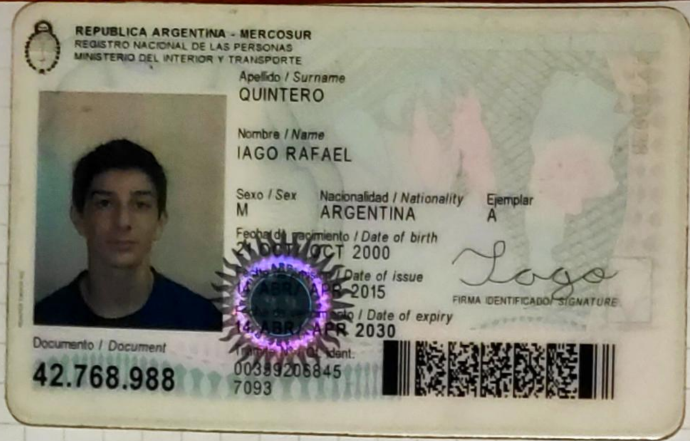


1) Por ser extremo relativo de una función continua

$\exists x_1 \in Dom(f),\ \delta_1 > 0 \ / \ f(x) < M \quad \forall x \in E(x_1, \delta)$

y

$f(x_1) = M \ \wedge \ f(x_3) = M'$

Asumimos que $x_1 < x_3$ y definimos $g(x) = f(x) - M$

$g(x)$ continua por álgebra de f continuas

definimos un intervalo cerrado $[x_1 + \varepsilon, x_3]$

con $f(x_1) = M$, $f(x_3) = M'$, $0 < \varepsilon < \delta$

$f(x_1 + \varepsilon) < M$

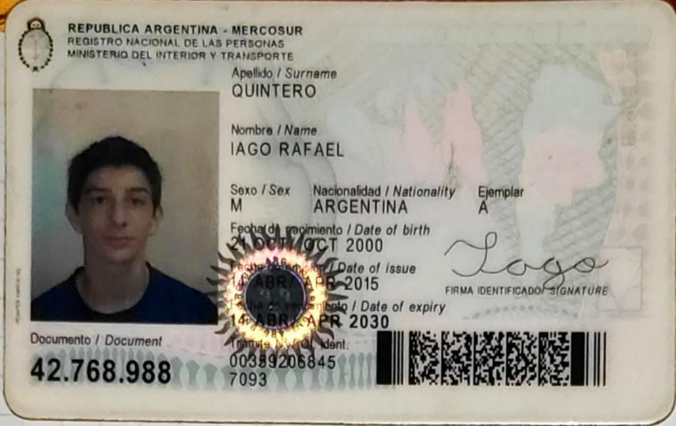
por def de extremo relativo

$(x_1 + \varepsilon) \in E(x_1, \delta)$

~~$f(x_3) > M$~~

$f(x_3) = M' > M$ por hipótesis

1)



$\therefore \quad F(x_1+\varepsilon) - M < 0 \;\wedge\; F(x_3) - M > 0$

$g(x_1+\varepsilon) < 0 \;\wedge\; g(x_3) > 0$

Como $g(x)$ continua en $[x_1+\varepsilon, x_3]$ y $g(x_1+\varepsilon)\cdot g(x_3) < 0$ por el T de bolzano

$\exists\, x_2 \in [x_1+\varepsilon, x_3] \,/\, g(x_2)=0$

$\therefore \quad F(x_2) = M \;\wedge$

$x_2 \geq x_1+\varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

$x_2 > x_1$

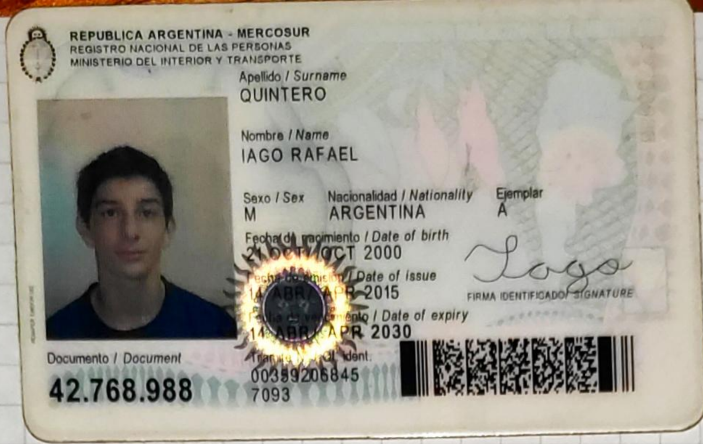
$\Rightarrow x_2 \neq x_1$

de manera analoga si $x_1 > x_3$

$\exists\, x_2 \in [x_3, x_1-\varepsilon] \,/\, g(x_2)=0$

y como $x_1 \neq x_2 \;\wedge\; F(x_1) = F(x_2) = M$

$F^{-1}(\{M\}) \supseteq \{x_1, x_2\}$



Iago
Quintero

2) a) F inyectiva $\Rightarrow F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$F(a \cdot x_1) = F(a \cdot x_2)$$

* por F inyectiva tiene una única preimagen

$$a \cdot x_1 = a \cdot x_2$$

$$x_1 = x_2$$

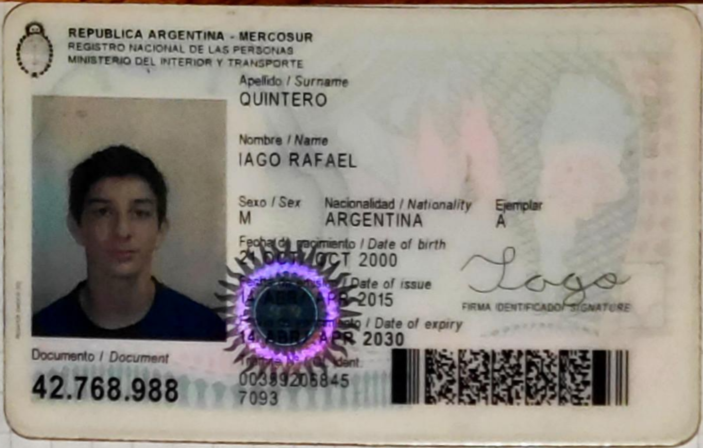
* $a \neq 0$, $\exists$ recíproco

$\therefore \; g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$g(x)$ inyectiva

b) $\text{Dom}(g) = [0, a]$

$\text{Rec}(g) = [0, 1]$



3) $F(x) = e^{-x} - x^3 + 1$

$F'(x) = (e^{-x} - x^3 + 1)' = -e^{-x} - 3x^2$

$e^{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$-e^{-x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad -3x^2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad -e^{-x} - 3x^2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$F(x)$ decreciente en su dominio

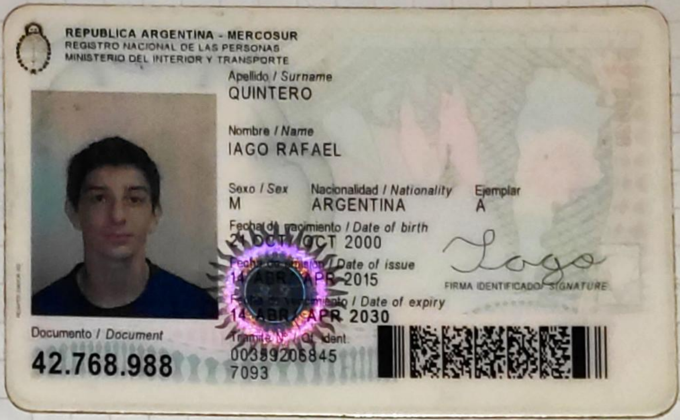
$F(x)$ continua por ser suma de funciones continuas

$F(x)$ continua y decreciente $\Rightarrow$ admite inversa

b) $F(0) = e^0 - 0^3 + 1 = 2$

$\therefore F^{-1}(2) = 0$ def inversa

4)



4) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0,\ \varepsilon > 0 \,/\, x > \delta \Rightarrow |F(x) - 0| < \varepsilon$

$$x > \delta \Rightarrow |F(x)| < \varepsilon$$

por $Rec(F) > 0$

$$x > \delta \Rightarrow F(x) < \varepsilon$$

$$x > \delta \Rightarrow \frac{1}{F(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$$

def $\frac{1}{\varepsilon} = M$

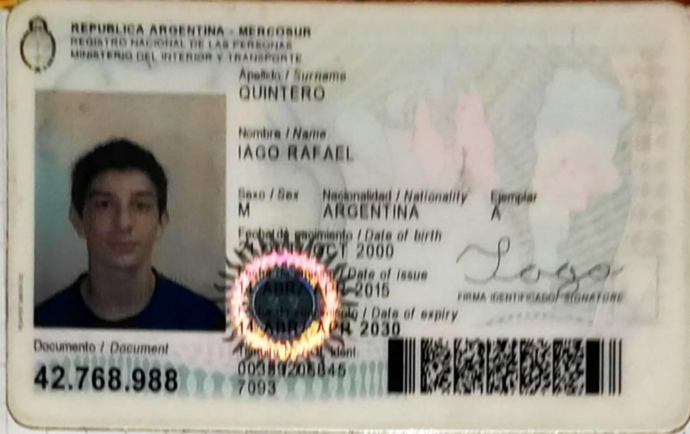
$$x > \delta \Rightarrow \frac{1}{F(x)} > M$$

por def Limite inF en el inF

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{F(x)} = +\infty$$

5

5



5) $F(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad R_2 = \int_0^1 \sqrt[3]{x}$ $\qquad R_1 = 1 - R_2$

$$\int \sqrt[3]{x} = \int x^{1/3} = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$

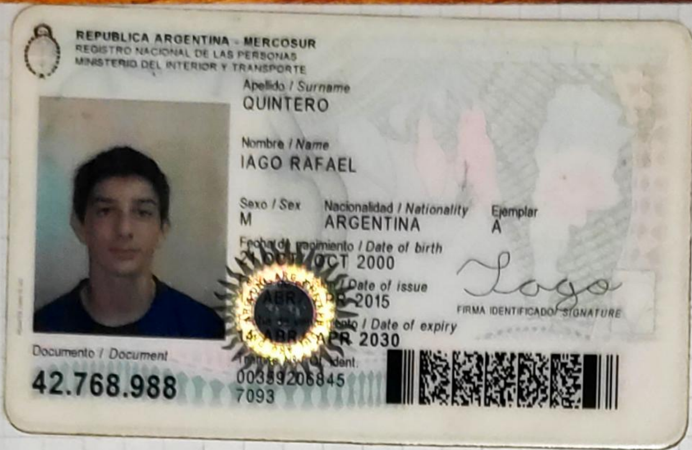
$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} = P(1) - P(0) \quad \text{por barrow}$$

$$= \frac{3}{4} 1^{4/3} + C - \frac{3}{4} 0^{4/3} - C$$

$$= 3/4$$

$\therefore R_2 = 3/4$, $R_1 = 1/4$

6)



7) Definimos $F(x) = 3e^{-|x|} - 2$

Si $x > 0 \Rightarrow F'(x) = (3e^{-x} - 2)' = -3e^{-x}$

Si $x < 0 \Rightarrow F'(x) = (3e^{x} - 2)' = 3e^{x}$

Como $e^{x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$-3e^{-x} < 0 \ \wedge \ 3e^{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $F(x)$ creciente en $[-2, 0)$ y

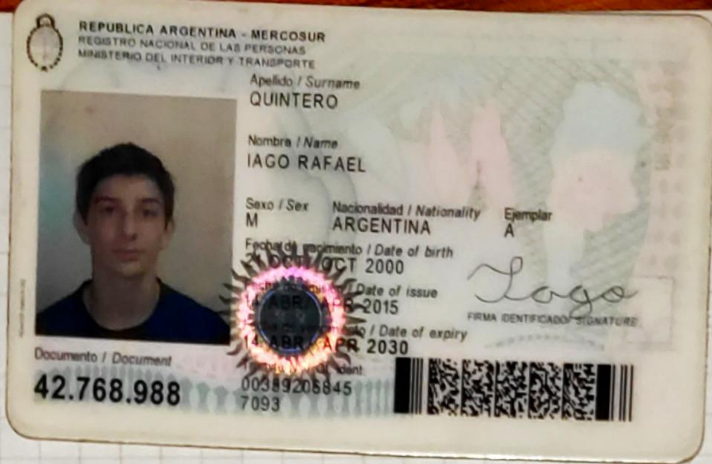
$F(x)$ decreciente en $(0, 2]$ (1)

$F(x)$ continua por ser composición de funciones continuas (2)

$F(0) = 3e^{-0} - 2 = 1$ (3)

$F(2) = 3e^{-2} - 2 = -1{,}5\ldots$

$F(-2) = 3e^{-2} - 2 = -1{,}5\ldots$



por ser continua en $[0,2]$ y $F(0) \cdot F(2) < 0$

por el teorema de bolzano $\exists x \in (0,2) / F(x)=0$

y analogamente $\exists x \in (-2,0) / F(x)=0$

por ser creciente y continua en $[-2,0)$

$F(x)$ inyectiva en $(-2,0)$ y por lo tanto

$F(x) = 0$, $x \in (-2,0)$ tiene solución unica

y analogamente $F(x)=0$ tiene solución unica en $(0,2)$

~~por lo tanto~~

$\therefore F(x) = 0$ tiene 2 soluciones en $[-2,2]$

y $3e^{-|x|}=2$ tambien