Numeros Reales

Analisis Matematico I, si hay algun error hablar con Maxi Nielsen 69/69/420

Funciones reales: Generalidades

Definicion funcion

Dados dos conjuntos X e Y, una **funcion** f es una ley que asocia a cada elemento $x \in X$ un unico elemento $y \in Y$.

$$f : X \to Y$$
$$x \to y$$

Llamaremos:

- al conjunto X, **dominio** de la funcioin f y lo denotaremos $Dom(f)$
- al conjunto Y, **codominio** de la funcion f y lo notaremos $Codom(f)$
- al elemento y, **imagen** de x por la funcion f y lo notaremos $y = f(x)$
- al elemento x, **pre-imagen** de y por f

El conjunto de todas las imagenes es el **recorrido de** f o **imagen de** f (tambien se lo puede llamar **rango**) y se lo nota $Rec(f)$ o $Im(f)$, es decir

$$Rec(f) = Im(f) = \{y \in Y : y = f(x) \wedge x \in X\} = f(X)$$

Si una funcion expresa una relacion de la forma $y = f(x)$, x es la **variable independiente** e y es la **variable dependiente**

Operaciones de funciones

Funcion suma: $f + g$

$$f + g : X \to \mathbb{R} \text{ donde } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Funcion diferencia: $f - g$

$$f - g : X \to \mathbb{R} \text{ donde } (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Funcion producto: $f \cdot g$

$$f \cdot g : X \to \mathbb{R} \text{ donde } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Funcion cociente: $\dfrac{f}{g}$

$$\text{Sea } A = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$$
$$\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R} \text{ donde } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Grafica de una funcion. Sistema de coordenadas Cartesianas

Definicion grafica de f

La **grafica de unafuncion** f es el conjunto de pares ordenados (x, y), donde $x \in Dom(f)$ e $y = f(x)$. Notando con G_f a dicho conjunto

$$G_f = \{(x, y) : x \in Dom(f), y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\}$$
$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in Dom(f) \wedge y = f(x)$$

El **eje x** es el de las **absisas** y el **eje y** es el de las **ordenadas**.
A cada elemento de X le corresponde un **unico** elemento en Y

Propiedades de las funciones

0.1 Definicon suryectividad o sobreyectividad

Decimos que una funcion f es **suryectiva** o **sobreyectiva** cuando su recorrido coincide con su codominio. O sea

$$Rec(f) = Codom(f)$$

Definicion inyectividad

Decimosque una funcion f es **inyectiva** cuando a todo par de elementos disitintos del dominio le corresponden distintas imagenes. O sea:

$$x_1, x_2 \in Dom(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$\text{O } x_1, x_2 \in Dom(f), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

En la grafica de una funcion inyectiva, toda recta gorizontal intersea a la grafica de f a lo sumo en un punto.

Definicion biyectividad

Decimos que una funcion f es **biyectiva** cuando es sobreyectiva e inyectiva. Se dice que en este caso existe una correspondencia biunivoca o uno a uno entre el domnio y el codominio de la funcion f.
Un conjunto no vacio A de numeros reales es **simetrico** cuando:

$$x \in A \Rightarrow -x \in A$$

0.2 Definicion funcion par

Una funcion f es **par**, si su dominio es un conjunto simetrico y se verifica:

$$f(x) = f(-x), \forall x \in Dom(f)$$

La grafica de una funcion par es simetrica respecto al eje y, ya que:

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in Dom(f), y = f(x) \Leftrightarrow -x \in Dom(f), y = f(-x) \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f$$

Definicion funcion impar

Una funcion f es **impar**, si su dominio es un conjunto simetrico y se verifica:

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in Dom(f)$$

La grafica de funcion impar es simetrica respecto al origen de coordenadas, ya que:

$$\begin{gathered}(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in Dom(f), y = f(x) \Leftrightarrow -x \in Dom(f), y = -f(-x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x \in Dom(f), -y = f(-x) \Leftrightarrow (-x, -y) \in G_f\end{gathered}$$

Definicion monotonia

Sea A un subconjunto del dominio de f. Si para todo par de puntos x_1, x_2 de A, se tiene:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ entonces f es una funcion **creciente** en A.

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ entonces f es una funcion **decreciente** en A.

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ entonces f es una funcion **no decreciente** en A.

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ entonces f es una funcion **no creciente** en A.

Una funcion se dice que es **monotona** en un conjunto si es creciente o decreciente en dicho conjunto

Grafica de las funciones elementales

Funcion constante

Sea c una constante real

$$\begin{gathered}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) = c \\ G_f = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = c\} = \{(x, c) : x \in \mathbb{R}\}\end{gathered}$$

La grafica de la funcion constante es una recta paralela al eje x de ecuacion $y = c$.

- $Rec(f) = \{c\}$

- $Rec(f) \neq Codom(f) \Rightarrow f$ **no** es sobreyectiva

- $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2) = c \Rightarrow f$ **no** es inyectiva

- $f(-x) = c = f(x) \Rightarrow f$ es una funcion **par**

- Es no creciente y no decreciente

Funcion identidad

$$i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to i(x) = x$$
$$Dom(i) = \mathbb{R}, Codom(i) = \mathbb{R}$$
$$G_i = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = x\} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

la grafica de la funcion identidad i, es la recta de ecuacion $y = x$

- $Rec(i) = \mathbb{R}$

- $Rec(i) = Codom(i) \Rightarrow i$ es sobreyectiva

- $[x_1 \neq x_2 \Rightarrow i(x_1) \neq i(x_2)] \Rightarrow i$ es inyectiva

- La funcion identidad es biyectiva

- $i(-x) = -x = -i(x) \Rightarrow i$ es una funcion impar

- i es una funcion creciente

Funcion lineal

Si $m \neq 0$, el caso $m = 0$ es la funcion constante.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = mx + h$$
$$Dom(f) = \mathbb{R}, Codom(f) = \mathbb{R}$$
$$G_f = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = mx + h\} = \{(x, mx + h) : x \in \mathbb{R}\}$$

la grafica de la funcion lineal f, es la recta de ecuacion $y = mx + h$. Donde m es la pendiente de la recta y h es la ordenada al origen.

- $Rec(f) = \mathbb{R}$

- $Rec(f) = Codom(f) \Rightarrow f$ es sobreyectiva

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ es inyectiva

- La funcion lineal es biyectiva.

- Cuando $h = 0$, $f(-x) = m(-x) = -f(x) \Rightarrow f$ es una funcion impar

- f es una funcion creciente si $m > 0$, y es decreciente si $m < 0$

0.3 Funcion valor absoluto

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = |x|$$

Donde el valor absoluto se define como:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Observemos que cualquiera sea x real,

- $|x| \geq 0$
- $|-x| = |x|$
- $G_f = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = |x|\} = \{(x, y) : (x \geq 0, y = x) \text{ o } (x < 0, y = -x)\}$

o sea la grafica de f consta de dos semirectas de ecuaciones:

$$y = x \text{ si } x \geq 0$$
$$y = -x \text{ si } x < 0$$

- $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$

- $Rec(f) \neq Codom(f) \Rightarrow f$ **no** es sobreyectiva

- $f(-1) = |-1| = 1$ y $f(1) = |1| = 1 \Rightarrow f$ **no** es inyectiva

- $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow f$ es una funcion par. La grafica de f es simetrica respeeto al eje y

- f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y f es creciente en $[0, +\infty)$

Funcion cuadratica

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x^2$$

- $G_f = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = x^2\} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$

- $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow f$ es una funcion par la grafica de f es simetrica respecto al eje y

- $f(0) = 0, f(1) = 1, 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x, x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

- $x^2 \geq 0$, $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$

- $x_1, x_2 > 0, x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_1 \cdot x_2 < x_2^2$ luego f es creciente en $[0, +\infty)$

- f es decreciente en $(-\infty, o]$ (analogamente)

- $Rec(f) \neq Codom(f) \Rightarrow f$ **no** es sobreyectiva

- $f(-1) = 1 = f(1) \Rightarrow f$ **no** es inyectiva

La grafica de la funcion $f(x) = x^2$ se llama **parabola**, el punto $(0, 0)$ es el **vertice** y el eje y es el **eje de simetria** de la parabola.

Funcion potencia

$f(x) = x^a$ con a constante recional.
Caso $a = n$ **un numero natural** $Dom(f) = \mathbb{R}, Rec(f) = \mathbb{R}$ si n impar, $Rec(f) = \mathbb{R}_0^+$ si n es par. Si n es impar es sobreyectiva, es inyectiva, es una funcion impar y creciente.
Si n es par f no es sobreyectiva, no es inyectiva, es una funcion par.
Caso $a = -1$ **funcion reciproca**

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \frac{1}{x}$$

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}, Codom(f) = \mathbb{R}$

- $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x) \Rightarrow f$ es una funcion impar

- $0 < x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 1$, $x > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < 1$

La grafica que resulta se llama **hiperbola**.

- $\dfrac{1}{x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; cualquiera sea $y \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que $f(x) = f\left(\dfrac{1}{y}\right) = y$, luego: $Rec(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- $Rec(f) \neq Codom(f) \Rightarrow f$ **no** es sobreyectiva

- f es decreciente en $(0, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, 0)$

- f es inyectiva

El eje x es una **asintota horizontal**.

El eje y es una **asintota vertical**.

Caso a=-2 a cargo del lector

Caso $a \in \mathbb{Q}$ a cargo del lector

Funcion parte entera

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = [x]$$

- $Dom(f) = \mathbb{R}, Codom(f) = \mathbb{R}$

- $Rec(f) = \mathbb{Z} \neq Codom(f) \Rightarrow f$ **no** es sobreyectiva

- $f(1) = f(1.3) = 1 \Rightarrow f$ **no** es inyectiva

- La funcion parte entera es impar

- La funcion parte entera es no decreciente

Funcion mantisa

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x - [x] = mant(x)$$

- $Dom(f) = \mathbb{R}, Codom(f) = \mathbb{R} \neq Rec(f) = [0, 1) \Rightarrow f$ **no** es sobreyectiva

- $f(1.5) = 0.5 = f(2.5) \Rightarrow f$ **no** es inyectiva

Funcion polinomica o polinomial

Una funcion $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + x_0$ es un polinomio, si $n \in \mathbb{N}_0$ y $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ son constante reales llamados coeficientes del polinomio. $Dom(p) = \mathbb{R}$, si $a_n \neq 0$ decimos que n es el grado del polinomio.

Cuadratica caso general

$f(x) = ax^2 + bx + c$, con a distinto de cero.
Recordar que $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- vertice: (x_v, y_v), donde $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a}$, $y_v = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a}$

- eje de simetrica: es la recta de ecuacion $x = x_v = -\dfrac{b}{2a}$

- ceros de f:
  - $Delta > 0$ la funcion f tiene **dos** ceros: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
  - $\Delta < 0$ la funcion f **no** tiene ceros, $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$
  - $\Delta = 0$ la funcion f tiene un **unico** cero $x = x_v = \dfrac{-b}{2a}$
- interseccion con el eje y: $f(0) = c$

- minimo de f: la funcion f tiene minimo si $a > 0$, $min(f) = f(x_v) = y_v$

- maximo de f: la funcion f tiene maximo si $a < 0$, $max(f) = f(x_v) = y_v$

Funcion homografica

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}, bc \neq ad, c \neq 0$, se define la **funcion homografica**.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ definida para todo } x \neq \frac{-}{d}c$$

es decir $Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{d}{c} \right\}$

La funcion homografica mas simple es la funcion reciproca $f(x) = \frac{1}{x}$ cuya grafica es la hiperbola. Considerando la siguiente expresion podemos obtener cuulquier grafica de otra funcion homografica:

$$f(x) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

Teniendo en cuenta:

- asintota horizonnal $y = \frac{a}{c}$

- asintota vertical $x = -\frac{d}{c}$

Funcion racional

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ siendo p y q dos polinomios. El dominio de la funcion racional sera

$$Dom(f) = Dom(p) \cap Dom(q) = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

Funcion signo

$$sgn(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Es una funcion impar, no sobreyectiva, no inyectiva, $Rec(sgn) = \{-1, 0, 1\}$, es no decreciente

Funcion periodica

Una funcion es periodica de periodo p si $f(x) = f(x+p), \forall x \in Dom(f)$ y p es el minimo numero positivo que verifica esta relacion

Clasificacion de funciones

Algebraicas: se contruyen a partir de polinomios usando operaciones algebraicas.
Trascendentes: son las no algebraicas, entre ellas las trigonometricas, exponenciales, hiperbolicas,inversas trigonometricas, inversas hiperbolicas

Funciones trigonometricas

Funcion seno

$f(x) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}, REc(f) = [-1, 1]$, periodica de periodo 2π, funcion impar

Funcion coseno

$f(x) = \cos(x), \forall x \in \mathbb{R}, Rec(f) = [-1, 1]$, periodica de periodo 2π, funcion par.
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \forall x \in \mathbb{R}$

Funcion tangente

$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \forall x \in \mathbb{R} - \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, Rec(f) = \mathbb{R}$, periodica de periodo π, funcion impar.

1 Funciones reciprocas trigonometricas

cosecante

$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

secante

$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

cosecante

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Identidades trigonometricas

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ identidad pitagorica

- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

- $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x = \csc^2 x}$

- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ y $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

- $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ y $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

- $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ y $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ y $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

- $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ y $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{x}$

Para todo numero real:

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \text{ e } y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

Sea un triangulo con lados a, b y c, y con angulos opuestos a esos lados A, B y C:

$$\text{Ley de los cosenos: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$\text{Ley de los senos: } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Grafica de una funcion definida a partir de una funcion dada

Traslaciones o reflexiones respecto de una recta

$g(x) = -f(x)$
$x \in Dom(g) \Leftrightarrow x \in Dom(f)$, $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, -y) \in G_g$
La grafica de g se obtiene a partir de la grafica de f, efectuando a la misma una reflexion respecto al eje x.
Los ceros de f seran ceros de g
Si $Rec(f) = [c, d] \Leftrightarrow Rec(g) = [-d, -c]$
$t(x) = |f(x)|$ $x \in Dom(t) \Leftrightarrow x \in Dom(f)$
Si x es tal que $f(x) \geq 0$, entonces $t(x) = |f(x)| = f(x)$. Asi $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, y) \in G_t$. La grafica de f y de t coinciden.
Si x es tal que $f(x) < 0$, entonces $t(x) = |f(x)| = -f(x)$. Asi $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, -y) \in G_t$. Por lo tanto para dichos valores la grafica de t se obtiene efectuando a la grafica de f una reflexion respecto al eje x.
$h(x) = f(x) + \alpha$, $x \in Dom(h) \Leftrightarrow x \in Dom(f)$
$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x, y + \alpha) \in G_h$
En consecuencia:

- Si $\alpha > 0$ la grafica de h se obtiene trasladando **verticalmente** hacia arriba α unidades la grafica de f

- Si $\alpha < 0$ la grafica de h se obtiene trasladando **verticalmente** hacia abajo $|\alpha|$ unidades la grafica de f

Si $Rec(f) = [c, d] \Rightarrow Rec(h) = [c + \alpha, d + \alpha]$
$p(x) = f(x + \beta)$
$x \in Dom(f) \Leftrightarrow (x - \beta) \in Dom(p)$
$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow x \in Dom(f), y = f(x) = p(x - \beta) \Leftrightarrow (x - \beta, y) \in G_p$ La grafica de p se obtiene transladando **horizontalmente** $|\beta|$ unidades la grafica de f:

- hacia la izquierda si $\beta > 0$

- hacia la derecha si $\beta < 0$

$Rec(p) = Rec(f)$

Cambio de tamaño y reflexion

Sea $f(cx), c \cdot f(x)$ para cierto $c \in \mathbb{R}$
Para $c > 1$:

$$y = c \cdot f(x) \text{ dilata o estira } \textbf{verticalmente} \text{ la } G_f$$
$$y = \frac{1}{c} \cdot f(x) \text{ comprime } \textbf{verticalmente} \text{ la } G_f$$
$$y = f(cx) \text{ comprime } \textbf{horizontalmente} \text{ la } G_f$$
$$y = f\left(\frac{1}{c}x\right) \text{ dilata o estira } \textbf{horizontalmente} \text{ la } G_f$$

Para $c = -1$:

$$y = -f(x) \text{ refleja la } G_f \text{ respecto del eje } x$$
$$y = f(-x) \text{ refleja la } G_f \text{ respecto del eje } y$$

Composicion de funciones

Dadas dos funciones $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ y $g : Dom(g) \to \mathbb{R}$, es posible definir h, denominada **funcion compuesta de f con g** mediante la siguiente ley:

$$h(x) = f(g(x))$$

A La funcion de f con g se la nota $h = f \circ g$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
Se debe verificar:

- $x \in Dom(g)$

- $g(x) \in Dom(f)$

$$\therefore Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(f) : g(x) \in Dom(f)\}$$

Funciones inversas

Definicion: Decimos que una funcion f es **inyectiva** cuando a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden distintas imagenes, o sea, $x_1, x_2 \in Dom(f), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
O bien: $x_1, x_2 \in Dom(f), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Definicion: Sea f una funcion inyectiva con dominio A y recorrido B entonces su funcion inversa f^{-1} con dominio B y recorrido A se define para cada $y \in B$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Grafica de la inversa: $(x, y \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow (y, x) \in G_{f^{-1}}$
La gafica de f y de f^{-1} son simetricas respecto a la grafica de la funcion identidad.
$Dom(f^{-1}) = Rec(f)$ y $Rec(f^{-1}) = Dom(f)$
$(f \circ f^{-1}) = id : B \to B$ y $(f^{-1} \circ f) = id : A \to A$
Cuando f no es inyectiva podemos restringir el dominio a un subconjunto donde si lo sea, y definir su inversa.

Funcion exponencial

Las funciones de las forma $f(x) = a^x$ donde la base a es una constante positiva y $a \neq 1$ se llaman funciones exponenciales. $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \mathbb{R}^+$.

- $a^x \neq 0, \forall x$
- $a^0 = 1, \forall a$
- $a^1 = a$
- En particular si $a = e$, tenemos $f(x) = e^x$. Con $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecientes si $0 < a < 1$

Funcion logaritmica

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$ donde la base a es una constante positiva y $a \neq 1$. Se trata de las funciones inversas de las exponenciales. En cada casso $Dom(f) = \mathbb{R}^+$ y $Rec(f) = \mathbb{R}$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

En particular, $f(a) = \log_a a = 1$ pues $a^1 = a$
Ademas $f(1) = \log_a 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$ pues $a \neq 1$
Cuando $a = e$ notamos $\log_e x = \ln x$ y lo llamamos logaritmo natural de x
Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecinetes si $0 < a < 1$

Funcion logaritmo y exponencial

Si $a > 0$ y $a \neq 1$ la funcion exponencial $f(x) = a^x$ es creciente o decreciente, luego es inyectiva, entonces para cada $y \in \mathbb{R}^+ = Rec(f)$ hay una funcion inversa $f^{-1}(y) = \log_a y = x \Leftrightarrow f(x) = a^x = y$ llamada funcion logaritmo en base a.

$$Dom(\log_a x) = Rec(a^x) = \mathbb{R}^+ \text{ y } Rec(\log_a x) = Dom(a^x) = \mathbb{R}$$

Mediente la composicion de logaritmo y la exponencial nos da la identidad:

$$\log_a a^X = x, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x, \forall x \in \mathbb{R}^+$$
$$\log_e x = \ln x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades

Si $a > 1$, la funcion $\log_a x$ y a^x son inyectivas y crecientes, entonces:

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $a^x a^y = a^{x+y}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x, \forall x \in \mathbb{R}^+$ y $(a^x)^y = a^{xy}, \forall x \in \mathbb{R}$

Funcion potencia

$x^a, a \in \mathbb{R}$. A partir de $\ln(x^y) = y \ln x, \forall x \in \mathbb{R}^+$, podemos definir $x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a \ln x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Funciones trigonometricas inversas

LAs funciones trigonometricas son periodicas, por lo tanto hay que restringir su dominio para que sean inyectivas y podamos calcular su inversa

Inversa del seno

$$\arcsin x = \sin^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \sin y = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$
$$Dom(\sin x) = Rec(\arcsin x) = \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ y } Rec(\sin x) = Dom(\arcsin x) = [-1, 1]$$

Inversa del coseno

$$\arccos x = \cos^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \cos y = x \text{ para } 0 \leq y \leq \pi$$
$$Dom(\cos x) = Rec(\arccos x) = [0, \pi] \text{ y } Rec(\cos x) = Dom(\arccos x) = [-1, 1]$$

Inversa de la tangente

$$\arctan x = \tan^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \tan y = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$
$$Dom(\tan x) = Rec(\arctan x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } Rec(\tan x) = Dom(\arctan x) = \mathbb{R}$$

2 Funciones hiperbolicas

Definiciones: Para $x \in \mathbb{R}$ definimos las funciones seno hiperbolico, coseno hiperbolico y tangente hiperbolica de x como:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$