

# Demostración Algoritmo Prim

## Complementos de Matemática

Pitinari Tomás

### Hipótesis

Sea un grafo  $G = (V, E)$  ponderado, no dirigido y conexos sin lazos.

El árbol  $T$ , resultante usar el algoritmo Prim en  $G$ , es un árbol generador mínimo

### Demostración

Supongamos que existe  $T'$  tal que es el árbol recubridor mínimo de  $G$ . Llamemos  $e$  a la primera arista agregada a  $T$ , que no esté en  $E(T')$ , y llamemos a  $U$  a todos los vértices que fueron elegidos después de  $e$ . Como  $T'$  es el árbol generador mínimo, existe un camino en  $T'$  que une los dos vértices adyacentes de  $e$ , sin usar  $e$  ya que este no pertenece a  $E(T')$ . Llamemos  $e'$  a la arista que une un vértice de  $U$  con un vértice que no está en  $U$  y pertenece al camino mínimo de los dos vértices adyacentes de  $e$  en  $T'$ .

- Si  $P(e) < P(e')$ , el árbol  $T' - e' + e$  tiene menor peso que  $T'$ , lo cual contradice nuestra suposición.
- Si  $P(e) > P(e')$ , como  $e'$  tiene menor peso, entonces el algoritmo Prim la elegiría en ese paso en vez de elegir a  $e$ , por lo tanto es imposible.
- Si  $P(e) = P(e')$ , entonces  $T$  y  $T'$  tendrían la misma cantidad de aristas, con el mismo peso en todas, por lo tanto  $T$  también sería un árbol generador mínimo.

Como en todos los casos se contradice nuestra suposición, tendríamos que el algoritmo de Prim nos da  $T$ , que es un árbol generador mínimo.