1 Дифференциальное исчисление. Функции нескольких переменных

1.1 Метрические пространства

Пусть имеется пространство неких элементов X.

Определение 1.1. Пространство X называется метрическим, если $\forall x, y \in X$, $\exists$ вещественное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее аксиомам:
1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$
$\forall x, y, z \in X$.

Тогда величина $\rho(x, y)$ можно назвать метрикой или расстоянием между элементами.

Пример 1.1. $X = \mathbb{R}$. Здесь $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пример 1.2. $X = C[a, b]$ — непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$.
$\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$, где $x \in [a, b]$.
$\rho_2(f(x), g(x)) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$.
и так далее.

Если $\rho_1(f(x), g(x))$ мало, то $\rho_2(f(x), g(x))$ — мало. Обратное вообще говоря неверно.

Определение 1.2. $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \ \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — эпсилон-окрестность x; шар с центром в x и радиусом ε.

Пример 1.3. $X = \mathbb{R}$ $\rho(x, y) = |x - y|$. $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Пример 1.4. $X = C([a, b])$, $\rho_1(f(x), g(x)) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Отступаем ε от каждого $f(x)$ вверх и вниз. Любая функция, лежащая в получившемся участке пространства, принадлежит эпсилон-окрестности функции.

Определение 1.3. Далее элементы пространства будем называть точками.

Определение 1.4. $x \in X$ — внутренняя точка X, если $\exists \varepsilon > 0 : \ V_\varepsilon(x) \subset X$.

Определение 1.5. Множество X открыто, если все его точки внутренние. (Привет, топология. Я скучал).

Пример 1.5. $x^2 + y^2 < 1$.

Определение 1.6. x — предельная точка X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in X \ (y \neq x) : \ y \in V_\varepsilon(x)$.

Замечание 1.1. Предельная точка может как входить во множество, так и не входить.

Определение 1.7. X замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 1.6. $x^2 + y^2 < 1$ не замкнуто. А вот $x^2 + y^2 \leq 1$ замкнуто.

Определение 1.8. Замыкание множества — процедура присоединения к множеству всех его предельных точек.

Пример 1.7. $\mathbb{Q}$ не открыто и не замкнуто.

Определение 1.9. $\overline{\mathbb{Q}}$ — замыкание.

Пример 1.8. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Определение 1.10. $x \in X$ — изолированная точка X, если $\exists \varepsilon > 0 : \nexists y \in X : \; y \neq x, \; y \in V_\varepsilon(x)$.

Определение 1.11. $x \in X$ — граничная точка X, если $\forall \varepsilon > 0, \; \exists y_1 \in X, \; \exists y_2 \notin X : y_1, y_2 \in V_\varepsilon(x)$. При этом граничная точка может как принадлежать множеству, так и не принадлежать.

1.2 Пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 1.12. Под пространством $\mathbb{R}^n$ будем понимать множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел. (Пространство n-мерных векторов).

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ метрику:
1) Сферическая (евклидова) метрика:
Если $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, то

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_1)^2}$$

Докажем неравенство треугольника (неотрицательность и симметричность очевидны):

Доказательство. $\forall a_i, b_i, \; i = 1, ..., n.$ $\forall t \; \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2 \geq 0$. Раскроем скобки:

$$\underbrace{t^2 \sum a_i^2}_{A} + \underbrace{2t \sum a_i b_i}_{B} + \underbrace{\sum b_i^2}_{C} \geq 0$$

. Чтобы это неравенство выполнялось, должно выполняться $B^2 - AC \leq 0$. Отсюда $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$. Извлечем корень: $|\sum a_i b_i| \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$. Умножим на 2 и прибавим ... : $\sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum a_i b_i \leq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$. Вынесем полные квадраты: $\sum(a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2$. Извлекаем корень, получаем $\sqrt{\sum(a_i + b_i)^2} \leq \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)$ (*).

В неравенстве (*) $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$, $i = \overline{1, n}$, где $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Отсюда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_1)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2}$$

□

Пример 1.9. $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \; \rho(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \; \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2\}$ — эпсилон-окрестность, шар.

2) Параллелепипедальная метрика:
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \; \rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$.
Аксиомы очевидны.

Пример 1.10. $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x,y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |x_i - y_i| < \varepsilon, \ i = \overline{1,n}\}$.

Лемма 1.1. $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varepsilon_1 > 0$:
1) $V^{(1)}_{\varepsilon_1}(x) < V^{(2)}_{\varepsilon}(x)$
2) $V^{(2)}_{\varepsilon_1}(x) < V^{(1)}_{\varepsilon}(x)$
где $V^{(1)}$ — сферическая окрестность, а $V^{(2)}$ — параллелепипедальная.

Доказательство. Очевидно. □

Из леммы вытекает, что сферическая и параллелепипедальная метрики эквивалентны в плане близости.

Поэтому далее можно использовать любую из этих метрик и теоремы, доказанные в одной метрике, верны и для другой.

Далее, если не оговорено противное, под расстоянием в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем понимать сферическую метрику.

В различных задачах могут быть использованы и другие метрики пространства $\mathbb{R}^n$.

1.3 Последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$

Пусть $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ — последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.13. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Точка a называется пределом последовательности $\{x^{(k)}\}$ при $k \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0, \ \forall k > N \Rightarrow \rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon$. Запись: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$.

Теорема 1.1. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$. *Тогда* $a = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} \Leftrightarrow a_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, *где* $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Leftrightarrow \rho(x^{(k)}, a) \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow \max_{i=\overline{1,n}} \left| x_i^{(k)} - a_i \right| \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$ (по лемме из прошлого параграфа). □

Замечание 1.2. Последовательность $\{x_i^{(k)}\}$ — одномерные числовые последовательности. В результате по теореме исследование многомерного предела сводится к исследованию одномерных пределов и теоремы, доказанные для одномерного случая в той или иной степени переносятся на многомерный случай.

Теорема 1.2. *(Коши)*
$\exists$ *конечный* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall k \geq N \ \forall p > 0 \Rightarrow \rho(x^{(k+p)}, x^{(k)}) < \varepsilon$.

Определение 1.14. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$, если $\exists M > 0 : \ \rho(x^{(k)}, \phi) \leq M \ \forall k = 1, 2, ...$, где ϕ обычно является началом координат.

Теорема 1.3. *(Больцано-Вейерштрасса для многомерного случая) Если последовательность ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(k)}\}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$. Распишем: $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$. Если ограничены вектора, то следует, что последовательность первых координат $\{x_1^{(k)}\}$ ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса для одномерного случая из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\exists\{x_1^{(m_k)}\}$. Теперь возьмем эту последовательность для всех векторов (рассматриваем многомерную подпоследовательность): $x^{(m_k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m_k)} \\ ... \\ x_n^{(m_k)} \end{pmatrix}$. Рассмотрим последовательность вторых координат $\{x_2^{(m_k)}\}$. Она ограничена, а значит, существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_2^{(p_{m_k})}\}$. Теперь рассматриваем $x^{(p_{m_k})} = \begin{pmatrix} x_1^{(p_{m_k})} \\ ... \\ x_n^{(p_{m_k})} \end{pmatrix}$. Полученная последовательность векторов сходится по первым двум координатам. По индукции распространяем правило на оставшиеся координаты. □

1.4 Функции нескольких переменных.

Определение 1.15. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. И пусть $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in E$ $\exists$ некоторое вещественное число, которое будем обозначать $f(x)$ или $f(x_1, ..., x_n)$. Тогда говорят, что на множестве E задана функция от нескольких переменных.

Обозначения: Если будем доказывать теоремы для n-мерного случая, то будем обозначать несколько переменных как $f(x_1, ...x_n)$. В трехмерном/двухмерном будем писать $f(x, y, z)/f(x, y)$.

Определение 1.16. E — область определения функции.

Определение 1.17. Диаметр области $diamE = \sup_{x^{(1)}, x^{(2)} \in E} \rho(x^{(1)}, x^{(2)})$. Если $diamE$ конечен, то область E ограничена.

Определение 1.18. Область E — связная, если любые две точки из этой области можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этой области.

Пример 1.11. $f(x, y) = \ln xy$. Область определения $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy > 0\}$. E — неограничена, несвязна.

Замечание 1.3. Функция от двух переменных задает поверхность в трехмерном пространстве.

В общем случае получаем n-мерную поверхность в $n + 1$-мерном пространстве.

Определение 1.19. (предел функции по Гейне)

Пусть $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$, a — предельная точка E. Если $\forall\{x^{(k)}\} \in E$ верно, что $\rho(x^{(k)}, a) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow |f(x^{(k)}) - g| \to_{k\to\infty} 0$, то $g = \lim_{x\to a} f(x)$.

Предложение 1.1. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. *Зафиксируем все координаты кроме* x_1.

Предположим $\exists \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, ..., x_n) = f^{(1)}(x_2, ..., x_n)$. *Проведем эту операцию для оставшихся координат. В результате приходим к так называемому повторному пределу:*

$$\lim_{x_n \to a_n} ... \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, ..., x_n)$$

Если перебирать аргументы $x_1, ..., x_n$ *в другом порядке, то получим другой повторный предел. Всего получится* $n!$ *повторных пределов. Если существуют оба предела (повторный и Гейне), то они равны. Может оказаться, что какой-то повторный предел существует, а многомерного предела нет. И наоборот.*

Пример 1.12. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$. $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Здесь $\lim_{x \to 0, y \to 0} f(x, y) = 0$. То есть многомерный предел существует и равен нулю, так как $0 \le |f(x, y)| \le |x| + |y|$. Вычислим повторный предел: $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)$. Внутреннего предела не существует. Если поменять пределы местами, то тоже ничего хорошего не получится.

Пример 1.13. Все то же самое, только $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y$. Опять-таки многомерный предел есть. Повторный предел $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim_{y \to 0} y = 0$. А вот наоборот не выйдет по той же причине, по которой мы не смогли вывести в предыдущем примере.

Пример 1.14. Опять-таки все то же самое, но $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Повторные пределы существуют и $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0$; $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$. Покажем, что многомерного предела не существует. Будем стремиться к нулю по лучам. То есть $y = px$, $p = const$. Вычисляем: $\lim_{x \to 0} f(x, px) = \lim_{x \to 0} \frac{px^2}{x^2 + p^2 x^2} = \frac{p}{1 + p^2}$. То есть для каждого луча значение предела свое. Тогда по Гейне получается, что предела нет.

Пример 1.15. Все то же самое, но $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Попытаемся идти вдоль лучей. $\lim_{x \to 0} f(x, px) = \lim_{x \to 0} \frac{px^3}{x^4 + p^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{px}{x^2 + p^2} = 0 \ \forall p$. То есть вдоль любого луча получаем ноль. Но не факт, что предел существует, так как мы не обязаны идти по лучам. Пойдем по параболам: $y = px^2$. Тогда $\lim_{x \to 0} f(x, px^2) = \frac{p}{1 + p^2}$. Опять зависимость от p. Значит, этот предел не существует.

Замечание 1.4. Таким образом определение предела по Гейне отлично подходит для того, чтобы доказать, что предела нет.

Определение 1.20. (предел по Коши)

$f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$. g — предел $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \forall x \in E$: $\rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$.

Замечание 1.5. Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

Теорема 1.4. *(Критерий сходимости Коши)*

Чтобы $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$, *такое, что* $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E : \ x^{(1)}, x^{(2)} \in U_\delta(a) \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$. *Доказательство аналогично одномерному случаю.*

Теорема 1.5. *(арифметические свойства)*

Пусть $\exists \lim_{x \to a} f(x) = g$ *и* $\exists \lim_{x \to a} h(x) = l$. *Тогда* $\exists \lim_{x \to a} (f(x) + h(x)) = g + l$, *аналогично с произведением и частным.*

Определение 1.21. Пусть $y = f(x) : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. А $z = g(y) : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Здесь $y_k = f_k(x_1, ..., x_n)$, где $k = \overline{1, n}$; $z = g(y_1, ..., y_m)$ Тогда $z = g(f(x)) : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — суперпозиция функций f, g.

Теорема 1.6. *Пусть* $\exists \lim_{x \to a} f(x) = b$ *и при этом* $\exists \lim_{y \to b} = l$. *Тогда* $\exists \lim_{y \to b} g(f(x)) = l$.

1.5 Непрерывные функции

Определение 1.22. $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in E$. $f(x)$ непрерывна в точке a, если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Теорема 1.7. *(арифметические свойства)*

f, g — непрерывны в a. Тогда непрерывны сумма, произведение и отношение (если $g(a)$ не равно нулю).

Теорема 1.8. *$y = f(x): \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и она непрерывна в a. Пусть $z = g(y): \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ и она тоже непрерывна в $f(a)$. Тогда их суперпозиция будет непрерывна в точке a.*

Определение 1.23. Если функция непрерывна в каждой точке $E \subset \mathbb{R}^n$, то она называется непрерывной на множестве E.

Теорема 1.9. *(Больцано-Коши о нуле функции)*

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$ и множество E связно. И пусть $\exists a, b \in E: \ f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in E$, такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство. По условию E — связное, следовательно, $\exists$ непрерывная кривая L, которая:

1) L соединяет точки a, b;

$$2)\ L: \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ ... \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

$t \in [\alpha, \beta], \ x_1(t), ..., x_n(t)$ определены на $[\alpha, \beta]$, при этом $x(\alpha) = a, \ x(\beta) = b$.

Введем функцию $F(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t))$. По теореме о непрерывности суперпозиции $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, причем $F(\alpha) = a, \ F(\beta) = b$. По одномерной теореме Коши-Больцано $\exists j \in [\alpha, \beta]: \ F(j) = 0; \ c = \lambda(j) \subset E \ f(c) = F(j) = 0$. ☐

Теорема 1.10. *(Коши-Больцано о промежуточном значении)*

$f(x)$ определена и непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$, E связно. $\exists a, b \in E: \ f(a) = A, \ f(b) = B$ и $A < B$. Тогда $\forall C: \ A < C < B: \ \exists c \in E: \ f(c) = C$.

Доказательство. Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция по-прежнему непрерывна. Тогда $\varphi(a) = f(a) - C < 0$, и $\varphi(b) = f(b) - C > 0$. Сведено к предыдущей теореме. Тогда $\exists c \in E: \ \varphi(c) = 0$. $\varphi(c) = f(c) - C$, теорема доказана. ☐

Теорема 1.11. *(первая Вейерштрасса)*

Пусть $f(x)$ непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$ и E замкнута и ограничена. Тогда $f(x)$ будет ограничена в области E и достигает там своего максимума и минимума.

Доказательство.

1) Покажем, что функция является ограниченной:

От противного. Пусть это не так:$f(x)$ не ограничена E. Тогда $\{x^{(n)}\} \in E$. E ограничена $\Rightarrow \{x^{(k)}\}$ — ограничена. А раз она ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\} \Rightarrow \exists x^*: \ x^{(m_k)} \to x^*$, из определения непрерывности по Гейне следует, что $f(x^{(m_k)}) \to_{k\to\infty} f(x^*)$. С другой стороны, из $(*)$ следует, что подпоследовательность уходит на бесконечность. Противоречие.

2) Покажем, что $f(x)$ достигает максимума (для минимума доказательство аналогично).

Обозначим $M = \sup_E f(x)$. Функция ограничена, значит, супремум конечен. От противного. Предположим, что $f(x) < M,\ \forall x \in E$. Рассмотрим $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$. Знаменатель не обращается в ноль, значит, она непрерывна на E. По уже доказанной первой части $g(x)$ ограничена на E. То есть $g(x) \leq L$. Подставим значение $g(x):\ \frac{1}{M-f(x)} \leq L\ \forall x \in E \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{L}$. Получаем противоречие с определением супремума. □

Определение 1.24. (равномерная непрерывность)

$f(x)$ равномерно непрерывна на $E \in \mathbb{R}^n$ если $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$, таких, что $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$.

Теорема 1.12. *(Кантора)*

$f(x)$ непрерывна на $E \in \mathbb{R}^n$. E замкнуто и ограничено. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна.

Доказательство. От противного. Положим, функция непрерывна, но не равномерно непрерывна на E. Тогда $\exists \varepsilon > 0:\ \forall \delta > 0:\ \exists x^{(1)}, x^{(2)} \in E:\ \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| \geq \varepsilon$. Возьмем $\delta_k = \frac{1}{k},\ k = 1, 2, ... \Rightarrow \exists x^{(1k)}, x^{(2k)} \in E:\ \rho(x^{(1k)}, x^{(2k)}) < \frac{1}{k},\ |f(x^{(1k)}) - f(x^{(2k)})| \geq \varepsilon$. $\{x^{(1k)}\} \in E$ — ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(1m_k)}\} \to_{k\to\infty} x^*$. E замкнуто, следовательно, $x^* \in E$.

Рассмотрим те же номера для второй последовательности: $\{x^{(2m_k)}\}$. $0 \leq \rho(x^{(2m_k)}, x^*) \leq \underbrace{\rho(x^{(2m_k)}, x^{(1m_k)})}_{<\frac{1}{m_k}\to 0} + \underbrace{\rho(x^{(1m_k)}, x^*)}_{\to 0} \to 0$.

$f(x)$ непрерывна в точке x^*, тогда, по Гейне, $f(x^{(1m_k)}) \to f(x^*)$ и $f(x^{(2m_k)}) \to f(x^*)$. Следовательно, $|f(x^{(1m_k)}) - f(x^{(2mk)})| \to 0$. Противоречие с предположением. □

1.6 Дифференцируемость функций нескольких переменных

$E \subset \mathbb{R}^3$. $f(x, y, z)$ определена на E. $\forall M = (x, y, z) \in E$.

Будем считать y, z фиксированными, а x зададим приращение Δx. То есть мы сдвинемся вдоль оси x. Посмотрим, как изменятся значения функции:

$\Delta_x f = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$ — частичное приращение f по x.

Определение 1.25. Если существует

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

, то он называется частной производной. Аналогично можно ввести определения частной производной для остальных координат:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta_z f}{\Delta z}$$

При вычислении частной производной все переменные, кроме одной, фиксируются, то есть нахождение частных производных сводится к одномерному дифференцированию.

Пример 1.16. $f(x, y, z) = xe^{yz^2}$.

$f'_x = e^{yz^2}$, $f'_y = x^{yz^2} \cdot z^2$, $f'_z = xe^{yz^2} \cdot 2yz$.

Определение 1.26. Зададим приращение сразу всем трем переменным.

$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$. Такая величина называется полным приращением функции точки M.

Определение 1.27. $f(x,y,z)$ называется дифференцируемой в точке M, если ее полное приращение может быть представлено в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$, где A, B, C — константы, а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Теорема 1.13. *(необходимое условие дифференцируемости)*

Для того, чтобы $f(x,y,z)$ была дифференциреумой в точке, необходимо, чтобы в этой точке существовали ее частные производные. (условие не является достаточным!)

Доказательство. $f(x,y,z)$ — дифференцируема, отсюда существует $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$. Пусть $\Delta x \neq 0,\ \Delta y = \Delta z = 0$. То есть полное приращение равно частному по x. Отсюда $\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. При $x \to 0\ \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A$. Аналогично доказываются остальные координаты.

Из доказанной теоремы следует, что если функция дифференцируема, то ее производная представима в виде $\Delta f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z$. □

Теорема 1.14. *(достаточное условие дифференцируемости)*

Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке, достаточно, чтобы существовали непрерывные частные производные ($\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}$).

Доказательство. Пусть существуют непрерывные $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}$. Рассматриваем полное приращение функции в точке:

$$\begin{aligned}\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) = \\ [f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)] + \\ [f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z+\Delta z)] + [f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)] = * = \\ = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\Theta_1\Delta x_1, y+\Delta y, z+\Delta z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Theta_2\Delta y, z+\Delta z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z+\Theta_3\Delta z)\Delta z = \\ = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) + \gamma\right)\Delta z\end{aligned}$$

*по одномерной теореме Лагранжа ($\exists \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in (0,1)$)

где: $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Theta_2\Delta y, z+\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$, $\gamma = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z+\Theta_3\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

В силу непрерывности частных производных $\alpha, \beta, \gamma \longrightarrow_{\Delta x, \Delta y \Delta z \to 0} 0$, откуда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Delta z + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z)$$

Мы представили приращение в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$, что по определению дает дифференцируемость функции. □

Замечание 1.6. Непрерывность частных производных — достаточное условие дифференцируемости, но не необходимое.

Теорема 1.15. *Если $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке (x,y,z), то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если f дифференцируема, то ее приращение имеет вид $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho)$. Если приращения аргументов стремятся к нулю, то и приращение функции будет стремиться к нулю. Следовательно, f непрерывна. ☐

Определение 1.28. Линейная часть полного приращения функции называется первым дифференциалом.

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z}_{=df} + o(\rho)$$

Отсюда формула первого дифференциала

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Замечание 1.7. Аналогичное определение можно ввести для функции от n переменных: $f(x_1, ..., x_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\Delta x_i f}{\Delta x_i} = \lim_{x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i - \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

f называется дифференцируемой, если ее полное приращение представимо в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_i + o(\rho)$$

где $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$.

Свойства дифференциала:
1) $d(f + g) = df + dg$;
2) $d(fg) = gdf + fdg$;
3) $d(\frac{f}{g}) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$;
Понятие дифференциала может быть использовано для численных расчетов.

Пример 1.17. Пусть требуется приближенно вычислить $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$. Для этого введем функцию вида $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Введем точки: $x_0 = 1, y_0 = 2$. Напомним, $x = 1,02,\ y = 1,97$. Тогда $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0.03$. Считаем:

$$\Delta f = f(1,02; 1,97) - f(1,2) \approx df(1,2)$$

$$df(1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\Delta y = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot 0,02 + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot (-0,03) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = -0,05$$

Отсюда $\sqrt{1,02^3 + 1,97^2} \approx 3 + (-0,05) = 2,95$. Если полученная точность не устраивает, нужно выписывать слагаемые более высокого порядка малости (см. далее формулу Тейлора).

1.7 Производные сложных функций

Пусть, для определенности, дана функция от трех переменных, и при этом каждая из этих переменных является функцией от двух переменных:

$$f(x,y,z),\ \begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\chi(u,v) \end{cases}$$

$F(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))$.

предположим, что существуют непрерывные частные производные $f'_x,\ f'_y,\ f'_z$ и существуют $\varphi'_u\varphi'_v,\psi'_u,\psi'_v,\chi'_u,\chi'_v$.

Зададим приращение аргументов Δu, и зафиксируем v.

$\Delta x=\varphi(u+\Delta u,v)-\varphi(u,v),\ \Delta y=\psi(u+\Delta u,v)-\psi(u,v),\ \Delta z=\chi(u+\Delta u,v)-\chi(u,v)$.

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta_u F}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f'_x\Delta x+f'_y\Delta y+f'_z\Delta z+o(\rho)}{\Delta u}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\left(f'_x\frac{\Delta x}{\Delta u}+f'_y\frac{\Delta y}{\Delta u}+f'_z\frac{\Delta z}{\Delta u}+\underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\to 0}\cdot\frac{\rho}{\Delta u}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}$$

Замечание 1.8. $z=z(x_1,...,x_n)$ и

$$\begin{cases} x_1=x_1(y_1,...,y_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=x_n(y_1,...,y_m) \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_i}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial y_i}+....+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

где $y=\overline{1,m}$.

Пример 1.18. $z=x^2+y^3$

$$\begin{cases} x=\sqrt{u}-\ln v \\ y=u^2\cdot v \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=2x\frac{1}{2\sqrt{u}}+3y^2\cdot 2uv=\frac{\sqrt{u}-\ln v}{\sqrt{u}}+6u^5v^3$$

Для $\frac{\partial z}{\partial v}$ аналогично.

Пример 1.19. $z=x^2+y^2$

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=\ln t \end{cases}$$

Используем дифференциалы, так как если подставить в исходную формулу, функция z будет зависеть от одной переменной.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x\cdot 2t+2y\frac{1}{t}=4t^3+\frac{2\ln t}{t}$$

Теорема 1.16. *(Лагранжа для многомерных)*

Обозначим $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — приращение аргументов.

Получили точку $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$.

Пусть существуют непрерывные частные производные f'_x, f'_y, f'_z в окрестности точки M_0. Тогда найдется такое $\Theta \in (0,1)$, что

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

— формула конечных приращений.

Доказательство. Рассмотрим значения функции вдоль отрезка MM_0. Обозначим $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$, $t \in [0,1]$. Тогда

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0) = (\exists \Theta \in (0,1)) = F'(\Theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

(по одномерной теореме Лагранжа) □

Замечание 1.9. (для многомерного случая)

$f(x_1, ..., x_n)$, $M_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, $M =$ (соответственно предыдущему). $\Delta f = f(M) - f(M_0) = \sum ...$

Предположение 1.1. *$f(x,y,z)$ $\exists f'_x, f'_y, f'_z$.*

а) x, y, z — независимые переменные, тогда $\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ $(*)$

б) x, y, z зависят от u, v:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad \text{и } \exists x'_u, x'_v \text{ и так далее.} \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Выпишем дифференциал функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \ (**)$$

Формулы $(*)$ и $(**)$ имеют одинаковый вид, то есть при вычислении первого дифференциала не важно, имеем мы дело с зависимыми или независимыми переменными. Это называется инвариантностью первого дифференциала.

1.8 Производные по направлениям

Пусть $f(x,y,z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. И пусть $\exists f'_x, f'_y, f'_z$ в окрестности точки M_0. И зададим направление в M_0 с помощью направляющих косинусов: $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (Сие есть косинусы углов, которые образует задаваемый вектор с осями координат). L — луч, выходящий из M_0 в направлении $\vec{e}$. Запишем его уравнение:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

где $t \geq 0$.

$M = (x, y, z)$, ρ — расстояние между M_0 и M. Тогда:

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \pm t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t$$

Определение 1.29. Если существует

$$\lim_{\rho \to 0+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \frac{\partial f}{\partial e}|_{M_0}$$

то он называется производной f в направлении l в точке M_0.

Введем функцию $F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$. (Функция вдоль луча превращается в функцию от одной переменной).

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0} = \lim_{\rho \to 0+} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{t \to 0+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'_{+}(0) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} \cdot \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}|_{M_0} \cdot \cos\gamma \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0} = (\nabla \overrightarrow{f_{(M_0)}}, \vec{l})$$

Определение 1.30. Вектор вида $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ — градиент функции.

Замечание 1.10. $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$, аналогично для единиц на других местах.

Производная по направлению l характеризует скорость изменения функции в направлении l.

Поставим следующую задачу: найти такое направление, вдоль которого поверхность возрастает наискорейшим образом.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\nabla f(\vec{M_0}), \vec{l}) = \underbrace{\left|\nabla f(\vec{M_0})\right|}_{\text{не зависит от l}} \cdot \underbrace{\left|\vec{l}\right|}_{1} \cos\Theta$$

$\frac{\partial f}{\partial l} \to \max \Leftrightarrow \Theta = 0 \Rightarrow \vec{e} \uparrow\uparrow \vec{\nabla} f(M_0)$.

Таким образом, градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции.

Определение 1.31. $-\vec{\nabla} f(M_0)$ — антиградиент, указывает направление наискорейшего убывания функции.

Замечание 1.11. В $\mathbb{R}^n$: $M_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vec{l} = (\cos\alpha_1, ..., \cos\alpha_n)$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{e},\ \vec{\nabla} f(M_0))$.

Пример 1.20. $f = x^2 + y^2$ (парабалоид). Возьмем $M_0 = (1, 2)$ на плоскости xy. С осью x угол 30°, с осью y — 60°.

$\vec{l} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2})$ Тогда градиент: $\vec{\nabla} f(M_0) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}_{M_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. И: $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 + \sqrt{3}$.

1.9 Производные и дифференциалы старшего порядка

Определение 1.32. Пусть задана $f(x_1, ..., x_n)$, определена в $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ в области E. Если существует $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, то она называется второй смешанной производной по $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f''_{ij}$. Аналогично можно ввести понятие старших производных (третьего порядка и выше), и если у нас функция от n переменных, то у нее может существовать n^k производных k-ого порядка.

Пример 1.21. $f(x, y) = x^2y^3$.

Первого порядка: $f'_x = 2xy^3$, $f'_y = 3y^2x^2$.

Второго порядка: $f''_{x^2} = 2y^3$, $f''_{xy} = 6xy^2$, $f''_{yx} = 6xy^2$, $f''_{y^2} = 6x^2y$.

Теорема 1.17. *(о равенстве смешанных производных)*

Пусть $f(x, y)$ определена в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ и в окрестности этой точки существуют непрерывные f''_{xy} и f''_{yx} и они равны.

Доказательство. Зададим некоторые приращения аргументов $h, k = \text{const} \neq 0$. Зададим функцию

$$W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$$

Несложно заметить, что

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

По теореме Лагранжа (одномерной) $\exists c_1 \in (x_0, x_0 + h)$ (или $(x_0 + h, x_0)$, в дальнейшем этот вариант опущен):

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k}$$

Теперь вновь по теореме Лагранжа $\exists c_2 \in (y_0, y_0 + h)$:

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k} = f''_{xy}(c_1, c_2)$$

Теперь сделаем это в другом порядке:

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$$

Откуда

$$W = \frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k}$$

По той же самой теореме Лагранжа:

$$W = \frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k} = \psi'(c_3) = \frac{f'(x_0 + h, c_3) - f(x_0, c_3)}{h} = f''_{yx}(c_4, c_3)$$

Заметим, что W — число. Поэтому $f''_{xy}(c_1, c_2) = W = f''(c_4, c_3)$. При этом $c_1, c_2 \in (x_0, x_0 + h)$, $c_3, c_4 \in (y_0, y_0 + k)$. Так как $h, k \to 0$, то эти точки стремятся друг к другу. Тогда, с учетом непрерывности этих производных, $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$. □

Замечание 1.12. Пусть задана $f(x_1, ..., x_n)$. Пусть у нее существуют непрерывные частные производные до k-ого порядка включительно. Тогда при вычислении этих производных важно, сколько раз мы дифференцируем по каждой из переменных, но не важно, в каком порядке.

Пример 1.22. $f(x, y, z) = x^2 e^{yz^3}$
$f'_x = 2xe^{yz^3}$
$f''_{xy} = 2xz^3 e^{yz^3}$
$f''_{xyx} = 2z^3 e^{yz^3} = f''_{x^2y} = f''_{yx^2}$.

Введем понятие дифференциала старшего порядка:

Определение 1.33. $f(x, y)$, $\exists$ непрерывные частные производные по x, y. Следовательно, существует первый дифференциал: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Предположим, что dx, dy зафиксированы. Тогда df зависит только от x, y. Тогда, если существует $d(df) = d^2 f$ — второй дифференциал. Аналогично, если существует $d(d^k f) = d^{k+1} f$.

Предложение 1.2. *Пусть $f(x, y)$ — функция и существуют дифференциалы до второго порядка. Тогда:*

$$d^2 f(x,y) = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

(dx, dy — константы).

Предположим, что существуют непрерывные частные производные до 3 порядка и вычислим формулу дифференциала третьего порядка:

$$d^3 f(x,y) = d(d^2 f) = d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(...)dx + \frac{\partial}{\partial y}(...)dy =$$
$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

По идукции:

$$d^k f(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial^{k-i} y} dx^i dy^{k-i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f$$

Аналогично можно доказать, что если у $f(x_1, ..., x_n)$ сушествуют непрерывные (для приведения подобных слагаемых) частные производные до k порядка, то

$$d^k f = d(d^{k-1} f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f$$

Замечание 1.13. Если $M_0 \in \mathbb{R}^n$, то $d^k f(M_0)$ — однородная форма относительно $dx_1, ..., dx_n$.

Замечание 1.14. Можно доказать, что дифференциалы старшего порядка свойством инвариантности формы не обладают.

Предложение 1.3. *(формула Тейлора для многомерного случая)*

Пусть дана $f(x,y)$*,* $M_0=(x_0,y_0)$ *и в некоторой окрестности* M_0 *существуют непрерывные частные производные до* k*-ого порядка. Пусть* $M=(x,y)$ *— некоторая точка из этой окрестности. Выпишем уравнение отрезка* L *соединяющего точки* M *и* M_0*. Уравнение отрезка будет иметь вид:*

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x \\ y = y_0 + t\Delta y \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Обозначим за $F(t)=f(x_0{+}t\Delta x, y_0{+}t\Delta y)$*. Разложим* F *по известной формуле Тейлора в* $t=0$ *и подставим ее значения:*

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}t^{k-1} + R_k$$

где $R_k = \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!}t^k,\ \Theta \in (0,1)$*.*

Подставим вместо нуля другое значение:

$$F(1) = F(0) + ... + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!}$$

Теперь распишем: $F(1) = f(M),\ F(0) = f(M_0)$*.*

Вычислим: $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot\Delta y = df(M_0)$*.*

Нетрудно показать, что $F^i_{(0)} = d^i f(M_0)$*.*

Распишем

$$R_k = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(\widetilde{M})$$

где $\widetilde{M} = (x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)$*.*

Теперь запишем полученную формулу Тейлора:

$$t = 1 \Rightarrow f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + ... + \frac{1}{(k+1)!}d^{k-1}f(M_0) + R_k$$

Замечание 1.15. Аналогичный вид формула Тейлора будет иметь и в n-мерном случае:

$M = (x_1, ..., x_n),\ M_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$. Формула Тейлора та же:

$$t = 1 \Rightarrow f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + ... + \frac{1}{(k+1)!}d^{k-1}f(M_0) + R_k$$

Где

$$R_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^k f(\widetilde{M})$$

где $\widetilde{M} = (x_1^{(0)} + \Theta\Delta x_1, ..., x_n + \Theta\Delta x_n)$.

Пример 1.23. $f(x,y)=\sin(x-y)$. $M_0(0,0)$.

$f(M_0)=0$.

$df(M_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Delta y=(*)$

$\Delta x=x-0=x,\ \Delta y=y-0=y$.

$f'_x=\cos(x-y),\ f'_y=-\cos(x-y)$.

$(*)=x-y$.

Для второго дифференциала:

$f''_{x^2}=-\sin(x-y)$

$f''_{xy}=\sin(x-y)$

$f''_{y^2}=-\sin(x-y)$

$d^2f(M_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_0)\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)\Delta y^2=0$

Третий:

$f'''_{x^3}=-\cos(x-y)$

$f'''_{x^2y}=\cos(x-y)$

$f'''_{xy^2}=-\cos(x-y)$

$f'''_{y^3}=\cos(x-y)$

$d^3f(M_0)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M_0)\Delta x^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(M_0)\Delta x^2\Delta y+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(M_0)\Delta x\Delta y=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(M_0)\Delta y^3=-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3=-(x-y)^3$

Тогда формула примет вид:

$$f(x,y)=\sin(x-y)=(x-y)-\frac{1}{3!}(x-y)^3+\frac{1}{5!}(x-y)^5-...$$

Похоже на $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...$

То есть можно было заменить $z=x-y$, НО ДЕЛАТЬ ЭТО МОЖНО ЛИШЬ В СЛУЧАЕ, КОГДА x,y,z В РАЙОНЕ НУЛЯ.

1.10 Экстремумы функций нескольких переменных

Пусть задана функция $f(x)$ в $E\subset\mathbb{R}^n$.

Определение 1.34. Точка $a\in E$ — точка локального минимума, если $\exists\delta>0:\ \forall x\in U_\delta(a)\cap E\Rightarrow f(x)\geq f(a)$. Если знак неравенства выполняется в другую сторону, то это точка локального максимума. Эти точки называются локальными экстремумами. Если неравенство строгое, то это собственный экстремум.

Наибольшее и наименьшее значение f в области E, если таковые существуют, называются глобальными экстремумами.

Глобальные экстремумы могут достигаться либо в точках локального экстремума внутри области, либо на границе этой области.

Сформулируем сначала необходимое и достаточное условие локального экстремума:

Теорема 1.18. *(необходимое условие локального экстремума)*

Пусть a — внутренняя точка E и она — точка локального экстремума. И в этой точке существуют первые частные производные $f'_{x_1},...,f'_{x_n}$ в некоторой окрестности этой точки. Тогда $f'_{x_i}(a)=0,\ i=\overline{1,n}$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x_1)=f(x_1,a_2,...,a_n)$ (то есть зафиксированы все переменные, кроме первой). Если a — точка локального экстремума f, то a_1 — точка локального экстремума функции F. Тогда по теореме Ферма $F'(a)=0\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0$. Аналогично доказывается, что и остальные частные производные в точке a равны нулю. ☐

Замечание 1.16. Если все частные производные в a равны нулю, то a называется стационарной точкой функции f. Это условие эквивалентно тому, что $df(a) = 0$ или $\vec{\nabla} f(a) = 0$. Данное условие представляет собой только необходимое условие экстремума, но не достаточное. Допустим, $f = x_1^3 + x_2^3$ точка $(0, 0)$ является точкой перегиба, но не экстремума. Необходимое условие экстремума помогает найти точки, подозрительные на экстремум, а чтобы убедиться, что это так, нужны достаточные условия.

Предложение 1.4. *(достаточное условие локального экстремума)*

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть $a \in E$, внутренняя и стационарная. Разложим функцию $f(x)$ по Тейлору до слагаемых первого порядка малости:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{df(a)}_{=0} + R_2$$

где R_2 — остаточный член. Равенство нулю по необходимому условию экстремума.

$\Delta f = f(x) - f(a) = R_2$. Для того, чтобы точка a была точкой локального минимума, достаточно, чтобы $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow R_2 \geq 0$. Аналогично для точки максимума: $R_2 \leq 0$. Задача свелась к определению знака R_2. Оценим:

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f(M) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M) dx_i dx_j$$

где $dx_i = x_i - a_i, \ i = \overline{1, n}$. $M \in (a, x)$. Здесь получили нечто похожее на квадратичную форму, прочтите замечание ниже.

(читаем замечание)

Вернемся к нашим баранам. Запишем

$$R_2 = \frac{1}{2!} dx^T S(M) dx$$

где $S = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$, $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{pmatrix}$

По теореме о о равенстве симметричных производных S симметрична.

Замечание 1.17. (о квадратичных формах)

Функция вида

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j = z^T A z$$

где $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица.

Квадратичная форма называется положительно определенной, если $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(z) > 0$. Аналогично отрицательно определенной, если $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(x) < 0$.

$f(z)$ — знакопостоянная неотрицательная форма, если: $\forall z \Rightarrow f(z) \geq 0$.

Аналогично знакопостоянная неположительная форма, если: $\forall z \Rightarrow f(z) \leq 0$.

Квадратичная форма называется знакопеременной, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения: $\exists z_1, z_2 : \ f(z_1) < 0, \ f(z_2) > 0$.

Теорема: (Критерий Сильвестра) (это всё еще замечание)

1) Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы A были положительны.

2) Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы A чередовали знак, начиная с минуса.

Теорема 1.19. *(достаточное условие локального экстремума)*

Пусть a — внутренняя точка E и она стационарная. И пусть $\exists$ непрерывные частные производные до 2 порядка включительно в окрестности точки a.

Тогда:

1) Если $S(a)$ положительно определена, то a — точка локального минимума.

2) Если $S(a)$ отрицательно определена, то a — точка локального максимума.

3) Если $S(a)$ является знакопеременной, то a — не точка локального экстремума.

4) Если $S(a)$ — знакопостоянная, но не знакоопределенная, то информации недостаточно.

Доказательство.

1) Предположим, $S(a)$ положительно определена. Из непрерывности вторых частных производных следует, что $\exists \delta > 0 : \ \forall M \in U_\delta(a) \Rightarrow S(M)$ — положительно определена. Тогда $R_2 > 0$, откуда a — точка локального минимума

2) Для отрицательной определенности все аналогично.

3) Если $S(a)$ знакопеременная, то $\forall \delta > 0 \ \exists M_1, M_2 \in U_\delta(a)$, такие, что $R_2(M_1) > 0, \ R_2(M_2) < 0$.

4) Приведем пример, являющийся контрпримером к обратному утверждению: $f_1(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$. $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$. $(0,0)$ — стационарная точка обеих функций.

$$S(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— знакопостоянная. $(0,0)$ — точка локального минимума f, но не является точкой локального экстремума. ☐

Замечание 1.18. Если $S(a)$ знакопостоянная, но не знакоопределенная, то тогда для исследования точки a нужно задействовать производные и дифференциалы старшего порядка.

По Тейлору:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 f(a) + \frac{1}{3!} d^3 f(a) + ...$$

Исследовать знак старшего дифференциала нужно лишь там, где обнуляются дифференциалы младшего порядка.

Если теперь требуется найти глобальный экстремум, то кроме поиска локальных экстремумов внутри области E, нужно исследовать поведение этой функции и на ее границе.

Обозначим $\widehat{E}$ границу E. Задача поиска экстремума на границе называется задачей поиска условного экстремума. Заметим, что размерность $\widehat{E}$ равна размерности $E - 1$.

Пример 1.24. Пусть $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$. Требуется найти экстремум в области $E : \ x^2 + y^2 \leq 9$.

Найдем точки локального экстремума в области E.

Необходимость:

$f'_x = 2(x-1) = 0,\ f'_y = 2(y-2) = 0 \Rightarrow (1,2)$ — стационарная точка ($(1,2) \in E$), подозрительная на экстремум точка. Вычислим вторые производные, чтобы проверить, является ли точка экстремумом и каким:

$f''_{x^2} = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{y^2} = 2$. Тогда матрица вторых производных примет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

S положительно определена (миноры очевидно положительны). Следовательно, точка $(1,2)$ является точкой локального минимума.

Теперь проверим, что у нас на границе. А на границе тучи ходят хмуро и описывают окружность: $\widehat{E}:\ x^2 + y^2 = 9$. Ищем условный экстремум $\hat{E}$. Выразим одну переменную через другую (первый метод поиска):

$y = \pm\sqrt{9-x^2}$. Уравнение эллипса теперь является функцией одной переменной. Введем $F(x) = f(x, \pm\sqrt{9-x^2})$. Поиск экстремума сводится к поиску экстремума для функции одной переменной на отрезке $x \in [-3,3]$.

Пример 1.25. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$. $E:\ \{(x,y) |\ x > 0, y > 0\}$.

Начнем с локальных экстремумов:

Необходимое условие: $f'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0$ $f'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0$. Точки, подозрительные на экстремум:

$x - \frac{20}{\frac{50^2}{x^4}} = 0 \Leftrightarrow x(1 - \frac{x^3}{125}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{не интересует} \\ x = 5 \end{cases}$. $y = 2$.

Точка, подозрительная на экстремум: $(5,2)$.

Найдем вторые производные:

$f''_{x^2} = \frac{100}{x^3},\ f''_{y^2} = \frac{40}{y^3},\ f''_{xy} = 1$.

$$S(5,2) = \begin{pmatrix} {}^{4}\!/_{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Минимальное значение функции достигается в $f(5,2) = 30$.

$\sup_E f(x) = +\infty$.

1.11 Численные методы поиска безусловного экстремума

Проблема. Рассмотрим идею градиентного метода поиска экстремума.

(Градиент указывает в сторону наискорейшего возрастания функции). Пусть требуется найти экстремум функции в области E. Выберем произвольную начальную точку: $\forall x^{(0)} \in E$. Зададим некоторое положительное число h.

$$X = \begin{cases} x^{(0)} + h\vec{\nabla} f(x^{(0)}) & \max \\ x^{(0)} - h\vec{\nabla} f(x^{(1)}) & \min \end{cases}$$

и так далее. В результате получаем последовательность точек $\{x^{(k)}\}$, на которой функция приближается к максимуму либо к минимуму.

Отметим типовые проблемы, которые возникают при применении этого метода:

1) Выбор шага h. Если выбрать очень маленький шаг, то идти до экстремума можно долго (экстремум далеко). А если выбрать очень большим - мы рискуем «перепрыгнуть»

через экстремум. Поддерживается динамическое изменение шага: обычно сначала делают большие шаги, а по мере приближения к экстремуму (начались «метания» и «перепрыжки») шаг постепенно уменьшают.

2) Проблема многоэкстремальности.У функции может быть большое количество локальных экстремумов и двигаясь из точки $x^{(0)}$ мы найдем один из этих экстремумов, не факт, что глобальный. Решение: идем из нескольких точек либо изучаем физику функции (применяем некоторую теорию для доказатеотства количества экстремумов либо их расположения). Все это повышает вероятность обнаружения глобального экстремума.

3) $\vec{\nabla} f(x)$. Вычисление градиента не всегда возможно. Функция может быть сложной, не заданной явно, вообще не дифференцируемой. Мы можем воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

Если и это не помогает, то мы можем использовать метод случайного спуска:

Проблема. На каждом шаге выбираем произвольное направление и в этом направлении делаем некоторый шаг. Если в этом направлении функция изменилась нужным нам образом, то тогда это направление удачное, по нему и движемся. В противном случае выбираем другое направление.

4) Проблема границ. Градиентные методы хороши для поиска экстремума внутри области. Если он расположен на границе, то у нас возникают большие проблемы. В этом случае применяем методы математического программирования (методы поиска экстремума в некоторой области). Это целая теория, нам его будут читать, бла-бла-бла.

Пример 1.26. Пусть $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, требуется найти минимум этой функции. Очевидно, что $(0, 0)$ — точка глобального минимума, но по легенде мы тупые и этого не видим. Возьмем произвольную начальную точку $(1, 2)$. Посчитаем антиградиент: $-\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} -2x \\ -4y \end{pmatrix}$. Тогда $-\vec{\nabla} f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$. По нему идти до конца не надо, нужно сделать какой-то шаг. Выберем большой шаг, затем, если заметим шатания, снизить его. Оказались в точке $(-1, -6)$. Пересчитываем антиградиент: $-\vec{\nabla} f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \end{pmatrix}$. Заметно, что мы начали прыгать, снижаем шаг.

Пример 1.27. $f(x, y) = x + y$. Пусть требуется найти максимум в $E : \ x^2 + y^2 \leq 1$. Воспользуемся теоремой Ферма:

$f'_x = 1$, $f'_y = 1$, то есть локальных экстремумов у нас нет, глобальный экстремум располагается где-то на границе. Посчитаем: $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Двигаясь по нему, получим максимум в $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Но это мы шли их хорошей точки. А вот если с плохой, то мы можем до него и не дойти.

Воспользуемся методом математического программирования: Приравняем функцию к константе, получим прямую. Двигаем эту прямую по области определения, пока мы не получим максимальную константу.

1.12 Теорема о неявной функции

Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0 \quad (1)$, где x, y — скаляры. Будем говорить, что уравнение задает функцию $y = y(x) \quad (2)$ неявно, если при подстановке (2) в уравнение (1) получим тождество.

Пример 1.28. $x^2 + y^2 = 1$, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

(картинка)

Предположим, существуют F'_x, F'_y, не равные нулю и $F(x, y(x)) \equiv 0 \quad (3)$. Если $\Phi(x) = F(x, y(x)) \equiv 0$ и продифференцируем (Если функция тождественно равна нулю, то все ее производные очевидно тождественны нулю):

$$0 \equiv \Phi'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) \Rightarrow y'(x) = -\frac{{}^{\partial F}\!/_{\partial x}}{{}^{\partial F}\!/_{\partial y}}$$

Если существуют вторые производные, то можем найти вторую производную неявной функции:

$$0 \equiv \Phi''(x) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y'(x)\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y'(x)\right) y'(x) + \frac{\partial F}{\partial y} y''(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y''(x) = ...$$

Пример 1.29. $x^2 + y^2 = 1$. Дифференцируем: $2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$. Найдем вторую производную. Продифференцируем второй раз: $1 + y'^2 + y \cdot y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1+y'^2}{y} = -\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y}$.

Теорема 1.20. *(о неявной функции). Будем работать с конкретной точкой.*

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ удовлетворяет уравнению $F(x_0, y_0) = 0$. Пусть в окрестности M_0 существует непрерывная $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0$, $\exists y(x)$, определенная и непрерывная на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, такая, что:

1) $y(x_0) = y_0$

2) $F(x, y(x)) \equiv 0$ на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ и будет определяться однозначно.

Если, кроме того, в окрестности M_0 $\exists$ непрерывная $\frac{\partial F}{\partial x}$, то тогда:

1) $y(x)$ — дифференцируема и

2) $y'(x) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$.

Доказательство.

1) Покажем, что $\exists!$ функция $y(x)$. $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$ по условию теоремы. Пусть, для определенности, производная принимает положительные значения (для отрицательных доказательства аналогичны). $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в окрестности M_0. Найдется такое $\hat{\delta} > 0 :$ $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$, $\forall (x, y) : \begin{cases} |x - x_0| < \hat{\delta} \\ |y - y_0| < \hat{\delta} \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial y} > 0 \Rightarrow F \nearrow$ по y. Следовательно, $\begin{cases} F(x_0, y_0 + \hat{\delta}) > 0 \\ F(x_0, y_0 - \hat{\delta}) < 0 \end{cases}$. Вспомним, что по условию теоремы F непрерывна, следовательно, $\tilde{\delta} > 0 :$ $\begin{cases} F(x, y_0 + \hat{\delta}) > 0 \\ F(x, y_0 - \hat{\delta}) < 0 \end{cases} \quad \forall x \in [x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}]$.

Пусть $\delta = \min\{\hat{\delta}, \tilde{\delta}\} > 0$. Тогда по теореме Больцано-Коши о нуле функции $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\exists y \in [y_0 - \hat{\delta}, y_0 + \hat{\delta}] :$ $F(x, y) = 0$, причем F непрерывна, следовательно, $y(x)$ непрерывна, а так как $F \nearrow$ по $y \Rightarrow y(x)$ — единственная.

2) Покажем дифференцируемость и найдем производную. Выберем произвольную $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y = y(x)$. Рассмотрим $x + \Delta x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$.

$\Delta F = \underbrace{F(x+\Delta x, y+\Delta y)}_{=0} - \underbrace{F(x,y)}_{0} = 0$. Но $\exists$ непрерывные $F'_x, F'_y \Rightarrow F$ дифференцируема, следовательно, $0 = \Delta F = \underbrace{F(x+\Delta x, y+\Delta y)}_{=0} - \underbrace{F(x,y)}_{0} = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + o(\rho) \Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x} \to 0$. □

Замечание 1.19. Теорему о неявной функции можно распространить на многомерный случай.

Определение 1.35. Пусть задана $F(x_1, ..., x_n, y) = 0 \quad (3)$. Будем говорить, что функция $y = y(x_1, ..., x_n)$ задается уравнением (3) неявно, если при подстановке в уравнение (3) получим тождество.

Теорема 1.21. *(о неявной функции нескольких переменных)*

Обозначим $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, $y^{(0)}$, $M_0 = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Пусть $F(M_0) = 0$. *В окрестности точки* M *функция непрерывна и существует непрерывный* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$. *Тогда в окрестности точки* x_0 $\exists!$ *непрерывная функция* $y = y(x_1, ..., x_n)$*, такая, что:*

1) $F(x_1, ..., x_n, y(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$

2) $y(x^{(0)}) = y_0$.

При этом если в окрестности M_0 $\exists$ *непрерывная* $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, *то*

$$\exists \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{{}^{\partial F}\!/_{\partial x_i}}{{}^{\partial F}\!/_{\partial y}}$$

доказательство аналогично одномерному случаю.

Пример 1.30. $x_1^2 + x_2 + ye^{yx_1+x_2} = 0$. Найдем $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}$:

1) $2x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot e^{yx_1+x_2} + ye^{yx_1+x_2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}x_1 + y\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_1} = ...$

2) $1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}e^{yx_1+x_2} + y \cdot e^{yx_1+x_2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}x_1 + 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_2} = ...$

1.13 Системы функций

Определение 1.36. Пусть задано несколько функций:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Тогда говорят, что задана система из m функций от n переменных.

Пусть в E $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

Определение 1.37. Тогда

/*TODO: перенести наверх*/

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби.

Отметим несколько свойств, связанных с этой матрицей:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, ..., t_l) \\ .... \\ x_n = x_n(t_1, ..., t_l) \end{cases} \quad (2)$$

Тогда (1) и (2) — сложная система функций.

Найдем матрицу Якоби для сложной функции: $\frac{\partial y_i}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + ... + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}$ $i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, l}$. Несложно заметить, что это можно записать в матричном виде:

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(t_1, ..., t_l)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\frac{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}{\mathscr{D}(t_1, ..., t_l)} \qquad (3)$$

Рассмотрим частный случай, когда $m = n$. Тогда $\det \frac{\mathscr{D}(y_1,...,y_n)}{\mathscr{D}(x_1,...,x_n)} = \frac{D(y_1,...,y_n)}{D(x_1,...,x_n)}$ — якобиан. Если якобиан в окрестности точки не равен нулю, то тогда система называется не особой (не вырожденной).

Предположим, что иксы удалось выразить через игреки:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, ..., y_n) \\ .... \\ x_n = x_n(y_1, ..., y_n) \end{cases} \quad (4)$$

Тогда система 4 обратна к системе 1. Вопрос существования обратной системы будет рассмотрен в следующем параграфе (см. теорему о системе неявных функций).

Замечание 1.20. Здесь $\mathscr{D}$ — матрица Якоби, а D — якобиан (то есть определитель данной матрицы).

Теорема 1.22. *(Лапласа)*

Пусть $m = n$ *в* (1) *и система* (1) *не особая. Тогда*

$$\frac{D(y_1, ..., y_n)}{D(x_1, ..., x_n)} \cdot \frac{D(x_1, ..., x_n)}{D(y_1, ..., y_n)} = 1$$

Как следствие — обратная система тоже не особая.

Доказательство. По формуле (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\frac{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)} = 1$$

(определитель произведения равен произведению определителей). □

Пример 1.31.

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{y_1} \\ x_2 = y_2 - \sqrt[3]{y_1} \end{cases}$$

Посчитаем якобиан:

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, y_2)}{\mathscr{D}(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathscr{D}(x_1, x_2)}{\mathscr{D}(y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}y_1^{-2/3} & 0 \\ -\frac{1}{3}y_1^{-2/3} & 1 \end{pmatrix}$$

Посчитаем:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = 3x_1^2$$

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$$

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(y_1, y_2)} = x_1^2 y_1^{-2/3} = 1$$

$x_1 \neq 0 (\Leftrightarrow y_1 \neq 0) \Rightarrow$система не особая.

Далее в системе (1) рассматриваем произвольные значения m, n.

Определение 1.38. Система функций (1) называется независимой или функционально независимой, если $\nexists F \not\equiv 0 : \ F(y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0 \quad (5)$ (то есть система независима, если ни одна функция в системе (1) не является комбинацией оставшихся).

Сформулируем далее условие зависимости и независимости функций. Продифференцируем тождество (5) по каждому из x_i:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial_{x_i}} \equiv 0 \qquad (6)$$

Это тождество можно переписать в виде

$$\left(\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\right)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{pmatrix} \equiv 0$$

Обозначим $A(x) = \left(\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\right)^T, \ h = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{pmatrix}$. Запишем однородную систему уравнений:

$$A(x)h = 0 \qquad (8)$$

Система (1) будет независимой, если линейная однородная алгебраическая система (8) имеет только нулевое решение или только если $h \equiv 0$.

Определение 1.39. Рангом функциональной матрицы $A(x)$ называется максимальный порядок минора, не равного тождественно нулю.

Теорема 1.23. *Для того, чтобы система* (1) *являлась независимой в области* $E \subset \mathbb{R}^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = m$$

в области E

Вывод 1.1.

1) $m > n \Rightarrow (1)$ *зависимая.*

2) $m = n :$ (1) *независимая* $\Leftrightarrow$ (1) *не особая.*

3) $\operatorname{rang} A(x) = s < m \Rightarrow$ *В* (1) $\exists s$ *независимых функций.*

Пример 1.32.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 + x_3 \\ y_y = x_1^3(x_2^2 + x_3) \end{cases}$$

$y_3 = y_1^3 y_2 \Rightarrow$ система очевидно зависима. Проверим. Считаем матрицу Якоби:

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, y_2, y_3)}{\mathscr{D}(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 1 \\ 3x_1^2(x_2^2 + x_3) & 2x_1^3 x_2 & x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \equiv 0$$

Ранг матрицы равен 2, то есть любые 2 функции в этой системе независимы, а третья выражается через них.

1.14 Теорема о системе неявных функций

Определение 1.40.

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n y_1, .., y_m) = 0 \\ .... \\ F_m(x_1, ..., x_n y_1, .., y_m) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Будем говорить, что система (1) задает функции

$$\begin{cases} y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

неявно, если при подстановке их в (1) получаем тождество.

Теорема 1.24. *(о системе неявных функций)*

Обозначим $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, $y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ ... \\ y_m^{(0)} \end{pmatrix}$, $M_0(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Пусть $F_i(M) = 0$ $i = \overline{1, m}$ *и в окрестности* M F_i *непрерывны и имеют непрерывные* $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $i, j = \overline{1, m}$. *Если якобиан*

$$\frac{D(F_1, ..., F_n)}{D(y_1, ..., y_m)}|_{M_0} \neq 0$$

то в окрестности точки $x^{(0)}$ *существует единственный набор непрерывных функций*

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

такой, что:
1) $F_i(x_1, ..., x_n y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0 \qquad (1)$*;*
2) $y^{(0)} = y(x^{(0)})$.

Доказательство. (индукция)

База: $m = 1 \Rightarrow$ одномерная теорема о неявной функции.

ИП: Пусть теорема верна для $m-1$. Докажем, что теорема верна для m.

Расписываем якобиан нашей системы

$$0 \neq \frac{D(F_1, ..., F_n)}{D(y_1, ..., y_m)}|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0}$$

Значит, у матрицы Якоби нет нулевых строк, а значит, в последней строке матрицы есть хотя бы один ненулевой элемент. Пусть, для определенности, $\frac{\partial F_m}{\partial y_m}|_{M_0} \neq 0$, иначе переобозначим (или воспользуемся перестановкой). Тогда по одномерной теореме о неявной функции из последнего уравнения в системе (1) можно выразить y_m. Тогда пусть $y_m = f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})$. Подставим теперь эту функцию в систему (1).

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) = 0 \\ .... \\ \Phi_{m-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_{m-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) = 0 \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) \equiv 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Теперь докажем, что

$$\Delta = \frac{D(\Phi_1, ..., \Phi_{m-1})}{D(y_1, ..., y_{m-1})}|_{M_0} \neq 0$$

Распишем частную производную

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial F_i}{\partial y_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

....

....

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial y_k} = \frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k} \equiv 0$$

$$0 \neq \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & ... & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0} = \frac{\partial F_m}{\partial y_m}|_{M_0} \cdot \Delta \Rightarrow \Delta \neq 0$$

Умножим последний столбец на $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ и прибавляем к k-ому столбцу.

Тогда по индуктивному предположению из системы (2) можно выразить

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ ..... \\ y_{m-1} = y_{m-1}(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

и $y_m = f(x_1, ..., x_n, y_1(x_1, ...x_n), ..., y_{m-1}(x_1, ..., x_n))$ □

Замечание 1.21. Если в доказанной теореме предположить, что в окрестности M_0 существуют непрерывные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$. Тогда $\exists \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ в окрестности точки $x^{(0)}$ (не факт, что $x^{(0)}$, я чего-то не понял).

Выразим функции $y_1, ..., y_m$ и подставим все это в систему (1). В результате получим тождество:

$F_i(x_1, ..., x_n, y_1(x_1, ...x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$ (3)

Продифференцируем тождество по x_k:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0 \\ \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} + \frac{\mathscr{D}(F_1, ..., F_m)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\mathscr{D}(F_1, ..., F_m)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

(обратная матрица существует, так как якобиан не равен нулю).

Пример 1.33.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1 \\ x_1 x_2 y_1 + y_2 \ln y_1 = 0 \end{cases}$$

Найдем производные по x_1. По x_2 ищутся аналогично:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2y_1 \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + 2y_2 \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 \\ x_2 y_1 + x_1 x_2 \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \ln y_1 + y_2 \cdot \frac{1}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Получим матрицу Якоби:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 y_1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ x_1 x_2 + \frac{y_2}{y_1} & \ln y_1 \end{pmatrix}}_{= \frac{D(F_1 F_2)}{D(y_1 y_2)}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = 0$$

Рассматриваем точки, где матрица не особая, ищем обратную и выражаем:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ x_1 x_2 + \frac{y_2}{y_1} & \ln y_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

1.15 Условный экстремум

Проблема. Рассмотрим задачу следующего вида. Пусть дана функция $F(x_1, ..., x_{n+m})$, требуется найти экстремум и она связана условием

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \\ .... \\ \varphi_m(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

на E, где $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Определение 1.41. Точка $x^{(0)}$ называется точкой условного минимума в задаче, если $\exists \delta > 0 : \ \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \in \big(U_\delta(x^{(0)}) \cap E\big) \Rightarrow F(x) \geq F(x^{(0)})$. (и наоборот для точки условного максимума).

Без потери общности будем считать, что в окрестности точки $x^{(0)}$ уравнения (2) независимы. Тогда по теореме о независимости $\operatorname{rang} \frac{\mathscr{D}(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_{n+m})} = m$. То есть какие-то m столбцов этой матрицы образуют ненулевой минор. Без потери общности будем считать, что такой ненулевой минор образуется последними m столбцами, который является якобианом следующего вида:

$$\frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{D(x_{n+1}, ..., x_{n+m})}|_{x^{(0)}} \neq 0$$

Тогда по теореме о системе неявных функций в окрестности точки $x^{(0)}$ из уравнений (2) можно выразить:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ x_{n+m} = f_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad (3)$$

А теперь функции (3) подставим в (1):

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

В результате задача поиска условного экстремума (1,2) свелась к задаче поиска безусловного экстремума функции (Φ). Такой подход называется методом исключения.

Пример 1.34. $F(x, y) = x^2 + y^2$ и $E : \ x + y = 1$.

Методом исключений: выразим $y = 1 - x$. Тогда $\Phi(x) = F(x_1, 1 - x) = x^2 + (1 - x^2)$. Теперь нас интересует безусловный экстремум. Далее применим теорему Ферма: $\Phi'(x) = 2x - 2(1 - x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ — точка минимума. Откуда $y = \frac{1}{2}$. Точка экстремума: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Метод исключений удается применить, если уравнения (2) несложные, то есть функции (3) удалось записать в явном виде. В противном случае воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Построим функцию. Для краткости: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$, $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \\ \lambda_m \end{pmatrix}$. Функция Лагранжа: $L(x, \lambda) = F(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + ... + \lambda_m \varphi_m(x)$, где $\lambda_1, ..., \lambda_m$— константы

Теорема 1.25. *(Необходимое условие условного экстремума). Пусть $x^{(0)}$ — точка условного экстремума в задаче (1,2). Пусть*

$$\frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{D(x_{n+1}, ..., x_{n+m})}|_{x^{(0)}} \neq 0$$

Тогда найдутся такие константы $\lambda_1, ..., \lambda_m = \mathrm{const}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}|_{x^{(0)}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_{x^{(0)}} = 0 \qquad (4)$$

$i = \overline{1, n+m}$.

Теорема утверждает, что необходимые условия условного экстремума в задаче (1,2) совпадают с необходимыми условиями безусловного экстремума функции Лагранжа.

Замечание 1.22. Уравнения (4) состоит из $m+n$ уравнений. Присоединяем к ним условие связи 2. Получаем $n+2m$ уравнений с таким же количеством неизвестных. Решаем эту систему и находим точки, подозрительные на условный экстремум.

Доказательство. Подставим уравнения (3) в (1). Получим:

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

$x^{(0)}$ будет и точкой безусловного экстремума функции Φ. Отсюда:

$$d\Phi(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m}\right)|_{x^{(0)}} = 0 \qquad (5)$$

. Согласно свойству инвариантности формы первого дифференциала можно не обращать внимания на то, что последние m переменных — функции от первых n переменных.

Подставим (3) в (2):

$$\varphi(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$$

Продифференцируем данные тождества и опять воспользуемся свойством инвариантности формы первого дифференциала: в точке $x^{(0)}$:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0 \qquad (6)$$

k-ое уравнение в системе (6) умножим на $\lambda_k (k = \overline{1, n})$ и складываем это с уравнением (5). В точке $x^{(0)}$ будет выполняться условие:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\lambda_1 + ... + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\lambda_m\right) dx_1 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}}\lambda_1 + ... + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}}\lambda_m\right) dx_{n+m} = 0$$

Получаем, что в $x^{(0)}$ должно выполняться:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_k\right) dx_i = 0$$

Выберем константы $\lambda_1, ..., \lambda_m$ исходя из условий: $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_i\right)|_{x^{(0)}} = 0,\ i = \overline{n+1, n+m}$ (8)

Система (8) относительно λ_i является системой линейнчх уравнений, матрица коэффициентов по условию теоремы не особая, то есть из этой системы все λ_i найдутся однозначно ($i = \overline{1, m}$). Найденные константы λ_i подставим в уравнение (7). Тогда из (7) останутся только последние n слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_k\right) dx_i = 0 \qquad (9)$$

$x_1, ..., x_n$ — независимые переменные. Тогда (9) есть линейная форма относительно $dx_1, ..., dx_n$ и она будет равна нулю при любых $dx_1, ..., dx_n$. Тогда получается, что коэффициенты $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_k\right)$ должны будут равняться нулю. ☐

Теорема 1.26. *(достаточное условие условного экстремума)*

Пусть в точке $x^{(0)}$ выполнены условия предыдущей теоремы. И пусть $F, \varphi_1, ..., \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки $x^{(0)}$. Тогда если при условиях (6) *второй дифференциал $d^2L(x^{(0)})$ является положительно определенной квадратичной формой, то $x^{(0)}$ является точкой условного минимума, и наоборот, если квадратичная форма определена отрицательно, то $x^{(0)}$ — точка условного максимума (здесь $L(x^{(0)})$ — функция Лагранжа).*

Замечание 1.23. Достаточные условия условного экстремума в задаче $(1, 2)$ совпали с достаточными условиями безусловного экстремума функции Лагранжа. Для доказательства достаточно показать, что $d^2L(x^{(0)}) = d^2\Phi(x^{(0)})$.

При исследовании знака второго дифференциала соотношение (6) нужно учитывать, так как второй дифференциал свойством инвариантности формы не обладает-с.

Пример 1.35. $F(x, y) = x^2 + y^2$ (экстремум на $E:\ x + y = 1$).

$L = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ \lambda = -1$. Найдена точка, подозрительная на экстремум. Проверим, действительно ли это так. Найдем вторую производную функции Лагранжа:

$x + y = 1 \Rightarrow dx + dy = 0$ (условие (6)).

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$

Теперь $d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2dx^2 + 2dy^2 \underbrace{=}_{(6)} 2dx^2 + 2(dx^2) = 4dx^2$ — определена положительно, следовательно $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — точка условного минимума.

Пример 1.36. $F(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$

Условие: $E:\ x^2 + y^2 = 9$.

Сначала ищем безусловные экстремумы внутри области:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-1) = 0$
$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-2) = 0$

Следовательно, $(1,2)$ — подозрительная на экстремум точка.

$dF(1,2) = 2dx^2 + 2dy^2$ — положительно определена, значит, $(1,2)$ — точка условного минимума.

Дальше исследуем функцию на границе:

$F(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$, ищем экстремум на $\overline{E}:\ x^2+y^2=9$.

$L = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x^2+y^2-9)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 2(y-2) + 2\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Откуда $x(1+\lambda) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+\lambda}$, $y(1+\lambda) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{1+\lambda}$

$\lambda = -1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{6}{\sqrt{5}} \end{cases}$ и $\lambda = -1 - \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{6}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Найдем дифференциалы второго порядка:

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$ $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2 + 2\lambda$

1) $\lambda = -1 + \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow d^2L(M_1) = \frac{2\sqrt{5}}{3}dx^2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}dy^2$.

Вообще говоря, следует использовать условие $2xdx + 2ydy = 0$, но в данном случае в этом нет необходимости (форма очевидно положительно определена).

1) $\lambda = -1 - \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow d^2L(M_2) = -\frac{2\sqrt{5}}{3}dx^2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}dy^2$. M_2 — точка глобального максимума.

Итого:

$(1,2)$ — точка глобального минимума;

(M_2) — точка глобального максимума.

Пример 1.37. $u = xy + yz$

Экстремум на $E: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$

$n = 2$ (количество зависимых переменных), $m = 1$ (количество независимых).

$L = xy + yz + \lambda_1(x^2+y^2-2) + \lambda_2(y+z-2)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda_1 x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = y + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Ответ: $M: x = y = z = 1,\ \lambda_1 = -\frac{1}{2},\ \lambda_2 = -1$.

Считаем вторые дифференциалы:

$d^2L = 2\lambda_1 dx^2 + 2\lambda_1 dy^2 + 2dxdy + 2dydz = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$ — эта форма не является знакоопределенной.

Применим условия (6):

Дифференцируем уравнения связи: $\begin{cases} 2xdx + 2ydy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$, откуда, подставив точку M:

$\begin{cases} dx + dy = 0 \\ dy + dz = 0 \end{cases}$

Выразим: $\begin{cases} dx = -dy \\ dz = -dy \end{cases}$.

Подставим полученные условия:

$d^2L = -(-dy)^2 - dy^2 + 2(-dy)dy + 2dy(-dy) = -6dy^2$ — очевидно отрицательно определена, значит, достаточное условие выполнено.

1.16 Геометрические приложения производных в пространстве $\mathbb{R}^3$

1.16.1 Касательные и нормали к кривой в $\mathbb{R}^3$

Касательная к кривой по-прежнему прямая, а вот нормаль станет плоскостью.

L — кривая в $\mathbb{R}^3$.

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$

и $t \in [\alpha, \beta]$.

И пусть φ, ψ, χ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$.

$t_0 \in [\alpha, \beta]$,

$\begin{cases} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \psi(t_0) \\ z_0 = \chi(t_0) \end{cases}$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$.

Зададим приращение Δt:

$\begin{cases} \overline{x} = \varphi(t_0 + \Delta t) \\ \overline{y} = \psi(t_0 + \Delta t) \\ \overline{z} = \chi(t_0 + \Delta t) \end{cases}$

Проведем секущую через точки M_0 и $\overline{M}$.

$\overline{M}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

$\overline{M_0\overline{M}}$:

$$\frac{x - x_0}{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi(t_0 + \Delta t) - \chi(t_0)}$$

Домножим всё на Δt:

$$\frac{\frac{x - x_0}{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)}}{\Delta t} = \frac{\frac{y - y_0}{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)}}{\Delta t} = \frac{\frac{z - z_0}{\chi(t_0 + \Delta t) - \chi(t_0)}}{\Delta t}$$

Устремим $\Delta t \to 0 \Rightarrow \overline{M} \to M_0 \Rightarrow$

Уравнение касательной в M_0:

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi(t_0)}$$

$\vec{n} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \chi'(t_0))$ — направляющий вектор касательной.

Нормалью к кривой в точке M_0 называется плоскость, перпендикулярная касательной.

Тогда уравнение нормали в точке M_0 будет иметь вид:

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0)$$

1.16.2 Уравнение касательной и нормали к поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$

Касательная — плоскость, нормаль — прямая.

Поверхность в трехмерном пространстве может задаваться следующими стандартными способами:

1) Явное задание: $z = f(x, y),\ (x, y) \in E \subset \mathbb{R}^2$.

2) Неявное задание: $F(x, y, z) = 0$.

3) Параметрическое задание:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

где $(u, v) \in \Delta$.

Эти три способа можно свести один к другому. Действительно, пусть поверхность задана в явном виде. Тогда свести к неявному виду просто - достаточно перенести z. Сведение к параметрическому из явного:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Докажем, что возможно из неявного в явный:

Пусть для определенности $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции можно выразить $z = f(x, y)$.

Аналогично, пусть функция задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

Предположим, что функции имеют непрерывные частные производные и

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} = 2$$

Если ранг меньше 2, то поверхность выродится либо в кривую, либо в точку.

Если ранг равен двум, то матрица имеет ненулевой минор. Пусть, для определенности, его образуют два первые столбца:

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда, по теореме о системе неявных функций из первых двух уравнений параметрического задания можно выразить:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \Rightarrow z = \chi(u(x, y), v(x, y)) \text{ — получен явный вид.}$$

Выведем уравнение касательной нормали для всех трех способов задания:

Начнем с параметрического задания:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

где $(u, v) \in \Delta$.

Пусть L — поверхность, задаваемая этими уравнениями.

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(u_0, v_0) \\ y_0 = \psi(u_0, v_0) \\ z_0 = \chi(u_0, v_0) \end{cases}$$

$M_0(x_0, y_0 z_0) \in L$.

Зададим структуру

$$K_v = \begin{cases} x = \varphi(u_0, v) \\ y = \psi(u_0, v) \\ z = \chi(u_0, v) \end{cases}$$

— кривая, лежащая на поверхности и проходящая через точку M_0.

Аналогично

$$K_u = \begin{cases} x = \varphi(u, v_0) \\ y = \psi(u, v_0) \\ z = \chi(u, v_0) \end{cases}$$

— другая подобная кривая.

$\vec{n_u}$ — направляющий вектор к K_u в M_0 и $\vec{n_v}$ — направляющий вектор к K_v в M_0. (Как строить подобное — смотри предыдущий подпараграф).

Теперь:

$\vec{n_u} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\chi}{\partial u}\right)|_{M_0}$, $\vec{n_v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\chi}{\partial v}\right)|_{M_0}$.

Обозначим $\vec{n} = \pm\vec{n_u} \times \vec{n_v} =$

$$= \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0} = \pm\vec{i} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0}}_{A} + \vec{j} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0}}_{B} + \vec{k} \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0}}_{C}$$

$n = \pm(A, B, C)$

Знак $+$ или $-$ зависит от выбора стороны поверхности.

Замечание 1.24. Поверхность будем называть двусторонней, если она обладает следующим свойством:

Выберем некоторую точку на поверхности. В этой точке построим нормаль в каком-то направлении. И рассмотрим произвольный замкнутый контур, лежащий на поверхности и имеющий начало и конец в этой точке. Сдвигаем нормаль по контуру. Нормаль должна вернуться в исходную точку в том же направлении.

Ежали этого не произошло, то поверхность односторонняя.

Далее под поверхностями будем понимать двустороннюю поверхность.

Под стороной поверхности будем понимать ту сторону, в которую смотрит нормаль.

Выпишем единичную нормаль. $\vec{n_e} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$, где $\lambda = \angle(\vec{n_e}, Ox)$, $\mu = \angle(\vec{n_e}, Oy)$, $\nu = \angle(\vec{n_e}, Oz)$.

$$\cos\lambda = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\lambda = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\lambda = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Уравнение касательной плоскости (A, B, C те же самые):

$$A(x-x_0) + B(x-x_0) + C(z-z_0) = 0$$

Пусть теперь поверхность задана в явном виде:
$z = f(x,y),\ (x,y) \in E,\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in L,\ (x_0, y_0) \in E$ и $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Сведем к уравнению в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \qquad \begin{matrix} u_0 = x_0 \\ v_0 = y_0 \end{matrix}$$

Вычисляем по формулам, выведенным для параметрического вида:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial u}|_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0}$$

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial v}|_{M_0} = -\frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{M_0} = 1$$

Неявное задание. Сведем к явному:

$$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow z = f(x,y)$$

По теореме о неявной функции:

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}$$

$$B = -\frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}$$

$$C = 1$$

Касательная плоскость:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}(x-x_0) + \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}|_{M_0}(y-y_0) - (z-z_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}|M_0(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}|M_0(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_{M_0}(z-z_0) = 0 \quad ?$$

Пример 1.38. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Попробуем в явном виде: $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Нам не нравится.

Запишем в параметрическом (сферические координаты):

$u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ v \in [0, 2\pi]$

Параметризуем:

$\begin{cases} x = R\cos v \cos u \\ y = R \sin v \cos u \\ z = R\sin u \end{cases}$

Возьмем $u_0 = \frac{\pi}{6},\ v_0 = \frac{\pi}{3}$.

$M_0 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{4}, \frac{3R}{4}, \frac{R}{2}\right)$.

Выпишем уравнение через неявный вид: ($F = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$)

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z(z - z_0) = 0$$

Что вытекает в:

$$\sqrt{3}\left(x - \frac{R\sqrt{3}}{4}\right) + 3\left(y - \frac{3R}{4}\right) + 2\left(x - \frac{R}{2}\right) = 0$$

2 Интегральное исчисление функции нескольких переменных

2.1 Двойной интеграл

Определение 2.1. Пусть задана область $E \subset \mathbb{R}^2$. E — простая (E ограничена простым (т.е. не самопересекающимся) контуром) и связная область. И пусть E ограничена. В этой области задана $f(x, y)$, она еще и ограничена ($\exists M = \text{const} : \ |f(x, y)| \le M \ \forall (x, y) \in E$) в этой области. Разбиваем область E на n произвольных непересекающихся кусочков: $E = \cup_{i=1}^{m} E_i$. За d_i обозначим диаметр (супремум максимальной хорды) i-ого кусочка. $\lambda = \max_{i=\overline{i,n}} d_i$ — ранг дробления. За ΔS_i обозначим площадь этого кусочка. Тогда:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$$

(сумма Римана)

Если существует конечный предел $\lim \sigma$ и этот предел не зависит от способа дробления и выбора $\xi_i,\ \eta_i$, то он называется двойным римановым интегралом по области E:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_E f(x, y) dS$$

Замечание 2.1. Предположим, что $\exists \iint_E f(x, y)dS$. Тогда предел суммы Римана не зависит от способа дробления области E. Порежем область E на кусочки с помощью прямых, параллельных осям координат. Тогда, за исключением погрешности на границе (которая стремится к нулю при ранге дробления, стремящемся к нулю), область E разобьется на прямоугольники. Считаем, что E_i — прямоугольник со сторонами $\Delta x_i,\ \Delta y_i$. Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Если устремить ранг дробления к нулю, то $dS = dxdy$. Поэтому далее будем обозначать двойной интеграл как $\iint_E f(x, y)dxdy$.

2.1.1 Свойства двойного интеграла.

1) Пусть $\exists \iint_E f(x,y)dxdy = I$. Пусть L — кривая в области E. И пусть $f^*(x,y)$ строится по правилу: $f^*(x,y) = f(x,y)\ \forall(x,y) \in E \backslash L$. Тогда $\exists \iint_E f^*(x,y)dxdy = I$.

2) Если $f(x,y) \equiv 0$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$.

3) Если $f(x,y) \equiv 1$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy = S(E)$ (площади области).

4) Если $f(x,y) \geq 0$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy \geq 0$.

5) Если $S(E) = 0$, то $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$ $(\forall f)$.

6) $\iint_E (c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y))\, dxdy = c_1 \iint_E f_1(x,y)dxdy + c_2 \iint_E f_2(x,y)dxdy$, где c_1, c_2 — константы.

7) Если $E = E_1 \cup E_2$ и E_1, E_2удовлетворяют условиям двойного интеграла, то $\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy$.

8) Если $f(x,y) \leq g(x,y)$, то $\iint_E f(x,y)dxdy \leq \iint_E g(x,y)dxdy$.

9) $m \leq f(x,y) \leq M\ \forall(x,y) \in E \Rightarrow mS(E) \leq \iint_E f(x,y)dxdy \leq MS(E)$.

10) $\left|\iint_E f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_E |f(x,y)|\, dxdy$.

Теорема 2.1. *(о среднем)*

$f(x,y)$ — непрерывна в области E. Тогда $\exists(a,b) \in E:\ \iint_E f(x,y)dxdy = f(a,b) \cdot S(E)$.

Доказательство. По первому свойству без потери общности считаем, что область E замкнута. Тогда по теореме Вейерштрасса у этой функции $\exists m = \min_E f(x,y)$, $\exists M = \max_E f(x,y)$. Тогда по свойству 9 получаем $mS(E) \leq \iint_E f(x,y)dxdy \leq MS(E)$. Если $S(E) = 0$, то теорема очевидна. Поэтому предположим, что $S(E) > 0$. Площадь положительна, поделим неравенство на нее:

$$m \leq \frac{1}{S(E)} \iint_E f(x,y)dxdy \leq M$$

По теореме Больцано-Коши $\exists(a,b) \in E:\ f(a,b) = \frac{1}{S(E)} \iint_E f(x,y)dxdy$. □

Пример 2.1. (физического приложения двойного интеграла (ненавижу физику))

Пусть имеется плоская пластина E, плотность которой меняется непрерывно. И пусть в некоторой системе координат задана плотность пластины: $\rho(x,y)$ в точке (x,y). Порежем нашу пластину на множество непересекающихся кусочков: $E = \cup_{i=1}^n E_i$. Пусть m_i — масса E_i. Тогда $m_1 \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Тогда

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$$

(Где M — масса пластины). Устремим ранг дробления к нулю и получим

$$M = \iint_E \rho(x,y)dxdy$$

2.1.2 Условие существования двойного интеграла

$E = \cup_{i=1}^n E_i$, E_i — простые, связные, непересекающиеся. ΔS_i — площать E_i, λ — ранг дробления.

$m_i = \inf_{E_i} f(x,y),\ M_i = \sup_{E_i} f(x,y)$.

$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i$ — нижняя сумма Дарбу.

$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i$ — верхняя сумма Дарбу.

Свойства:

1) $s \leq \sigma \leq S$ на любом дроблении.

2) Пусть есть два дробления τ_1, τ_2 и пусть дробление τ_2 получено путем дальнейшего дробления дробления τ_1 (Больше дроблений богу дроблений!) Тогда дробление τ_2 мельче дробления τ_1. Тогда если s_1, S_2 — суммы Дарбу для τ_1, а s_2, S_2 — суммы Дарбу для τ_2, то $\begin{cases} s_2 \geq s_1 \\ S_2 \leq S_2 \end{cases}$. То есть при ранге дробления, стремящемся к нулю, нижняя сумма возрастает, а верхняя — убывает.

3) $\forall s \leq \forall S$.

Теорема 2.2. *(критерий интегрируемости)*

Для существования двойного интеграла $\iint_E f(x,y)dxdy$ *необходимо и достаточно* $\exists \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$.

Доказательство. Аналогично одномерному случаю. ☐

Теорема 2.3. *(достаточное условие интегрируемости)*

Если функция $f(x,y)$ *— непрерывна в области* E*, то* $\exists \iint_E f(x,y)dxdy$.

Доказательство. По 1) свойству без потери общности считаем, что E замкнута. По теореме Кантора $f(x,y)$ равномерно непрерывна, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \lambda < \delta \Rightarrow \omega_i = M_i - m_i \leq \varepsilon\ \forall i = \overline{1,n}$. Тогда рассмотрим разность сумм Дарбу:

$$0 \leq S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta S_i \leq \varepsilon S(E)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$. ☐

Теорема 2.4. *Если функция* $f(x,y)$ *— кусочно непрерывна в области* E*, то* $\exists \iint_E f(x,y)dxdy$.

2.1.3 Геометрический смысл двойного интеграла

Предположим, что функция неотрицательна в E. Тогда $z = f(x,y)$ выше Oxy. За T обозначим трехмерное тело, удовлетворяющее следующему условию: $\begin{cases} 0 \leq z \leq f(x,y) \\ (x,y) \in E \end{cases}$. Властью, данной нам матаном нарекаем это тело криволинейным брусом. Разобьем область: $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$, E_i — простые, связные, непересекающиеся. ΔS_i — площать E_i, λ — ранг дробления. Такому дроблению области E соответствует дроблению криволинейного бруса: $T = \cup_{i=1}^{n} T_i$. Обозначим за ΔV_i объем T_i, а объем всего бруса — V. Очевидно, что $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$. Обозначим $m_i = \inf_{E_i} f(x,y),\ M_i = \sup_{E_i} f(x,y)$.

Тогда $m_i \Delta S_i \leq \Delta V_i \leq M_i \Delta S_i$. Просуммировав неравенство, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_1 \Delta S_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i$$

По теореме о двух милиционерах при устремлении ранга дробления к нулю $V = \iint_E f(x,y)dxdy$.

Замечание 2.2. Если $f(x,y) \leq 0$ в E, то $V = -\iint_E f(x,y)dxdy$. Если тело ограничено областями $z = f_2(x,y)$ и $z = f_1(x,y)$ сверху и снизу соответственно, то $V(T) = \iint_E \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right) dxdy$.

Пример 2.2. $\iint_E (1-x-y)dxdy$. (картинка, 2 шт)

$\iint_E (1-x-y)dxdy = V(T) = \frac{1}{3}\cdot S(E)\cdot 1 = \frac{1}{6}$.

Замечание 2.3. В данном параграфе при определении интеграла предполагалось, что E ограничена и $f(x,y)$ ограничена в E. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, то тогда интеграл называется несобственным.

$\forall E' \subset E : \begin{cases} E' & \text{огр.} \\ f(x,y) & \text{огр в } E \end{cases}$. Тогда $\iint_E f(x,y)dxdy = \lim_{E'\to E}\iint_{E'} f(x,y)dxdy$. Если этот предел существует, конечен и не зависит от выбора E', то несобственный интеграл называется сходящимся.

2.1.4 Правила вычисления двойного интеграла

$E : \begin{cases} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$

(картинка)

$\iint_E f(x,y)dxdy = ?$.

Предположим, что $f(x,y) \ge 0$ в E. Геометрический смысл двойного интеграла — объем криволинейного бруса.

Делаем следующее. Выберем $\forall x \in [a,b]$. Разрежем наш брус плоскостью $x = \text{const}$. Обозначим за $S(x)$ площадь полученного сечения. Воспользуемся прошлогодней формулой:

$$V(T) = \int_a^b S(x)dx$$

(картинка)

При этом по той же формуле

$$S(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$$

Таким образом, двойной интеграл свелся к повторному:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (*)$$

Покажем, что формула $(*)$ будет верна и без предположения о неотрицательности функции f.

$\forall f(x,y)$ — ограничена, следовательно, $\exists m = \text{const} > 0 :\ m + f(x,y) \ge 0$ в E.

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_E \left[(f(x,y)+m)-m\right]dxdy = \iint_E (f(x,y)+m)\,dxdy - \underbrace{\iint_E mdxdy}_{=m\overline{S}(E)} =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x,y)+m)\,dy - m\overline{S}(E) = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} mdy\right) dx - m\overline{S}(E) =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy + \underbrace{\int_a^b m(y_2(x)-y_1(x))dx}_{=m\overline{S}(e)} = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Поменяем переменные x, y местами.

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

Тогда получим аналогичную формулу, но в другом порядке:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_i(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

Пример 2.3. $\iint_E f(1-x-y)dxdy$ на множестве.

$$\iint_E f(1-x-y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 (y - xy - \frac{y^2}{2})|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left((1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = {}^1\!/_6$$

Второй способ:

$$\iint_E (1-x-y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-x-y)dx = {}^1\!/_6$$

Пример 2.4. $\iint_E f(x,y)dxdy$ по области (рисунок)

1 способ:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

2 способ:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x,y)dx$$

Пример 2.5. $\iint_E f(x,y)dxdy$ по области $1 \le x^2+y^2 \le 4$ (рисунок и разбивка)

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} + ... + \iint_{E_4}$$

2.2 Криволинейные интегралы первого рода

Пусть имеется плоскость xy и в этой плоскости задана кривая $l \in \mathbb{R}^2$, A — ее начало, B — конец. Пусть L — длина l, и $L < \infty$. Пусть на l определена и ограничена на $f(x, y)$.

Разобьем кривую на несколько дуг:

$$A = M_0 M_1 ... M_n = B$$

За ΔS_i — длина дуги $M_i \breve{M}_{i+1}$. $\lambda = \max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta D_i$ — ранг дробления. $\forall (\xi_i \eta_i) \in M_i \breve{M}_{i+1}$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

Определение 2.2. Если существует конечный предел $\lim_{\lambda \to 0} \sigma$ и этот предел не зависит от способа дробления кривой l и выбора точек ξ_i, η_i, то он называется криволинейным интегралом первого рода.

Для него верны все свойства интеграла, в частности, $\int_{(l)} dS = L$.

Криволинейные интегралы первого рода не зависят от ориентации кривой, то есть неважно, считать ли A началом кривой, а B концом или наоборот.

Пример 2.6. (физическое приложение)

Пусть дана плоская изогнутая железяка и $\rho(x, y)$ — плостность сего прута. Для простоты считаем, что плотность меняется равномерно. Задача: найти массу этого прутка.

$$M = \int_{(l)} \rho(x, y) dS$$