Alumno: Tomás Pitinari   Legajo: P-5039/3

1) Si queremos que nuestro conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ sea LI, debe tener como única solución al siguiente sistema la trivial:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \delta\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Como queremos que nuestro sistema sea determinado, nuestro δ debe ser distinto de 0. Sabiendo esto obtenemos que $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_4 = 0$, y solo queda nuestro sistema de dos ecuaciones y dos incognitas:

$$\begin{cases} -2 \cdot 0 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \longrightarrow 2\alpha_2 = \alpha_3 \\ \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2} \cdot 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 = 0 \longrightarrow \alpha_3 = 0$$

Obtenemos que la única solución al sistema es la trivial, por lo que nuestro conjunto es LI. Ademas sabemos:

$|\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}| = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^4) \wedge \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es LI

$\Longrightarrow \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ genera $\mathbb{R}^4$ $\quad \therefore \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ es base de $\mathbb{R}^4$

2) Queremos ver si S es un conj generadores de $\mathbb{R}^3$, y digo $\mathbb{R}^3$ ya que usando cualquier operación entre vectores de una misma dimensión no se puede obtener un vector de otra dimensión, por lo que vamos a hacer un procedimiento similar al ejer anterior. Primero vamos a ver si S es LI, entonces planteamos el sist. de ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases}\right\} \therefore S \text{ es LI}$$

Luego solo queda concluir:

$|S| = Dim(\mathbb{R}^3) \wedge S$ es LI $\Rightarrow S$ genera a $\mathbb{R}^3$ $\therefore$ S es Base de $\mathbb{R}^3$

3) Para saber si $\bar{w}$ es una combinacion lineal de $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ y $\bar{w}_3$, planteamos el sist. de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 4 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 4 \end{cases} \xRightarrow[\text{a matriz}]{\text{pasamos}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

Ahora buscamos una matriz equivalente escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 \to f_4 - f_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + 2f_1}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 - \frac{7}{3} f_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasando devuelta a sist de ecuaciones

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \longrightarrow \alpha_1 = -(2-3) = 1 \\ 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \longrightarrow \alpha_2 = \frac{-3}{3} = -1 \\ \frac{19}{3}\alpha_3 = \frac{19}{3} \longrightarrow \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Vemos que $\bar{w}$ es una combinación lineal, por lo tanto $S' = \{\bar{w}, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ va a ser LD ya que existe una solución, ademas de la trivial, que satisface que $\bar{w}\alpha_1 + \bar{w}_1\alpha_2 + \bar{w}_2\alpha_3 + \bar{w}_3\alpha_4 = \bar{0}$

partimos de:

$$\bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \bar{w}_3 = \bar{w}$$

$$\bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \bar{w}_3 - \bar{w} = \bar{w} - \bar{w} = \bar{0} \quad \therefore \text{ es LD}$$

Sabiendo esto, tambien mostramos que no es base, solo queda mostrar si es generador. Para eso planteamos un vector $\bar{x} = (a, b, c, d) / \bar{x} \in \mathbb{R}^4$ y planteamos el sist. de ecuaciones para evaluarlo:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 5\alpha_4 = a \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = b \\ -\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = c \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 5\alpha_4 = d \end{cases} \xrightarrow{\text{Paso a matriz}} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & -1 & 2 & 3 & b \\ -1 & 0 & 3 & 2 & c \\ 4 & 2 & 3 & 5 & d \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & -1 & 2 & 3 & b \\ -1 & 0 & 3 & 2 & c \\ 4 & 2 & 3 & 5 & d \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \to F_4 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & a \\ 0 & -1 & 2 & 3 & b \\ -1 & 0 & 3 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

Se puede ver que el sistema va a ser incompatible cuando $d-a \neq 0$, o $d \neq a$, por lo que S' no es generador