Ершов Пётр. Билет №24

№1. Эллипсоид рассеивания описывается в пространстве переменных ~~р~~ размера и конфигурации области ~~т~~ данного ~~пространства~~.

Уравнение поверхности имеет вид:

$$(\hat{\theta}-\theta_{ист})^T D^{-1}(\hat{\theta})(\hat{\theta}-\theta_{ист}) = m+2,$$ где $\hat{\theta}$ - случайный несмещённый вектор оценок параметров;

$D(\hat{\theta})$ - дисперсионная матрица;

$\theta_{ист} = E(\hat{\theta})$ — математическое ожидание;

m - число измерений выбранной области (т.е. m-мерное тело), ограниченной поверхностью эллипсоида.

№2. $$\left.\frac{\partial \Psi[M(\tilde{\varepsilon})]}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \geq 0,$$ где $\partial\alpha$ — это производная по направлению $\tilde{\varepsilon}$

Пусть ε^* - это не оптимальный план. Тогда производная по направлению выпуклого функционала является неположительным:

$$\left.\frac{\partial \Psi[M(\varepsilon^*)]}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} < 0$$

№3
Если множество выпуклое, то легко решить экстремальную задачу по ~~от~~ оптимизации того или иного показателя качества плана.

№4
информационной матрицей однократного наблюдения называют матрицу, вида:
$M(x_i) = f(x_i) f^T(x_i)$, $rg(M(x_i)) = 1$.

№5 Функционалы $\Phi[M(\varepsilon)]$, ~~которы~~ которые зависят от $M^+(\varepsilon)$ относятся к классу недифференцируемых из-за разрывного характера псевдообращения. Для ~~не~~ такого случая обычная формулировка теоремы ~~оптима~~ оптимальности непригодна, поэтому вводится понятие Ψ-субоптимального планирования.

№6.
D-оптимальность:

Функционал	Условие ~~оптималь~~ оптимал.
$\ln \lvert M(\varepsilon) \rvert$	$\left[\max\limits_{x \in X} f^T(x) M^{-1}(\varepsilon^*) f(x) = m \right.$
	или
	$\cancel{\max\limits_{x \in X} tr M(\varepsilon) M^{-1}(x)}$
	$\left[\max\limits_{x \in X} tr M(x) M^{-1}(\varepsilon^*) = m \right.$

№7
существует насыщенный ~~не~~ план с числом наблюдений $n = rg\,X$, составленный из точек полного факторного эксперимента (ПФЭ), для которого базис ФДО совпадает с базисом ФДО для ПФЭ.

<u>Доказательство</u>: Пусть X соответствует ПФЭ. Проведём факторизацию $X = X_1 A$, где X_1 составлена из линейно независимых столбцов X. $rg\,X_1 = r = rg\,X$. Т.к. размерность ~~пр~~ пространства столбцов любой матрицы совпадает с размерностью ~~ее~~ пространства строк, ~~то~~ то существует r линейно независимых строк X_1, т.е. насыщенный невырожденный план в виде подмножества ПФЭ. Пусть X_1^0 подматрица X_1, которая соответствует этому подмножеству. Т.к. пространство строк $L(B)$ любой матрицы B совпадает с пространством столбцов, т.е. $L(B) = L(B^T)$, то это правило справедливо и для матриц X_1^0 и X_1. Т.к. $L(A) \in L(X_1)$ по причине того, что A это базис ФДО для X_1, то из $L(X_1^0) = L(X_1)$ следует, что и $L(A) \in L(X_1^0)$, т.е. A - это базис ФДО для ~~насыщ~~ насыщенного плана, составленного из линейно независимых строк X_1.

№8.

Причины проблемы:

изменение может выйти за область справедливости линейного приближения вида: $\eta(x,\theta) \approx \eta(x,\hat{\theta}_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \eta(x,\theta)}{\partial \theta_j}\Big|_{\hat{\theta}_0} \cdot (\theta_j - \hat{\theta}_j)$

Решение проблемы: регулировать шаг изменения (от 0 до 1) так, чтобы находить

$V_{r*} = \cancel{Arg}\ Arg \min_{V_r} S^2(\hat{\theta}_r + V_r \Delta\theta_r)$

$\hat{\theta} = Arg \min_{\theta} S^2(\theta) = Arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \tilde{\sigma}_{il} [y_i - \eta(x_i;\theta)] \cdot$

$\cdot [y_l - \eta(x_l;\theta)]$, где σ_{il} – il элемент

матрицы дисперсий и ковариаций в точках. Матрица имеет вид:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \sigma_{1N}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1}^2 & \cdots & \sigma_{NN}^2 \end{pmatrix}$$

№9 План $\varepsilon = \begin{Bmatrix} -0{,}75 & +0{,}75 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$. модель $\eta(x;\theta) = \theta_1 + \theta_2 x \Rightarrow$

$= f = \binom{1}{x}$ ~~D-оптимальность~~

область ~~ны~~ планирования $X = [-1; 1]$

D-оптимальность: $Arg \max_{x \in X} tr\, M M^{-1} = m$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5625 \end{pmatrix}$ $\quad d(x,\varepsilon) = (1\ x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{16}{9} \end{pmatrix}\binom{1}{x} =$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\frac{7}{9} \end{pmatrix}$ $\quad = 1 + \frac{16}{9}x^2 \Rightarrow \max_{x \in X}(1 + \frac{16}{9}x^2) = \frac{25}{9}$

$\frac{25}{9} \neq m \neq 2 \Rightarrow$ план не является D-оптимальным.

№10 Модель $\eta(x,\theta)=\theta_1+\theta_2 x^2$ $\quad X=\{-1;0;1\}$

$m=2$

$$\hat{M}(\varepsilon)=\begin{cases} M(\varepsilon_i)+\gamma I, & s<m \\ M(\varepsilon_i), & s\geq m\end{cases} \qquad f=(1\ \ x^2)$$

$\hat{M}(\varepsilon_0)=\gamma\cdot I$. пусть $\gamma=0{,}1$

1) $x_1=\operatorname{Arg}\max\limits_{x\in X} f^T(x)\cdot \hat{M}^{-1}(\varepsilon_s)\, f(x)=$

$$=(1\ \ x^2)\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x^2\end{pmatrix}=10+10x^4 \Rightarrow x_1=1$$

$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad s=1<m$

$$\hat{M}(\varepsilon_1)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\gamma I=\begin{pmatrix}1{,}1&1\\1&1{,}1\end{pmatrix}$$

$$\hat{M}^{-1}(\varepsilon_1)=\frac{100}{21}\begin{pmatrix}1{,}1&1\\1&1{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{110}{21}&-\frac{100}{21}\\-\frac{100}{21}&\frac{110}{21}\end{pmatrix}$$

$$x_2=\operatorname{Arg}\max_{x\in X}(1\ \ x^2)\,\hat{M}^{-1}(\varepsilon_1)\begin{pmatrix}1\\x^2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{110}{21}-\frac{200}{21}x^2+\frac{110}{21}x^4 \Rightarrow x_2=0$$

$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}$ $\quad s=2=m$

$$\hat{M}(\varepsilon_2)=\sum_i p_i f(x_i)f^T(x_i)=\cancel{0\begin{pmatrix}1\\\frac14\end{pmatrix}(1\ \ \tfrac14)}+$$

$$=\frac12\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ \ 0)+\frac12\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1\ \ 1)=\begin{pmatrix}\frac12&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix} \qquad \hat{M}^{-1}(\varepsilon_2)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&4\end{pmatrix}$$

$$x_3=\operatorname{Arg}\max_{x\in X}(1\ \ x^2)\begin{pmatrix}2&-2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x^2\end{pmatrix}=$$

$$= \cancel{2-2x^2} \left(2-2x^2 \cdot 2+4x^2\right)\binom{1}{x^2} = 2-4x^2+4x^4 =$$

$$= X_3 = -1$$

$$\xi = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{Bmatrix}$$