Demostracón del Lema 2
Complementos de Matemática

Pitinari Tomás

Lema 2

Si todo subgrafo de un grafo G tiene un nodo de grado a lo sumo d entonces G es $d+1$-coloreable

Demostracion:

Iniciamos con un grafo $G = (V, E)$ tal que para todo $G' \subseteq G, \exists v \in V(G')/deg(v) \leq d$ (Hipótesis).

Si $|V| \leq d$, entonces se ve trivialmente que podemos utilizar al menos un color diferente, de los $d+1$ colores, por cada vértice y asi volverlo $d+1$-coloreable.

En caso contrario, sabemos por hipótesis que $\exists v \in V/deg(v) \leq d$, entonces pintamos v de un color y los a lo sumo d vertices adyacentes a v con un color diferente para cada uno. Obtenemos el subgrafo $G' = G - v$, donde sabemos tambien $\exists x \in V(G')/deg(x) \leq d$.

Repetimos el proceso con los subgrafos inducidos de G, sin pintar los vértices ya pintados, hasta quedarnos con d vertices, donde ya podemos ver que se cumple el lema.