТЕТ:	ПМИ
ГРУППА:	ПМИМ-01
СТУДЕНТЫ:	Ершов П. К. Малышкина Е. Д. Слободчикова А. Э.
БРИГАДА:	2
ПРЕПОДАВАТЕЛЬ:	Авдеенко Т. В.

Новосибирск
2021

1. Цель работы

Освоить методы генерации больших простых чисел и методы проверки больших чисел на простоту. Познакомиться с теоремой Эйлера, научиться строить первообразные корни по модулю n. Изучить схему обмена ключами Диффи-Хеллмана.

Примечание: В данной лабораторной работе под большими числами будем понимать числа, превышающие 2^{64}.

2. Задание

1. Реализовать приложение для шифрования, позволяющее выполнять следующие действия:
   1.1. Генерировать большие простые числа:
      1) программа по заданным (количество проверок в тесте Рабина-Миллера) и (количество бит) должна генерировать простое n-битное число, отображая при этом, сколько итераций алгоритма генерации простого числа потребовалось выполнить для его генерации и сколько времени было затрачено на это;
      2) программа по заданным границам диапазона должна выводить все простые числа из этого диапазона, отображая время, затраченное на генерацию всех чисел;
   1.2. Определять для заданного числа первые 100 первообразных корней, отображая при этом суммарное время, затраченное программой на их поиск.
   1.3. Моделировать обмен ключами между абонентами по схеме Диффи-Хеллмана. Программа должна получать большие простые числа X_A, X_B и n случайным образом с помощью алгоритма генерации простого числа, а также предоставлять пользователю возможность задавать их.
2. С помощью реализованного приложения выполнить следующие задания:

   2.1. Протестировать правильность работы разработанного приложения.
   2.2. Сделать выводы о проделанной работе.

3. Исследования

```
Генерация простого числа:
 n = 13993172307938196277
 количество итераций, затраченных на генерацию = 21
 время генерации = 0.001000
```

Рисунок 1. Генерация простого числа

```
Первообразные корни: n = 13993172307938196277
 корни[:100] = [2, 13, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 32, 35, 42, 45, 50, 51, 54, 56, 57, 58, 60, 68,
 время = 2.428682
```

Рисунок 2. Первые сто первообразных корней числа

```
Протокол обмена ключами Диффи-Хэллмана:
 n = 13993172307938196277
 g = 2
 время = 0.126999

Простое число n = 13993172307938196277
 первообразный корен g = 2
 открытое значение Ya = 20863333018306792 65
 открытое значние Yb = 32385036210179839 66

Общий ключ K(абонент A) = b'\x00\x06&\xd9~X\xcb\x186'
Общий ключ K(абонент B) = b'\x00\x06&\xd9~X\xcb\x186'
```

Рисунок 3. Работа протокола обмена ключами Диффи-Хеллмана

4. Выводы

Реализованные алгоритмы позволяют достаточно быстро получить результат, однако они сильно зависят от алгоритма факторизации, который в свою очередь выбирается в зависимости от рабочих диапазонов больших чисел.

В данной реализации, факторизация через перебор делителей часто приводит к зависанию программы т.к. при обходе всех делителей от 2 до $\sqrt{n}$ последний делитель может быть ближе к $\sqrt{n}$ чем к 2, нахождение которого через обход всех значений в порядке их возрастания выполняется довольно долго.

Алгоритм Диффи-Хеллмана хорошо выполняет задачу по получению общего секретного ключа для двух и более абонентов используя незащищенный от прослушивания, но, что важно, защищенный от модификации передаваемых данных, канал связи.

5. Код программы

```
import time
import random
import typing as ty
import numpy as np

# get all prime numbers below n
def primesfrom2to(n: int) -> ty.List[int]:
   sieve = np.ones(n // 3 + (n % 6 == 2), dtype=np.bool_)
   for i in range(1, int(n ** 0.5) // 3 + 1):
      if sieve[i]:
         k = 3 * i + 1 | 0x1
         sieve[k * k // 3::2 * k] = False
         sieve[k * (k - 2 * (i & 0x1) + 4) // 3::2 * k] = False
   return np.r_[2, 3, (3 * np.nonzero(sieve)[0][1:] + 1 | 0x1)].tolist()

dividers = primesfrom2to(2000)

# miller-rabin primality test
def mrprimality(p: int, *, t: int = 1) -> bool:
   if p == 1 or p in dividers: # fast return
      return True
   if not p & 0x1: # if even
      return False

   b = 0
   m = p - 1

   while m % 2 == 0: # find pow of 2
      m //= 2
      b += 1

   for _ in range(t):
      a = random.randrange(2, p)
      z = pow(a, m, p)

      if z in (1, p - 1):
         continue

      for j in range(b):
         z = pow(z, 2, p)
         if z == p - 1:
            break
         else:
            return False
   return True

# some stupid factorization
def factor(n: int) -> ty.Generator[int, None, None]:
   if mrprimality(n):
      yield n
      return

   while n % 2 == 0:
      n //= 2
      yield 2

   if n == 1:
      return

   for x in range(3, int(np.sqrt(n)) + 1, 2):
      while n % x == 0:
         n //= x
      yield x

      if n == 1:
         return

      if mrprimality(n):
         break
   yield n

# squeeze same numbers in array
def squeeze(arr: ty.List[int]) -> ty.List[int]:
   if len(arr) < 2:
```

```
      return arr
   arr.sort()

   cur = arr[0]
   i = 0; j = 1
   while j != len(arr):
      if arr[j] == cur:
         arr[i] *= arr[j]
         arr.pop(j)
      else:
         i += 1
         j += 1
   return arr

# euler's function
def euler(n: int) -> int:
   if n < 3:
      return 1

   # simple check if n is prime
   if n in dividers:
      return n - 1

   res = n # type: float
   factors = tuple(factor(n))
   for x in set(factors):
      for _ in range(factors.count(x)):
         n //= x
      res -= res / x
   if n > 1:
      res -= res / n
   return int(res)

# simple primary number generator
def generate(n: int, *, k: int = 5) -> ty.Tuple[int, int]:
   """generate a prime number. returns (number, attempts)"""

   fails = 0
   while True:
      # generate n random bits and set first and last ones to 1 which will ensure to be n bits long and
odd
      num = random.getrandbits(n) | 0x1 << n - 1 | 0x1

      for x in dividers: # check num to be divided by any prime number below 2000
         if num % x == 0 and num // x != 1:
            break
      else:
      # check miller-rabin primality test k times
         if mrprimality(num, t=k):
            return num, fails
      fails += 1

# primitive root modulo n
def primroots(n: int) -> ty.Generator[int, None, None]:
   # phi = euler(n)
   phi = n - 1 # n is prime
   factors = set(factor(phi)) # factorize phi

   for i in range(2, phi + 1):
      if all(pow(i, phi // x, n) != 1 for x in factors):
         yield i

# diffie-hellman implementation
class DiffieHellman:
   def __init__(self, n: ty.Optional[int] = None, x: ty.Optional[int] = None) -> object:
      """

      :rtype: object
      """
      self.n = n or generate(64)[0]
      self.g = next(primroots(self.n))

      size = self.n.bit_length()
      self._size = size // 8 + 1

      self._s = x or generate(size)[0]
      while self._s >= self.n:
```

```
            self._s, _ = generate(size)

        self._key = pow(self.g, self._s, self.n)

    def __call__(self, key: int) -> bytes:
        self._key = pow(key, self._s, self.n)
        return self.key

    @property
    def key(self) -> bytes:
        return self._key.to_bytes(self._size, "big")
```

Main.py

```
from prime import *

if __name__ == "__main__":
    t0 = time.time()
    num, attempts = generate(64)
    t1 = time.time()

    print("Генерация простого числа:\n n = %d\n количество итераций, затраченных на генерацию = %d\n время
генерации = %f\n" % (num, attempts, t1 - t0))

    gen = primroots(num)
    roots = list(next(gen) for _ in range(100))
    t2 = time.time()

    print("Первообразные корни: n = %d\n корни[:100] = %s\n время = %f\n" % (num, roots, t2 - t1))

    g = roots[0]
    A = DiffieHellman(num); B = DiffieHellman(num)

    yA = A._key; yB = B._key
    k1 = A(yB)
    k2 = B(yA)
    t3 = time.time()
    print("Протокол обмена ключами Диффи-Хэллмана:\n n = %d\n g = %d\n время = %f\n" % (num, g, t3 - t2))
    print("Простое число n = %d\n первообразный корен g = %d\n открытое значение Ya = %d\n открытое значние
Yb = %d\n" % (num, g, yA, yB))
    print("Общий ключ K(абонент A) = %s\nОбщий ключ K(абонент B) = %s" % (k1, k2))
```