Nombre: Tomás Pitinari Legajo: P-5039/3

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&1&\frac{1}{2}&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&0&0\\-2&2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&0&1&\alpha\\0&1&-1&\beta\\0&0&2&\gamma\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}2&-1&0&2\\3&2&3&3\\5&3&2&5\\4&0&-1&4\end{pmatrix}$$

1) $C^t=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\\\frac{1}{2}&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$C^tB=\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & -1 & 1\\ & & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\qquad C^tB+D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Con esto tenemos que $(C^tB+D)\in\mathbb{F}^{4\times 3}$ y $E\in\mathbb{F}^{3\times 4}$ por def., por lo que $(C^tB+D)E\in\mathbb{F}^{4\times 4}$ y $A\in\mathbb{F}^{3\times 3}$ por lo que nunca van a ser iguales. Es falso

2)

$$\det A=(2+0+0)-(0+0+0]=2\qquad \begin{array}{ccc}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\\1&0&1\\0&1&-1\end{array}$$

$$\det\left(\left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right)^2\right)=\det\left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right)\det\left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right)=\frac{1}{16}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\det(A^{-1}).\det(A^{-1})=\frac{1}{16}$$

$$=\frac{1}{64}(\det A)^{-1}.(\det A)^{-1}=\frac{1}{16}$$

$$=\frac{1}{256}=\frac{1}{16}\quad\therefore \text{es falso}$$

3) $\det(F)=0$ Vemos que F es una matriz triangular superior por lo que sabemos que su determinante es la multiplicación de los elemtos de su diagonal:

$\det(F)=0.1.2=0$ $\therefore$ es verdadero

4) $\det(F)=\det(A^t)+\det(G)$

Por ejercicios anteriores sabemos que $\det(F)=0$ y $\det(A^t) \underset{\text{Prop 2.14}}{=} \det(A)=2$. Entonces hay que ver si $\det(G)=-2$

G es una matriz triangular superior por lo que su det. es la multiplicacion de los elementos de su diagonal

$\det(G)=(-1).(-1).2=2$ $\therefore$ es falso

5) $A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$ $A^t+G=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&-1&4\end{pmatrix}$

Como $\det(F)=0$, porque lo calculamos previamente, y $\det(A^t+G)=0$, ya que las filas 1 y 2 son iguales y usamos la prop. 2.15.

$\therefore$ es verdadero

6) podemos ver que H^{-1} no existe porque el $\det(H)=0$, esto lo sabemos porque las columnas 1 y 4 son iguales y luego por la prop. 2.15 $\det(H)=0$. Por lo tanto es Falso.

7) Primero haremos un poco de álgebra:

$G^{-1} = A$

$I . G^{-1} = A$ Multiplicamos por el elemento neutro

$I.(G^{-1}. G) = A . G$ Multiplicamos por G de ambos lados

$I = A . G$ Cancelamos al multiplicar una matriz por su inv.

Ahora hacemos la multiplicación y testeamos:

$$A.G = \begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore \text{es falso}$$