Práctica N°6
Análisis Matemático II

Fabrizio Mettini, Tomás Pitinari

Consigna

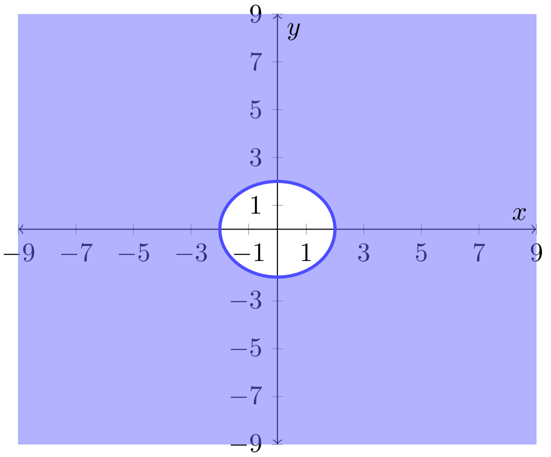
3) Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las ecuaciones y desigualdades de los siguientes ejercicios:
b) $r \geq 2$
d) $r \leq \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$
h) $\theta \geq 1$, $r \geq 2$

5) La región entre la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, y el eje x se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Determine su volumen.

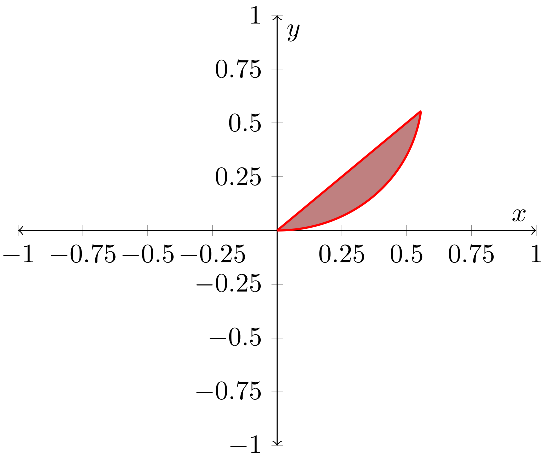
13) Determine una curva que pase por el punto $(0, 1)$, cuya integral de su longitud sea $L = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}}dy$. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

Resolución

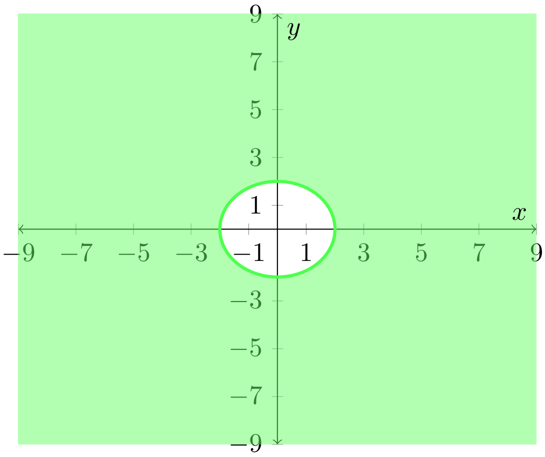
3) b) $\{P = (r, \theta) : \theta \in \mathbb{R}, r \geq 2\}$



d) $\{P = (r, \theta) : \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], r \leq \theta\}$



h)$\{P = (r, \theta) : \theta \geq 1, r \geq 2\}$. En este caso tenemos los puntos tales que sus angulos esten entre $[2k\pi + 0, 2k\pi + 1] : k \in \mathbf{N}$, que se superponen con los puntos cuyos angulos estan en $(-\infty, 1]$.



5) Sea $f[0, 4] \to \mathbf{R}_0^+ / f(x) = \sqrt{x}$. f es continua en [0, 4] y por Teorema 18, f es integrable en [0, 4].
Sea C el cuerpo que se obtiene de rotar la región bajo la gráfica de f alrededor del eje x.
Luego, haciendo uso de la definicion 62,

$$Vol(C) = \pi \int_0^4 f^2(x)dx = \qquad \text{Reemplazando } f(x)$$

$$\pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \qquad \text{Sabiendo que } \sqrt{x}^2 = |x|\text{, tenemos}$$

$$\pi \int_0^4 |x| dx = \qquad \text{Viendo el rango de la integral sabemos que } x \geq 0$$

$$\pi \int_0^4 x dx = \qquad \text{Integramos } x\text{, ya que es una integral conocida}$$

$$\pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \qquad \text{Al hacer las restas nos queda}$$

$$\pi \frac{4^2}{2} = 8\pi$$

13) Utilizamos la definición 66 en base a nuestra y, de donde obtenemos 2 igualdades para nuestra longitud:

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} dy = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(y)^2} dy \qquad \text{Sabiendo esto queremos ver cual es nuestra } f'(y)$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} = \sqrt{1 + f'(y)^2} \qquad \text{Elevamos al cuadrado de ambos lados}$$

$$1 + \frac{1}{y^4} = 1 + f'(y)^2 \qquad \text{Restamos } -1 \text{ de ambos lados}$$

$$\frac{1}{y^4} = f'(y)^2 \qquad \text{Elevamos a } \tfrac{1}{2} \text{ de ambos lados}$$

$$\frac{1}{y^2} = f'(y) \qquad \text{Luego pasamos a integrar } \frac{1}{y^2} \text{ para obtener } f(y)$$

$$-\frac{1}{y} + c = f(y)$$

Una vez obtenido esto buscamos nuesta $g(x)/g(x) = y$:

$$f(y) = x = -\frac{1}{y} + c \qquad \text{Resolviendo llegamos a que}$$

$$g(x) = -\frac{1}{x-c} = y$$

Solo queda buscar un c que satisfaga que $g(0) = 1$, asi que lo vamos a despejar:

$$g(0) = -\frac{1}{0-c} = 1$$

$$\frac{-1}{-c} = 1$$

$$\frac{1}{c} = 1$$

$$c = 1$$

Con esto obtenemos que la función de nuestra fórmula es $g(x) = -\dfrac{1}{x-1}$.
Existen infinitas curvas que pasan por (0,1) y cuyas longitudes entre $y = 1$ e $y = 2$ sean iguales ya que pueden definirse de la misma forma en ese intervalo y luego variar en todo el resto de su dominio.