UNIDAD 1: Resumen Combinatoria
Álgebra II

Pitinari Tomás

Reglas de suma y producto

Regla de la suma: Si dos tareas se pueden realizar de n y m formas, entonces ambas (no simultaneamente) se pueden realizar de $m + n$ formas.
Ejemplo: La biblioteca de la facultad tiene 15 libros de Matemática Discreta y 7 de Geometría Analítica. Por la regla de la suma, un estudiante puede elegir entre 15 + 7 = 22 libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas.

Def 1: la cardinalidad de un conjunto X es $n \in \mathbb{N}$ si existe una función biyectiva $f : [1, n] \to X$ y se denota $|X| = n$.

Teorema 1: (Principio de adición) si A, B son conjuntos disjuntos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$
dem: Para $|A| = n$ y $|B| = m$, existen $f : [1, n] \to A$ y $g : [1, m] \to B$, entonces notemos:

$$h : [1, n + m] \to A \cup B / h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [1, n] \\ g(x - n) & x \in [n + 1, n + m] \end{cases}$$

es biyectiva. Luego $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$

Corolario 1: Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son conjuntos disjuntos, entonces $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$
Si A, B son conjuntos finitos, entonces $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Regla del producto: Si una tarea se divide en dos etapas, en las cuales hay n y m formas distintas de cada etapa, entonces hay nm formas de hacer la tarea.
Ejemplo: Se encuentran ensayando para una obra de teatro 6 hombres y 8 mujeres. Se necesitan para el papel principal un hombre y una mujer. Por la regla del producto, el director puede elegir para protagonizar de $6 \times 8 = 48$ formas.

Teorema 2: Si A, B son conjuntos finitos, entonces $|A \times B| = |A||B|$
Dem: Sea $A = a_1, ..., a_m, B = b_1, ..., b_n$. Tenemos que probar que $|A \times B| = mn$. Fijamos n y hacemos induccion sobre m.
Si $m = 1$, $A \times B = (a_1, b_1), ..., (a_1, b_n)$. Por def de cardinalidad resulta que $|A \times B| = n = 1.n$.
Suponemos la HI para un m y demostramos para $m + 1$. Sea $A = a_1, ..., a_{m+1}$, entonces
$AxB = ((A - a_{m+1}) \times B) \cup (a_{m+1} \times B)$, escribimos $A \times B$ como la union disjunta de conjuntos, por lo tanto utilizando el principio de adicion y la HI, tenemos $|A \times B| = mn + m = (m + 1)n$

Corolario 2: en teorema anterior se cumple para n conjuntos distintos tambien

Permutaciones:

Def 2: Dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición lineal de ellos se denomina permutación.
Si existen n objetos distintos y queremos ver cuantas permutaciones de tamaño $r/0 \leq r \leq n$ de ellos hay, tenemos:

$$\underbrace{n}_{\text{primera posición}} \times \underbrace{n - 1}_{\text{segunda posición}} \times \cdots \times \underbrace{n - r + 1}_{\text{r-ésima posición}}$$

y lo notamos como $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n - r)!}$

Preguntar cuantas funciones de $f : X \to X$ existen con repeticiones es $|X||X|$. Pero preguntas cuantas funciones inyectivas existen (sin repeticiones), osea permutaciones, es $|X|!$.

Teorema 3: Sea A, B tal que $|A| = n$ y $|B| = m$, entonces $F(A, B)$ es el conjunto de todas las funciones de A en B, entonces $|F(A, B)| = m^n$.
Dem: una función f de A en B se puede representar como una n-upla $(f(a_1), ..., f(a_n)) \in B \times ... \times B$. Por teorema 2, la cantidad de elementos de $B \times ... \times B$ es m^n.

Nota: al conjunto de todos los subconjuntos de A, se lo denota $P(A)$, se tendra que $|P(A)| = |F(A, 0, 1)| = 2^n$ ya que para cada elemento se puede cumplir que este o no en un subconjunto.

Teorema 4: Si $|A| = n, |B| = m$ y $n \leq m$ entonces para una $f \in F(A, B)$ es inyectiva, se cumple $|f| = \dfrac{m!}{(m-n)!}$
Dem: Como es inyectiva es una permutaciones de los valores de m de tamaño n

Si tenemos n objetos, tal que hay n_1 de un tipo, n_2 de otro tipo,..., y n_r de otro tipo, tal que son indistinguibles entre ellos y $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$, entonces existen $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$ disposiciones lineales.
Ejemplo: BANANA tiene 2 N, 3 A y 1 B, entonces tiene $\dfrac{6!}{3!2!1!} = \dfrac{6!}{3!2!}$.

Combinaciones

Si existen n objetos distintos cada selección de objetos sin hacer referencia al orden, son las permutaciones de largo r, divididas por $r!$. Se denota $C(n, r) = \dfrac{P(n, r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ con $0 \leq r \leq n$

Def 4: Se denomina número combinatorio al definido por $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Proposición 2 sean $r \leq n$ dos naturales:

1. $\binom{n}{1} = n$
2. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
3. $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ (Triangulo de pascal)

Teorema 5: binomio de Newton, Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \tbinom{n}{0}x^n y^0 + \tbinom{n}{1}x^{n-1}y^1 + ... + \tbinom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \tbinom{n}{n}x^0 y^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\end{aligned}$$

Dem: Por inducción

Corolario 6:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Teorema 6: el binomio de de Newton es generalizable para r variables, tales que el coef de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_r}$ en el desarrollo $(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n$ tal que $n_1 + n_2 + ...n_r = n$ es $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$

Distribuciones

Si queremos repartir n elementos en r posibilidades, tenemos los n elementos y los $r - 1$ $|$, que representas separadores entre posibilidades y se calcula como $C(n + r - 1, r - 1)$.