Cuestionario Apunte 8
Análisis Matemático II

Camila Koatz, Mehauod Janise, Nannini Albano, Tomás Pitinari, Scacheri Pedro

Consignas

1) Sea f un polinomio de grado n dado como $f(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot x^j$. Suponga que $f(a) = 0$. Entonces si $P_{n,a}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot (x-a)^j$, se tiene $a_i = b_i$ para todo $i \geq 0$.

7) Para la forma de Cauchy y de Lagrange del resto, se requiere $f^{(n+1)}$ acotada sobre $[a, x]$.

Resolución

1) Consideramos a la función $f(x) = x^2 - 1$ y facilmente podemos observar que 1 es raiz de f, ya que $f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Luego realizamos el polinomio de Taylor de grado 2 en el punto 1 para nuestra función.
Tenemos que $f(1) = 0$, luego que $f'(x) = 2x \to f'(1) = 2$ y finalmente $f''(x) = 2 \to f''(1) = 2$, sabiendo esto obtenemos:

$$P_{2,1}(x) = (x-1)^2 + 2 \cdot (x-1)$$

Llegamos a que es falso, ya que los coeficientes de f y de $P_{2,1}$ no coinciden.

7) Por la definición del polinomio de Taylor y su resto tenemos que,

$$f(x) = P_{a,n}(x) + R_{a,n}(x)$$

Y utilizando la forma de Cauchy del resto

$$f(x) = P_{a,n}(x) + \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$$

$$f(x) - P_{a,n}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a) = R_{n,a}(x) \qquad (*)$$

Sabiendo, por la hipótesis del Teorema 86, que nuestra función $f(x)$ es derivable en $[a, x]$ n+1 veces, esto implica que es continua en ese intervalo, y sus imágenes están acotadas (por Teorema de Weierstrass) y que $f(x) - P_{n,a}(x)$ esta acotado por la misma razón, entonces, supongamos $\forall x \in [a, x], |f(x) - P_{n,a}(x)| \leq H$:

$$\text{Sea } f(x) - P_{n,a}(x) = R_{n,a}(x) \Rightarrow |R_{n,a}(x)| \leq H$$

$$\overbrace{\Rightarrow}^{(*)} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a) \leq H \Rightarrow \frac{f^{n+1}(t)}{n!} \leq \frac{H}{(x-t)^n(x-a)}$$

$$\Rightarrow |f^{n+1}(t)| \leq \frac{H \cdot n!}{(x-t)^n(x-a)}$$

Llegamos a la misma conclusión para la forma de Lagrange del resto.
Entonces, sabiendo que $(x-t) \neq 0 \wedge (x-a) \neq 0$, concluimos que f^{n+1} está acotada sobre $[a, x]$.