

# 1 Дифференциальное исчисление. Функции нескольких переменных

## 1.1 Метрические пространства

Пусть имеется пространство неких элементов  $X$ .

**Определение 1.1.** Пространство  $X$  называется метрическим, если  $\forall x, y \in X, \exists$  вещественное число  $\rho(x, y)$ , удовлетворяющее аксиомам:

1)  $\rho(x, y) \geq 0; \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;

3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

$\forall x, y, z \in X$ .

Тогда величина  $\rho(x, y)$  можно назвать метрикой или расстоянием между элементами.

**Пример 1.1.**  $X = \mathbb{R}$ . Здесь  $\rho(x, y) = |x - y|$ .

**Пример 1.2.**  $X = C[a, b]$  — непрерывные функции, заданные на отрезке  $[a, b]$ .

$\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$ , где  $x \in [a, b]$ .

$\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .

и так далее.

Если  $\rho_1(f(x), g(x))$  мало, то  $\rho_2(f(x), g(x))$  — мало. Обратное вообще говоря неверно.

**Определение 1.2.**  $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$  — эpsilon-окрестность  $x$ ; шар с центром в  $x$  и радиусом  $\varepsilon$ .

**Пример 1.3.**  $X = \mathbb{R}$   $\rho(x, y) = |x - y|$ .  $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ .

**Пример 1.4.**  $X = C([a, b])$ ,  $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a, b]} |f(x) - g(x)|$ . Отстаеваем  $\varepsilon$  от каждого  $f(x)$  вверх и вниз. Любая функция, лежащая в получившемся участке пространства, принадлежит эpsilon-окрестности функции.

**Определение 1.3.** Далее элементы пространства будем называть точками.

**Определение 1.4.**  $x \in X$  — внутренняя точка  $X$ , если  $\exists \varepsilon > 0 : V_\varepsilon(x) \subset X$ .

**Определение 1.5.** Множество  $X$  открыто, если все его точки внутренние. (Привет, топология. Я скучал).

**Пример 1.5.**  $x^2 + y^2 < 1$ .

**Определение 1.6.**  $x$  — предельная точка  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in X (y \neq x) : y \in V_\varepsilon(x)$ .

*Замечание 1.1.* Предельная точка может как входить во множество, так и не входить.

**Определение 1.7.**  $X$  замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки.

**Пример 1.6.**  $x^2 + y^2 < 1$  не замкнуто. А вот  $x^2 + y^2 \leq 1$  замкнуто.

**Определение 1.8.** Замыкание множества — процедура присоединения к множеству всех его предельных точек.

**Пример 1.7.**  $\mathbb{Q}$  не открыто и не замкнуто.

**Определение 1.9.**  $\overline{\mathbb{Q}}$  — замыкание.

**Пример 1.8.**  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

**Определение 1.10.**  $x \in X$  — изолированная точка  $X$ , если  $\exists \varepsilon > 0 : \nexists y \in X : y \neq x, y \in V_\varepsilon(x)$ .

**Определение 1.11.**  $x \in X$  — граничная точка  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0, \exists y_1 \in X, \exists y_2 \notin X : y_1, y_2 \in V_\varepsilon(x)$ . При этом граничная точка может как принадлежать множеству, так и не принадлежать.

## 1.2 Пространство $\mathbb{R}^n$

**Определение 1.12.** Под пространством  $\mathbb{R}^n$  будем понимать множество упорядоченных наборов из  $n$  вещественных чисел. (Пространство  $n$ -мерных векторов).

Введем в пространстве  $\mathbb{R}^n$  метрику:

1) Сферическая (евклидова) метрика:

Если  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ , то

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Докажем неравенство треугольника (неотрицательность и симметричность очевидны):

*Доказательство.*  $\forall a_i, b_i, i = 1, \dots, n. \forall t \sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2 \geq 0$ . Раскроем скобки:  $\underbrace{t^2 \sum_{i=1}^n a_i^2}_A + \underbrace{2t \sum_{i=1}^n a_i b_i}_B + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i^2}_C$

0. Чтобы это неравенство выполнялось, должно выполняться  $B^2 - AC \leq 0$ . Отсюда  $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2) (\sum_{i=1}^n b_i^2)$ . Извлечем корень:  $|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ . Умножим на 2 и прибавим ... :  $\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ . Вынесем полные квадраты:  $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2$ . Извлекаем корень, получаем  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)$  (\*).

В неравенстве (\*)  $a_i = x_i - z_i, b_i = z_i - y_i, i = \overline{1, n}$ , где  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ . Отсюда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}$$

□

**Пример 1.9.**  $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2\}$  — эpsilon-окрестность, шар.

2) Параллелепipedальная метрика:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \rho(x, y) = \max_{i=\overline{1, n}} |x_i - y_i|$ .

Аксиомы очевидны.

**Пример 1.10.**  $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < \varepsilon, i = \overline{1, n}\}$ .

**Лемма 1.1.**  $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon_1 > 0$ :

1)  $V_{\varepsilon_1}^{(1)}(x) < V_{\varepsilon}^{(2)}(x)$

2)  $V_{\varepsilon_1}^{(2)}(x) < V_{\varepsilon}^{(1)}(x)$

где  $V^{(1)}$  — сферическая окрестность, а  $V^{(2)}$  — параллелепипедальная.

*Доказательство.* Очевидно.

Из леммы вытекает, что сферическая и параллелепипедальная метрики эквивалентны в плане близости.

Поэтому далее можно использовать любую из этих метрик и теоремы, доказанные в одной метрике, верны и для другой.

Далее, если не оговорено противное, под расстоянием в пространстве  $\mathbb{R}^n$  будем понимать сферическую метрику.  $\square$

В различных задачах могут быть использованы и другие метрики пространства  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.3 Последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$

Пусть  $\forall k \in \mathbb{N} \exists x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  — последовательность в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.13.** Пусть  $a \in \mathbb{R}^n$ . Точка  $a$  называется пределом последовательности  $\{x^{(k)}\}$  при  $k \rightarrow \infty$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0, \forall k > N \Rightarrow \rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon$ . Запись:  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a$ .

**Теорема 1.1.**  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ . Тогда  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \Leftrightarrow a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}$ ,

где  $i = \overline{1, n}$ .

*Доказательство.*  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = a \Leftrightarrow \rho(x^{(k)}, a) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \max_{i=\overline{1, n}} |x_i^{(k)} - a_i| \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i$  (по лемме из прошлого параграфа).  $\square$

*Замечание 1.2.* Последовательность  $\{x_i^{(k)}\}$  — одномерные числовые последовательности. В результате по теореме исследование многомерного предела сводится к исследованию одномерных пределов и теоремы, доказанные для одномерного случая в той или иной степени переносятся на многомерный случай.

**Теорема 1.2.** (Коши)

$\exists$  конечный  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall k \geq N \forall p > 0 \Rightarrow \rho(x^{(k+p)}, x^{(k)}) < \varepsilon$ .

**Определение 1.14.**  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  ограничена в  $\mathbb{R}^n$ , если  $\exists M > 0 : \rho(x^{(k)}, \phi) \leq M \forall k = 1, 2, \dots$ , где  $\phi$  обычно является началом координат.

**Теорема 1.3.** (Больцано-Вейерштрасса для многомерного случая) Если последовательность ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.* Пусть  $\{x^{(k)}\}$  ограничена в  $\mathbb{R}^n$ . Распишем:  $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \dots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ . Если огра-

ничены вектора, то следует, что последовательность первых координат  $\{x_1^{(k)}\}$  ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса для одномерного случая из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность:  $\exists \{x_1^{(m_k)}\}$ . Теперь возьмем эту последовательность для всех векторов (рассматриваем многомерную подпоследовательность):

$x^{(m_k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m_k)} \\ \dots \\ x_n^{(m_k)} \end{pmatrix}$ . Рассмотрим последовательность вторых координат  $\{x_2^{(m_k)}\}$ . Она огра-

ничена, а значит, существует сходящаяся подпоследовательность  $\{x_2^{(p_{m_k})}\}$ . Теперь рассмат-

риваем  $x^{(p_{m_k})} = \begin{pmatrix} x_1^{(p_{m_k})} \\ \dots \\ x_n^{(p_{m_k})} \end{pmatrix}$ . Полученная последовательность векторов сходится по первым

двум координатам. По индукции распространяем правило на оставшиеся координаты.  $\square$

## 1.4 Функции нескольких переменных.

**Определение 1.15.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$ . И пусть  $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in E \exists$  некоторое вещественное число, которое будем обозначать  $f(x)$  или  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Тогда говорят, что на множестве  $E$  задана функция от нескольких переменных.

Обозначения: Если будем доказывать теоремы для  $n$ -мерного случая, то будем обозначать несколько переменных как  $f(x_1, \dots, x_n)$ . В трехмерном/двухмерном будем писать  $f(x, y, z)/f(x, y)$ .

**Определение 1.16.**  $E$  — область определения функции.

**Определение 1.17.** Диаметр области  $diam E = \sup_{x^{(1)}, x^{(2)} \in E} \rho(x^{(1)}, x^{(2)})$ . Если  $diam E$  конечен, то область  $E$  ограничена.

**Определение 1.18.** Область  $E$  — связная, если любые две точки из этой области можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этой области.

**Пример 1.11.**  $f(x, y) = \ln xy$ . Область определения  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ .  $E$  — неограничена, несвязна.

*Замечание 1.3.* Функция от двух переменных задает поверхность в трехмерном пространстве.

В общем случае получаем  $n$ -мерную поверхность в  $n + 1$ -мерном пространстве.

**Определение 1.19.** (предел функции по Гейне)

Пусть  $f(x)$  определена на  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ . Если  $\forall \{x^{(k)}\} \in E$  верно, что  $\rho(x^{(k)}, a) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |f(x^{(k)}) - g| \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ , то  $g = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Предложение 1.1.**  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Зафиксируем все координаты кроме  $x_1$ .

Предположим  $\exists \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, \dots, x_n) = f^{(1)}(x_2, \dots, x_n)$ . Проведем эту операцию для оставшихся координат. В результате приходим к так называемому повторному пределу  $\lim_{x_n \rightarrow a_n} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1}$

Если перебирать аргументы  $x_1, \dots, x_n$  в другом порядке, то получим другой повторный предел. Всего получится  $n!$  повторных пределов. Если существуют оба предела (повторный и Гейне), то они равны. Может оказаться, что какой-то повторный предел существует, а многомерного предела нет. И наоборот.

**Пример 1.12.**  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .  $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$ .  $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Здесь  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . То есть многомерный предел существует и равен нулю, так как  $0 \leq |f(x, y)| \leq |x| + |y|$ . Вычислим повторный предел:  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ . Внутреннего предела не существует. Если поменять пределы местами, то тоже ничего хорошего не получится.

**Пример 1.13.** Все то же самое, только  $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y$ . Опять-таки многомерный предел есть. Повторный предел  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0$ . А вот наоборот не выйдет по той же причине, по которой мы не смогли вывести в предыдущем примере.

**Пример 1.14.** Опять-таки все то же самое, но  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ . Повторные пределы существуют и  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . Покажем, что многомерного предела не существует. Будем стремиться к нулю по лучам. То есть  $y = px$ ,  $p = \text{const}$ . Вычисляем:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, px) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px^2}{x^2 + p^2x^2} = \frac{p}{1 + p^2}$ . То есть для каждого луча значение предела свое. Тогда по Гейне получается, что предела нет.

**Пример 1.15.** Все то же самое, но  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ . Попытаемся идти вдоль лучей.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, px) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px^3}{x^4 + p^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{x^2 + p^2} = 0 \forall p$ . То есть вдоль любого луча получаем ноль. Но не факт, что предел существует, так как мы не обязаны идти по лучам. Пойдем по параболам:  $y = px^2$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, px^2) = \frac{p}{1 + p^2}$ . Опять зависимость от  $p$ . Значит, этот предел не существует.

*Замечание 1.4.* Таким образом определение предела по Гейне отлично подходит для того, чтобы доказать, что предела нет.

**Определение 1.20.** (предел по Коши)

$f(x)$  определена на  $E \subset \mathbb{R}^n$ .  $g$  — предел  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in E : \rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$ .

*Замечание 1.5.* Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

**Теорема 1.4.** (Критерий сходимости Коши)

Чтобы  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , такое, что  $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E : x^{(1)}, x^{(2)} \in U_\delta(a) \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$ . Доказательство аналогично одномерному случаю.

**Теорема 1.5.** (арифметические свойства)

Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + h(x)) = g + l$ , аналогично с произведением и частным.

**Определение 1.21.** Пусть  $y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . А  $z = g(y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Здесь  $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$ , где  $k = \overline{1, n}$ ;  $z = g(y_1, \dots, y_m)$  Тогда  $z = g(f(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — суперпозиция функций  $f, g$ .

**Теорема 1.6.** Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  и при этом  $\exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = l$ .

## 1.5 Непрерывные функции

**Определение 1.22.**  $f(x)$  определена на  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in E$ .  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Теорема 1.7.** (арифметические свойства)

$f, g$  — непрерывны в  $a$ . Тогда непрерывны сумма, произведение и отношение (если  $g(a)$  не равно нулю).

**Теорема 1.8.**  $y = f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  и она непрерывна в  $a$ . Пусть  $z = g(y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  и она тоже непрерывна в  $f(a)$ . Тогда их суперпозиция будет непрерывна в точке  $a$ .

**Определение 1.23.** Если функция непрерывна в каждой точке  $E \subset \mathbb{R}^n$ , то она называется непрерывной на множестве  $E$ .

**Теорема 1.9.** (Больцано-Коши о нуле функции)

Пусть  $f(x)$  определена и непрерывна на  $E \subset \mathbb{R}^n$  и множество  $E$  связно. И пусть  $\exists a, b \in E : f(a)f(b) < 0$ . Тогда  $\exists c \in E$ , такая, что  $f(c) = 0$ .

*Доказательство.* По условию  $E$  — связное, следовательно,  $\exists$  непрерывная кривая  $L$ , которая:

1)  $L$  соединяет точки  $a, b$ ;

$$2) L : \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

$t \in [\alpha, \beta]$ ,  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  определены на  $[\alpha, \beta]$ , при этом  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ .

Введем функцию  $F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ . По теореме о непрерывности суперпозиции  $F(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ , причем  $F(\alpha) = a$ ,  $F(\beta) = b$ . По одномерной теореме Коши-Больцано  $\exists j \in [\alpha, \beta] : F(j) = 0$ ;  $c = \lambda(j) \subset E$   $f(c) = F(j) = 0$ .  $\square$

**Теорема 1.10.** (Коши-Больцано о промежуточном значении)

$f(x)$  определена и непрерывна на  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E$  связно.  $\exists a, b \in E : f(a) = A$ ,  $f(b) = B$  и  $A < B$ . Тогда  $\forall C : A < C < B : \exists c \in E : f(c) = C$ .

*Доказательство.* Введем функцию  $\varphi(x) = f(x) - C$ . Эта функция по-прежнему непрерывна. Тогда  $\varphi(a) = f(a) - C < 0$ , и  $\varphi(b) = f(b) - C > 0$ . Сведено к предыдущей теореме. Тогда  $\exists c \in E : \varphi(c) = 0$ .  $\varphi(c) = f(c) - C$ , теорема доказана.  $\square$

**Теорема 1.11.** (первая Вейерштрасса)

Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $E \subset \mathbb{R}^n$  и  $E$  замкнута и ограничена. Тогда  $f(x)$  будет ограничена в области  $E$  и достигает там своего максимума и минимума.

*Доказательство.*

1) Покажем, что функция является ограниченной:

От противного. Пусть это не так:  $f(x)$  не ограничена  $E$ . Тогда  $\{x^{(n)}\} \in E$ .  $E$  ограничена  $\Rightarrow \{x^{(k)}\}$  — ограничена. А раз она ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса  $\exists$  сходящаяся подпоследовательность  $\{x^{(m_k)}\} \Rightarrow \exists x^* : x^{(m_k)} \rightarrow x^*$ , из определения непрерывности по Гейне следует, что  $f(x^{(m_k)}) \rightarrow_{k \rightarrow \infty} f(x^*)$ . С другой стороны, из (\*) следует, что подпоследовательность уходит на бесконечность. Противоречие.

2) Покажем, что  $f(x)$  достигает максимума (для минимума доказательство аналогично).

Обозначим  $M = \sup_E f(x)$ . Функция ограничена, значит, супремум конечен. От противного. Предположим, что  $f(x) < M$ ,  $\forall x \in E$ . Рассмотрим  $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ . Знаменатель не обращается в ноль, значит, она непрерывна на  $E$ . По уже доказанной первой части  $g(x)$  ограничена на  $E$ . То есть  $g(x) \leq L$ . Подставим значение  $g(x) : \frac{1}{M-f(x)} \leq L \forall x \in E \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{L}$ . Получаем противоречие с определением супремума.  $\square$

**Определение 1.24.** (равномерная непрерывность)

$f(x)$  равномерно непрерывна на  $E \in \mathbb{R}^n$  если  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$ , таких, что  $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$ .

**Теорема 1.12.** (Кантора)

$f(x)$  непрерывна на  $E \in \mathbb{R}^n$ .  $E$  замкнуто и ограничено. Тогда  $f(x)$  равномерно непрерывна.

*Доказательство.* От противного. Положим, функция непрерывна, но не равномерно непрерывна на  $E$ . Тогда  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x^{(1)}, x^{(2)} \in E : \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| \geq \varepsilon$ . Возьмем  $\delta_k = \frac{1}{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots \Rightarrow \exists x^{(1k)}, x^{(2k)} \in E : \rho(x^{(1k)}, x^{(2k)}) < \frac{1}{k}$ ,  $|f(x^{(1k)}) - f(x^{(2k)})| \geq \varepsilon$ .  $\{x^{(1k)}\} \in E$  — ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса  $\exists$  сходящаяся подпоследовательность  $\{x^{(1m_k)}\} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ .  $E$  замкнуто, следовательно,  $x^* \in E$ .

Рассмотрим те же номера для второй последовательности:  $\{x^{(2m_k)}\}$ .  $0 \leq \rho(x^{(2m_k)}, x^*) \leq \underbrace{\rho(x^{(2m_k)}, x^{(1m_k)})}_{< \frac{1}{m_k} \rightarrow 0} + \underbrace{\rho(x^{(1m_k)}, x^*)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$ .

$f(x)$  непрерывна в точке  $x^*$ , тогда, по Гейне,  $f(x^{(1m_k)}) \rightarrow f(x^*)$  и  $f(x^{(2m_k)}) \rightarrow f(x^*)$ . Следовательно,  $|f(x^{(1m_k)}) - f(x^{(2m_k)})| \rightarrow 0$ . Противоречие с предположением.  $\square$

## 1.6 Дифференцируемость функций нескольких переменных

$E \subset \mathbb{R}^3$ .  $f(x, y, z)$  определена на  $E$ .  $\forall M = (x, y, z) \in E$ .

Будем считать  $y, z$  фиксированными, а  $x$  зададим приращение  $\Delta x$ . То есть мы движемся вдоль оси  $x$ . Посмотрим, как изменятся значения функции:

$\Delta_x f = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$  — частичное приращение  $f$  по  $x$ .

**Определение 1.25.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

, то он называется частной производной. Аналогично можно ввести определения частной производной для остальных координат:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z f}{\Delta z}$$

При вычислении частной производной все переменные, кроме одной, фиксируются, то есть нахождение частных производных сводится к одномерному дифференцированию.

**Пример 1.16.**  $f(x, y, z) = xe^{yz^2}$ .

$$f'_x = e^{yz^2}, f'_y = x e^{yz^2} \cdot z^2, f'_z = x e^{yz^2} \cdot 2yz.$$

**Определение 1.26.** Зададим приращение сразу всем трем переменным.

$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$ . Такая величина называется полным приращением функции точки  $M$ .

**Определение 1.27.**  $f(x, y, z)$  называется дифференцируемой в точке  $M$ , если ее полное приращение может быть представлено в виде  $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$ , где  $A, B, C$  — константы, а  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ .

**Теорема 1.13.** (необходимое условие дифференцируемости)

Для того, чтобы  $f(x, y, z)$  была дифференцируемой в точке, необходимо, чтобы в этой точке существовали ее частные производные. (условие не является достаточным!)

*Доказательство.*  $f(x, y, z)$  — дифференцируема, отсюда существует  $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$ . Пусть  $\Delta x \neq 0$ ,  $\Delta y = \Delta z = 0$ . То есть полное приращение равно частному по  $x$ . Отсюда  $\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ . При  $x \rightarrow 0 \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A$ . Аналогично доказываются остальные координаты.

Из доказанной теоремы следует, что если функция дифференцируема, то ее производная представима в виде  $\Delta f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z$ .  $\square$

**Теорема 1.14.** (достаточное условие дифференцируемости)

Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке, достаточно, чтобы существовали непрерывные частные производные  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ .

*Доказательство.* Пусть существует непрерывные  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ . Рассматриваем полное приращение функции в точке:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)] + [f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z)] + [f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)] = * \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x + \Theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \Theta_2 \Delta y, z + \Delta z) \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z + \Theta_3 \Delta z) \Delta z \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \alpha \right) \Delta x + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + \beta \right) \Delta y + \left( \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \gamma \right) \Delta z \end{aligned}$$

\*по одномерной теореме Лагранжа ( $\exists \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in (0, 1)$ )

где:  $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \Theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ ,  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y + \Theta_2 \Delta y, z + \Delta z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ ,  $\gamma = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z + \Theta_3 \Delta z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ .

В силу непрерывности частных производных  $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} 0$ , откуда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \Delta z + (\alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z)$$

Мы представили приращение в виде  $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$ , что по определению дает дифференцируемость функции.  $\square$

**Замечание 1.6.** Непрерывность частных производных — достаточное условие дифференцируемости, но не необходимое.

**Теорема 1.15.** Если  $f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $(x, y, z)$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Если  $f$  дифференцируема, то ее приращение имеет вид  $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + o(\rho)$ . Если приращения аргументов стремятся к нулю, то и приращение функции будет стремиться к нулю. Следовательно,  $f$  непрерывна.  $\square$



**Определение 1.28.** Линейная часть полного приращения функции называется первым дифференциалом.

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z}_{=df} + o(\rho)$$

Отсюда формула первого дифференциала

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

*Замечание 1.7.* Аналогичное определение можно ввести для функции от  $n$  переменных:  $f(x_1, \dots, x_n)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1 f}{\Delta x_1} = \lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i - \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

$f$  называется дифференцируемой, если ее полное приращение представимо в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + o(\rho)$$

где  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$ .

Свойства дифференциала:

- 1)  $d(f + g) = df + dg$ ;
- 2)  $d(fg) = gdf + f dg$ ;
- 3)  $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - f dg}{g^2}$ ;

Понятие дифференциала может быть использовано для численных расчетов.

**Пример 1.17.** Пусть требуется приближенно вычислить  $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$ . Для этого введем функцию вида  $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ . Введем точки:  $x_0 = 1, y_0 = 2$ . Напомним,  $x = 1,02, y = 1,97$ . Тогда  $\Delta x = 0,02, \Delta y = -0,03$ . Считаем:

$$\Delta f = f(1,02; 1,97) - f(1, 2) \approx df(1, 2)$$

$$df(1, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \Delta y = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot 0,02 + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot (-0,03) = \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = -0,05$$

Отсюда  $\sqrt{1,02^3 + 1,97^2} \approx 3 + (-0,05) = 2,95$ . Если полученная точность не устраивает, нужно выписывать слагаемые более высокого порядка малости (см. далее формулу Тейлора).

## 1.7 Производные сложных функций

Пусть, для определенности, дана функция от трех переменных, и при этом каждая из этих переменных является функцией от двух переменных:

$$f(x, y, z), \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)).$$

предположим, что существуют непрерывные частные производные  $f'_x, f'_y, f'_z$  и существуют  $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v, \chi'_u, \chi'_v$ .

Зададим приращение аргументов  $\Delta u$ , и зафиксируем  $v$ .

$$\Delta x = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v), \quad \Delta y = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v), \quad \Delta z = \chi(u + \Delta u, v) - \chi(u, v).$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta_u F}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z + o(\rho)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left( f'_x \frac{\Delta x}{\Delta u} + f'_y \frac{\Delta y}{\Delta u} + f'_z \frac{\Delta z}{\Delta u} + \underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\rightarrow 0} \right).$$

Замечание 1.8.  $z = z(x_1, \dots, x_n)$  и

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_n = x_n(y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x}{\partial y_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

где  $y = \overline{1, m}$ .

**Пример 1.18.**  $z = x^2 + y^3$

$$\begin{cases} x = \sqrt{u} - \ln v \\ y = u^2 \cdot v \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = 2x \frac{1}{2\sqrt{u}} + 3y^2 \cdot 2uv = \frac{\sqrt{u} - \ln v}{\sqrt{u}} + 6u^5 v^3$$

Для  $\frac{\partial z}{\partial \eta}$  аналогично.

**Пример 1.19.**  $z = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \ln t \end{cases}$$

Используем дифференциалы, так как если подставить в исходную формулу, функция  $z$  будет зависеть от одной переменной.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x \cdot 2t + 2y \frac{1}{t} = 4t^3 + \frac{2 \ln t}{t}$$

**Теорема 1.16.** *(Лагранжа для многомерных)*

Обозначим  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ .

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — приращение аргументов.

Получили точку  $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ .

Пусть существуют непрерывные частные производные  $f'_x, f'_y, f'_z$  в окрестности точки  $M_0$ . Тогда найдется такое  $\Theta \in (0, 1)$ , что

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

— формула конечных приращений.

*Доказательство.* Рассмотрим значения функции вдоль отрезка  $MM_0$ . Обозначим  $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Тогда

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0) = (\exists \Theta \in (0, 1)) = F'(\Theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

(по одномерной теореме Лагранжа) □

*Замечание 1.9.* (для многомерного случая)

$f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $M_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ,  $M =$  (соответственно предыдущему).  $\Delta f = f(M) - f(M_0) = \sum \dots$

**Предположение 1.1.**  $f(x, y, z) \exists f'_x, f'_y, f'_z$ .

а)  $x, y, z$  — независимые переменные, тогда  $\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$  (\*)

б)  $x, y, z$  зависят от  $u, v$ :

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{и } \exists x'_u, x'_v \text{ и так далее.}$$

Выпишем дифференциал функции

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (**) \end{aligned}$$

Формулы (\*) и (\*\*) имеют одинаковый вид, то есть при вычислении первого дифференциала не важно, имеем мы дело с зависимыми или независимыми переменными. Это называется инвариантностью первого дифференциала.

## 1.8 Производные по направлениям

Пусть  $f(x, y, z)$ ,  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . И пусть  $\exists f'_x, f'_y, f'_z$  в окрестности точки  $M_0$ . И зададим направление в  $M_0$  с помощью направляющих косинусов:  $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  (Сие есть косинусы углов, которые образует задаваемый вектор с осями координат).  $L$  — луч, выходящий из  $M_0$  в направлении  $\vec{e}$ . Запишем его уравнение:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \\ z = z_0 + t \cos \gamma \end{cases}$$

где  $t \geq 0$ .

$M = (x, y, z)$ ,  $\rho$  — расстояние между  $M_0$  и  $M$ . Тогда:

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = \pm t \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = t$$

**Определение 1.29.** Если существует

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial e}|_{M_0}$$

то он называется производной  $f$  в направлении  $l$  в точке  $M_0$ .

Введем функцию  $F(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma)$ . (Функция вдоль луча превращается в функцию от одной переменной).

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'_+(0) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} \cdot \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}|_{M_0} \cdot \cos \gamma \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0}$$

**Определение 1.30.** Вектор вида  $\vec{\nabla} f = \text{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$  — градиент функции.

*Замечание 1.10.*  $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$ , аналогично для единиц на других местах.

Производная по направлению  $l$  характеризует скорость изменения функции в направлении  $l$ .

Поставим следующую задачу: найти такое направление, вдоль которого поверхность возрастает наискорейшим образом.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\nabla f(\vec{M}_0), \vec{l}) = \underbrace{|\nabla f(\vec{M}_0)|}_{\text{не зависит от } l} \cdot \underbrace{|\vec{l}|}_{1} \cos \Theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} \rightarrow \max \Leftrightarrow \Theta = 0 \Rightarrow \vec{e} \uparrow \vec{\nabla} f(M_0).$$

Таким образом, градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции.

**Определение 1.31.**  $-\vec{\nabla} f(M_0)$  — антиградиент, указывает направление наискорейшего убывания функции.

*Замечание 1.11.* В  $\mathbb{R}^n$ :  $M_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{l} = (\cos \alpha_1, \dots, \cos \alpha_n)$ . Тогда  $\frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{e}, \vec{\nabla} f(M_0))$ .

**Пример 1.20.**  $f = x^2 + y^2$  (параболоид). Возьмем  $M_0 = (1, 2)$  на плоскости  $xy$ . С осью  $x$  угол  $30^\circ$ , с осью  $y$  —  $60^\circ$ .

$$\vec{l} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ Тогда градиент: } \vec{\nabla} f(M_0) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}_{M_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ И: } \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 + \sqrt{3}.$$

## 1.9 Производные и дифференциалы старшего порядка

**Определение 1.32.** Пусть задана  $f(x_1, \dots, x_n)$ , определена в  $E \subset \mathbb{R}^n$  и  $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$  в области  $E$ .

Если существует  $\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ , то она называется второй смешанной производной по  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{ij}$ . Аналогично можно ввести понятие старших производных (третьего порядка и выше), и если у нас функция от  $n$  переменных, то у нее может существовать  $n^k$  производных  $k$ -ого порядка.

**Пример 1.21.**  $f(x, y) = x^2 y^3$ .

Первого порядка:  $f'_x = 2xy^3$ ,  $f'_y = 3y^2 x^2$ .

Второго порядка:  $f''_{x^2} = 2y^3$ ,  $f''_{xy} = 6xy^2$ ,  $f''_{yx} = 6xy^2$ ,  $f''_{y^2} = 6x^2 y$ .

**Теорема 1.17.** (о равенстве смешанных производных)

Пусть  $f(x, y)$  определена в точке  $M_0 = (x_0, y_0)$  и в окрестности этой точки существуют непрерывные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  и они равны.

*Доказательство.* Зададим некоторые приращения аргументов  $h, k = \text{const} \neq 0$ . Зададим функцию

$$W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$$

Несложно заметить, что

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

По теореме Лагранжа (одномерной)  $\exists c_1 \in (x_0, x_0 + h)$  (или  $(x_0 + h, x_0)$ , в дальнейшем этот вариант опущен):

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k}$$

Теперь вновь по теореме Лагранжа  $\exists c_2 \in (y_0, y_0 + k)$ :

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k} = f''_{xy}(c_1, c_2)$$

Теперь сделаем это в другом порядке:

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$$

Откуда

$$W = \frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k}$$

По той же самой теореме Лагранжа:

$$W = \frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k} = \psi'(c_3) = \frac{f'(x_0 + h, c_3) - f(x_0, c_3)}{h} = f''_{yx}(c_4, c_3)$$

Заметим, что  $W$  — число. Поэтому  $f''_{xy}(c_1, c_2) = W = f''_{yx}(c_4, c_3)$ . При этом  $c_1, c_2 \in (x_0, x_0 + h)$ ,  $c_3, c_4 \in (y_0, y_0 + k)$ . Так как  $h, k \rightarrow 0$ , то эти точки стремятся друг к другу. Тогда, с учетом непрерывности этих производных,  $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$ .  $\square$

*Замечание 1.12.* Пусть задана  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Пусть у нее существуют непрерывные частные производные до  $k$ -ого порядка включительно. Тогда при вычислении этих производных важно, сколько раз мы дифференцируем по каждой из переменных, но не важно, в каком порядке.

**Пример 1.22.**  $f(x, y, z) = x^2 e^{yz^3}$

$$f'_x = 2x e^{yz^3}$$

$$f''_{xy} = 2x z^3 e^{yz^3}$$

$$f''_{xyx} = 2z^3 e^{yz^3} = f''_{x^2y} = f''_{yx^2}.$$

Введем понятие дифференциала старшего порядка:

**Определение 1.33.**  $f(x, y)$ ,  $\exists$  непрерывные частные производные по  $x, y$ . Следовательно, существует первый дифференциал:  $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ . Предположим, что  $dx, dy$  зафиксированы. Тогда  $df$  зависит только от  $x, y$ . Тогда, если существует  $d(df) = d^2f$  — второй дифференциал. Аналогично, если существует  $d(d^k f) = d^{k+1}f$ .

**Предложение 1.2.** Пусть  $f(x, y)$  — функция и существуют дифференциалы до второго порядка. Тогда:

$$\begin{aligned} d^2f(x, y) &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \end{aligned}$$

( $dx, dy$  — константы).

Предположим, что существуют непрерывные частные производные до 3 порядка и вычислим формулу дифференциала третьего порядка:

$$\begin{aligned} d^3f(x, y) &= d(d^2f) = d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\dots)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\dots)dy = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 \end{aligned}$$

По индукции:

$$d^k f(x, y) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial^{k-i} y} dx^i dy^{k-i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f$$

Аналогично можно доказать, что если у  $f(x_1, \dots, x_n)$  существуют непрерывные (для приведения подобных слагаемых) частные производные до  $k$  порядка, то

$$d^k f = d(d^{k-1}f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f$$

**Замечание 1.13.** Если  $M_0 \in \mathbb{R}^n$ , то  $d^k f(M_0)$  — однородная форма относительно  $dx_1, \dots, dx_n$ .

**Замечание 1.14.** Можно доказать, что дифференциалы старшего порядка свойством инвариантности формы не обладают.

**Предложение 1.3.** (формула Тейлора для многомерного случая)

Пусть дана  $f(x, y)$ ,  $M_0 = (x_0, y_0)$  и в некоторой окрестности  $M_0$  существуют непрерывные частные производные до  $k$ -ого порядка. Пусть  $M = (x, y)$  — некоторая точка из этой окрестности. Выпишем уравнение отрезка  $L$  соединяющего точки  $M$  и  $M_0$ . Уравнение отрезка будет иметь вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x \\ y = y_0 + t\Delta y \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Обозначим за  $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$ . Разложим  $F$  по известной формуле Тейлора в  $t = 0$  и подставим ее значения:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}t^{k-1} + R_k$$

где  $R_k = \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!}t^k$ ,  $\Theta \in (0, 1)$ .

Подставим вместо нуля другое значение:

$$F(1) = F(0) + \dots + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!}$$

Теперь распишем:  $F(1) = f(M)$ ,  $F(0) = f(M_0)$ .

Вычислим:  $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cdot \Delta y = df(M_0)$ .

Нетрудно показать, что  $F_{(0)}^i = d^i f(M_0)$ .

Распишем

$$R_k = \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(\widetilde{M})$$

где  $\widetilde{M} = (x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y)$ .

Теперь запишем полученную формулу Тейлора:

$$t = 1 \Rightarrow f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + \dots + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(M_0) + R_k$$

**Замечание 1.15.** Аналогичный вид формула Тейлора будет иметь и в  $n$ -мерном случае:

$M = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $M_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ . Формула Тейлора та же:

$$t = 1 \Rightarrow f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + \dots + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(M_0) + R_k$$

Где

$$R_k = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^k f(\widetilde{M})$$

где  $\widetilde{M} = (x_1^{(0)} + \Theta \Delta x_1, \dots, x_n + \Theta \Delta x_n)$ .

**Пример 1.23.**  $f(x, y) = \sin(x - y)$ .  $M_0(0, 0)$ .

$f(M_0) = 0$ .

$df(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \Delta y = (*)$

$\Delta x = x - 0 = x$ ,  $\Delta y = y - 0 = y$ .

$f'_x = \cos(x - y)$ ,  $f'_y = -\cos(x - y)$ .

$(*) = x - y$ .

Для второго дифференциала:

$f''_{x^2} = -\sin(x - y)$

$f''_{xy} = \sin(x - y)$

$f''_{y^2} = -\sin(x - y)$

$d^2f(M_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\Delta y^2 = 0$

Третий:

$f'''_{x^3} = -\cos(x - y)$

$f'''_{x^2y} = \cos(x - y)$

$$f'''_{xy^2} = -\cos(x-y)$$

$$f'''_{y^3} = \cos(x-y)$$

$$d^3 f(M_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M_0) \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(M_0) \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(M_0) \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(M_0) \Delta y^3 = -x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 = -(x-y)^3$$

Тогда формула примет вид:

$$f(x, y) = \sin(x-y) = (x-y) - \frac{1}{3!}(x-y)^3 + \frac{1}{5!}(x-y)^5 - \dots$$

Похоже на  $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

То есть можно было заменить  $z = x - y$ , НО ДЕЛАТЬ ЭТО МОЖНО ЛИШЬ В СЛУЧАЕ, КОГДА  $x, y, z$  В РАЙОНЕ НУЛЯ.

## 1.10 Экстремумы функций нескольких переменных

Пусть задана функция  $f(x)$  в  $E \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.34.** Точка  $a \in E$  — точка локального минимума, если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ . Если знак неравенства выполняется в другую сторону, то это точка локального максимума. Эти точки называются локальными экстремумами. Если неравенство строгое, то это собственный экстремум.

Наибольшее и наименьшее значение  $f$  в области  $E$ , если таковые существуют, называются глобальными экстремумами.

Глобальные экстремумы могут достигаться либо в точках локального экстремума внутри области, либо на границе этой области.

Сформулируем сначала необходимое и достаточное условие локального экстремума:

**Теорема 1.18.** (необходимое условие локального экстремума)

Пусть  $a$  — внутренняя точка  $E$  и она — точка локального экстремума. И в этой точке существуют первые частные производные  $f'_1, \dots, f'_n$  в некоторой окрестности этой точки. Тогда  $f'_i(a) = 0, i = \overline{1, n}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $F(x_1) = f(x_1, a_2, \dots, a_n)$  (то есть зафиксированы все переменные, кроме первой). Если  $a$  — точка локального экстремума  $f$ , то  $a_1$  — точка локального экстремума функции  $F$ . Тогда по теореме Ферма  $F'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$ . Аналогично доказывается, что и остальные частные производные в точке  $a$  равны нулю.  $\square$

**Замечание 1.16.** Если все частные производные в  $a$  равны нулю, то  $a$  называется стационарной точкой функции  $f$ . Это условие эквивалентно тому, что  $df(a) = 0$  или  $\vec{\nabla} f(a) = 0$ . Данное условие представляет собой только необходимое условие экстремума, но не достаточное. Допустим,  $f = x_1^3 + x_2^3$  точка  $(0, 0)$  является точкой перегиба, но не экстремума. Необходимое условие экстремума помогает найти точки, подозрительные на экстремум, а чтобы убедиться, что это так, нужны достаточные условия.

**Предложение 1.4.** (достаточное условие локального экстремума)

Пусть  $f(x)$  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть  $a \in E$ , внутренняя и стационарная. Разложим функцию  $f(x)$  по Тейлору до слагаемых первого порядка малости:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{df(a)}_{=0} + R_2$$



где  $R_2$  — остаточный член. Равенство нулю по необходимому условию экстремума.

$\Delta f = f(x) - f(a) = R_2$ . Для того, чтобы точка  $a$  была точкой локального минимума, достаточно, чтобы  $\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow R_2 \geq 0$ . Аналогично для точки максимума:  $R_2 \leq 0$ . Задача свелась к определению знака  $R_2$ . Оценим:

$$R_2 = \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 f(M) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M) dx_i dx_j$$

где  $dx_i = x_i - a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .  $M \in (a, x)$ . Здесь получили нечто похожее на квадратичную форму, прочтите замечание ниже.

(читаем замечание)

Вернемся к нашим баранам. Запишем

$$R_2 = \frac{1}{2!} dx^T S(M) dx$$

$$\text{где } S = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \quad dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

По теореме о равенстве симметричных производных  $S$  симметрична.

Замечание 1.17. (о квадратичных формах)

Функция вида

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_i z_j = z^T A z$$

где  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ ,  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  — симметричная матрица.

Квадратичная форма называется положительно определенной, если  $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(z) > 0$ . Аналогично отрицательно определенной, если  $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(z) < 0$ .

$f(z)$  — знакопостоянная неотрицательная форма, если:  $\forall z \Rightarrow f(z) \geq 0$ .

Аналогично знакопостоянная неположительная форма, если:  $\forall z \Rightarrow f(z) \leq 0$ .

Квадратичная форма называется знакопеременной, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения:  $\exists z_1, z_2 : f(z_1) < 0, f(z_2) > 0$ .

Теорема: (Критерий Сильвестра) (это всё еще замечание)

1) Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы  $A$  были положительны.

2) Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы  $A$  чередовали знак, начиная с минуса.

**Теорема 1.19.** (достаточное условие локального экстремума)

Пусть  $a$  — внутренняя точка  $E$  и она стационарная. И пусть  $\exists$  непрерывные частные производные до 2 порядка включительно в окрестности точки  $a$ .

Тогда:

1) Если  $S(a)$  положительно определена, то  $a$  — точка локального минимума.

2) Если  $S(a)$  отрицательно определена, то  $a$  — точка локального максимума.

3) Если  $S(a)$  является знакопеременной, то  $a$  — не точка локального экстремума.

4) Если  $S(a)$  — знакопостоянная, но не знакоопределенная, то информации недостаточно.

*Доказательство.*

1) Предположим,  $S(a)$  положительно определена. Из непрерывности вторых частных производных следует, что  $\exists \delta > 0 : \forall M \in U_\delta(a) \Rightarrow S(M)$  — положительно определена. Тогда  $R_2 > 0$ , откуда  $a$  — точка локального минимума

2) Для отрицательной определенности все аналогично.

3) Если  $S(a)$  знакопеременная, то  $\forall \delta > 0 \exists M_1, M_2 \in U_\delta(a)$ , такие, что  $R_2(M_1) > 0$ ,  $R_2(M_2) < 0$ .

4) Приведем пример, являющийся контрпримером к обратному утверждению:  $f_1(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ .  $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$ .  $(0, 0)$  — стационарная точка обеих функций.

$$S(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— знакопостоянная.  $(0, 0)$  — точка локального минимума  $f$ , но не является точкой локального экстремума.  $\square$

*Замечание 1.18.* Если  $S(a)$  знакопостоянная, но не знакоопределенная, то тогда для исследования точки  $a$  нужно задействовать производные и дифференциалы старшего порядка.

По Тейлору:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{=0} + \frac{1}{2}d^2f(a) + \frac{1}{3!}d^3f(a) + \dots$$

Исследовать знак старшего дифференциала нужно лишь там, где обнуляются дифференциалы младшего порядка.

Если теперь требуется найти глобальный экстремум, то кроме поиска локальных экстремумов внутри области  $E$ , нужно исследовать поведение этой функции и на ее границе.

Обозначим  $\hat{E}$  границу  $E$ . Задача поиска экстремума на границе называется задачей поиска условного экстремума. Заметим, что размерность  $\hat{E}$  равна размерности  $E - 1$ .

**Пример 1.24.** Пусть  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ . Требуется найти экстремум в области  $E : x^2 + y^2 \leq 9$ .

Найдем точки локального экстремума в области  $E$ .

Необходимость:

$f'_x = 2(x - 1) = 0$ ,  $f'_y = 2(y - 2) = 0 \Rightarrow (1, 2)$  — стационарная точка ( $(1, 2) \in E$ ), подозрительная на экстремум точка. Вычислим вторые производные, чтобы проверить, является ли точка экстремумом и каким:

$f''_{xx} = 2$ ,  $f''_{xy} = 0$ ,  $f''_{yy} = 2$ . Тогда матрица вторых производных примет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$S$  положительно определена (миноры очевидно положительны). Следовательно, точка  $(1, 2)$  является точкой локального минимума.

Теперь проверим, что у нас на границе. А на границе тучи ходят хмуро и описывают окружность:  $\hat{E} : x^2 + y^2 = 9$ . Ищем условный экстремум  $\hat{E}$ . Выразим одну переменную через другую (первый метод поиска):

$y = \pm\sqrt{9-x^2}$ . Уравнение эллипса теперь является функцией одной переменной. Введем  $F(x) = f(x, \pm\sqrt{9-x^2})$ . Поиск экстремума сводится к поиску экстремума для функции одной переменной на отрезке  $x \in [-3, 3]$ .

**Пример 1.25.**  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ .  $E : \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ .

Начнем с локальных экстремумов:

Необходимое условие:  $f'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0$   $f'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0$ . Точки, подозрительные на экстремум:

$$x - \frac{20}{\frac{50^2}{x^4}} = 0 \Leftrightarrow x(1 - \frac{x^3}{125}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{не интересует} \\ x = 5 \end{cases}. y = 2.$$

Точка, подозрительная на экстремум:  $(5, 2)$ .

Найдем вторые производные:

$$f''_{x^2} = \frac{100}{x^3}, f''_{y^2} = \frac{40}{y^3}, f''_{xy} = 1.$$

$$S(5, 2) = \begin{pmatrix} 4/5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Минимальное значение функции достигается в  $f(5, 2) = 30$ .

$$\sup_E f(x) = +\infty.$$

## 1.11 Численные методы поиска безусловного экстремума