1. **(I)** Метод обратной функции.

Необходимо найти число $\xi = \varphi(\alpha)$, где $\varphi(\alpha)$ не прерывная монотонная на интервале (0, 1) функция, то есть $0 \leq \alpha \leq 1$.

Для ξ задана функция плотности распределения *f(x)*, $a \leq x \leq b$. Необходимо найти функцию распределения F(x) и от неё найти $F^{-1}(\alpha)$, через которую выразить ξ. Так как $\xi = F^{-1}(\alpha)$, то $\alpha = F(x)$, значит $x = \xi$ и, если выразить x из равенства $\alpha = F(x)$, то получим $\xi = x = F^{-1}(\alpha)$.

Таким образом:

1. Интегрируем *f(x)* и получаем F(x).
2. Выражаем x через $\alpha = F(x)$.
3. Подставляем α в уравнение $x = F^{-1}(\alpha)$ и получаем значение ξ.

2. **(I)** Как по выборке построить эмпирическую функцию плотности распределения?

Пусть дана выборка X длиной n. Разделим n на K интервалов.

Пройдём по интервалам и посчитаем число элементов X, попавших в интервалы.

Разделим получившиеся частоты на длину последовательности n.

Полученные значения и есть эмпирическая функция плотности распределения.

3. **(I)** Как по выборке построить эмпирическую функцию распределения?

Эмпирической функцией распределения по построенной выборке $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ объёма n, называется случайная функция

F_n: R x Ω -> [0, 1] при каждом y принадлежащем R равна

$F(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i < y)$, где $I(X_i < y) = \begin{cases} 1, X_i < y \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$ то есть функция I это функция, которая проверяет, попадает X_i в нужный интервал или нет.

Пример.

Дана выборка X = (0; 2; 1; 2.6; 3.1; 4.6; 1; 4.6; 6; 2.6; 6; 7; 9; 9; 2.6).

Упорядочим её (0; 1; 1; 2; 2.6; 2.6; 3.1; 4.6; 4.6; 6; 6; 7; 9; 9).

n = 14

Используя функцию F(y) получим:

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	3	6	7	9	9	11	12	12	14
n_i/n	0,0714	0,214	0,428	0,5	0,643	0,643	0,785	0,857	0,857	1

Нижняя строка таблицы это высоты на графике функции.

4. **(II)** Методом обратной функции найти моделирующее выражение для случайной величины, заданной плотностью:

а) $f_\xi(x) = 3 \cdot x^2$ при $x \in [0;1]$;

$$\int_0^1 3x^2\,dx = x^3 \Big[{}^1_0$$

$$\alpha = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\alpha}, \alpha \in [0;1]$$

б) $f_\xi(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ при $x \in [0;1]$;

$$\int_0^1 \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\,dx = x^{\frac{3}{2}} \Big[{}^1_0$$

$$\alpha = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\alpha^2}, \alpha \in [0;1]$$

в) $f_\xi(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ при $x \in [0;1]$;

$$\int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx \Rightarrow \frac{\pi}{2} x = u, du = \frac{\pi}{2} dx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,du = \sin(u) \Big[{}^{\frac{\pi}{2}}_0 =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) {}^1_0$$

$$\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} x = 2\pi n + \arcsin(\alpha) \quad \frac{\pi}{2} x = 2\pi n - \arcsin(\alpha) + \pi \Rightarrow$$

$$\text{делим на } \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2(2\pi n + \arcsin(\alpha))}{\pi} \\ x_2 = \dfrac{2(2\pi n - \arcsin(\alpha) + \pi)}{\pi} \end{cases} n - \text{любое целое число}$$

г) $f_\xi(x) = \frac{1}{\ln 2 \cdot (1 + x)}$ при $x \in [0;1]$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln 2\,(1+x)} dx \Rightarrow \ln 2\,(1+x) = u, du = \ln 2\,dx, \frac{du}{\ln 2} \Rightarrow \frac{1}{\ln 2} \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{u} du = \frac{\ln u}{\ln 2} \Big[{}^{2\ln 2}_{\ln 2}$$

$$= \frac{\ln(\ln 2\,(1+x))}{\ln 2} = \frac{\ln(\ln 2 + x \ln 2))}{\ln 2}$$

$$\alpha = \frac{\ln(\ln 2 + x \ln 2))}{\ln 2} \Rightarrow \alpha \ln 2 = \ln(\ln 2 + x \ln 2)) \Rightarrow e^{\alpha \ln 2}$$

$$= \ln 2 + x \ln 2 \Rightarrow \frac{e^{\alpha \ln 2} - \ln 2}{\ln 2} = x$$