Trabajo Práctico N^o 1
Análisis Matemático II

Grupo 10: Ponce, Pitinari, Pietroski, Perez

Consigna

2) Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$.

Respuesta

Es falso, explicado en el teorema 18 y la observación 19 del apunte, ya que si una función f es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces es integrable en el mismo intervalo. En conclusión la continuidad es una condición suficiente de integrabilidad, pero no necesaria.

Demostración

Vamos a demostrar con un contraejemplo en el apunte, el ejemplo 15:
Consideramos una función $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Considerando un $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de $[0, 2]$, suponemos para algun $k\epsilon\{1, ..., n\}$ se tiene que $t_{k-1} < 1 < t_k$.
Teniendo eso en cuenta para cualquier $i \neq k$, se sabe:

$$m_i = M_i = 0$$

Pero por otro lado para $[t_{k-1}, t_k]$:

$$m_k = 0 \wedge M_k = 1 \Rightarrow$$
$$\text{L(f, P)} = \text{m}_k(t_k - t_{k-1}) = 0, U(f, P) = (t_k - t_{k-1})M_k = t_k - t_{k-1}$$

Evitando que una de las particiones de P con coincida con 1.
Tomemos ahora $\varepsilon > 0$ arbitrario y elijamos $n\epsilon\mathbf{N}$ suficientemente grande de modo que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Consideremos la partición:

$$P_\varepsilon = \{t_0 = 0, t_1 = \tfrac{2}{n}, t_2 = \tfrac{4}{n}, ..., t_n = \tfrac{2n}{n} = 2\}$$
$$\Rightarrow U(f, P) - L(f, P) = t_k - t_{k-1} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Luego por el Teorema 12, f es integrable.
Mientras que:

$$L(f, P) = 0 \leq U(f, P) \therefore \int_0^2 f(x)dx = 0$$