1. (I) Метод исключений.

Сначала необходимо найти границы области G. После того как найдены левая граница a и правая граница b, найдём M = f(ξ), где ξ это значения параметра x, при котором f(x) = max.

После этого генерируется множество пар равномерно распределённых чисел в границах (0, 1): R=(α_1 , α_2 , α_3 , ... , α_n , ...).

Генерация псевдослучайного числа методом исключений происходит по следующему алгоритму:

1. Выбирается пара чисел α_i , α_{i+1} .
2. Вычисляются $x = a + \alpha_i (b - a)$ и $y = \alpha_{i+1} * M$
3. Проверка:

   Если $y \geq f(x)$, то возврат к шагу 1 с выбором следующей пары чисел α_i , α_{i+1}

   Иначе: считаем, что ξ = x, т. е. получили искомое псевдослучайное число.

2. (I) Как построить область $\overline{G}$, используемую в методе исключений?

1. Интегрируем *f(x)* и получаем F(x).
2. Выражаем x через α = F(x).
3. Подставляем α в уравнение x = $F^{-1}(\alpha)$ и получаем границы a и b.

Пример:

Пусть нужно найти область G в которую попадает 95% значения функции распределения.

Тогда ищем область от 0.05, до 0.95. Это значения параметра α.

Пусть наша плотность распределения выражается функцией $f_{\xi}(x) = 3 \cdot x^2$ при $x \in [0;1]$;

Методом обратной функции получим:

$$\int_0^1 3x^2\,dx = x^3 \Big[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

$\alpha = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\alpha}, \alpha \in [0;1]$

Подставим 0.05 для a и 0.95 для b.

a = $\sqrt[3]{0.05} \approx 0.368$

b = $\sqrt[3]{0.95} \approx 0.983$

3. (II) Найти границы интервала, внутри которого будет производиться моделирование случайной величины по методу исключений, так, чтобы интервал содержал не менее 98 % всех значений случайной величины:

а) <u>случайная величина распределена по экспоненциальному закону распределения;</u>

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x \in [0; \infty), \ \lambda > 0$$

По методу обратной функции, так как $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, то:

$$x = \frac{\ln(1-\alpha)}{-\lambda}$$

Подставим 0.05 для a и 0.95 для b.

$$a = \frac{\ln(1-0.05)}{-\lambda} = \frac{\ln(0.95)}{-\lambda} \approx \frac{0.0513}{\lambda}$$

$$b = \frac{\ln(1-0.95)}{-\lambda} = \frac{\ln(0.05)}{-\lambda} \approx \frac{2.99}{\lambda}$$

б) <u>случайная величина распределена по распределению Рэлея;</u>

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma^2}}, \quad x \in [0; \infty), \ \sigma > 0$$

По методу обратной функции, так как $F(x) = 1 - e^{\frac{(-x^2)}{2\sigma^2}}$, то:

$$x = \begin{cases} -\sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)} \\ \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)} \end{cases}$$

Так как распределение имеет границы $x \in [0; \infty)$, то остаётся $x = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-\alpha)}$

Подставим 0.05 для a и 0.95 для b.

$$a = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-0.05)} = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(0.95)} \approx \sigma\sqrt{1.025} \approx 0.0725 * \sigma$$

$$b = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-0.95)} = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(0.05)} \approx \sigma\sqrt{5.99} \approx 4.236 * \sigma$$

в) <u>случайная величина распределена по логистическому закону распределения.</u>

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\nu}}}{\nu \cdot \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\nu}}\right)^2}, \quad x \in (-\infty;\infty), \ \nu > 0$$

По методу обратной функции, так как $F(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{-(x-\mu)}{\nu}}}$, то:

$$x = \mu - \nu \ln(\frac{1}{\alpha} - 1)$$

Подставим 0.05 для a и 0.95 для b.

$$a = \mu - \nu \ln\left(\frac{1}{0.05} - 1\right) = \mu - \nu \ln(19) \approx \mu - \nu * 2.944$$

$$b = \mu - \nu \ln\left(\frac{1}{0.95} - 1\right) = \mu - \nu \ln(0.0526) \approx \mu + \nu * 2.944$$