Relaciones

Relaciones

Definiciones

Dados 2 conjuntos A y B, un **par ordenado** es de la forma (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$. a es la primer componente y b la segunda.
Producto cartesiano: $AxB = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$
Se grafica poniendo a los elementos de A sobre el semieje de las x y a los de B sobre el de la Y.

Teorema 1.1

Sean A, B y C:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3. Conmutativa del $\times$

Relacion: Una relacion de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto $\mathcal{R}$ de $A \times B$. Si $(a,b) \in \mathcal{R}$ se dice que a esta relacionado con b por $\mathcal{R}$ y se nota $a\mathcal{R}b$.
Se grafica como el producto cartesiano y pintando los puntos. O en un diagrama de Venn sshace una flecha de a a b si $a\mathcal{R}b$.
$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A : (a,b) \in \mathcal{R}$, para algun $b \in B\}$
$Im(\mathcal{R}) = \{b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}$, para algun $a \in A\}$
Definicion Sea $\mathcal{R}$ una relacion de un conjunto A en un conjunto B. Si $a \in A$, el conjunto
$\mathcal{R}(\{a\}) = \mathcal{R}(a) = \{b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}\}$
es la imagen de a por $\mathcal{R}$, y si $b \in B$, la pre-imagen de b por $\mathcal{R}$ es el conjunto
$\mathcal{R}^{-1}(\{b\}) = \mathcal{R}^{-1}(b) = \{a \in A : (a,b) \in \mathcal{R}\}$
Definicion En general, si $\mathcal{R}$ una relacion de un conjunto A en un conjunto B y X es un subcinjunto de A, el conjunto
$\mathcal{R}(X) = \{b \in B : (a,b) \in \mathcal{R}$, para algun $a \in X\}$
es la imagen de X por $\mathcal{R}$, y si Y es un subconjunto de B, la pre-imagen de Y por $\mathcal{R}$ es el conjunto
$\mathcal{R}^{-1}(Y) = \{a \in A : (a,b) \in \mathcal{R}$, para algun $b \in Y\}$

Definicion Sea $\mathcal{R}$ una relacion de un conjunto A en un conjunto B. La relacion inversa de $\mathcal{R}$, denotada por $\mathcal{R}^{-1}$ es una realcion de B en A definida por: $x\mathcal{R}^{-1}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$. es decir:
$\mathcal{R}^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \mathcal{R}\}$

Teorema 1.3

Si $\mathcal{R}$ es una relacion de un conjunto A en un conjunto B, entonces $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$
Definicion Sean $\mathcal{R}$ una relacion de un conjunto A en un conjunto B y $\mathcal{S}$ una relacion de B en un conjunto C. La relacion composicion de $\mathcal{R}$ con $\mathcal{S}$, denotada como $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ es una relacion de A en C definida por: $x\mathcal{S} \circ \mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists u \in B/x\mathcal{R}u \wedge u\mathcal{S}y$. Es decir,
$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in AxC : (x, u) \in \mathcal{R} \text{ y } (u, y) \in \mathcal{S}, \text{ para algun } u \in B\}$.

Teorema 1.4

Sean $\mathcal{R}$ una relacion de un conjunto A en un conjunto B, $\mathcal{S}$ una relacion B en un conjunto C y $\mathcal{T}$ una relacion de C en un conjunto D. entonces:

1. $T \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$ es asociativa

2. $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$

Relaciones en un conjunto

Definicion

Sean $\mathcal{R}$ una relacion en un conjunto A y $a, b, c \in A$. Se dice que $\mathcal{R}$ es:

- **reflexiva** si $(a, a) \in \mathcal{R}, \forall a \in A$

- **simetrica** si $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$

- **antisimetrica** si $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge a \neq b \Rightarrow (b, a) \notin \mathcal{R}$ o, equivalentemente, si $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$

- **transitiva** si $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$

Relaciones de orden

Definicion

Una relacion $\mathcal{R}$ es un conjunto A es una relacion de orden si es reflexiva, antisimetrica y transitiva.
Cuando $\mathcal{R}$ es una relacion de orden en un conjunto A, si $(a, b) \in \mathcal{R}$ diremos que a es anterior a b (precede) y se nota $a \prec b$.
Al par $(A, \mathcal{R})(o(A, \prec))$ se lo llama conjunto ordenado.
Definicion: Sea $(A, \prec)$. Diremos que 2 elementos distintos $x, y \in A$ son comparables si $x \prec y$ o $y \prec x$.
Un conjunto ordenado es **totalmente ordenado** si todo par de elementos es comparable.
Definicion: Sean $(A, \mathcal{R})$ y $B \subseteq A$. El **orden inducido por** $\mathcal{R}$ **en B** es $\mathcal{R}_B = \mathcal{R} \cap (BxB)$, es decir, si $x, y \in B, x\mathcal{R}_B y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$. La relacion $\mathcal{R}_B$ se llama **orden en B inducido por** $\mathcal{R}$
Un conjunto ordenado $(B, \mathcal{S})$ es un **subconjunto ordenado de** $(A, \mathcal{R})$ si $B \subseteq A$ y $\mathcal{S} = \mathcal{R}_B$
Ademas, si $\mathcal{R}_B$ es un orden total en B, $(B, \mathcal{R}_B)$ se llama **subconjunto ordenado de** $(A, \mathcal{R})$ o **cadena**.

Elementos distinguidos de un conjunto ordenado

Definicion: Sea $(A, \prec)$ un conjunto ordenado

- Sea $a \in A$ es un elemento **minimal** si $\forall x \in A / x \prec a \Rightarrow x = a$

- Sea $a \in A$ es un elemento **maximal** si $\forall x \in A / a \prec x \Rightarrow x = a$

- Sea $a \in A$ se llama **minimo (o primer elemento)** si $\forall x \in A / a \prec x$

- Sea $a \in A$ se llama **maximo (o ultimo elemento)** si $\forall a \in A / x \prec a$

Si existen el minimo o el maximo estos son unicos.
Definicion: Sean $(A, \prec)$ y $B \subseteq A$.
Un elemento $a \in A$ se llama **cota inferior** para B si $a \prec x, \forall x \in B$. Una cota inferior a' de B es el **infimo de B** si $a \prec a', \forall$ cota inferior de B.
Un elemento $a \in A$ se llama **cota superior** para B si $x \prec a, \forall x \in B$. Una cota superior a' de B es el **supremo de B** si $a' \prec a, \forall$ cota superior de B.
Si un conjunto ordenado tiene cotas superiores (inferiores) se dice que esta **acotado superiormente (inferiormente)**. Si tiene ambas, se dice que el conjunto es **acotado**.

Relaciones de equivalencia

Definicion: Una relacion $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una **relacion de eeuivalencia** si es **reflexiva, simetrica y transitiva**.
Cuando $\mathcal{R}$ es una relacion de equivalencia en un conjunto A, si $(a, b) \in \mathcal{R}$ diremos que a es **equivalente** a b y se nota $a \sim b$
Dada una relacion de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto A y un elemento $a \in A$, el conjunto $\mathcal{R}(a)$ se llama **clase de equivalencia de a**, y se nota [a], es decir,
a
$=\{x \in A : (a, x) \in \mathcal{R}\}$
Observar que, como $\mathcal{R}$ es simetrica, [a]$=\{x \in A : (x, a) \in \mathcal{R}\}$. Todo elemento $x \in [a]$ se dice que es un **representante** de esa calse de equivalencia.

Proposicion 3.2

Sean $\mathcal{R}$ una relacion de equivalencia en un conjunto A y $a, b \in A$. Entonces:

1. $[a] \neq \emptyset$

2. $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow [a] = [b]$

3. $(a, b) \notin \mathcal{R} \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Notar que:
Todo elemento de A pertenece a alguna clase
Dos clases de equivalencia, o bien son iguales, o bien son conjuntos disjuntos.
Defincion: Una **particion** P de un conjunto A es una coleccion de conjuntos no vacios $\{X_1, X_2, ...\}$ tales que

- si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \emptyset$

- $\forall a \in A, \exists X_i \in P / a \in X_i$

Proposicion 3.3

Sea P una particion del conjunto A. Existe una unica relacion de equivalencia en A cuyas clases de equivalencia son los elementos de P.
Definicion Sea $\mathcal{R}$ una relacion de equivalencia en un conjunto A. Llamaremos **conjunto cociente de A por** $\mathcal{R}$, y lo notamos $A \mid_{\mathcal{R}}$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de A

definidas por $\mathcal{R}$, es decir:

$A\mid_{\mathcal{R}} = \{[a] : a \in A\}$