Árboles

S. Bianchi P. Fekete F. Domingo

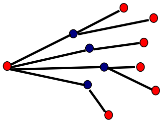
[1] Deptartamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
UNR

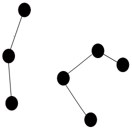
23 de septiembre de 2021

DEFINICIÓN

Un árbol es un grafo conexo que no contiene ciclo como subgrafo.
Un bosque es un grafo que no contiene ciclos.

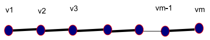
Ejemplos



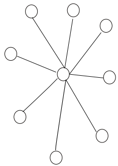


El grafo de la izquierda es un árbol, mientras que el grafo de la derecha es un bosque.

Un camino es un árbol



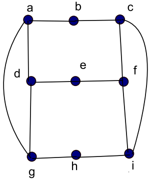
Una estrella es un árbol que consiste en un vértice adyacente a todos los demás vértices del árbol.

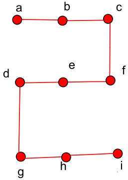


DEFINICIÓN

Dado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo generador de G es un subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es V.
Un árbol generador de G es un subgrafo generador que es un árbol.

Ejemplo





El árbol de la derecha es un árbol generador del grafo de la izquierda.

Notación

Si un grafo es un árbol, entonces lo denotamos como $T = (V, E)$.

Observaciones

- Sea $G = (V, E)$. Si $|V| = 1$ entonces G es un árbol si y sólo si $E = \emptyset$.
- Sea $G = (V, E)$. Si $|V| = 2$ entonces G es un árbol si y sólo si G consiste en una única arista, es decir $|E| = 1$.
- $T = (V, E)$ no tiene ciclos, por lo tanto es bipartito.
- El árbol generador de T es el propio T.

Teorema 1

Sea $T = (V, E)$ un árbol. Si $a, b \in V$ entonces existe un único camino que conecta a con b.

Demostración

T es conexo, entonces existe un camino P que une a con b.

Si existiera otro camino Q que une ambos vértices, entonces la unión de las aristas en P y Q contiene un ciclo.

Pero T no tiene ciclos por definición.

Por lo tanto el camino en T desde a hacia b es único.

$\star$

Teorema 2

Si $G=(V,E)$ es un grafo no dirigido, entonces G es conexo si y solo si G tiene un árbol generador.

Demostración

Si G tiene un árbol generador T, entonces $V(G)=V(T)$ y existe camino entre cualquier par de vértices en G. Por lo tanto G es conexo.
Supongamos que G es conexo y no es un árbol. (Si fuera un árbol el teorema está probado.)
Como G no es un árbol, entonces tiene un ciclo C_1. Sea e_1 arista de C_1 y sea $G_1 = G - e_1$. Es claro que G_1 es conexo.
Si G_1 no es un árbol entonces tiene un ciclo C_2. Sea e_2 arista de C_2 y sea $G_2 = G_1 - e_2$. Nuevamente G_2 es conexo.
Si G_2 no es un árbol, continuamos este proceso un número finito de pasos hasta conseguir un grafo conexo y sin ciclos, es decir un árbol generador de G.

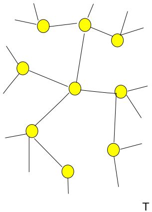
$\star$

TEOREMA 3

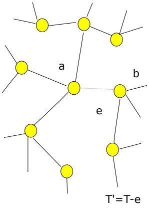
Si $T = (V, E)$ es un árbol entonces $|V| = |E| + 1$.

Demostración

La demostración es por inducción sobre $|E|$.
Si $|E| = 0$ entonces T es un vértice aislado y vale $1 = |V| = |E| + 1$.
Supongamos que el resultado es válido cuando $|E| \leq k$ y $k > 0$.
Consideremos un árbol T con $k + 1$ aristas.

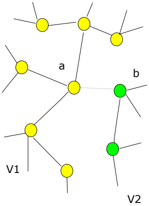


Sea $e = \{a, b\} \in E$ y la eliminamos de T. Sea $T' = T - e$



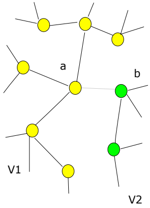
Observemos que T' no es conexo, ya que no existe otro camino en T que una a con b distinto de la arista e.
Sea $V_1 \subset V$ tal que $x \in V_1$ si existe un camino que une x con a que no utiliza la arista e.
Es claro que $b \notin V_1$, $a \in V_1$ (el camino trivial con 0 aristas lo garantiza) y el subgrafo de T inducido por V_1 es conexo y no tiene ciclos, por lo tanto es un árbol al que llamaremos T_1.

Sea $V_2 = V - V_1$. Es claro que $b \in V_2$. Además si $y \in V_2$, el único camino que une y con a utiliza la arista e. Es decir, existe un camino que une b con y para todo $y \in V_2$.



Entonces el subgrafo inducido por V_2 es conexo y no tiene ciclos, es un árbol al que llamamos T_2.
Por lo tanto $T_1 = (V_1, E_1)$ y $T_2 = (V_2, E_2)$ son las dos componentes conexas que se consiguen cuando eliminamos e de T.
Es decir $|E_1| + |E_2| + 1 = |E|$.

T_1 y T_2 tienen a lo sumo k aristas cada uno, por lo tanto vale $|V_i| = |E_i| + 1$ para $i = 1, 2$.



Entonces
$|V| = |V_1| + |V_2| = |E_1| + 1 + |E_2| + 1 = (|E_1| + 1 + |E_2|) + 1 = |E| + 1$.
$\star$

TEOREMA 4

Sea $T=(V,E)$ un árbol. Si $|V|\geq 2$ entonces T tiene al menos dos pendientes.

Demostración

Sea $n=|V|\geq 2$.
Por el Teorema 3 sabemos que $|E|=n-1$.
Además vale $2(n-1)=\sum_{i=1,\ldots,n} deg(v_i)$.
Como G es conexo tenemos que $deg(v_i)\geq 1$ para todo $i=1,\ldots,n$.
Si existe j tal que $deg(v_j)=1$ y $deg(v_i)\geq 2$ para todo $i=1,\ldots,n$ con $i\neq j$, entonces

$$2(n-1)=\sum_{i=1,\ldots,n} deg(v_i)\geq 1+2(n-1),$$

que es una contradicción.

TEOREMA 5

Sea $G = (V,E)$ un grafo no dirigido sin lazos. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(A) G es un árbol.

(B) G es conexo, pero $G-e$ no es conexo para cualquier $e \in E$. Más aún $G-e$ tiene dos componentes conexas que son árboles.

(C) G no contiene ciclos y $|V| = |E|+1$.

(D) G es conexo y $|V| = |E|+1$.

(E) G no contiene ciclos y si $a,b \in V$ con $\{a,b\} \notin E$ entonces $G+e$ donde $e = \{a,b\}$, contiene un ciclo.

Demostración

(A)$\Rightarrow$ (B)

La prueba de esta implicancia se encuentra dentro de la demostración del Teorema 3.

(Se deja como ejercicio)

(B)$\Rightarrow$ (C)

Por hipótesis G es conexo. Si G tiene un ciclo, y e es una arista en el ciclo, sigue que $G-e$ es conexo.

Contradicción con las hipótesis en (B) sobre G. Por lo tanto G no tiene ciclos.

Ahora veremos que $|V| = |E| + 1$.

Si $|V| = 1$ entonces $|E| = 0$ (ya que G no tiene lazos). Por lo tanto satisface la ecuación.

Si $|V| > 1$ entonces existe $e \in E$ ya que G es conexo.

De acuerdo a las hipótesis en (B), sabemos que $G-e = T_1 \cup T_2$, con T_1 y T_2 árboles.

Demostración (cont.)

Si $T_i = (V_i, E_i)$ para $i = 1, 2$, entonces vale por el Teorema 3 que $|V_i| = |E_i| + 1$ para $i = 1, 2$.

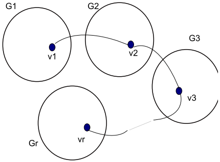
Como $V = V_1 \cup V_2$ y $E = E_1 \cup E_2 \cup \{e\}$ es inmediato que $|V| = |E| + 1$.

$\star$

(C)$\Rightarrow$ (D)

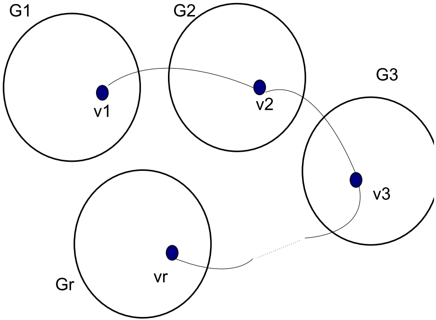
Sea $\kappa(G) = r$ y llamamos $G_i = (V_i, E_i)$ con $i = 1, \ldots, r$ a las componentes conexas de G.

Elegimos $v_i \in V_i$ para $i = 1, \ldots, r$ y sea $E' = E \cup \bigcup_{i=1,\ldots,r-1} \{v_i, v_{i+1}\}$. Es fácil ver que $|E'| = |E| + r - 1$.



Demostración (cont.)

Llamamos al grafo $G' = (V, E')$.



Observemos que G' es un árbol, pues es conexo y no tiene ciclos.
Entonces vale $|V| = |E'| + 1$, pero también por hipótesis en (C) vale $|V| = |E| + 1$.
Sigue que $|E'| + 1 = (|E| + r - 1) + 1 = |E| + r = |E| + 1$ y resulta $r = 1$.

$\star$

Demostración(cont.)

(D)$\Rightarrow$ (E)

Sabemos G es conexo entonces sea $T = (V, E')$ el árbol generador de G (sabemos que existe por el Teorema 2). Es claro que $E' \subset E$.

Como T es un árbol, vale $|V| = |E'| + 1$. Pero por hipótesis sobre G vale $|V| = |E| + 1$.

Sique que $|E'| = |E|$ y como $E' \subset E$ entonces $E' = E$.

Es decir $G = T$ y entonces no contiene ciclos.

Ahora sean $a, b \in V$ tales que $\{a, b\} \notin E$.

Como G es conexo, existe un camino P en G que une a con b.

Si $G' = G + \{a, b\}$, entonces el conjunto de arista en P junto con $\{a, b\}$ determinan un ciclo.

$\star$

(E)$\Rightarrow$ (A)

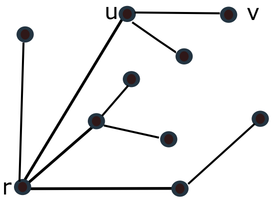
Ejercicio para entregar

$\star$

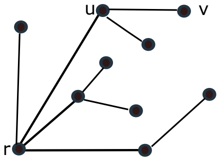
ÁRBOLES CON RAÍZ

Sea $T=(V,E)$ y elegimos un nodo en V, $r \in V$, y lo llamamos raíz.
Un árbol T con raíz se llama árbol enraizado.

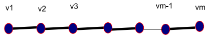
Sea $T=(V,E)$ un árbol con raíz r. Sea $v \in V$, $v \neq r$. Entonces sabemos que existe único camino que une r con v.



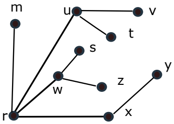
El camino está formado por las aristas $\{r,u\},\{u,v\}$.



Se dice que r es el *padre* de u y v es el *hijo* de u.
La raíz r no tiene padre, pero todos sus vecinos son sus hijos.
Todo nodo en T distinto de la raíz, tiene un padre en T.
Cuando un nodo no tiene hijos (v en nuestro ejemplo) se lo llama *hoja*.
Es decir, toda hoja es un nodo de grado 1 (a excepción de la raíz r).



Sea $T=(V,E)$ un árbol con raíz r .
Siempre existe un camino desde la raíz r hacia cualquier otro nodo v de T.
Vamos a considerar el grado de entrada y grado de salida de $v \in V$ como si existiera un camino dirigido desde r a v.
Así $deg_e(r)=0$ y $deg_e(v)=1$ para todo $v \in V$ $v \neq r$.
Si $deg_s(v)=0$ entonces v es una hoja en T.
Si el camino de r a v en T tiene longitud 2 decimos que v está en el nivel 2 del árbol o tiene número de nivel 2.

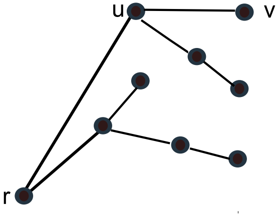


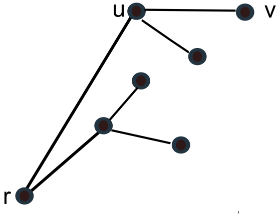
En este ejemplo: $deg_s(r)=4$, $deg_s(w)=deg_s(u)=2$, los vértices m,v,t,s,z,y son hojas en el nivel 2 salvo m en el nivel 1.

Definición

Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz r. Decimos que T es un árbol binario si $deg_s(v) \leq 2$ para todo $v \in V$.
Si $deg_s(v) \in \{0, 2\}$ para todo $v \in V$ se dice que T es un árbol binario completo.

Aquí vemos un arbol binario y otro binario completo.





Definición

Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz r y sea $m \in \mathbb{Z}^+$. Decimos que T es un árbol m-ario si $deg_s(v) \leq m$ para todo $v \in V$. Si $deg_s(v) \in \{0, m\}$ para todo $v \in V$ se dice que T es un árbol m-ario completo.

Observación:

El caso particular $m = 2$ da como resultado un un árbol binario.

Teorema 6

Sea $T = (V, E)$ un árbol con raíz, m-ario completo con $n = |V|$.
Si T tiene h hojas e i vértices intermedios entonces:

$$n = mi + 1, h = (m-1)i + 1, i = \frac{n-1}{m}.$$

Demostración

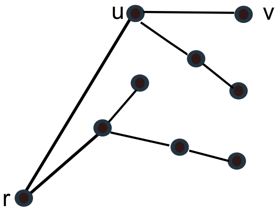
Ejercicio.

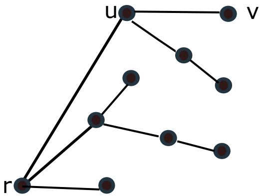
Árboles con raíz

Definición

Sea $T=(V,E)$ un árbol con raíz r y a el número máximo de nivel de una hoja en T. Entonces se dice que T tiene altura a. Decimos que T con altura a es equilibrado si el número de nivel de cada hoja es a o $a-1$.

Aquí vemos un arbol con altura 3 equilibrado y



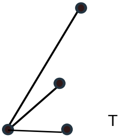


un árbol con altura 3 y no equilibrado.

Teorema 7

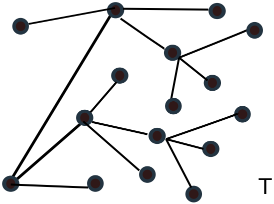
Sea $T=(V,E)$ un árbol con raíz r, de altura $a \geq 1$, m-ario completo con $n=|V|$. Entonces Si T tiene h hojas vale:
$h \leq m^a$ y $a \geq \lceil log_m h \rceil$.

Demostración: Por inducción sobre a.
Si $a=1$, T tiene m hijos y vale $h=m=m^a$.



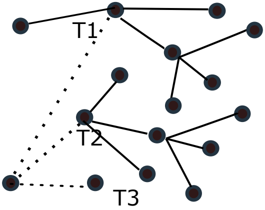
Supongamos que el resultado es válido para cualquier árbol m-ario completo con altura menor que a.

Sea T un árbol m-ario completo con altura a y h hojas.



Los números de nivel posibles para las hojas son $1, 2, \ldots, a$. Al menos m de las hojas están en el nivel a.
Es claro que r tiene m hijos (porque T es m-ario y $a > 1$)

Sea T_i con $i = 1, \ldots, m$ los subárboles de T que se consiguen teniendo como raíz cada hijo de r.



Sea h_i el número de hojas de cada subárbol T_i (en caso en que la raíz de T_i coincida con su hoja, entonces $h_i = 1$)
Por hipótesis de inducción, vale $h_i \leq m^{a(T_i)} \leq m^{a-1}$, donde $a(T_i)$ es la altura de T_i.
Por lo tanto $h = h_1 + h_2 + \ldots + h_m \leq m(m^{a-1}) = m^a$.
$\star$