Tomás
Pitinari
Hoja 1

①

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists H'>0 \,/\, x<-H' \Rightarrow |g(x)-0|<\varepsilon$

$\Rightarrow |g(x)|<\varepsilon$ Por i

Luego para algún $H''>0$ tenemos $\underbrace{h(x)\le g(x)\le |g(x)|}_{-|g(x)|\le g(x)\le |g(x)|} \Rightarrow *$

$* \quad h(x)\le |g(x)| \quad \forall x\le -H''$

Luego para un $\varepsilon>0$ tomamos $H\le \min(H',H'')$ y se cumple

$x\le H \Rightarrow h(x)<\varepsilon$

$\Rightarrow |h(x)|<\varepsilon$ ya que $h(x)>0$ por iii

$\Rightarrow |h(x)-0|<\varepsilon$ por elemento neutro

$\therefore \lim_{x\to-\infty} h(x)=0$

Hoja 2

2

$$f(x)\begin{cases} a+x^2 & \text{si } x<1 \\ b & \text{si } x=1 \\ cx^3+x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si f(x) es derivable en x=1, debe cumplirse que existan los limites por ambos lados y estos sean iguales

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{a+x^2-a-1}{x-1} = \frac{\overbrace{x^2-1}^{0}}{\underbrace{x-1}_{0}} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{cx^3+x-c-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{c(x^3-1)+(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{c(x^3-1)}{x-1} + 1 \stackrel{1}{=}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{c(x^2+x+1)(x-1)}{x-1} + 1 = \lim_{x\to 1^+} c(x^2+x+1) = 3c+1$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | -1 |
| 1 | | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$\therefore\ 2 = 3c+1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{3}}$$

1 es raiz de $(x^3-1)$ 1

~~Ahora tendremos que verificar que~~

$$\cancel{\lim_{x\to 1^-} f(x) = b = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} a+x^2 = a+1 = 2 \therefore \boxed{a=1}}$$

Hoja 3

Como asumimos que $f(x)$ va a ser derivable en $x=1$, entonces es continua en el mismo punto

$\therefore 3c+1 = \boxed{2 = b} \quad \wedge \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} a + x^2 = a + 1 \Rightarrow a + 1 = 2$

$\boxed{a = 1}$

b) Demostramos la derivabilidad de $f(x)$ en $x=1$ seleccionando a, b y c. Entonces falta ver para los $x<1$ y $x>1$.

Para $x<1$ tenemos una función cuadrática que ya sabemos que es derivable en todo su dominio.

Para $x>1$ tenemos una función polinómica que también sabemos que son derivables en todo su dominio.

Por lo tanto $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R} = Dom(f)$.

c) Para los $x<1$, $f'(x) = 2x$

Para los $x>1$, $f'(x) = x^2+1$

Para $x=1$, $f'(x) = 0$

Como $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x)$ va a estar acotada en los $\mathbb{R} \Rightarrow Dom(f') = \mathbb{R}$


$$f'(x) \begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ 0 & \text{si } x=1 \\ x^2+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Hoja 4

(4) tenemos $x_1, x_2$ y $x_3$ minimos relativos y que $f(x_2) \overset{(1)}{\geq} f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Por el teorema de Lagrange podemos decir

$\exists x_5 \in (x_1, x_2) / f'(x_5) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Por hipotesis sabemos que $x_1 < x_2 \therefore x_2 - x_1 > 0$

Por hipotesis y definicion de maximo absoluto (1) sabemos que $f(x_2) > f(x_1)$ y tambien sabemos que son distintos por hipotesis

$\therefore f(x_2) - f(x_1) > 0$

Entonces $f'(x_5) > 0$ y $x_5 \in (x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$

Por otro lado $\exists x_4 \in (x_2, x_3) / f'(x_4) = \dfrac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$

$x_2 < x_3$ por hip. $\therefore x_3 - x_2 > 0$

Por lo mismo que el caso anterior tenemos $f(x_2) > f(x_3)$

$\therefore f(x_3) - f(x_2) < 0$

Entonces $f'(x_4) < 0$ y $x_4 \in (x_2, x_3) \subset \mathbb{R}$

Queda demostrado que existen $x_4, x_5 \in \mathbb{R} / f'(x_4) < 0 < f'(x_5)$

Hoja 5

5) a) $f(x)=3$ tiene 2 soluciones reales.

Como es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$ y es par, entonces f será estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$. También pasa por el punto $(0,-1)$. Vemos que es verdadera, ya que por ejemplo existe $f(x)=x^2-1$ que cumple los puntos:

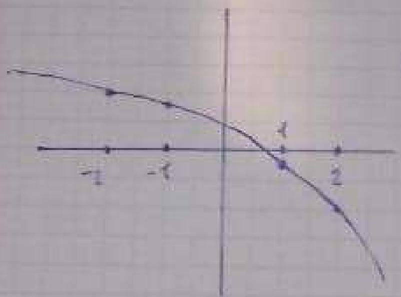
i) $f(x)=3 \Leftrightarrow x^2-1=3 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ dos soluciones

ii) Para $0<x_1<x_2 \Longrightarrow x_1 x_1 < x_2 x_2 \Longrightarrow x_1^2 < x_2^2$

iii) $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$ es para

iv) $f(0)=0^2-1=-1 \therefore (0,-1)\in G_f$

b) Falso. Para que una función sea impar debería ~~estar~~ ser simétrica respecto al ~~eje~~ origen para todos sus puntos. Este sería un boceto de un contraejemplo




se podría observar que

$g(-1) \neq -g(1)$

Hoja 6

⑥ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$

" $g(x) = L_2$ " " $\exists \delta_2 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon$

$\exists \rho > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \rho \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

Entonces para un $\delta < \min(\delta_1, \delta_2, \rho)$ se tiene

$-\varepsilon < g(x) - L_2 < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + L_2 < g(x) < \varepsilon + L_2$

$-\varepsilon < f(x) - L_1 < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + L_1 < f(x) < \varepsilon + L_1$

Hoja 7

③ $f(x) = x + \tan x - 4$

a) Tenemos que $x$ es continua y creciente en todo su dominio por ser la funcion identidad. Por otro lado sabemos que $\tan x$ es creciente y continua en $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ y $-4$ solo genera un corrimiento vertical en 4 unidades para abajo.

Dados $x_1 < x_2 \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

tenemos que $\tan(x_1) < \tan(x_2) \Rightarrow x_1 + \tan(x_1) < x_2 + \tan(x_2)$

y restamos 4 de ambos lados $\Rightarrow x_1 + \tan x_1 - 4 < x_2 + \tan(x_2) - 4$

Demostramos que $f(x)$ es creciente y continua (por suma de funciones continuas) en $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$. Entonces $f$ admite inversa y va a estar definida en $[f(-\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4})] = Dom(f^{-1})$ y su recorrido será $Rec(f^{-1}) = [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$

b) $f^{-1}(-4) = x \iff f(x) = -4$ $\quad (f^{-1})'(-4) = \frac{1}{\quad}$

$x + \tan x = 0$

$\tan x = -x$