

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

В.М. ЧУБИЧ, Е.В. ФИЛИППОВА

АКТИВНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК  
2016

УДК 681.5.015.4(075.8)  
Ч-813

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства РФ  
(задание № 2014/138, проект «Развитие систем и технологий  
компьютерного моделирования при исследовании объектов  
стохастической природы», № 1689)

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *А.А. Воевода*  
канд. техн. наук, доцент *О.С. Черникова*

Работа подготовлена на кафедре  
теоретической и прикладной информатики

**Чубич В.М.**

Ч-813      Активная идентификация стохастических динамических  
систем. Оценивание параметров: учеб. пособие / В.М. Чубич,  
Е.В. Филиппова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – 63 с.

ISBN 978-5-7782-3050-7

Предназначено для магистрантов факультета прикладной математики и информатики НГТУ, изучающих дисциплины «Математические методы планирования эксперимента» и «Методы активной идентификации динамических систем» по направлениям 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.04.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» соответственно. Может быть полезно специалистам, научные и профессиональные интересы которых связаны с моделированием динамических систем стохастической природы.

УДК 681.5.015.4(075.8)

ISBN 978-5-7782-3050-7

© Чубич В.М., Филиппова Е.В., 2016  
© Новосибирский государственный  
технический университет, 2016

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время математическое моделирование играет фундаментальную роль в науке и технике и является одним из интенсивно развивающихся перспективных научных направлений в области информатики.

Проблема идентификации, связанная с построением математических моделей динамических систем по экспериментальным данным, относится к одной из основных проблем теории и практики автоматического управления. Ее качественное решение способствует эффективному применению на практике современных математических методов и наукоемких технологий, например, при расчете и проектировании систем управления подвижными (в том числе авиационно-космическими) и технологическими объектами, построении прогнозирующих моделей (например, в экономике и бизнес-процессах), конструировании следящих и измерительных систем.

Настоящее издание открывает задуманную авторами серию учебных пособий, посвященных активной параметрической идентификации стохастических динамических систем, описываемых моделями в пространстве состояний. В ближайшей перспективе серия будет продолжена материалами, содержащими изложение теоретических и прикладных вопросов планирования оптимального эксперимента для дискретных и непрерывно-дискретных систем.

Учебные пособия создаются на базе соответствующих разделов лекций по дисциплинам «Математические методы планирования эксперимента» и «Методы активной идентификации динамических систем». Предлагаемые в них вопросы и упражнения призваны помочь обучающимся в успешном и более глубоком усвоении излагаемого материала.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\theta$	– вектор неизвестных параметров размерности $s$
$\Omega_\theta$	– область допустимых значений параметров
$\theta^*$	– вектор истинных значений параметров
$\hat{\theta}$	– оценка вектора параметров $\theta$
$\Xi$	– данные наблюдений
$\chi(\theta; \Xi)$	– критерий идентификации
$U$	– входной сигнал;
	$U = \begin{cases} U_0^{N-1} = \{u(t_k), k = 0, 1, \dots, N-1\}, & \text{если время дискретное,} \\ \{u(t), t \in [t_0, t_N]\}, & \text{если время непрерывное} \end{cases}$
$U_i$	– $i$ -й входной сигнал
$u(t_k), u(t)$	– $r$ -мерный вектор управления (входа) в соответствующий момент времени
$x(t_k), x(t)$	– $n$ -мерный вектор состояния в соответствующий момент времени
$\hat{x}(t_{k+1}   t_k)$	– оценка $x(t_{k+1})$ по измерениям $Y_1^k$ (оценка одношагового прогнозирования)
$\hat{x}^{ij}(t_{k+1}   t_k)$	– оценка одношагового прогнозирования состояния $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре $(U_i, Y_{ij})$
$\hat{x}(t_{k+1}   t_{k+1})$	– оценка $x(t_{k+1})$ по измерениям $Y_1^{k+1}$ (оценка фильтрации)
$\hat{x}^{ij}(t_{k+1}   t_{k+1})$	– оценка фильтрации состояния $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре $(U_i, Y_{ij})$

- $w(t_k), w(t)$  –  $p$ -мерный вектор шума системы в соответствующий момент времени
- $y(t_{k+1})$  –  $m$ -мерный вектор измерения (выхода) в момент времени  $t_{k+1}$
- $\hat{y}(t_{k+1} | t_{k+1})$  – оценка  $y(t_{k+1})$  по измерениям  $Y_1^{k+1}$  при  $\theta = \hat{\theta}$
- $Y, Y_1^N$  – выходной сигнал  $Y = Y_1^N = \{y(t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, N-1\}$
- $Y_{ij}$  –  $j$ -я реализация выходного сигнала, соответствующая входному сигналу  $U_i$
- $L(\theta; Y_1^N)$  – функция правдоподобия
- $v(t_{k+1})$  –  $m$ -мерный вектор шума измерения в момент времени  $t_{k+1}$
- $\varepsilon(t_{k+1})$  –  $m$ -мерный вектор обновления в момент времени  $t_{k+1}$
- $E[\cdot]$  – оператор математического ожидания
- $A^T$  – матрица, транспонированная к матрице  $A$
- $A^{-1}$  – матрица, обратная к невырожденной матрице  $A$
- $\det A$  – определитель матрицы  $A$
- $I$  – единичная матрица
- $\delta_{ki}$  – символ Кронекера
- $\delta(t - \tau)$  – дельта-функция Дирака
- $\Phi(\alpha)$  – функция Крампа (Лапласа)

## ВВЕДЕНИЕ

Идентификацией динамической системы называется определение структуры и параметров математической модели, обеспечивающих наилучшее совпадение выходных переменных модели и системы при одинаковых входных воздействиях.

Различают задачи идентификации в узком и широком смыслах [1]. В соответствии с [2] можно выделить следующие этапы решения задач идентификации в широком смысле:

- определение класса и характеристик входных воздействий;
- выбор критерия близости модели к системе;
- выбор и определение структуры модели на основе имеющейся априорной информации об исследуемом процессе и определенных эвристических соображений;
- определение параметров модели, оптимальных с точки зрения выбранного критерия идентификации.

Последний этап характерен для задач идентификации в узком смысле и наиболее соответствует реальным условиям проектирования и широко используется в инженерной практике (например, при синтезе оптимальных систем, проектировании самонастраивающихся систем, синтезе регуляторов [3]).

По способу проведения эксперимента существующие методы идентификации можно разделить на пассивные и активные. При пассивной идентификации для построения математической модели используются реально действующие в системе сигналы и нормальный режим эксплуатации не нарушается. Методы пассивной идентификации достаточно полно описаны, например в [4–7]. Активная идентификация, напротив, предполагает нарушение технологического режима и подачу на вход изучаемой системы специального тестирующего сигнала. Например, в конечно-частотном методе оценивания параметров линейных стационарных моделей непрерывных или дискретных систем тестирующий сигнал представляет собой сумму гармоник, число которых не превы-

шает размерности пространства состояний [8–10]. Трудности, связанные с необходимостью нарушения технологического режима, должны окупаться повышением качества проводимых исследований. Эффект достигается в результате сочетания традиционных приемов пассивной идентификации с концепцией планирования эксперимента (см. например, [11–16]).

*В широком смысле процедура активной идентификации* (рис. 1) предполагает выполнение следующих основных этапов.

### **1. Подготовка данных наблюдений**

Входные и выходные данные регистрируются в процессе проведения целенаправленных идентификационных экспериментов. Этот этап тесно связан с планированием эксперимента, задача которого состоит в том, чтобы, учитывая возможные ограничения, подготовить максимально информативные данные.

### **2. Определение структуры математической модели**

Это – весьма важная и ответственная часть процедуры идентификации. Определение общей структуры модели и класса уравнений, которыми предполагается описывать наблюдаемый процесс, является задачей структурной идентификации. Подчеркнем, что выбранная модельная структура должна быть идентифицируемой, т. е. позволять по имеющимся экспериментальным данным однозначно находить оценки неизвестных параметров. Исследованию идентифицируемости детерминированных линейных стационарных моделей в пространстве состояний посвящена монография [17].

Математические модели динамических систем можно классифицировать по следующим признакам [2]: одномерность – многомерность, линейность – нелинейность, стационарность – нестационарность, непрерывность – дискретность, детерминированность – стохастичность, характер возмущений, форма описания и т. д.

Описание динамической системы в пространстве состояний [1, 18, 19] позволяет учесть имеющиеся физические представления о механизмах работы системы. В отличие от моделей передаточных функций, которые используются при описании моделей линейных стационарных систем, методы пространства состояний позволяют создать компактную форму представления любых систем: линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных, непрерывных и дискретных. Используемый при этом математический аппарат позволяет создавать мощные программные средства для анализа и синтеза динамических систем.

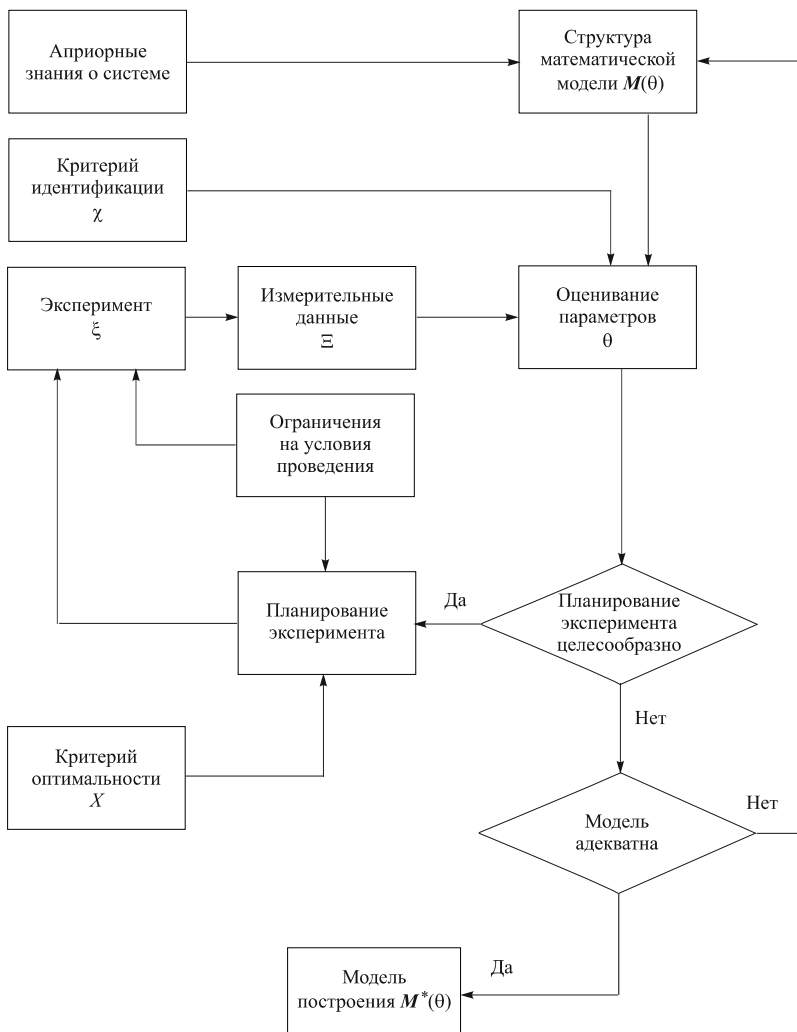


Рис. 1. Контур идентификации системы

### 3. Оценивание параметров, входящих в модель

Определение значений параметров по имеющимся экспериментальным данным – задача параметрической идентификации. При решении этой задачи выбираются критерий идентификации, зависящий



от вектора неизвестных параметров, и метод нелинейного программирования для решения соответствующей оптимизационной задачи с ограничениями.

#### 4. Планирование эксперимента

При построении моделей динамических систем могут использоваться различные способы управления экспериментом. В простейшем случае управление экспериментом сводится к выбору оптимальных моментов измерений, в более сложном – к планированию оптимальных входных сигналов и начальных условий [20]. Возможны также варианты смешанных схем.

Планирование эксперимента выполняется путем условной оптимизации определенного критерия оптимальности, в качестве которого используется выпуклый функционал от информационной (или дисперсионной) матрицы плана.

#### 5. Проверка адекватности модели

В результате выполнения предыдущих этапов процедуры активной идентификации получается определенная модель из некоторого класса, которая в соответствии с выбранным критерием качества наилучшим образом воспроизводит экспериментальные данные. Далее необходимо проверить соответствие модели данным наблюдений, априорной информации и поставленной прикладной цели. Адекватность построенной модели проверяется с помощью подачи на ее вход и вход самой системы тестирующих сигналов, которые не использовались для идентификации, и сравнения спрогнозированных по модели и реальных выходных данных (например, по сумме квадратов норм невязок). В случае необходимости осуществления оптимального выбора из нескольких конкурирующих модельных структур следует воспользоваться такими информационными критериями [21, 22], как критерий Акаике, критерий Такеучи, критерий Шварца (байесовский критерий).

При предварительно выбранной модельной структуре необходимость прохождения этапов 2 и 5 отпадает. Таким образом, *процедура активной идентификации в узком смысле* состоит из следующих шагов:

- а) вычисление оценок неизвестных параметров по измерительным данным, соответствующим некоторому плану эксперимента;
- б) синтез на основе полученных оценок оптимального плана эксперимента;
- в) пересчет оценок параметров по измерительным данным, соответствующим синтезированному плану.

## ГЛАВА 1

# ОСНОВЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Неизвестные параметры математической модели оцениваются по данным наблюдений  $\Xi$  в соответствии с критерием идентификации  $\chi$ . Сбор числовых данных происходит в процессе проведения идентификационных экспериментов, которые выполняются по некоторому плану  $\xi_v$ .

Критерий идентификации формируется в соответствии с выбранным методом статистического оценивания. Здесь имеет смысл прежде всего выделить *метод наименьших квадратов* [5, 6, 23–25], не требующий знания закона распределения измерительных данных; *метод максимального правдоподобия* [4–6, 23–27], использующий знание закона распределения выборочных данных; *метод максимума апостериорной вероятности*, или *байесовский подход к оцениванию* [4, 5, 23, 24, 26, 27], предполагающий случайность оцениваемых параметров и знание законов распределения оцениваемых параметров и измерительных данных.

Структурно-вероятностное описание рассматриваемых в учебном пособии моделей и детерминированная природа подлежащих оцениванию неизвестных параметров обусловили выбор в качестве метода статистического оценивания **метод максимального правдоподобия**. Известно, что при выполнении некоторых общих условий (условий регулярности), накладываемых на функцию правдоподобия, *оценки максимального правдоподобия* обладают такими важными для практики асимптотическими свойствами, как асимптотическая несмещенность, состоятельность, асимптотическая эффективность и асимптотическая нормальность [26, 27].

Оценка  $\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)) = \hat{\theta}_N(Y_1^N)$  вектора параметров  $\theta$ , полученная по выборке  $Y_1^N$ , называется *асимптотически несмещенной*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [E(\hat{\theta}_N) - \theta] = \lim_{N \rightarrow \infty} b_N(\theta) = 0.$$

Здесь и далее  $E[\cdot]$  – оператор математического ожидания;  $b_N(\theta)$  – смещение оценки (оценки максимального правдоподобия не всегда являются несмещенными оценками).

Оценка  $\hat{\theta}_N$  вектора параметров  $\theta$  называется *состоятельной*, если  $\hat{\theta}_N \rightarrow \theta$  по вероятности при  $N \rightarrow \infty$ , т. е. для любого  $\delta > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\|\hat{\theta}_N - \theta\| > \delta\} = 0.$$

Здесь и далее  $\|\cdot\|$  обозначает векторную или матричную норму в зависимости от контекста.

Если  $\hat{\theta}_N$  – оценка вектора параметров  $\theta$  со смещением  $b_N(\theta)$ , то справедливо следующее неравенство информации (неравенство Рао–Крамера–Фреше) для нижней границы ковариационной матрицы  $\hat{\theta}_N$  [26–29]:

$$E[(\hat{\theta}_N - \theta)(\hat{\theta}_N - \theta)^T] \geq \left[ I + \frac{\partial b_N(\theta)}{\partial \theta} \right] M^{-1}(\theta) \left[ I + \frac{\partial b_N(\theta)}{\partial \theta} \right]^T.$$

Здесь  $M^{-1}(\theta)$  – *дисперсионная матрица*, являющаяся обратной к информационной матрице Фишера. *Информационная матрица Фишера* определяется равенствами [5, 23, 26–28]

$$M(\theta) = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln L(\theta; Y_1^N)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right] = E \left[ \frac{\partial \ln L(\theta; Y_1^N)}{\partial \theta^T} \frac{\partial \ln L(\theta; Y_1^N)}{\partial \theta} \right],$$

где  $L(\theta; Y_1^N)$  – функция правдоподобия (плотность совместного распределения измерений  $Y_1^N$ ), рассматриваемая как функция  $\theta$ .

Оценка  $\hat{\theta}_N$  вектора параметров  $\theta$  называется *асимптотически эффективной*, если

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ (\hat{\theta}_N - \theta)(\hat{\theta}_N - \theta)^T \right] = M^{-1}(\theta).$$

Таким образом, в асимптотике оценки максимального правдоподобия обладают наименьшими ковариационными матрицами, совпадающими с  $M^{-1}(\theta)$ .

Оценка  $\hat{\theta}_N$  вектора параметров  $\theta$  называется *асимптотически нормальной* с матрицей  $\Sigma$ , если распределение  $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$  при  $N \rightarrow \infty$  стремится к нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсионной матрицей  $\Sigma$ . В случае оценок максимального правдоподобия  $\Sigma = M^{-1}(\theta)$ .

При заданном критерии идентификации задача нахождения оценок неизвестных параметров заключается в решении задачи нелинейного программирования с ограничениями:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Omega_\theta} [\chi(\theta; \Xi)], \quad (1.1)$$

где

$$\Omega_\theta = \left\{ \theta \in R^s \mid \sigma_i(\theta) = 0, \ i = 1, 2, \dots, d_1; \ \vartheta_i(\theta) \leq 0, \ i = 1, 2, \dots, d_2 \right\}. \quad (1.2)$$

Методы нелинейного программирования включают в себя большую группу численных методов, многие из которых ориентированы на решение оптимизационных задач соответствующего класса. Выбор того или иного метода обусловлен сложностью вычисления критерия идентификации, необходимой точностью решения, мощностью компьютера и т. д.

Один из традиционных подходов к решению оптимизационной задачи (1.1) заключается в сведении ее к задаче нелинейного программирования без ограничений. Это можно сделать, например, с помощью *метода штрафных функций*, видоизменив целевую функцию с учетом исходных ограничений. Полученная задача решается тем или иным методом безусловной оптимизации.

В зависимости от порядка используемых производных методы безусловной оптимизации подразделяются на методы нулевого, первого и второго порядка [30–35].

Другой общепринятый подход к решению оптимизационной задачи (1.1) предполагает либо непосредственный (в этом случае мы приходим к *методам возможных направлений*, из которых наиболее популярен *метод проекции градиента*), либо опосредованный (через функцию Лагранжа) учет ограничений (1.2). Метод проекции градиента представляет практический интерес лишь в тех случаях, когда проектирование выполняется легко, что определяется простотой устройства допустимого множества  $\Omega_\theta$  (например,  $\Omega_\theta$  представляет собой шар, координатный параллелепипед, задается системой ограничений в виде линейных равенств и неравенств и т. д.). Методы второй группы, самым передовым и эффективным из которых, по мнению многих современных исследователей, является **метод последовательного квадратичного программирования** (общепринятая аббревиатура – SQP, от английского Sequential quadratic programming), в последнее время развиваются наиболее интенсивно. Этот метод [36] реализован в рамках пакета Optimization Toolbox [37] программной системы MATLAB.

Метод последовательного квадратичного программирования позволяет для гладких функций  $\chi(\theta; \Xi)$ ,  $\{\sigma_i(\theta), i = 1, 2, \dots, d_1\}$  и  $\{\vartheta_i(\theta), i = 1, 2, \dots, d_2\}$  организовать решение оптимизационной задачи (1.1) с ограничениями (1.2) в соответствии со следующей схемой.

Шаг 1. Задать  $(\theta^0, \lambda^0, \mu^0) \in R^s \times R^{d_1} \times R^{d_2}$  и положить  $k = 0$ .

Шаг 2. Вычислить

$$g^k = \arg \min_{g \in G_k} \left[ g^T \nabla \chi(\theta^k; \Xi) + \frac{1}{2} g^T H_k g \right], \quad (1.3)$$

где

$$G^k = \left\{ g \in R^s \left| \begin{array}{l} \sigma_i(\theta^k) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \sigma_i(\theta^k)}{\partial \theta_j} g_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, d_1; \\ \vartheta_i(\theta^k) + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vartheta_i(\theta^k)}{\partial \theta_j} g_j \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d_2 \end{array} \right. \right\}; \quad (1.4)$$

$$\nabla \chi[\theta; \Xi] = \left\| \frac{\partial \chi[\theta; \Xi]}{\partial \theta_i} \right\|, \quad i = 1, 2, \dots, s;$$

$$H_k = \frac{\partial^2 L(\theta^k, \lambda^k, \mu^k; \Xi)}{\partial \theta \partial \theta^m};$$

$$L(\theta, \lambda, \mu; \Xi) = \chi(\theta; \Xi) + \sum_{i=1}^{d_1} \lambda_i \sigma_i(\theta) + \sum_{i=1}^{d_2} \mu_i \vartheta_i(\theta).$$

Если  $\|g^k\| \leq \delta$ , закончить процесс (здесь  $\delta$  – малое положительное число), в противном случае вычислить отвечающие найденному значению  $g^k$  множители Лагранжа  $\bar{\lambda}^k$  и  $\bar{\mu}^k$ .

Шаг 3. Положить

$$\theta^{k+1} = \theta^k + g^k; \quad \lambda^{k+1} = \bar{\lambda}^k; \quad \mu^{k+1} = \bar{\mu}^k.$$

Шаг 4. Увеличить  $k$  на единицу и перейти на шаг 2.

На шаге 2 решается задача квадратичного программирования (1.3), (1.4), аппроксимирующая в окрестности точки  $\theta^k$  исходную задачу (1.1), (1.2). Использование в целевой функции матрицы  $H_k$  (матрицы вторых производных для функции Лагранжа  $L(\theta, \lambda, \mu; \Xi)$  задачи (1.1), (1.2)) позволяет учесть важную информацию о членах второго порядка в аппроксимации ограничений и приводит к высокой скорости сходимости рассматриваемой процедуры в целом. В пакете Optimization Toolbox для решения задачи (1.3), (1.4) используется метод проекции градиента с аппроксимацией матрицы вторых производных  $H_k$  по формуле Бroyдена–Флетчера–Голдфарба–Шенно.

Применение метода последовательного квадратичного программирования при численном нахождении оценок максимального правдоподобия предполагает разработку алгоритмов вычисления значений как соответствующего критерия идентификации, так и его градиента.

Весьма полезны при численном нахождении оценок неизвестных параметров методы глобальной оптимизации [38, 39].

## ГЛАВА 2

### СТРУКТУРНО-ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Описание моделей в пространстве состояний позволяет с единых методологических позиций рассматривать различные системы (нелинейные и линейные, нестационарные и стационарные), учитывая имеющиеся физические представления о механизмах работы системы, и создавать мощные программные средства для анализа и синтеза динамических систем.

#### 2.1. МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую, наблюдаемую, идентифицируемую модель динамической системы вида

$$x(t_{k+1}) = f[x(t_k), u(t_k), t_k] + \Gamma(t_k)w(t_k); \quad (2.1)$$

$$y(t_{k+1}) = h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.2)$$

где  $x(t_k)$  –  $n$ -вектор состояния;  $u(t_k)$  – детерминированный  $r$ -вектор управления (входа);  $w(t_k)$  –  $p$ -вектор шума системы (возмущения);  $y(t_{k+1})$  –  $m$ -вектор измерения (выхода);  $v(t_{k+1})$  –  $m$ -вектор шума (ошибки) измерения.

Априорные предположения:

- случайные векторы  $w(t_k)$  и  $v(t_{k+1})$  образуют стационарные белые гауссовские последовательности, для которых

$$E[w(t_k)] = 0, \quad E[w(t_k)w^T(t_i)] = Q\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})w^T(t_i)] = 0, \quad k, i = 0, 1, \dots, N-1$$

(здесь и далее  $\delta_{ki}$  – символ Кронекера);

- начальное состояние  $x(t_0)$  имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[x(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\right\} = P(t_0)$$

и не коррелирует с  $w(t_k)$  и  $v(t_{k+1})$  при любых значениях  $k$ ;

- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор  $\theta$ , включающий в себя элементы вектор-функций  $f[x(t_k), u(t_k), t_k]$ ,  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$ , матриц  $\Gamma(t_k)$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и вектора  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях.

Частным случаем модели (2.1), (2.2) являются модели линейной нестационарной системы

$$x(t_{k+1}) = a[u(t_k), t_k] + F(t_k)x(t_k) + \Gamma(t_k)w(t_k); \quad (2.3)$$

$$y(t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.4)$$

и линейной стационарной системы

$$x(t_{k+1}) = Fx(t_k) + \Psi u(t_k) + \Gamma w(t_k); \quad (2.5)$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.6)$$

При оценивании параметров моделей нелинейных систем (2.1), (2.2) с указанными априорными предположениями будем применять *временную* [40, 41] и *статистическую* [42, 43] линеаризации, в результате сводя исходную задачу к соответствующей задаче для модели вида (2.3), (2.4) со специальным образом определенными векторами  $a[u(t_k), t_k]$ ,  $A(t_{k+1})$  и матрицами  $F(t_k)$ ,  $H(t_{k+1})$ .

Линеаризация во временной области возможна в предположении, что вектор-функции  $f[x(t_k), u(t_k), t_k]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  непрерывны и дифференцируемы по  $x(t_k)$ ,  $u(t_k)$  и  $x(t_{k+1})$  соответственно.



Зададим номинальную траекторию  $\{x_H(t_{k+1}), k=0, 1, \dots, N-1\}$  в соответствии с равенством

$$\begin{cases} x_H(t_{k+1}) = f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k], & k=0, 1, \dots, N-1; \\ x_H(t_0) = \bar{x}(t_0). \end{cases}$$

Разложив для каждого  $k$  вектор-функции  $f[x(t_k), u(t_k), t_k]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  в ряды Тейлора в окрестностях точек  $[x_H(t_k), u_H(t_k)]$  и  $x_H(t_{k+1})$  соответственно и отбросив члены второго и более высоких порядков, запишем уравнения линеаризованной модели:

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k] + \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)} [x(t_k) - x_H(t_k)] + \\ &+ \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial u(t_k)} [u(t_k) - u_H(t_k)] + \Gamma(t_k)w(t_k); \\ y(t_{k+1}) &= h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] + \\ &+ \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})} [x(t_{k+1}) - x_H(t_{k+1})] + v(t_{k+1}). \end{aligned}$$

В отличие от временной линеаризации статистическая линеаризация применима к неоднозначным функциям и к существенным нелинейностям, имеющим характеристики с угловыми точками и разрывами. Статистическая линеаризация заключается в замене нелинейной характеристики эквивалентной (в вероятностном смысле) линеаризованной функциональной зависимостью. В соответствии с [43] получим:

$$\begin{aligned} f[x(t_k), u(t_k), t_k] &= f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] + \\ &+ f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] [x(t_k) - \bar{x}(t_k)]; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] &= h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] + \\ &+ h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] [x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned}
 f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] &= E\{f[x(t_k), u(t_k), t_k]\} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t_k)]}} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x(t_k), u(t_k), t_k] \times \\
 &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x(t_k) - \bar{x}(t_k)]^T P^{-1}(t_k)[x(t_k) - \bar{x}(t_k)]\right\} dx(t_k); \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

$$f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] = \frac{\partial f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]}{\partial \bar{x}(t_k)};$$

$$\begin{aligned}
 h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] &= E\{h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]\} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t_{k+1})]}} \int_{-\infty}^{+\infty} h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] \times \\
 &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})]^T P^{-1}(t_{k+1})[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})]\right\} dx(t_{k+1}); \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

$$h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = \frac{\partial h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \bar{x}(t_{k+1})},$$

$$\bar{x}(t_k) = E\{x(t_k)\} =$$

$$\begin{cases} f_0[\bar{x}(t_{k-1}), P(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}], & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \bar{x}(t_0), & \text{если } k = 0; \end{cases}$$

$$P(t_k) = E\{[x(t_k) - \bar{x}(t_k)][x(t_k) - \bar{x}(t_k)]^T\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} f_1[\bar{x}(t_{k-1}), P(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}] P(t_{k-1}) \times \\ \times f_1^T[\bar{x}(t_{k-1}), P(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}] + \\ + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k), & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ P(t_0), & \text{если } k = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Отметим, что вычисление интегралов в формулах (2.9), (2.10) можно существенно упростить с помощью представленных в [42, 43]

выражений для коэффициентов статистической линеаризации типовых одномерных нелинейностей, встречающихся в системах автоматического управления. Подставив выражения (2.7), (2.8) в уравнения (2.1), (2.2) соответственно, с учетом обозначений

$$\begin{aligned} a[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] &= f_0[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] - \\ &\quad - f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] \bar{x}(t_k); \\ F[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] &= f_1[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k]; \\ A[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] &= h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] - \\ &\quad - h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] \bar{x}(t_{k+1}); \\ H[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] &= h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] \end{aligned}$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (2.3), (2.4).

## 2.2. МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую, наблюдаемую, идентифицируемую модель динамической системы вида:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f[x(t), u(t), t] + \Gamma(t)w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (2.11)$$

$$y(t_{k+1}) = h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.12)$$

где  $x(t)$  –  $n$ -вектор состояния;  $u(t)$  – детерминированный  $r$ -вектор управления (входа);  $w(t)$  –  $p$ -вектор шума системы (возмущения);  $y(t_{k+1})$  –  $m$ -вектор измерения (выхода);  $v(t_{k+1})$  –  $m$ -вектор шума (ошибки) измерения.

Априорные предположения:

- случайные векторы  $w(t)$  и  $v(t_{k+1})$  являются стационарными белыми гауссовскими шумами, для которых

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w^T(\tau)] = Q\delta(t - \tau);$$

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})w^T(\tau)] = 0, \quad k, i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \tau \in [t_0, t_N]$$

(здесь и далее  $\delta(t - \tau)$  – дельта-функция Дирака);

- начальное состояние  $x(t_0)$  имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[x(t_0)] = \bar{x}(t_0), \quad E\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\} = P(t_0)$$

и не коррелирует с  $w(t)$  и  $v(t_{k+1})$  при любых значениях переменной  $k$ ;

- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор  $\theta$ , включающий в себя элементы вектор-функций  $f[x(t), u(t), t]$ ,  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$ , матриц  $\Gamma(t)$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $P(t_0)$  и вектора  $\bar{x}(t_0)$  в различных комбинациях.

Частным случаем модели (2.11), (2.12) являются модели линейной нестационарной системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = a[u(t), t] + F(t)x(t) + \Gamma(t)w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (2.13)$$

$$y(t_{k+1}) = A(t_{k+1}) + H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

и линейной стационарной системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = Fx(t) + \Psi u(t) + \Gamma w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (2.15)$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.16)$$

Непрерывность и дифференцируемость вектор-функций  $f[x(t), u(t), t]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  по  $x(t)$ ,  $u(t)$  и  $x(t_{k+1})$  соответственно позволяет осуществить линеаризацию во временной области нелинейной модели (2.11), (2.12).

Зададим номинальную траекторию  $\{x_H(t), t \in [t_0, t_N]\}$  при помощи равенства

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_H(t) = f[x_H(t), u_H(t), t], \quad t \in [t_0, t_N]; \\ x_H(t_0) = \bar{x}(t_0). \end{cases}$$

Разложив вектор-функции  $f[x(t), u(t), t]$  и  $h[x(t_{k+1}), t_{k+1}]$  в ряды Тейлора в окрестностях точек  $[x_H(t), u_H(t)]$  и  $x_H(t_{k+1})$  соответственно и отбросив члены второго и более высоких порядков, запишем уравнения линеаризованной модели

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f[x_H(t), u_H(t), t] + \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial x(t)}[x(t) - x_H(t)] + \\ &+ \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial u(t)}[u(t) - u_H(t)] + \Gamma(t)w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \\ y(t_{k+1}) &= h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] + \\ &+ \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}[x(t_{k+1}) - x_H(t_{k+1})] + v(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Положив

$$\begin{aligned} a[u(t), t] &= f[x_H(t), u_H(t), t] - \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial x(t)}x_H(t) + \\ &+ \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial u(t)}[u(t) - u_H(t)]; \\ F(t) &= \frac{\partial f[x_H(t), u_H(t), t]}{\partial x(t)}, \\ A(t_{k+1}) &= h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] - \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}x_H(t_{k+1}); \\ H(t_{k+1}) &= \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}, \end{aligned}$$

приходим к модели линейной нестационарной системы (2.13), (2.14).

Выполним статистическую линеаризацию нелинейной модели (2.11), (2.12). В соответствии с [43] получим:

$$\begin{aligned} f[x(t), u(t), t] &= f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] + \\ &+ f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t][x(t) - \bar{x}(t)]; \end{aligned}$$

$$h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] + \\ + h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}][x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})],$$

где

$$f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t)]}} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x(t), u(t), t] \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x(t) - \bar{x}(t)]^T P^{-1}(t)[x(t) - \bar{x}(t)]\right\} dx(t); \quad (2.17)$$

$$f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = \frac{\partial f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]}{\partial \bar{x}(t)};$$

$$h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det[P(t_{k+1})]}} \int_{-\infty}^{+\infty} h[x(t_{k+1}), t_{k+1}] \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})]^T P^{-1}(t_{k+1})[x(t_{k+1}) - \bar{x}(t_{k+1})]\right\} dx(t_{k+1}); \quad (2.18)$$

$$h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = \frac{\partial h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial \bar{x}(t_{k+1})},$$

причем  $\bar{x}(t) = E[x(t)]$  и  $P(t) = E\{[x(t) - \bar{x}(t)][x(t) - \bar{x}(t)]^T\}$  определяются из следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t], & t \in [t_0, t_N], \\ \bar{x}(t_0) - \text{дано}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t]P(t) + P(t)f_1^T[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] + \\ + \Gamma(t)Q\Gamma^T(t), & t \in [t_0, t_N], \\ P(t_0) - \text{дано}. \end{cases}$$

Подчеркнем, что при вычислении интегралов в формулах (2.17), (2.18) может оказаться полезным использование выражений из [42, 43] для коэффициентов статистической линеаризации типовых одномерных нелинейностей.

## УПРАЖНЕНИЯ

**2.1.** Покажите, что в случае временной линеаризации модели (2.1), (2.2) в выражениях (2.3), (2.4)

$$a[u(t_k), t_k] = f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k] - \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)} x_H(t_k) + \\ + \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial u(t_k)} [u(t_k) - u_H(t_k)];$$

$$F(t_k) = \frac{\partial f[x_H(t_k), u_H(t_k), t_k]}{\partial x(t_k)};$$

$$A(t_{k+1}) = h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}] - \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})} x_H(t_{k+1});$$

$$H(t_{k+1}) = \frac{\partial h[x_H(t_{k+1}), t_{k+1}]}{\partial x(t_{k+1})}.$$

**2.2.** Покажите, что в случае статистической линеаризации модели (2.11), (2.12) в выражениях (2.13), (2.14)

$$a[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = f_0[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] - f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] \bar{x}(t);$$

$$F[\bar{x}(t), P(t), u(t), t] = f_1[\bar{x}(t), P(t), u(t), t];$$

$$A[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_0[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] - \\ - h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] \bar{x}(t_{k+1});$$

$$H[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_1[\bar{x}(t_{k+1}), P(t_{k+1}), t_{k+1}].$$

**2.3.** Рассмотрим следующую модель состояния нелинейной дискретной системы

$$x(t_{k+1}) = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)x(t_k) + \frac{0.01}{\theta_1}[u(t_k) - x(t_k)]e^{0.25[u(t_k) - x(t_k)]} + \frac{0.1}{\theta_1}w(t_k) \quad (2.19)$$

с неизвестными параметрами  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ . Покажите, что выполнение линеаризации модели (2.19) во временной области относительно номинальной траектории

$$\begin{cases} x_H(t_{k+1}) = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)x_H(t_k) + \frac{0.01}{\theta_1}[u_H(t_k) - x_H(t_k)]e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]}, \\ x_H(t_0) = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N-1;$$

приводит к линеаризованной модели вида (2.3), в которой

$$\begin{aligned} a[u(t_k), t_k] &= \frac{0.01}{\theta_1} \left\{ [1 + 0.25(u_H(t_k) - x_H(t_k))] u(t_k) - \right. \\ &\quad \left. - 0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]^2 \right\} e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]}, \\ F(t_k) &= 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} - \frac{0.01}{\theta_1} \{ 1 + 0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)] \} e^{0.25[u_H(t_k) - x_H(t_k)]}. \end{aligned}$$

**2.4.** Рассмотрим следующую модель состояния стохастической дискретной системы, содержащей нелинейный элемент с характеристикой релейного типа и зоной нечувствительности,

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + 0.05\theta\varphi[x(t_k), u(t_k)] + 0.05\theta w(t_k). \quad (2.20)$$

Здесь

$$\varphi[x(t_k), u(t_k)] = \begin{cases} -25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) < -0.75; \\ 0, & \text{если } -0.75 \leq u(t_k) - x(t_k) \leq 0.75; \\ 25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) > 0.75 \end{cases}$$

( $\theta$  – неизвестный параметр).



Покажите, что статистическая линейизация модели (2.20) приводит к линейризованной модели вида (2.3), в которой

$$\begin{aligned}
 a[\bar{x}(t_k), P(t_k), u(t_k), t_k] &= 1.25\theta \left[ \Phi \left( \frac{0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \Phi \left( \frac{0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}} \right) \right] + \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \times \\
 &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] + \exp \left[ -\frac{(0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] \right\}; \\
 F(t_k) &= 1 - \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \times \\
 &\times \left\{ \exp \left[ -\frac{(0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] + \exp \left[ -\frac{(0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь и далее  $\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – функция Крампа (Лапласа);  $\bar{x}(t_k)$

и  $P(t_k)$  определяются по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\bar{x}(t_k) = \begin{cases} \bar{x}(t_{k-1}) + 1.25\theta \left[ \Phi \left( \frac{0.75 + u(t_{k-1}) - \bar{x}(t_{k-1})}{\sqrt{P(t_{k-1})}} \right) - \right. \\ \left. - \Phi \left( \frac{0.75 - u(t_{k-1}) + \bar{x}(t_{k-1})}{\sqrt{P(t_{k-1})}} \right) \right], & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \bar{x}(t_0), & \text{если } k = 0; \end{cases}$$

$$P(t_k) = \begin{cases} F^2(t_k)P(t_k) + 0.0025\theta^2 Q, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ P(t_0), & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

**2.5.** Рассмотрим стохастические уравнения движения маятника с трением в пространстве состояний

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\theta_1}{\theta_2^2 m_1} x_2(t) - \frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) \sin(x_1(t)) + u(t) \end{bmatrix} + w(t), \quad t \in [t_0, t_N]. \quad (2.21)$$

Здесь  $x_1$  – угол между осью стержня и вертикальной прямой;  $x_2$  – угловая скорость;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\theta_1$  – коэффициент вязкого трения;  $\theta_2$  – длина стержня;  $M$  – масса стержня;  $m$  – масса груза;  $m_1 = m + \frac{M}{3}$ . Числовые значения постоянных таковы:  $g = 9.81$ ,  $m = 0.1$ ,  $M = 1$ . Покажите, что выполнение линеаризации модели состояния (2.21) во временной области относительно номинальной траектории

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_H(t) = \begin{bmatrix} x_{2H}(t) \\ -\frac{\theta_1}{\theta_2^2 m_1} x_{2H}(t) - \frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) \sin(x_{1H}(t)) + u_H(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0, t_N]; \\ x_H(t_0) = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

приводит к линеаризованной модели вида (2.13), в которой

$$\begin{aligned} a[u(t), t] &= \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) \sin(x_{1H}(t)) + \frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) \cos(x_{1H}(t)) x_{1H}(t) + u(t) \end{bmatrix}; \\ F(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) \cos(x_{1H}(t)) & -\frac{\theta_1}{\theta_2^2 m_1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**2.6.** Покажите, что выполнение статистической линеаризации модели маятника с трением (2.21) приводит к линеаризованной модели вида (2.13), в которой

$$a[u(t), t] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) e^{-\frac{R_{11}(t)}{2}} (\sin(\bar{x}_1(t)) - \cos(\bar{x}_1(t)) \bar{x}_1(t)) + u(t) \end{bmatrix};$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) e^{-\frac{R_{11}(t)}{2}} \cos(\bar{x}_1(t)) & -\frac{\theta_1}{\theta_2^2 m_1} \end{bmatrix}.$$

где  $R_{11}(t)$  – соответствующий элемент матрицы  $P(t)$ . Здесь  $\bar{x}(t)$  и  $P(t)$  определяются по следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t) \\ -\frac{\theta_1}{\theta_2^2 m_1} \bar{x}_2(t) - \frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) e^{-\frac{R_{11}(t)}{2}} \sin(\bar{x}_1(t)) + u(t) \end{bmatrix}, \\ \bar{x}(t_0) = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ t \in [t_0, t_N]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q, \quad t \in [t_0, t_N]; \\ P(t_0) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

## ГЛАВА 3

### ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Оценивать неизвестные параметры будем по данным наблюдений  $\Xi$ , полученным в результате проведения идентификационных экспериментов в соответствии с дискретным планом  $\xi_v$ .

Предположим, что экспериментатор может произвести  $v$  независимых запусков системы, причем сигнал  $U_1$  он подает на вход системы  $k_1$  раз, сигнал  $U_2$  —  $k_2$  раз и, наконец, сигнал  $U_q$  —  $k_q$  раз. В этом случае дискретный нормированный план эксперимента представляет собой совокупность точек  $U_1, U_2, \dots, U_q$  и соответствующих им долей повторных запусков:

$$\xi_v = \left\{ \frac{U_1, U_2, \dots, U_q}{v}, \frac{k_1}{v}, \frac{k_2}{v}, \dots, \frac{k_q}{v} \right\}, \quad U_i \in \Omega_U, i = 1, 2, \dots, q. \quad (3.1)$$

Множество планирования  $\Omega_U$  определяется ограничениями на условия проведения эксперимента.

Обозначим через  $Y_{ij}$   $j$ -ю реализацию выходного сигнала, соответ-

ствующую  $i$ -му входному сигналу  $U_i$  ( $j = 1, 2, \dots, k_i$ ):  $Y_{ij} = \begin{bmatrix} y^{ij}(t_1) \\ y^{ij}(t_2) \\ \dots \\ y^{ij}(t_N) \end{bmatrix}$ .

В результате проведения по плану  $\xi_v$  идентификационных экспериментов будут подготовлены данные наблюдений

$$\Xi = \{(U_i, Y_{ij}), i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, k_i\}.$$

Подчеркнем, что  $\sum_{i=1}^q k_i = v$ .

Априорные предположения, представленные во второй главе, позволяют воспользоваться методом максимального правдоподобия для оценивания неизвестных параметров (полезные свойства соответствующих оценок перечислены выше). В соответствии с указанным методом необходимо найти такие значения параметров  $\hat{\theta}$ , для которых

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Omega_0} [\chi(\theta; \Xi)] = \arg \min_{\theta \in \Omega_0} [-\ln L(\theta; \Xi)], \quad (3.2)$$

где  $\ln L(\theta; \Xi)$  – логарифмическая функция правдоподобия, которую необходимо составить.

Поскольку запуски системы выполняются независимо, критерий максимального правдоподобия  $\chi(\theta; \Xi)$  связан с логарифмическими функциями правдоподобия для одного запуска  $\ln L(\theta; U_i, Y_{ij})$  соотношением

$$\chi(\theta; \Xi) = -\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \ln L(\theta; U_i, Y_{ij}), \quad (3.3)$$

где  $\ln L(\theta; U_i, Y_{ij})$  выписывается для каждой модельной структуры по своему.

Для численного решения задачи нелинейного программирования (3.2) можно воспользоваться *методом последовательного квадратичного программирования*, что предполагает необходимость разработки алгоритмов вычисления значений критериев идентификации и их градиентов.

Для моделей дискретных систем точки спектра плана (3.1) имеют следующую структуру:

$$U_i^T = \left\{ \left[ u^i(t_0) \right]^T, \left[ u^i(t_1) \right]^T, \dots, \left[ u^i(t_{N-1}) \right]^T \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

### 3.1. КРИТЕРИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ И АЛГОРИТМ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Следуя [23, 44, 45], для математической модели (2.3), (2.4) запишем:

$$\ln L(\theta; U_i, Y_{ij}) = -\frac{Nm}{2} \ln 2\pi - \\ -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B(t_{k+1}),$$

что позволяет представить соотношение (3.3) в виде

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{Nm\nu}{2} \ln 2\pi + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + \frac{\nu}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B(t_{k+1}), \quad (3.4)$$

где  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B(t_{k+1})$  вычисляются по приведенным ниже уравнениям дискретного фильтра Калмана [29, 43, 46, 47]:

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) \hat{x}^{ij}(t_k | t_k) + a \left[ u^i(t_k), t_k \right]; \quad (3.5)$$

$$P(t_{k+1} | t_k) = F(t_k) P(t_k | t_k) F^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k); \quad (3.6)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H(t_{k+1}) \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - A(t_{k+1}); \quad (3.7)$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + R; \quad (3.8)$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}); \quad (3.9)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (3.10)$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] P(t_{k+1} | t_k) \quad (3.11)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0 | t_0) = P(t_0)$ .

Здесь и далее:

- $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$  – оценка одношагового прогнозирования состояния  $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре  $(U_i, Y_{ij})$ ;
- $P(t_{k+1} | t_k)$  – ковариационная матрица ошибок одношагового прогнозирования;
- $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  – оценка фильтрации состояния  $x(t_{k+1})$ , соответствующая паре  $(U_i, Y_{ij})$ ;
- $P(t_{k+1} | t_{k+1})$  – ковариационная матрица ошибок фильтрации.

Эквивалентная выражению (3.4) запись

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \left\{ Nmv \ln 2\pi + \sum_{k=0}^{N-1} \left[ v \ln \det B(t_{k+1}) + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\} \quad (3.12)$$

позволяет организовать **алгоритм вычисления значения критерия максимального правдоподобия** при некотором фиксированном  $\theta$  следующим образом.

Шаг 1. Определить  $Q$ ,  $R$ ,  $\bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0)$ .

Шаг 2. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = Nmv \ln 2\pi$ ;  $k = 0$ ;  $P(t_k | t_k) = P(t_0)$ .

Шаг 3. Определить  $F(t_k)$ ,  $\Gamma(t_k)$ ,  $H(t_{k+1})$  и по формулам (3.6), (3.8), (3.9), (3.11) найти  $P(t_{k+1} | t_k)$ ,  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1} | t_{k+1})$ . Определить  $A(t_{k+1})$ .

Шаг 4. Положить  $\Delta = 0$ ,  $i = 1$ .

Шаг 5. Определить  $a[u^i(t_k), t_k]$ .

Шаг 6. Положить  $j = 1$ .

Шаг 7. Выбрать  $\hat{x}^{ij}(t_k | t_k) = \bar{x}(t_0)$ , если  $k = 0$ .

Шаг 8. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (3.5), (3.7), (3.10).

Шаг 9. Положить  $\Delta = \Delta + \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ .

Шаг 10. Увеличить  $j$  на единицу. Если  $j \leq k_i$ , перейти на шаг 7.

Шаг 11. Увеличить  $i$  на единицу. Если  $i \leq q$ , перейти на шаг 5.

Шаг 12. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = \chi(\theta; \Xi) + v \ln \det B(t_{k+1}) + \Delta$ .

Шаг 13. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3.

Шаг 14. Положить  $\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \chi(\theta; \Xi)$  и закончить процесс.

### 3.2. КРИТЕРИЙ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

В случае применения временной или статистической линеаризации к математической модели (2.1), (2.2) ковариационные матрицы обновлений  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  будут зависеть от номера входного сигнала  $i$ , в результате чего выражение логарифмической функции правдоподобия для одного запуска приобретет вид

$$\ln L(\theta; U_i, Y_{ij}) = -\frac{Nm}{2} \ln 2\pi - \\ - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B^i(t_{k+1})$$

и критерий максимального правдоподобия запишется следующим образом:

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{Nm v}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^{N-1} k_i \ln \det B^i(t_{k+1}). \quad (3.13)$$

Здесь  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B^i(t_{k+1})$  вычисляются по уравнениям [см. формулы (3.5)–(3.11)]:

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) = F^i(t_k) \hat{x}^{ij}(t_k | t_k) + a \left[ u^i(t_k), t_k \right]; \quad (3.14)$$



$$P^i(t_{k+1} | t_k) = F^i(t_k) P^i(t_k | t_k) \left( F^i(t_k) \right)^T + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k); \quad (3.15)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H^i(t_{k+1}) \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - A^i(t_{k+1}); \quad (3.16)$$

$$B^i(t_{k+1}) = H^i(t_{k+1}) P^i(t_{k+1} | t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + R; \quad (3.17)$$

$$K^i(t_{k+1}) = P^i(t_{k+1} | t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1}; \quad (3.18)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) + K^i(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (3.19)$$

$$P^i(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K^i(t_{k+1}) H^i(t_{k+1})] P^i(t_{k+1} | t_k) \quad (3.20)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P^i(t_0 | t_0) = P(t_0)$ .

Уточним, что при *временной линейаризации*

$$F^i(t_k) = \frac{\partial f \left[ x_{\text{H}}^i(t_k), u_{\text{H}}^i(t_k), t_k \right]}{\partial x(t_k)};$$

$$\begin{aligned} a \left[ u^i(t_k), t_k \right] &= f \left[ x_{\text{H}}^i(t_k), u_{\text{H}}^i(t_k), t_k \right] - \frac{\partial f \left[ x_{\text{H}}^i(t_k), u_{\text{H}}^i(t_k), t_k \right]}{\partial x(t_k)} x_{\text{H}}^i(t_k) + \\ &+ \frac{\partial f \left[ x_{\text{H}}^i(t_k), u_{\text{H}}^i(t_k), t_k \right]}{\partial u(t_k)} \left[ u^i(t_k) - u_{\text{H}}^i(t_k) \right]; \end{aligned}$$

$$H^i(t_{k+1}) = \frac{\partial h \left[ x_{\text{H}}^i(t_{k+1}), t_{k+1} \right]}{\partial x(t_{k+1})};$$

$$A^i(t_{k+1}) = h \left[ x_{\text{H}}^i(t_{k+1}), t_{k+1} \right] - \frac{\partial h \left[ x_{\text{H}}^i(t_{k+1}), t_{k+1} \right]}{\partial x(t_{k+1})} x_{\text{H}}^i(t_{k+1}),$$

причем

$$\begin{cases} x_{\text{H}}^i(t_{k+1}) = f \left[ x_{\text{H}}^i(t_k), u_{\text{H}}^i(t_k), t_k \right], & k = 0, 1, \dots, N-1; \\ x_{\text{H}}^i(t_0) = \bar{x}(t_0). \end{cases}$$

При статистической линеаризации

$$\begin{aligned}
F^i(t_k) &= f_1[\bar{x}^i(t_k), P^i(t_k), u^i(t_k), t_k]; \\
a[u^i(t_k), t_k] &= f_0[\bar{x}^i(t_k), P^i(t_k), u^i(t_k), t_k] - \\
&\quad - f_1[\bar{x}^i(t_k), P^i(t_k), u^i(t_k), t_k]\bar{x}^i(t_k); \\
H^i(t_{k+1}) &= h_1[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}]; \\
A^i(t_{k+1}) &= h_0[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}] - \\
&\quad - h_1[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}]\bar{x}^i(t_{k+1}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{x}^i(t_k) &= \begin{cases} f_0[\bar{x}^i(t_{k-1}), P^i(t_{k-1}), u^i(t_{k-1}), t_{k-1}], & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \bar{x}(t_0), & \text{если } k = 0; \end{cases} \\
P^i(t_k) &= \begin{cases} f_1[\bar{x}^i(t_{k-1}), P^i(t_{k-1}), u^i(t_{k-1}), t_{k-1}] \times \\ \quad \times P^i(t_{k-1}) f_1^T[\bar{x}^i(t_{k-1}), P^i(t_{k-1}), u^i(t_{k-1}), t_{k-1}] + \\ \quad + \Gamma(t_k) Q \Gamma^T(t_k), & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ P(t_0), & \text{если } k = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Для рациональной организации вычислений при программной реализации выражение (3.13) целесообразно записать в виде

$$\begin{aligned}
\chi(\theta; \Xi) &= \frac{1}{2} \left\{ Nm \nu \ln 2\pi + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \left[ k_i \ln \det B^i(t_{k+1}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{k_i} (\varepsilon^{ij}(t_{k+1}))^T (B^i(t_{k+1}))^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\}. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

### 3.3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА КРИТЕРИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Продифференцировав равенство (3.12) по  $\theta_\alpha$  с учетом выражений

$$\frac{\partial \ln \det B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = Sp \left[ B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right]; \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial B^{-1}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = -B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} B^{-1}(t_{k+1}) \quad (3.23)$$

и симметричности матрицы  $B(t_{k+1})$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = & \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{v}{2} Sp \left( B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\}, \quad (3.24) \end{aligned}$$

что позволяет представить **алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия** при некотором фиксированном  $\theta$  следующим образом.

Шаг 1. Определить  $Q$ ,  $R$ ,  $\bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0)$  и

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 2. Положить  $\left\{ \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, k = 0,$

$$P(t_k | t_k) = P(t_0), \left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 3. Определить  $F(t_k)$ ,  $\Gamma(t_k)$ ,  $H(t_{k+1})$ , по формулам (3.6), (3.8), (3.9), (3.11) найти  $P(t_{k+1} | t_k)$ ,  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1} | t_{k+1})$ .

Шаг 4. Определить  $\left\{ \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$  и по формулам, следующим из равенств (3.6), (3.8), (3.9), (3.11):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_\alpha} P(t_k | t_k) F^T(t_k) + F(t_k) \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} F^T(t_k) + \\
&+ F(t_k) P(t_k | t_k) \frac{\partial F^T(t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial \Gamma(t_k)}{\partial \theta_\alpha} Q \Gamma^T(t_k) + \\
&+ \Gamma(t_k) \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha} \Gamma^T(t_k) + \Gamma(t_k) Q \frac{\partial \Gamma^T(t_k)}{\partial \theta_\alpha}; \\
\frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + \\
&+ H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}; \\
\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \left[ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + P(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} - \right. \\
&\left. - P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] B^{-1}(t_{k+1}); \\
\frac{\partial P(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \\
&- \left[ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] P(t_{k+1} | t_k)
\end{aligned}$$

ВЫЧИСЛИТЬ

$$\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Определить  $A(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 5. Положить  $\{\Delta_\alpha = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s\}$ ,  $i = 1$ .

Шаг 6. Определить  $a[u^i(t_k), t_k]$  и  $\left\{ \frac{\partial a[u^i(t_k), t_k]}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 7. Положить  $j = 1$ .

Шаг 8. Выбрать

$$\hat{x}^{ij}(t_k | t_k) = \bar{x}(t_0), \left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \bar{x}(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, \text{ если } k = 0.$$

Шаг 9. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (3.5), (3.7), (3.10).

Шаг 10. По формулам, следующим из равенств (3.5), (3.7), (3.10),

$$\frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial F(t_k)}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_k | t_k) + F(t_k) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial a[u^i(t_k), t_k]}{\partial \theta_\alpha},$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = -\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - H(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha};$$

$$\frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha},$$

найти  $\left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 11. Положить

$$\Delta_{\alpha} = \Delta_{\alpha} + \left( \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_{\alpha}} \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \\ - \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_{\alpha}} B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon^{ij}(t_{k+1}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, s.$$

Шаг 12. Увеличить  $j$  на единицу. Если  $j \leq k_i$ , перейти на шаг 8.

Шаг 13. Увеличить  $i$  на единицу. Если  $i \leq q$ , перейти на шаг 6.

Шаг 14. Положить

$$\frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_{\alpha}} = \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_{\alpha}} + \frac{\nu}{2} Sp \left( B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_{\alpha}} \right) + \Delta_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, s.$$

Шаг 15. Увеличить  $k$  на единицу. Если  $k \leq N-1$ , перейти на шаг 3, иначе закончить процесс.

#### 3.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА КРИТЕРИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Продифференцировав равенство (3.21) по  $\theta_{\alpha}$  с учетом выражений (3.22), (3.23) и симметричности матрицы  $B^i(t_{k+1})$ , получим

$$\frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_{\alpha}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{k_i}{2} Sp \left( \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_{\alpha}} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{k_i} \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_{\alpha}} \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right)^T \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_{\alpha}} \left( B^i(t_{k+1}) \right)^{-1} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) \right] \right\}. \quad (3.25)$$

Здесь  $\frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}$ ,  $\frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}$  и связанные с ними составляющие находятся по формулам, следующим из равенств (3.14)–(3.20), причем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= -\frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) - H^i(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial A^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \\ \frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} P^i(t_{k+1}|t_k) \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + H^i(t_{k+1}) \frac{\partial P^i(t_{k+1}|t_k)}{\partial \theta_\alpha} \times \\ &\times \left( H^i(t_{k+1}) \right)^T + H(t_{k+1}) P^i(t_{k+1}|t_k) \left( \frac{\partial H^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right)^T + \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}. \end{aligned}$$

### 3.5. ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим следующую модель стохастической системы, содержащей нелинейный элемент с характеристикой релейного типа и зоной нечувствительности:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + 0.05\theta\varphi[x(t_k), u(t_k)] + 0.05\theta w(t_k), \quad (3.26)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.27)$$

Здесь

$$\varphi[x(t_k), u(t_k)] = \begin{cases} -25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) < -0.75; \\ 0, & \text{если } -0.75 \leq u(t_k) - x(t_k) \leq 0.75; \\ 25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) > 0.75, \end{cases}$$

$\theta$  – неизвестный параметр, причем  $0.5 \leq \theta \leq 2$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из раздела 2.1, причем

$$E[w(t_k)w(t_i)] = 0.4\delta_{ki} = Q\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] = 0.4\delta_{ki} = R\delta_{ki};$$

$$E[x(t_0)] = 0.5 = \bar{x}(t_0), \quad E\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^2\} = 0.05 = P(t_0).$$

Выполнив статистическую линеаризацию модели состояний (3.26), получим линеаризованную модель вида (2.3), (2.4), в которой в соответствии с выражениями из раздела 2.1:

$$\begin{aligned}
 a[u(t_k), t_k] &= 1.25\theta \left[ \Phi \left( \frac{0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}} \right) - \Phi \left( \frac{0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k)}{\sqrt{P(t_k)}} \right) \right] + \\
 &+ \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left[ -\frac{(0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] \right\}; \\
 F(t_k) &= 1 - \frac{1.25\theta}{\sqrt{2\pi P(t_k)}} \left\{ \exp \left[ -\frac{(0.75 + u(t_k) - \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \exp \left[ -\frac{(0.75 - u(t_k) + \bar{x}(t_k))^2}{2P(t_k)} \right] \right\}; \\
 \Gamma(t_k) &= 0.05\theta; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = 1
 \end{aligned}$$

$\bar{x}(t_k)$  и  $P(t_k)$  определяются по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
 \bar{x}(t_k) &= \begin{cases} \bar{x}(t_{k-1}) + 1.25\theta \left[ \Phi \left( \frac{0.75 + u(t_{k-1}) - \bar{x}(t_{k-1})}{\sqrt{P(t_{k-1})}} \right) - \right. \\ \quad \left. - \Phi \left( \frac{0.75 - u(t_{k-1}) + \bar{x}(t_{k-1})}{\sqrt{P(t_{k-1})}} \right) \right], & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \bar{x}(t_0), & \text{если } k = 0; \end{cases} \\
 P(t_k) &= \begin{cases} F^2(t_{k-1})P(t_{k-1}) + \Gamma^2(t_k)Q, & \text{если } k = 1, 2, \dots, N-1, \\ P(t_0), & \text{если } k = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо оценить параметр  $\theta$ , входящий в выражения для  $a[u(t_k), t_k]$ ,  $F(t_k)$  и  $\Gamma(t_k)$ .



Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять идентификационных экспериментов с входным сигналом из таблицы для  $v = q = 1$ . Реализации выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинном значении параметра  $\theta^* = 1$  и  $N = 31$ . Для каждого эксперимента вычислим оценку максимального правдоподобия  $\hat{\theta}$ , произведем усреднение и найдем  $\hat{\theta}_{\text{ср}}$ . Результаты оценивания представим в таблице.

**Результаты оценивания параметра модели (3.26), (3.27)**

Идентификационный сигнал	Номер эксперимента	Значения оценок
	1	0.972
	2	0.950
	3	1.641
	4	1.295
	5	1.194
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}$	<b>1.210</b>

## УПРАЖНЕНИЯ

**3.1.** Рассмотрим линейную стационарную модель с детерминированным уравнением состояния

$$x(t_{k+1}) = Fx(t_k) + \Psi u(t_k); \quad (3.28)$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.29)$$

Будем считать, что:

- случайные векторы  $v(t_{k+1})$  образуют стационарную белую гауссовскую последовательность, для которой

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki};$$

- начальное состояние  $x(t_0)$  детерминировано;
- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор  $\theta$ , включающий в себя элементы матриц  $F, \Psi, H, R$  в различных комбинациях.

Покажите, что для модели (3.28), (3.29) с учетом указанных априорных предположений и одном возможном запуске системы критерий максимального правдоподобия имеет вид

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{Nm}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^T(t_{k+1}) R^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}) + \frac{N}{2} \ln \det R, \quad (3.30)$$

где  $\varepsilon(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) - Hx(t_{k+1})$ .

**3.2.** Рассмотрим следующий частный случай модели из упражнения 3.1:

$$x(t_{k+1}) = \theta_1 x(t_k) + \theta_2 u(t_k);$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Покажите, что оценки максимального правдоподобия  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  могут быть найдены аналитически, причем

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\left( \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) y(t_{k+1}) \right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} u^2(t_k) \right) - \left( \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) u(t_k) \right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} u(t_k) y(t_{k+1}) \right)}{\left( \sum_{k=0}^{N-1} x^2(t_k) \right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} u^2(t_k) \right) - \left( \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) u(t_k) \right)^2};$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{\left( \sum_{k=0}^{N-1} u(t_k) y(t_{k+1}) \right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} x^2(t_k) \right) - \left( \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) u(t_k) \right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) y(t_{k+1}) \right)}{\left( \sum_{k=0}^{N-1} x^2(t_k) \right) \left( \sum_{k=0}^{N-1} u^2(t_k) \right) - \left( \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) u(t_k) \right)^2}.$$

**3.3.** Покажите, что для динамической модели из упражнения 3.1 критерий наименьших квадратов при одном возможном запуске системы записывается в виде

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^T(t_{k+1}) R^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}). \quad (3.31)$$

**3.4.** Покажите, что если неизвестные параметры модели из упражнения 3.1 не входят в ковариационную матрицу шума измерений  $R$ ,

критерии максимального правдоподобия (3.30) и наименьших квадратов (3.31) совпадают.

**3.5.** Покажите, что для линейной стационарной модели (2.5), (2.6) с вероятностным описанием из раздела 2.1 критерий максимального правдоподобия при одном возможном запуске системы имеет вид

$$\begin{aligned}\chi(\theta; \Xi) = & \frac{Nm}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B(t_{k+1}),\end{aligned}\quad (3.32)$$

где  $\varepsilon(t_{k+1})$  и  $B(t_{k+1})$  вычисляются при помощи следующих уравнений дискретного фильтра Калмана:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_{k+1} | t_k) &= F\hat{x}(t_k | t_k) + \Psi u(t_k); \\ P(t_{k+1} | t_k) &= FP(t_k | t_k)F^T + \Gamma Q \Gamma^T; \\ \varepsilon(t_{k+1}) &= y(t_{k+1}) - H\hat{x}(t_{k+1} | t_k); \\ B(t_{k+1}) &= HP(t_{k+1} | t_k)H^T + R; \\ K(t_{k+1}) &= P(t_{k+1} | t_k)H^T B^{-1}(t_{k+1}); \\ \hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1}); \\ P(t_{k+1} | t_{k+1}) &= [I - K(t_{k+1})H]P(t_{k+1} | t_k)\end{aligned}$$

с начальными условиями:  $\hat{x}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0 | t_0) = P(t_0)$ . Сравните выражения (3.32) и (3.30).

**3.6.** С учетом равенства  $B(t_{k+1}) = E \left[ \varepsilon(t_{k+1}) \varepsilon^T(t_{k+1}) \right]$  покажите, что для линейной стационарной модели (2.5), (2.6) с вероятностным описанием из раздела 2.1 критерий наименьших квадратов при одном возможном запуске системы определяется соотношением

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}), \quad (3.33)$$

где  $\varepsilon(t_{k+1})$  и  $B(t_{k+1})$  вычисляются по уравнениям из упражнения 3.5. Сравните выражения (3.33) и (3.31).

**3.7.** Покажите, что если неизвестные параметры модели (2.5), (2.6) с вероятностным описанием из раздела 2.1 входят только в матрицу  $\Psi$  и вектор начального состояния  $\bar{x}(t_0)$ , критерии максимального правдоподобия (3.32) и наименьших квадратов (3.33) совпадают.

**3.8.** Воспользовавшись выражением (3.21), предложите и программно реализуйте алгоритм вычисления критерия максимального правдоподобия для случая:

- а) временной линеаризации;
- б) статистической линеаризации.

**3.9.** Разработайте и программно реализуйте алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия (3.25) для случая:

- а) временной линеаризации;
- б) статистической линеаризации.

**3.10.** Рассмотрим следующую нелинейную модель динамической системы:

$$x(t_{k+1}) = \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}\right)x(t_k) + \frac{0.01}{\theta_1}[u(t_k) - x(t_k)]e^{0.25[u(t_k) - x(t_k)]} + \frac{0.1}{\theta_1}w(t_k); \quad (3.34)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.35)$$

где  $\theta_1, \theta_2$  – неизвестные параметры, причем  $2 \leq \theta_1 \leq 10$ ,  $0.05 \leq \theta_2 \leq 2$ . Будем считать, что выполнены все априорные предположения из раздела 2.1 и

$$E[w(t_k)w(t_i)] = 0.6\delta_{ki} = Q\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] = 0.3\delta_{ki} = R\delta_{ki};$$

$$E[x(t_0)] = 0 = \bar{x}(t_0), \quad E\left\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^2\right\} = 0.01 = P(t_0).$$

Найдите оценки параметров  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  модели (3.34), (3.35), руководствуясь примером из раздела 3.5, приняв  $v = q = 1$ , истинные значения

параметров  $\theta_1^* = 4$ ,  $\theta_2^* = 0.5$  и  $N = 31$ . Используйте временную линеаризацию.

**3.11.** Рассмотрим следующую нелинейную модель динамической системы:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + 0.05\theta\varphi[x(t_k), u(t_k)] + 0.05\theta w(t_k); \quad (3.36)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.37)$$

Здесь

$$\varphi[x(t_k), u(t_k)] = \begin{cases} -25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) < -0.75; \\ 0, & \text{если } -0.75 \leq u(t_k) - x(t_k) \leq 0.75; \\ 25, & \text{если } u(t_k) - x(t_k) > 0.75, \end{cases}$$

$\theta$  – неизвестный параметр, причем  $0.5 \leq \theta \leq 2$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения из раздела 2.1 и

$$E[w(t_k)w(t_i)] = 0.8\delta_{ki} = Q\delta_{ki};$$

$$E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] = 0.2\delta_{ki} = R\delta_{ki};$$

$$E[x(t_0)] = 0.25 = \bar{x}(t_0), \quad E\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^2\} = 0.1 = P(t_0).$$

Найдите оценки параметра  $\hat{\theta}$  модели (3.36), (3.37), руководствуясь примером из раздела 3.5, приняв  $v = q = 1$ , истинное значение параметра  $\theta^* = 1$  и  $N = 31$ . Используйте статистическую линеаризацию.

## ГЛАВА 4

### ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Для моделей непрерывно-дискретных систем точки спектра плана (3.1) имеют следующую структуру:  $U_i = u^i(t)$ ,  $t \in [t_0, t_N]$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ .

#### 4.1. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИТЕРИЕВ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Для линейных нестационарных моделей непрерывно-дискретных систем критерий максимального правдоподобия определяется, как и в разделе 3.1, выражением (3.4), но  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B(t_{k+1})$  в этом случае вычисляются по следующим уравнениям непрерывно-дискретного фильтра Калмана [46, 48]:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}^{ij}(t | t_k) = F(t) \hat{x}^{ij}(t | t_k) + a[u^i(t), t], \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} P(t | t_k) = F(t)P(t | t_k) + P(t | t_k)F^T(t) + \Gamma(t)Q\Gamma^T(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (4.2)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H(t_{k+1})\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - A(t_{k+1}); \quad (4.3)$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1} | t_k)H^T(t_{k+1}) + R; \quad (4.4)$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k)H^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1}); \quad (4.5)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1})\varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (4.6)$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1} | t_k) \quad (4.7)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0 | t_0) = P(t_0)$ .

Данное обстоятельство позволяет говорить о том, что большинство шагов **алгоритма вычисления значения критерия максимального правдоподобия для линейных нестационарных моделей** при некотором фиксированном  $\theta$  совпадут с соответствующими шагами алгоритма, представленного в разделе 3.1. Уточним, какие именно шаги требуют корректировки, не повторяя шагов, оставшихся без изменений.

Шаг 2. Определить  $\{F(t), \Gamma(t), t \in [t_0, t_N]\}$ . Положить

$$\chi(\theta; \Xi) = Nmv \ln 2\pi, k = 0; P(t_k | t_k) = P(t_0).$$

Шаг 3. Определить  $H(t_{k+1})$  и по формулам (4.2), (4.4), (4.5), (4.7) найти  $P(t_{k+1} | t_k)$ ,  $B(t_{k+1})$ ,  $K(t_{k+1})$ ,  $P(t_{k+1} | t_{k+1})$ . Определить  $A(t_{k+1})$ .

Шаг 5. Определить  $a[u^i(t), t]$ .

Шаг 8. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (4.1), (4.3), (4.6).

В случае применения *временной* или *статистической линеаризации* к математической модели (2.11), (2.12) критерий максимального правдоподобия по-прежнему записывается в виде (3.13), с той разницей, что  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$  и  $B^i(t_{k+1})$  вычисляются теперь по следующим уравнениям (см. формулы (4.1)–(4.7)):

$$\frac{d}{dt} \hat{x}^{ij}(t | t_k) = F^i(t) \hat{x}^{ij}(t | t_k) + a[u^i(t), t], \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P^i(t | t_k) &= F^i(t) P^i(t | t_k) + P^i(t | t_k) (F^i(t))^T + \\ &+ \Gamma(t) Q \Gamma^T(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\varepsilon^{ij}(t_{k+1}) = y^{ij}(t_{k+1}) - H^i(t_{k+1}) \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - A^i(t_{k+1}); \quad (4.10)$$

$$B^i(t_{k+1}) = H^i(t_{k+1})P^i(t_{k+1}|t_k)\left(H^i(t_{k+1})\right)^T + R; \quad (4.11)$$

$$K^i(t_{k+1}) = P^i(t_{k+1}|t_k)\left(H^i(t_{k+1})\right)^T \left(B^i(t_{k+1})\right)^{-1}; \quad (4.12)$$

$$\hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{x}^{ij}(t_{k+1}|t_k) + K^i(t_{k+1})\varepsilon^{ij}(t_{k+1}); \quad (4.13)$$

$$P^i(t_{k+1}|t_{k+1}) = \left[I - K^i(t_{k+1})H^i(t_{k+1})\right]P^i(t_{k+1}|t_k) \quad (4.14)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}^{ij}(t_0|t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P^i(t_0|t_0) = P(t_0)$ .

Уточним, что при *временной линеаризации*

$$\begin{aligned} F^i(t) &= \frac{\partial f\left[x_{\text{H}}^i(t), u_{\text{H}}^i(t), t\right]}{\partial x(t)}; \\ a[u^i(t), t] &= f\left[x_{\text{H}}^i(t), u_{\text{H}}^i(t), t\right] - \frac{\partial f\left[x_{\text{H}}^i(t), u_{\text{H}}^i(t), t\right]}{\partial x(t)}x_{\text{H}}^i(t) + \\ &+ \frac{\partial f\left[x_{\text{H}}^i(t), u_{\text{H}}^i(t), t\right]}{\partial u(t)}\left[u^i(t) - u_{\text{H}}^i(t)\right]; \\ H^i(t_{k+1}) &= \frac{\partial h\left[x_{\text{H}}^i(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial x(t_{k+1})}; \\ A^i(t_{k+1}) &= h\left[x_{\text{H}}^i(t_{k+1}), t_{k+1}\right] - \frac{\partial h\left[x_{\text{H}}^i(t_{k+1}), t_{k+1}\right]}{\partial x(t_{k+1})}x_{\text{H}}^i(t_{k+1}), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_{\text{H}}^i(t) = f\left[x_{\text{H}}^i(t), u_{\text{H}}^i(t), t\right], & t \in [t_0, t_N]; \\ x_{\text{H}}^i(t_0) = \bar{x}(t_0). \end{cases}$$

При *статистической линеаризации*

$$F^i(t) = f_1\left[\bar{x}^i(t), P^i(t), u^i(t), t\right];$$



$$a[u^i(t), t] = f_0[\bar{x}^i(t), P^i(t), u^i(t), t] - f_1[\bar{x}^i(t), P^i(t), u^i(t), t]\bar{x}^i(t);$$

$$H[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}] = h_1[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}];$$

$$A^i(t_{k+1}) = h_0[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}] -$$

$$-h_1[\bar{x}^i(t_{k+1}), P^i(t_{k+1}), t_{k+1}]\bar{x}^i(t_{k+1}),$$

где

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{x}^i(t) = f_0[\bar{x}^i(t), P^i(t), u^i(t), t], & t \in [t_0, t_N], \\ \bar{x}(t_0) - \text{дано;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dP^i(t)}{dt} = f_1[\bar{x}^i(t), P^i(t), u^i(t), t]P^i(t) + P^i(t)f_1^T[\bar{x}^i(t), P^i(t), u^i(t), t] + \\ \quad + \Gamma(t)Q\Gamma^T(t), & t \in [t_0, t_N], \\ P(t_0) - \text{дано.} \end{cases}$$

## 4.2. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТОВ КРИТЕРИЕВ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Для линейных нестационарных моделей градиент критерия максимального правдоподобия определяется, как и в разделе 3.3, выражением (3.24). Это позволяет заметить, что в **алгоритме вычисления градиента критерия максимального правдоподобия** при некотором фиксированном  $\theta$  большинство шагов совпадает с соответствующими шагами алгоритма из раздела 3.3. Уточним, какие именно шаги требуют корректировки, не повторяя шагов, оставшихся без изменений.

Шаг 2. Определить  $\{F(t), \Gamma(t), t \in [t_0, t_N]\}$ ,

$$\left\{ \frac{\partial F(t)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \theta_\alpha}, t \in [t_0, t_N], \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Положить  $\left\{ \frac{\partial \chi(\theta; \Xi)}{\partial \theta_\alpha} = 0, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}, k = 0, P(t_k | t_k) = P(t_0),$   
 $\left\{ \frac{\partial P(t_k | t_k)}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial P(t_0)}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$

Шаг 3. Определить  $H(t_{k+1})$ , по формулам (4.2), (4.4), (4.5), (4.7) найти  $P(t_{k+1} | t_k), B(t_{k+1}), K(t_{k+1}), P(t_{k+1} | t_{k+1}).$

Шаг 4. Определить  $\left\{ \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$  и по формулам, следующим из равенств (4.2), (4.4), (4.5), (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial P(t | t_k)}{\partial \theta_\alpha} \right) &= \frac{\partial F(t)}{\partial \theta_\alpha} P(t | t_k) + F(t) \frac{\partial P(t | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial P(t | t_k)}{\partial \theta_\alpha} F^T(t) + \\ &+ P(t | t_k) \frac{\partial F^T(t)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial \theta_\alpha} Q \Gamma^T(t) + \\ &+ \Gamma(t) \frac{\partial Q}{\partial \theta_\alpha} \Gamma^T(t) + \Gamma(t) Q \frac{\partial \Gamma^T(t)}{\partial \theta_\alpha}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \\ \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) + H(t_{k+1}) \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + \\ &+ H(t_{k+1}) P(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \theta_\alpha}; \\ \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= \left[ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} H^T(t_{k+1}) + P(t_{k+1} | t_k) \frac{\partial H^T(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} - \right. \\ &\left. - P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \right] B^{-1}(t_{k+1}); \\ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} &= [I - K(t_{k+1}) H(t_{k+1})] \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \end{aligned}$$

$$-\left[\frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} H(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}\right] P(t_{k+1} | t_k),$$

ВЫЧИСЛИТЬ

$$\left\{ \frac{\partial P(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial B(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial P(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Определить  $A(t_{k+1})$  и  $\left\{ \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

Шаг 6. Определить  $\{a[u^i(t), t], t \in [t_k, t_{k+1}]\}$  и

$$\left\{ \frac{\partial a[u^i(t), t]}{\partial \theta_\alpha}, t \in [t_k, t_{k+1}], \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Шаг 9. Вычислить  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)$ ,  $\varepsilon^{ij}(t_{k+1})$ ,  $\hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})$  при помощи соотношений (4.1), (4.3), (4.6).

Шаг 10. По формулам, следующим из равенств (4.1), (4.3), (4.6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t | t_k)}{\partial \theta_\alpha} \right) &= \frac{\partial F(t)}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t | t_k) + \\ &+ F(t) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial a[u^i(t), t]}{\partial \theta_\alpha}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = -\frac{\partial H(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k) - H(t_{k+1}) \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial A(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha};$$

$$\frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} = \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial K(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha} \varepsilon^{ij}(t_{k+1}) + K(t_{k+1}) \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha},$$

найти  $\left\{ \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_k)}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \frac{\partial \hat{x}^{ij}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, s \right\}$ .

В случае применения *временной* или *статистической линеаризации* к математической модели (2.11), (2.12) градиент критерия максимального правдоподобия записывается в виде (3.25). При этом производные  $\frac{\partial \varepsilon^{ij}(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}$  и  $\frac{\partial B^i(t_{k+1})}{\partial \theta_\alpha}$  определяются, как и в разделе 3.4, с той разницей, что связанные с ними составляющие вычисляются по формулам, следующим из равенств (4.8)–(4.14).

### 4.3. ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим следующую модель системы с нелинейным элементом релейного типа с зоной нечувствительности:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \theta_1 \varphi(x(t)) + \theta_2 u(t) + w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (4.15)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.16)$$

где

$$\varphi(x(t)) = \begin{cases} -3.5, & \text{если } x(t) < -1; \\ 0, & \text{если } -1 \leq x(t) \leq 1; \\ 3.5, & \text{если } x(t) > 1; \end{cases}$$

$\theta_1, \theta_2$  – неизвестные параметры, причем  $-2 \leq \theta_1 \leq -0.1$ ,  $0.01 \leq \theta_2 \leq 2$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения, высказанные в разделе 2.2, причем

$$E[w(t)w(\tau)] = 0.008\delta(t - \tau) = Q\delta(t - \tau),$$

$$E[v(t_{k+1})v(t_{i+1})] = 0.01\delta_{ki} = R\delta_{ki},$$

$$E[x(t_0)] = -2 = \bar{x}(t_0), \quad E\{[x(t_0) - \bar{x}_0]^2\} = 0.1 = P(t_0).$$

Для данной модели функция  $f[x(t), u(t), t]$  содержит существенную нелинейность  $\varphi(x(t))$ , поэтому применима только статистическая линеаризация. Получим линеаризованную модель вида (2.13), (2.14), в которой

$$\begin{aligned}
a[u(t), t] &= 3.5\theta_1 \left( \Phi \left( \frac{1 + \bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}} \right) - \Phi \left( \frac{1 - \bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}} \right) \right) - \\
&- 3.5\theta_1 \frac{\bar{x}(t)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}}\right)^2} + \bar{x}(t)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi P(t)}} + \theta_2 u(t); \\
F(t) &= \frac{3.5\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}}\right)^2} + 3.5\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi P(t)}};
\end{aligned}$$

$$\Gamma(t) = 1; \quad A(t_{k+1}) = 0; \quad H(t_{k+1}) = 1.$$

$\bar{x}(t)$  и  $P(t)$  определяются по следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}(t) = 3.5\theta_1 \left( \Phi \left( \frac{1 + \bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}} \right) - \Phi \left( \frac{1 - \bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}} \right) \right) + \theta_2 u(t), & t \in [t_0, t_N]; \\ \bar{x}(t_0) = -2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P(t) = 2f_1(t)P(t) + Q, & t \in [t_0, t_N]; \\ P(t_0) = 0.1, \end{cases}$$

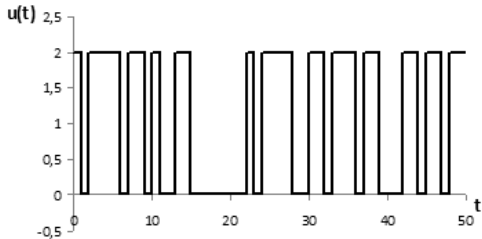
$$\text{где } f_1(t) = \frac{3.5\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}}\right)^2} + 3.5\theta_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\bar{x}(t)}{\sqrt{P(t)}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi P(t)}}.$$

Таким образом, подлежащие оцениванию параметры  $\theta_1, \theta_2$  входят в  $a[u(t), t]$  и  $F(t)$ .

Для того чтобы ослабить зависимость результатов оценивания от выборочных данных, произведем пять идентификационных экспериментов с входным сигналом из таблицы для  $v = q = 1$ . Реализации

выходных сигналов получим компьютерным моделированием при истинных значениях параметров  $\theta_1^* = -1$  и  $\theta_2^* = 0.1$ , полагая, что измерения проводятся через 1 с,  $t_0 = 0$  с,  $t_N = 50$  с,  $N = 50$ . Для каждого эксперимента вычислим оценки максимального правдоподобия  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ , усредним полученные оценки и найдем  $\hat{\theta}_{1\text{ср}}, \hat{\theta}_{2\text{ср}}$ . Результаты оценивания представим в таблице.

#### Результаты оценивания неизвестных параметров модели (4.15), (4.16)

Идентификационный сигнал	Номер эксперимента	Значения оценок параметров	
		$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$
	1	-1.292	0.078
	2	-1.368	0.087
	3	-1.467	0.073
	4	-0.538	0.103
	5	-1.159	0.079
	$\hat{\theta}_{\text{ср}}$	<b>-1.165</b>	<b>0.084</b>

## ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

**4.1.** Рассмотрим линейную стационарную модель с детерминированным уравнением состояния

$$\frac{d}{dt}x(t) = Fx(t) + \Psi u(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (4.17)$$

$$y(t_{k+1}) = Hx(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.18)$$

Будем считать, что:

- случайные векторы  $v(t_{k+1})$  образуют стационарную белую гауссовскую последовательность, для которой

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R\delta_{ki};$$

- начальное состояние  $x(t_0)$  детерминировано;

- неизвестные постоянные параметры сведены в вектор  $\theta$ , включающий в себя элементы матриц  $F, \Psi, H, R$  в различных комбинациях.

Выпишите для модели (4.17), (4.18) с учетом указанных априорных предположений и одном возможном запуске системы критерий максимального правдоподобия.

**4.2.** Для динамической модели из упражнения 4.1 составьте критерий наименьших квадратов при одном возможном запуске системы.

**4.3.** При каком характере вхождения неизвестных параметров в математическую модель из упражнения 4.1 критерии максимального правдоподобия и наименьших квадратов совпадают?

**4.4.** Покажите, что для линейной стационарной модели (2.15), (2.16) с вероятностным описанием из раздела 2.2 критерий максимального правдоподобия при одном возможном запуске системы имеет вид [44, 49, 50]

$$\chi(\theta; \Xi) = \frac{Nm}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon^T(t_{k+1}) B^{-1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \det B(t_{k+1}),$$

где  $\varepsilon(t_{k+1})$  и  $B(t_{k+1})$  вычисляются при помощи следующих уравнений непрерывно-дискретного фильтра Калмана:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t | t_k) = F \hat{x}(t | t_k) + \Psi u(t), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1};$$

$$\frac{d}{dt} P(t | t_k) = F P(t | t_k) + P(t | t_k) F^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1};$$

$$\varepsilon(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) - H \hat{x}(t_{k+1} | t_k);$$

$$B(t_{k+1}) = H P(t_{k+1} | t_k) H^T + R;$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T B^{-1}(t_{k+1});$$

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1}) H] P(t_{k+1} | t_k)$$

с начальными условиями:  $\hat{x}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0)$ ,  $P(t_0 | t_0) = P(t_0)$ . Сравните результат с ответом упражнения 4.1.

**4.5.** Для динамической модели (2.15), (2.16) с вероятностным описанием из раздела 2.2 выпишите критерий наименьших квадратов при одном возможном запуске системы. Сравните ответы упражнений 4.2 и 4.5.

**4.6.** При каком характере вхождения неизвестных параметров в математическую модель (2.15), (2.16) с вероятностным описанием из раздела 2.2 критерии максимального правдоподобия и наименьших квадратов совпадают?

**4.7.** Воспользовавшись представлением (3.21), предложите и программно реализуйте алгоритм вычисления значения критерия максимального правдоподобия для случая:

- а) временной линеаризации;
- б) статистической линеаризации.

**4.8.** Разработайте и программно реализуйте алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия (3.25) для случая:

- а) временной линеаризации;
- б) статистической линеаризации.

**4.9.** Рассмотрим модель маятника с трением из упражнения 2.5 главы 2:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{\theta_1}{\theta_2^2 m_1} x_2(t) - \frac{g}{\theta_2 m_1} \left( m + \frac{M}{2} \right) \sin(x_1(t)) + u(t) \end{bmatrix} + w(t), \quad t \in [t_0, t_N]; \quad (4.19)$$

$$y(t_{k+1}) = x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.20)$$

$\theta_1, \theta_2$  – неизвестные параметры, причем  $0.1 \leq \theta_1 \leq 3$  и  $0.1 \leq \theta_2 \leq 5$ .

Будем считать, что выполнены все априорные предположения, высказанные в разделе 2.2, причем

$$E[w(t)w^T(\tau)] = I\delta(t - \tau) = Q\delta(t - \tau),$$

$$E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \delta_{ki} = R\delta_{ki},$$

$$E[x(t_0)] = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{x}(t_0),$$



$$E\{[x(t_0) - \bar{x}(t_0)][x(t_0) - \bar{x}(t_0)]^T\} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} = P(t_0).$$

Найдите оценки параметров  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  модели (4.19), (4.20), руководствуясь примером из раздела 4.3, приняв  $v = q = 1$ . Расчет выполните при истинных значениях параметров  $\theta_1^* = 0.4$  и  $\theta_2^* = 1$ , в предположении, что измерения проводятся через 0,5 с,  $t_0 = 0$  с,  $t_N = 15$  с и  $N = 30$ . Используйте:

- а) временную линеаризацию;
- б) статистическую линеаризацию.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Справочник по теории автоматического управления* / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
2. *Пашенко Ф.Ф.* Введение в состоятельные методы моделирования систем: учеб. пособие в 2 ч. Ч. 1. Математические основы моделирования систем / Ф.Ф. Пашенко. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 328 с.
3. *Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 3 т.* Т. 1. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / под ред. Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 748 с.
4. *Сейдж Э.П.* Идентификация систем управления / Э.П. Сейдж, Дж.Л. Мелса. – М.: Наука, 1974. – 248 с.
5. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
6. *Гроп Д.* Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
7. *Кашьяп Р.Л.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Р.Л. Кашьяп, А.Р. Рао. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
8. *Alexandrov A.G.* Finite-frequency method of identification / A.G. Alexandrov // Preprints of 10<sup>th</sup> IFAC Symposium on System Identification. – Copenhagen, Denmark, 1994. – V. 2. – P. 523–527.
9. *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: определение границ испытательных частот / А.Г. Александров // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 11. – С. 3–14.
10. *Александров А.Г.* Конечно-частотная идентификация: динамический алгоритм / А.Г. Александров, Ю.Ф. Орлов // Проблемы управления. – 2009. – № 4. – С. 2–8.
11. *Налимов В.В.* Теория эксперимента / В.В. Налимов. – М.: Наука, 1971. – 208 с.
12. *Федоров В.В.* Теория оптимального эксперимента / В.В. Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
13. *Денисов В.И.* Математическое обеспечение системы ЭВМ – экспериментатор (регрессионный и дисперсионный анализы) / В.И. Денисов. – М.: Наука, 1977. – 251 с.
14. *Круг Г.К.* Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции / Г.К. Круг, Ю.А. Сосулин, В.А. Фатуев. – М.: Наука, 1977. – 208 с.
15. *Хартман К.* Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер. – М.: Мир, 1977. – 552 с.
16. *Ермаков С.М.* Математическая теория оптимального эксперимента / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

17. *Авдеенко Т.В.* Построение динамических моделей в пространстве состояний: анализ структурной идентифицируемости: монография / Т.В. Авдеенко, В.Г. Горский. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 292 с.
18. *Деруссо П.* Пространство состояний в теории управления / П. Деруссо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970. – 620 с.
19. *Заде Л.* Теория линейных систем. Метод пространства состояний / Л. Заде, Ч. Дезоер. – М.: Наука, 1970. – 704 с.
20. *Горский В.Г.* Планирование промышленных экспериментов (модели динамики) / В.Г. Горский, Ю.П. Адлер, А.М. Талалай. – М.: Metallurgia, 1978. – 112 с.
21. *Burnham K.P.* Model selection and multimodel inference / K.P. Burnham, D.R. Anderson. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 496 p.
22. *Greene W.H.* Econometric analysis / W.H. Greene. – New Jersey: Prentice Hall, 2003. – 1024 p.
23. *Льонг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
24. *Эльясберг П.Е.* Определение движения по результатам измерений / П.Е. Эльясберг. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
25. *Мудров В.И.* Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки / В.И. Мудров, В.Л. Кушко. – М.: Радио и связь, 1983. – 304 с.
26. *Леман Э.* Теория точечного оценивания / Э. Леман. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
27. *Ивченко Г.И.* Введение в математическую статистику / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010. – 600 с.
28. *Rao C.R.* Линейные статистические методы и их применения / С.Р. Рао. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
29. *Балакришнан А.* Теория фильтрации Калмана / А. Балакришнан. – М.: Мир, 1988. – 168 с.
30. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
31. *Базара М.* Нелинейное программирование / М. Базара, К. Шетти. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
32. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию / Б.Т. Поляк. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
33. *Гилл Ф.* Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. – М.: Мир, 1985. – 252 с.
34. *Сухарев А.Г.* Курс методов оптимизации / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
35. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
36. *Измаилов А.Ф.* Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М.: Физматлит, 2008. – 320 с.

37. Дьяконов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник / В. Дьяконов, В. Круглов. – СПб.: Питер, 2001. – 480 с.
38. Жиглявский А.А. Методы поиска глобального экстремума / А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас. – М.: Наука, 1991. – 248 с.
39. Сергеев Я.Д. Диагональные методы глобальной оптимизации / Я.Д. Сергеев, Д.Е. Квасов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
40. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования / Ю.И. Топчиев. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.
41. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.
42. Пугачев В.С. Основы статистической теории автоматических систем / В.С. Пугачев, И.Е. Казаков, Л.Г. Евланов. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.
43. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева / И.Н. Синицын. – М.: Логос, 2007. – 776 с.
44. Попов А.А. Вычисление информационной матрицы Фишера в задаче планирования входного сигнала для динамических систем / А.А. Попов // Сборник научных трудов НГТУ. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. – № 2(11). – С. 8–16.
45. Цыганова Ю.В. Об эффективных методах параметрической идентификации линейных дискретных стохастических систем / Ю.В. Цыганова, М.В. Куликова // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 6. – С. 34–51.
46. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов / М.А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208 с.
47. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Дж. Медич. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
48. Jazwinski A.H. Stochastic processes and filtering theory / A.H. Jazwinski. – New York: Academic press, 1970. – 376 p.
49. Gupta N.K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations / N.K. Gupta, R.K. Mehra // IEEE Trans. Automat. Control. – 1974. – Vol. AC – 19. – № 6. – P. 774–783.
50. Åström K.J. Maximum likelihood and prediction error methods / K.J. Åström // Automatica. – 1980. – Vol. 16. – P. 551–574.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Основные обозначения.....	4
Введение .....	6
<b>Глава 1. Основы параметрической идентификации.....</b>	<b>10</b>
<b>Глава 2. Структурно-вероятностное описание моделей динамических систем .....</b>	<b>15</b>
2.1. Модели дискретных систем .....	15
2.2. Модели непрерывно-дискретных систем .....	19
Упражнения.....	23
<b>Глава 3. Оценивание параметров моделей дискретных систем .....</b>	<b>28</b>
3.1. Критерий максимального правдоподобия для линейных нестационарных моделей и алгоритм его вычисления.....	30
3.2. Критерий максимального правдоподобия для линеаризованных моделей .....	32
3.3. Алгоритм вычисления градиента критерия максимального правдоподобия для линейных нестационарных моделей.....	35
3.4. Вычисление градиента критерия максимального правдоподобия для линеаризованных моделей .....	38
3.5. Пример оценивания параметров.....	39
Упражнения.....	41
<b>Глава 4. Оценивание параметров моделей непрерывно-дискретных систем .....</b>	<b>46</b>
4.1. Особенности вычисления критериев максимального правдоподобия для линейных нестационарных и линеаризованных моделей .....	46

4.2. Особенности вычисления градиентов критериев максимального правдоподобия для линейных нестационарных и линеаризованных моделей .....	49
4.3. Пример оценивания параметров .....	52
Вопросы и упражнения .....	54
Библиографический список .....	58

**Чубич Владимир Михайлович  
Филиппова Елена Владимировна**

**АКТИВНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ  
СТОХАСТИЧЕСКИХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ**

**Учебное пособие**

Редактор *И.Л. Кескевич*  
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *И.Е. Семенова*  
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*  
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 25.10.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 80 экз.  
Уч.-изд. л. 3,72. Печ. л. 4,0. Изд. № 172. Заказ № 1499. Цена договорная

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20