1

Pitinari
Tomás
LCC
P-5039/3

1) a) $p \leftrightarrow (p \wedge q) \models p \to q$

$\exists v \,/\, [\![p \leftrightarrow (p \wedge q)]\!]_v = T \iff [\![p]\!]_v = \min([\![p]\!]_v, [\![q]\!])$

para que $\models p \to q$, tiene que cumplirse que:
$[\![p]\!]_v \leq [\![q]\!]_v$

Vemos por casos:

- Si $[\![p]\!]_v = F \implies \min(F, [\![q]\!]_v) = F$, entonces se es válida en ese caso ya que $F = [\![p]\!]_v \leq [\![q]\!]_v \leq T$

- Si $[\![p]\!]_v = T$, hay dos casos:
  - $[\![q]\!]_v = F \implies \min(T, F) = F \neq T$, entonces como no son iguales, no cumple la premisa
  - $[\![q]\!]_v = T \implies \min(T, T) = T$, cumple la premisa y queda probado en todos los casos que $[\![p]\!]_v \leq [\![q]\!]_v \therefore p \leftrightarrow (p \wedge q) \models p \to q$

b) $\models (p \to q) \vee (q \to r)$
~~Para saber~~ si Nos dice que:
$\forall v \,/\, [\![(p \to q) \vee (q \to r)]\!]_v = T$

por la def de la implicancia $[\![p \to q]\!]_v = F \iff$
$[\![p]\!]_v = T$ y $[\![q]\!] = F$

Como en el resto de los casos la proposición va a ser verdadera, ya que $\max(T, \dots) = T$,

Escaneado con CamScanner

pongamonos en el caso que $\underbrace{[\![q]\!]_v = F}_{1}$ y $[\![p]\!]_v = T$.

Vemos que $[\![q \to r]\!]_v \iff [\![q]\!]_v \leq [\![r]\!]_v \xrightarrow{1} F = [\![q]\!]_v \leq [\![r]\!]_v$

$\therefore \max([\![p \to q]\!]_v, [\![q \to r]\!]_v) = T \quad \forall v$

Pitinari
Tomas
LCC

2) i) $\neg p \vee s,\ s \to q \vdash (r \to p) \to (r \to q)$

1) $\neg p \vee s$ premisa
2) $s \to q$ premisa
3) $r \to p$ hipotesis
4) r hipotesis
5) $\neg p$ hipotesis
6) p $e_{\to 3,4}$
7) $\perp$ $i_\perp$
8) s $e_\perp$
9) q $e_\to$
10) s hipotesis
11) q $e_\to$
12) q $e_\vee (5-9)(10-11)$
13) $r \to q$ $i_\to (4-12)$
14) $(r \to p) \to (r \to q)$ $i_\to (3-13)$

Escaneado con CamScanner

3

Pitinari
Tomas
LFC

2) ii) $\neg p \to \neg q,\ q,\ \neg q \vee r \vdash p \wedge r$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p \to q \quad [\neg p]}{\neg q}\,e_\to}{q}\,t}{\bot}\,i_\neg}{p}\,RAA \qquad \dfrac{\neg q \vee r \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg q]}{q}}{\bot}}{r}\,e_\bot \quad \dfrac{[r]}{r}\,t}{r}\,e_\vee}{p \wedge r}\,i_\wedge$$

4) i) podemos ver que $\phi \models \bot$, ya que

$\forall v\ /\ [\![(p_0 \to \neg p_0) \wedge (\neg p_0 \to p_0)]\!]_v \Longrightarrow$

$\min([\![p_0 \to \neg p_0]\!]_v,\ [\![\neg p_0 \to p_0]\!]_v)$

Si $[\![p_0 \to \neg p_0]\!]_v = T$ y $[\![\neg p_0 \to p_0]\!]_v = T$

$\Longrightarrow [\![p_0]\!]_v \leq [\![\neg p_0]\!]_v$ y $[\![\neg p_0]\!]_v \leq [\![p_0]\!]_v$ absurdo

$\therefore \phi \models \bot$

y no existe $\Gamma \models \phi$ $\cancel{\nexists}$ ya que

$\Gamma \models \phi \Rightarrow \Gamma \models \bot \Rightarrow \exists v\ /\ [\![\Gamma]\!]_v = T \Rightarrow [\![\bot]\!]_v = T$

absurdo

Pitinari
Tomás
LCC

ii) Es imposible, ya que si $\Gamma \nvdash p_0 \to p_1$

p_0 y $\neg p_1$ tienen que pertenecer a Γ para que sea absurdo. ~~pa~~ Pero si p_0 y $\neg p_1$ ~~también~~ pertenecen a Γ, entonces $\Gamma \vdash \bot$ ya que:

$$\dfrac{\neg p_0 \vee p_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg p_0]_t}{p_0}}{\bot} \qquad \dfrac{\dfrac{[p_1]_t}{\neg p_1}}{\bot}}{\bot}\, e_\vee$$

absurdo. $\therefore \nexists \Gamma \,/\, \Gamma \nvdash p_0 \to p_1$ y $\Gamma \vdash \neg p_0 \vee p_1$

iii) Si Γ es inconsistente $\Longrightarrow \Gamma \vdash \bot \therefore \forall \phi, \Gamma \vdash \phi$

$\Gamma = \{p_0, \neg p_1, p_1\}$

iv)

3) Si Γ es consistente y $\Gamma \cup \{\phi\}$ es consistente, entonces sabemos que $\Gamma \vdash \phi$.
Finalmente tenemos que si $\Gamma \vdash \phi \Longrightarrow$
$\exists v \,/\, [\![\Gamma]\!]_v = T \Rightarrow [\![\phi]\!]_v \therefore \phi$ es satisfactible, ya que no tiene que aplicar para toda valuación necesariamente