Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2021

1er Cuatrimestre- 1er Parcial - 26/04/2021

******* ******** ******** *******

Todas las hojas entregadas deben tener Apellido y Nombre, Legajo y Carrera. También deben indicar el número de hoja sobre el total.

1. Sea A una matriz de tamaño 3×3 y $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}$ la forma escalonada a la que se llega luego de aplicar eliminación de Gauss, sin intercambios de filas, con los siguientes multiplicadores: $\ell_{21} = \ell_{31} = \ell_{32} = -2$. ($\ell_{ij}$ multiplica la fila pivote j cuando se resta de la fila i).
   - *a*) Determinar A.
   - *b*) ¿Existen valores de g para los cuales $rg(A) = 1$? Justificar.
   - *c*) Determinar los valores de g para los cuales $rg(A) = 2$. Justificar.
   - *d*) Describir $N(A)$ para un valor de g en que $rg(A) = 2$.
   - *e*) Para el valor de g usado en el ítem anterior, encontrar la solución general del sistema $Ax = (1,-1,-2)^T$.
   - *f*) Describir $C(A)$ para un valor de g tal que $rg(A) = 3$.
2.
   - *a*) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$? Justificar.
     1) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y+3z \leq 0\}$.
     2) $B = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = b \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
   - *b*) Elegir un subespacio vectorial entre los conjuntos de los ítems anteriores y dar una base del mismo.
3. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 2, incluyendo el polinomio nulo.
   - *a*) Sean $\mathscr{B}_1 = \{2+x, x^2+3, -2\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{x, 0, x^2\}$. Determinar cuál de estos conjuntos es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   - *b*) Determinar una base ordenada $\mathscr{B}_3$ que contenga el máximo número de vectores l.i. del conjunto del ítem anterior que no resultó base.
   - *c*) Encontrar la matriz de cambio de base desde la base del ítem *a*) a $\mathscr{B}_3$.
4. Las siguientes matrices definen, respectivamente, transformaciones lineales T_1 y T_2 del plano en si mismo, con base canónica.
$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   - *a*) Describir la ley de T_1 y de T_2 sobre un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$, en función de sus componentes.
   - *b*) Justificar por qué T_1 es un isomorfismo y calcular la matriz asociada a T_1^{-1}.
   - *c*) Determinar la matriz asociada a $T_1 \circ T_2$.
   - *d*) Describir qué operación geométrica del plano representan T_1, T_2, T_1^{-1} y $T_1 \circ T_2$.
5. Sean $\mathscr{B}_1 = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{1, x\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_1[x]$ respectivamente. Sea $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_1[x])$ cuya matriz asociada, con respecto a las bases $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$, es $A_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   - *a*) Explicitar la ley de la transformación lineal T para un vector arbitrario de $\mathbb{R}^3$ con componentes (a,b,c) en la base canónica.
   - *b*) Obtener la matriz B_T asociada a T con respecto a la base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3$ y $\mathscr{B}_2$.