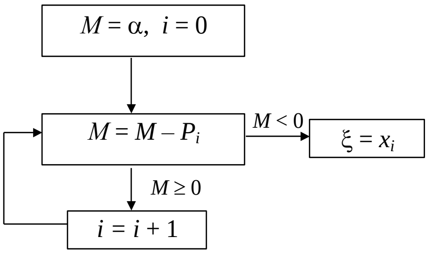
1. **(I)** Стандартный алгоритм моделирования дискретно распределённых случайных величин.

Общий метод моделирования случайной дискретной величины ξ основан на очевидном соотношении:

$$\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{Bmatrix} P\left(\sum_{k=0}^{m-1} P_k \le \alpha \le \sum_{k=0}^{m} P_k\right) = P_m$$, где $P_m = P(\xi = x_m)$, m = 0, 1,....

Стандартный алгоритм определения m для заданного значения α реализуется по следующей схеме:



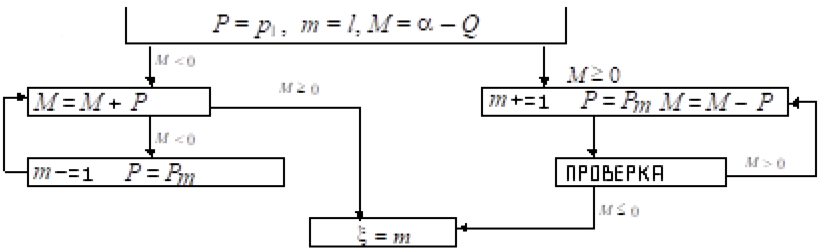
где x_i = i.

2. **(I)** Эффективность (трудоёмкость) стандартного алгоритма. Понятие и вычисление.

Эффективность стандартного алгоритма обратно пропорциональна величине $S = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$. Таким образом, **<u>среднее число арифметических операций</u>** для моделирования ξ пропорционально S. А для случайной целочисленной величины
$S = 1 + M\xi$.

3. **(I)** Нестандартный алгоритм моделирования распределения Пуассона.

Пусть параметр распределения Пуассона α >1 и [α] = l. Рассмотрим случайную величину ξ, распределенную по закону Пуассона с параметром α. Известно, что p_l – максимальна, при $k < l$ вероятности p_k возрастают с ростом k, а при $k \ge l$ – p_k убывают с ростом k. Тогда рассматривается следующая процедура моделирования ξ: если $\alpha \ge Q = \sum_{k=0}^{l} p_k$, то пробы для определения m в соотношении (3.1) производятся по возрастанию k, начиная с l + 1; в противном случае пробы производятся по убыванию k, начиная с l



4. **(II)** Вывести рекуррентные формулы для:

Суть защиты заключается в верном применении к формуле вероятности закона распределения, т. е. вероятности Р следующей формулы: $r(k) = \frac{P_{k+1}}{P_k}$

a) геометрического и «степенного» закона распределения;

Геометрический :

$P_k = p(1 - p)^k$, тогда $r(k) = p(1 - p)^{k+1} / p(1 - p)^k = 1 - p$

Степенной:

$$P_k = P(\xi = k) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots => \frac{1}{2^{k+1}} * \frac{2^k}{1} = \frac{1}{2}$$

б) гипергеометрического закона распределения;

$P_k = \frac{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{l-k}}{C_n^l}$, где max(0; $n_1 + l - n$) ≤ k ≤ min(n_1, l), здесь $r(k) = \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{C_{n_1}^{k+1} C_{n-n_1}^{l-k+1}}{C_n^l} * \frac{C_n^l}{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{l-k}} =$
$\frac{C_{n_1}^{k+1} C_{n-n_1}^{l-k+1}}{C_{n_1}^k C_{n-n_1}^{l-k}} = \frac{(n_1-k)(l-k)}{(k+1)(n-n_1-l+k)}$

(Просите Волкову просто записать конечную формулу, там очень много сокращений факториалов и очень легко запутаться, а формула, что выше из Цоя и должна проканать).

в) биномиального закона распределения;

Bi(n, p), где $P_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Для этого распределения:

$$r(k) = \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} \frac{p}{1-p} = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p}, \ k = 0, 1, ..., n.$$

г) отрицательного биномиального закона распределения;

$P_k = C_{s+k-1}^k p^s (1-p)^k \Rightarrow \frac{C_{s+k}^{k+1} p^s (1-p)^{k+1}}{C_{s+k-1}^k p^s (1-p)^k} \Rightarrow C_{s+k}^{k+1} p^s (1-p)^{k+1} = \frac{(s+k)! p^s (1-p)^{k+1}}{(k+1)!(s-1)!} \Rightarrow$

$C_{s+k-1}^k p^s (1-p)^k = \frac{(s+k-1)! p^s (1-p)^k}{k!(s-1)!} \Rightarrow \frac{(s+k)! p^s (1-p)^{k+1}}{(k+1)!(s-1)!} * \frac{k!(s-1)!}{(s+k-1)! p^s (1-p)^k} = \frac{(s+k)!(1-p)}{(k+1)(s+k-1)!}$

д) распределения Пуассона.

$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \Rightarrow \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{(k+1)!} * \frac{k!}{\lambda^k e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k+1}$

5. **(III)** Доказать, что:

а) случайная величина $\xi = [\rho \cdot (n+1)]$ при $\rho \in Rav(0;1)$ имеет равномерное дискретное распределение с $P_i = \frac{1}{n+1}$;

Доказательство:

P(ξ < n) = P{n ≤ ρ (n + 1) < n + 1} = |делим на (n + 1) < 0 => - (n + 1) | =

= P{$\frac{-n}{(n+1)}$ ≤ -ρ < $\frac{-(n+1)}{(n+1)}$ }= P{1 < ρ ≤ $\frac{n}{(n+1)}$} = 1 – $\frac{n}{(n+1)}$ =

= $\frac{n+1-n}{(n+1)}$ = $\frac{1}{(n+1)}$

б) случайная величина $\xi = \frac{\ln \rho}{\ln(1-p)}$ при $\rho \in Rav(0;1)$ распределена по геометрическому закону распределения с параметром p: $P_k = p \cdot (1-p)^k$.

Доказательство:

P(ξ < k) = P {k ≤ $\frac{\ln \rho}{\ln(1-p)}$ < (k + 1)}= | умножаем на ln(1 - p) < 0 => -ln(1 - p) > 0| =

= P {-k ln(1 – p) ≤ - ln(ρ) < -(k + 1)ln(1 - p)} = P{(k + 1) ln(1 - p) < ln(ρ) ≤ k ln(1 - p)} =| exp|

P{$(1 - p)^{k+1}$ < ρ ≤ $(1 - p)^k$} = $(1 - p)^k$ - $(1 - p)^{k+1}$ = $(1 - p)^k$ (1 – (1 - p)) = $(1 - p)^k$ p = p $(1 - p)^k$