Capítulo 1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

OUTLINE

Álgebra Lineal $\longleftrightarrow$ Espacios vectoriales

Diferentes enfoques:

- más teórico/abstracto, más *bonito*, más matemático
- más práctico/aplicaciones y computabilidad, más ciencias de la computación

Trataremos de balancear ambos aspectos, con base en

Álgebra Lineal y sus aplicaciones - Gilbert Strang

Disponible en:

- Aula Virtual (Comunidades- UNR)
- Y también en
  https://ocw.mit.edu/search/ocwsearch.htm?q=18.06
  o
  https://web.mit.edu/18.06

$$\begin{array}{ccc} \text{Álgebra Lineal} & \longleftrightarrow & \text{Espacios Vectoriales} \\ \updownarrow & & \\ \text{Aplicaciones y computabilidad} & \longleftrightarrow & \text{Sistemas de ecuaciones} \end{array}$$

$$\text{Espacios vectoriales} \overset{?}{\longleftrightarrow} \text{Sistemas de ecuaciones}$$

¿Qué palabras/conceptos asocian a:

- espacios vectoriales? $\mathbb{R}^n$, otro?
  Combinación lineal, bases, dimensión, independencia lineal...
- sistemas de ecuaciones? Matrices, determinantes, Cramer, Gauss...inversa, matriz singular, sistema singular...

Todo esto (y poco más) es Álgebra Lineal. Empecemos dando una segunda mirada a lo que sabemos.

A matriz $m \times n$, B matriz $n \times p$, entonces AB es matriz $m \times p$.

$$\begin{array}{cc} & p \\ n & \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} & & \\ & AB & \\ & & \end{bmatrix} & m \\ p & \end{array}$$

Caso $p = 1$**:** B es $n \times 1$, vector *columna*. A^j: vector columna j de A.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix} = AB$$

AB es $m \times 1$, vector (columna). *¿Qué tipo de vector es?*

$$AB = aA^1 + bA^2 + cA^3$$

AB es una combinación lineal de los vectores columna de A

El producto de una matriz por un vector columna es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz

Caso $m = 1$**:** A es $1 \times n$. , vector fila. B_j: vector fila j de B

$$\begin{array}{cc} & p \\ & \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array}\right] = B \\ A = \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} ? \end{array}\right] = AB \end{array}$$

AB es $1 \times p$, vector (fila).
¿Qué tipo de vector es AB? $AB = aB_1 + bB_2 + cB_3$.
AB es una *combinación lineal* de los vectores fila de B

El producto de un vector fila por una matriz es una combinación lineal de las filas de la matriz

Caso general:

- Cada vector columna de AB es el producto de A por cada vector columna de B:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} B^1 & B^2 & B^3 & B^4 \end{bmatrix} = B \\ \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} AB^1 & AB^2 & AB^3 & AB^4 \end{bmatrix} = AB \end{array}$$

columna j de AB = $A \times$ columna j de B

Cada (vector) columna de AB es una combinación lineal de las (vectores) columnas de A.

- Cada vector fila de AB es el producto de cada vector fila de A por B:

$$\begin{array}{cc} & \left[\begin{array}{c} \\ B \\ \\ \end{array}\right] \\ A = \left[\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} A_1B \\ A_2B \\ A_3B \end{array}\right] = AB \end{array}$$

fila i de AB = (fila i de A) $\times B$.

Cada (vector) fila de AB es una combinación lineal de las (vectores) filas de B

- Cada entrada de AB es el producto escalar de un vector fila de A y un vector columna de B

$$\begin{bmatrix} \\ B^1 & B^2 & B^3 & B^4 \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & A_1B^3 & A_1B^4 \\ A_2B^1 & A_2B^2 & A_2B^3 & A_2B^4 \\ A_3B^1 & A_3B^2 & A_3B^3 & A_3B^4 \end{bmatrix} = AB$$

$$(AB)_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \times (\text{columna } j \text{ de } B) = A_iB^j$$

RECORDAR:

1. **El producto de una matriz por un vector columna es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz**
2. **El producto de un vector fila por una matriz es una combinación lineal de las filas de la matriz**
3. **Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A**
4. **Cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B**
5. **Cada entrada de AB es el producto escalar de un vector fila de A y un vector columna de B**

$(n = 2)$

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

¿Métodos de resolución? ¿Interpretación geométrica?

Método 1: Eliminación de Gauss:

- Paso 1:
  $ec(2) - 4 \times ec(1) \longmapsto -3y = -6 \longrightarrow y = 2$
- Paso 2:
  Sustitución en (1) o en (2): $x = -1$

Método 2: Cramer

...toda la información necesaria está en los coeficientes de las ecuaciones... ¡tiene que haber una fórmula que nos dé la solución en función de esa información!

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 \times 6 - 3 \times 4}{1 \times 5 - 2 \times 4} = 2 \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times 5 - 2 \times 6}{1 \times 5 - 2 \times 4} = -1$$

¿cuál es más sencillo?

Para $n = 2$ el esfuerzo es más o menos similar

¿y cuando n *es muy grande?*

Obs: $n = 1000$ es un tamaño *moderado* en las aplicaciones.

- Cramer: 1000 determinantes que involucran 1000000 de números cada uno.
- Gauss: después haremos los cálculos, pero es muy bueno, es el que se usa.

Un primer indicio: aún en el ejemplo de $n = 2$, una vez obtenido y por Cramer, claramente hubiera sido más sencillo obtener x por sustitución que utilizando la regla de Cramer con determinantes.

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

Geometría por filas: $x+2y=3$ y $4x+5y=6$

intersección de dos rectas en el plano $\mathbb{R}^2$

Geometría por columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Buscamos una *combinación lineal* de los vectores $u=(1,4)$ y $v=(2,5)$ que nos dé el vector $(3,6)$.

combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^2$

¿En $n = 3$?

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & + & y & & & = & 2 & (2) \\ x & - & y & & & = & 0 & (3) \end{array}$$

Geometría por filas:

buscamos la intersección de tres planos en el espacio $\mathbb{R}^3$

$$(\pi_1)\, x+y+z=4 \qquad (\pi_2)\, x+y=2 \qquad (\pi_3)\, x-y=0$$

Geometría por columnas:

entre todas las combinaciones lineales de los tres vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (1,1,-1), \quad \text{y} \quad v_3 = (1,0,0),$$

queremos conocer los coeficientes (si existen) de la combinación lineal que nos da $w = (4,2,0)$*.*

¿En $n = 10$?
No es tan difícil abstraernos y pensar en espacios n-dimensionales!

Geometría por filas: intersección de planos 9-dimesionales en $\mathbb{R}^{10}$.

Geometría por columnas: combinaciones lineales de vectores de $\mathbb{R}^{10}$ que den el vector lado derecho.

¿En $n = 159\dot{4}35$?

conceptualmente no cambia mucho, a nivel cálculos sí puede complicarse...

En los ejemplos que vimos, siempre existe solución única. *¿Cuándo había solución única*?

sistema no singular, determinante no nulo, existencia de matriz inversa....volveremos sobre esto...

Casos singulares:

$$\begin{array}{ccccccccc} u & + & v & + & w & = & 2 & (1) \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 & (2) \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 6 & (3) \end{array}$$

Algebraicamente:

$ec(1)+ec(2): 3u+v+4w=7 \qquad ec(3): 3u+v+4w=6$

Sistema Inconsistente (no hay solución).

Geometría por filas: los tres planos no se intersectan.

¿Qué situaciones pueden darse?

- dos de los tres planos que no se intersecten (dos planos paralelos) o
- todos se intersecten dos a dos pero no se intersectan entre los tres.

Ejercicio: ¿Cuál es el caso en el ejemplo anterior?

Geometría por columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} w = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Los tres vectores son coplanares y b está fuera del plano.

¿Qué pasaría si b estuviera en el mismo plano que los tres vectores columna? (por ejemplo, $b' = (2, 5, 7)$). Habría infinitas soluciones.

Qué estaría pasando en la geometría por filas?

Los tres planos pasan por una misma recta.

Volvemos a los métodos de resolución de sistemas.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 & (2) \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 & (3) \end{array}$$

Paso 1: Eliminar u de las ecuaciones (2) y (3).
Restar a las ecuaciones (2) y (3), múltiplos de la ecuación (1)

- $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow ec(2') - 8v - 2w = -12$
- $ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow ec(3')8v + 3w = 14$

Para obtener el múltiplicador ℓ de la ecuación (1) a restar en cada caso, dividimos el coeficiente de u en la ecuación a modificar por *el coeficiente de u en $ec(1)$*

coeficiente de u en $ec(1) = 2 \longmapsto$ *primer pivot*.

Obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 & (2') \\ & & 8v & + & 3w & = & 14 & (3') \end{array}$$

Paso 2: Eliminar v de la ecuación (3').

Restar a la ecuación (3') un múltiplo de la ecuación (2')

- $ec(3') - (-1) \times ec(2') \longrightarrow ec(3'')w = 2$

Para obtener el multiplicador ℓ de la ecuación (2') a restar, dividimos el coeficiente de v en la $ec(3')$ por el *coeficiente de* v *en* $ec(2')$

coeficiente de v en $ec(2') = -8 \longmapsto$ *segundo pivot*.

Obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 & (2') \\ & & & & 1w & = & 2 & (3'') \end{array}$$

Sistema triangular: fácil de resolver vía *sustitución para atrás*:

$$ec(3''):\ w=2 \longmapsto ec(2'):\ v=1 \ \longmapsto ec(1): u=1.$$

Gauss= eliminación para adelante + sustitución para atrás

¿Siempre funciona? Siempre que los pivots no sean nulos. ¿Y si aparece un pivot nulo?

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & & + & 3w & = \\ & & 2v & + & 4w & = \end{array} \quad \longrightarrow$$

Permutando las filas (2) y (3) llegamos al sistema triangular.

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & 2v & + & 4w & = \\ & & & & 3w & = \end{array}$$

Observar que, independientemente del lado derecho, el sistema tendrá solución única. En estos casos se dice que el sistema es *no singular*. En correspondencia con esto decimos que la matriz de coeficientes del sistema es una *matriz no singular*.

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & b_1 \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b_2 \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = & b_3 \end{array} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

A: matriz de coeficientes del sistema,

$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$: vector de variables, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$: vector *lado derecho (RHS)*.

$$\begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & b_1 \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & b_2 \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = & b_3 \end{array} \longrightarrow Ax = b$$

Definición: A matriz $n \times n$ es *no singular* si para todo $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ es no singular, i.e. el sistema $Ax = b$ tiene solución única.

$$
\begin{array}{rcrcrc}
u & + & v & + & w & = \\
2u & + & 2v & + & 5w & = \\
4u & + & 4v & + & 8w & =
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{rcrcrc}
u & + & v & + & w & = \\
 & & & & 3w & = \\
 & & & & 4w & =
\end{array}
$$

Ejemplo 2.1:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
u & + & v & + & w & = & \\
 & & & & 3w & = & 6 \\
 & & & & 4w & = & 7
\end{array}
$$

No hay solución factible

Ejemplo 2.2:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
u & + & v & + & w & = & \\
 & & & & 3w & = & 6 \\
 & & & & 4w & = & 8
\end{array}
$$

hay infinitas soluciones factibles

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & & & 3w & = \\ & & & & 4w & = \end{array}$$

Ejercicio: Independientemente del lado derecho, el sistema NO tendrá solución única.

En estos casos se dice que el sistema es *singular*. En correspondencia con esto decimos que la matriz de coeficientes del sistema es una *matriz singular*.

Definición: A matriz $n \times n$ es *singular* si para todo $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ es *singular*, i.e. el sistema $Ax = b$ no tiene solución única.

Observación: A es *no singular* si y solo si A no es *singular*.

¿Cuántas operaciones aritméticas realizamos en un sistema de n ecuaciones y n incógnitas?

Operaciones que realizamos para aplicar el método:

- *dividir por el pivot para obtener el multiplicador* ℓ,
- *multiplicar cada coeficiente de una ecuación por* ℓ *y restarle los coeficientes de otra.*

(Convenimos: multiplicar y restar = 1 operación)

Analizamos el caso no singular, e ignoramos las operaciones en el lado derecho.

Primer paso: por cada una de las $n-1$ ecuaciones a modificar, tenemos:

1. cálculo del multiplicador $\longmapsto$ 1 operación
2. n coeficientes que se multiplicar y restan$\longmapsto$ n operaciones

$$(n-1)(n+1) = n^2 - 1 \text{ operaciones}$$

Primer paso:

$$n^2 - 1 \text{ operaciones}$$

k-ésimo paso (nos quedan k ecuaciones a modificar):

$$k^2 - 1 \text{ operaciones}$$

Total (eliminación) :

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2 - 1) = O(n^3)$$

- $n = 1 \longrightarrow 0$ operaciones
- $n = 2 \longrightarrow 3$ operaciones
- $n = 100 \longrightarrow \approx 10^6$ operaciones

Costo sustitución:

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

Costo total: $O(n^3) + O(n^2) = O(n^3)$

¿Se puede resolver un sistema de orden $n \times n$ más rápido que $O(n^3)$?

Hace 30 años se suponía que no. Sin embargo, existe hoy un método que lo resuelve en $Cn^{log_2 7} \approx Cn^{2,8}$. ¿Más rápido? $Cn^{2,376}$

Esto métodos, no tienen interés práctico: C es muuuuy grande y el código es horrible: ¡seguimos con Gauss! (con mejoras)

Nuevo desafío: cuál es el costo computacional de resolver un sistema de orden $n \times n$ con varios procesadores en paralelo.

$$(S)\quad \begin{array}{rrrl} 2u+ & v+ & w & =5 \\ 4u- & 6v & & =-2 \\ -2u+ & 7v+ & 2w & =9 \end{array} \qquad\qquad (S')\quad \begin{array}{rrrl} 2u+ & v+ & w & =5 \\ - & 8v- & 2w & =-12 \\ & & w & =2 \end{array}$$

$$(S)\ Ax=b \qquad \xrightarrow{Gauss} \qquad (S')\ Ux=b'$$

¿Cómo podemos obtener U y b' a partir de A y b?

$$[A|b]=\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{?} [U|b']=\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Repasemos qué hace Gauss:

$$(S)\qquad \begin{array}{rrrl} 2u+ & v+ & w & =5 \\ 4u- & 6v & & =-2 \\ -2u+ & 7v+ & 2w & =9 \end{array}$$

Paso 1/1:

$$\begin{array}{rrrl} 2u+ & v+ & w & =5 \\ 4u- & 6v & & =-2 \\ -2u+ & 7v+ & 2w & =9 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 2u+ & v+ & w & =5 \\ - & 8v- & 2w & =-12 \\ -2u+ & 7v+ & 2w & =9 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{?} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

(nueva fila 2) = (fila 2 de $[A|b]$) $-2\times$ (fila 1 de $[A|b]$)

...es el trabajo de las *matrices elementales*...

Definición: La *matriz elemental* $E_{ij}(\alpha)$ (con $1 \leq i \neq j \leq n$, $\alpha \in \mathbb{R}$) es la que se obtiene sustituyendo la entrada ij de la matriz identidad por α.

Ejemplo: $n = 3$

$$E_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teníamos:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{?} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

(nueva fila 2) = (fila 2 de $[A|b]$) $- 2\times$ (fila 1 de $[A|b]$)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-2)\times} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

Ejercicio: Sea A una matriz $n \times p$, $E_{ij}(\alpha)$ de orden n y $B = E_{ij}(\alpha)A$.
Entonces, $B_k = A_k$ si $k \neq i$ y $B_i = A_i + \alpha A_j$.

Recordemos

$$\begin{array}{ccc} & & \left[\begin{array}{c} \\ A \\ \\ \end{array}\right] \\ E_{ij}(\alpha) = & \left[\begin{array}{c} [E_{ij}(\alpha)]_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ [E_{ij}(\alpha)]_n \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} [E_{ij}(\alpha)]_1\, A \\ \vdots \\ \vdots \\ [E_{ij}(\alpha)]_n\, A \end{array}\right] = B \end{array}$$

fila k de B = (fila k de $E_{ij}(\alpha)) \times A$.

Entonces, para todo k,

$$B_k = [E_{ij}(\alpha)]_k \times A \quad \text{(Obs: } [E_{ij}(\alpha)]_k\text{, vector } 1 \times n\text{)}$$

Recordemos:
el producto de un vector $1 \times n$ por A es una combinación lineal de las filas de A, donde los coeficientes de la combinación lineal son las entradas del vector.

Entonces:
Si $k \neq i$, $[E_{ij}(\alpha)]_k$ tiene todas entradas nulas excepto su entrada k, igual a 1. Por lo tanto,

$$B_k = [E_{ij}(\alpha)]_k \times A = 0A_1 + \ldots + 0\,A_{k-1} + 1\,A_k + 0\,A_{k+1} + \ldots + 0\,A_n = A_k.$$

Si $k = i$, $[E_{ij}(\alpha)]_i$ tiene todas sus entradas nulas excepto su entrada i, igual a 1, y su entrada j, igual a α. Por lo tanto,

$$B_i = [E_{ij}(\alpha)]_i \times A = 1\,A_i + \alpha\,A_j = A_i + \alpha A_j.$$

- **Paso 1**: $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$

  (nueva fila 2) = (fila 2 de $A) + (-2) \times$ (fila 1 de A)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = EA$$

$ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow 8v + 3w = 14$
(nueva fila 3) = (fila 3 de $A) + 1\times$ (fila 1 de A) =
=(fila 3 de $EA) + 1\times$ (fila 1 de EA)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} EA = FEA$$

$$FEA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

Ejercicio: El producto de matrices elementales $E_{ij}(\alpha)$ y $E_{kj}(\beta)$, $i \neq k$, conmuta.

$$(FE)A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Paso 2: (nueva fila 3) = (fila 3 de $FEA) + 1\times$ (fila 2 de FEA)

$$G(FEA) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} FEA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$(GFE)A = U$, donde

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo reconstruyo A a partir de U? Debo *desarmar* cada paso...

Ejercicio: Probar que $E_{ij}(\alpha)E_{ij}(-\alpha) = I$.

Resolución: Sean $B = E_{ij}(\alpha)E_{ij}(-\alpha)$ y $A = E_{ij}(-\alpha)$. O sea, $B = E_{ij}(\alpha)A$. Por el ejercicio anterior sabemos que $B_k = A_k$ si $k \neq i$ y $B_i = A_i + \alpha A_j$.

Si e^k denota el k-ésimo vector canónico, debemos probar que $B_k = e_k$, para todo k.
Si $k \neq i$, $B_k = A_k = [E_{ij}(-\alpha)]_k$ y $[E_{ij}(-\alpha)]_k$ coincide con la k-ésima fila de I. Por lo tanto, $B_k = A_k = e^k$.
Finalmente, si $k = i$, como $A_i = -\alpha e^j + e^i$, tenemos:

$$B_i = A_i + \alpha A_j = [E_{ij}(-\alpha)]_i + \alpha[E_{ij}(-\alpha)]_j = (-\alpha e^j + e^i) + \alpha e^j = e^i.$$

$E_{ij}(-\alpha)\,E_{ij}(\alpha) = I \longrightarrow E_{ij}(-\alpha)$ *desarma* lo que hizo $E_{ij}(\alpha)$

$E_{ij}(-\alpha) = (E_{ij}(\alpha))^{-1} \longrightarrow$ *matriz inversa*

Volvamos al ejemplo:

$$G(F(E\,A)) = U \longrightarrow A = E^{-1}(F^{-1}(G^{-1}U)) = (E^{-1}F^{-1}G^{-1})U$$

Recordemos: Si $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Así,

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$A = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

Observación:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación,
- U es una matriz triangular superior con los pivots en la diagonal.

Siempre que no aparezcan pivots nulos, podremos reconstruir A de esta manera.

Veamos un ejercicio

Propiedad: Dada una matriz cuadradra A, si en el método de Eliminación de Gauss no aparece ningún pivot nulo, A admite una *factorización* LU.
Esto es, $A = LU$ donde:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación,
- U es una matriz triangular superior con los pivotes en la diagonal.

Teorema(unicidad de la descomposición LU) Sea $A = L_1U_1$ y $A = L_2U_2$ donde, para $i = 1, 2$, L_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, U_i es triangular superior sin ceros en la diagonal. Entonces $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.

Prueba: Ejercicio con ayuda.

- Probar que inversa de triangular superior (resp. inferior) es triangular superior (resp. inferior).
- Probar que producto de triangulares superiores (resp. inferiores) es triangular superior (resp. inferior).
- Usar $L_1U_1 = L_2U_2 \Longrightarrow U_1(U_2)^{-1} = (L_1)^{-1}L_2$.

$A = LU$ con

- L triangular inferior con 1's en la diagonal, abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación.
- U es triangular superior con los pivotes en la diagonal.

Ejemplos:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ No tiene factorización LU (primer pivot nulo)
3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $L = I$; $U = A$

Ejemplos: (continuación)

4. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} ; L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} ; L = A ; U = I$$

¿Cómo resuelven los códigos?

$$Ax = b \overset{\text{fact. } LU}{\longleftrightarrow} L(Ux) = b$$

1. Resuelvo $Lc = b$, sistema triangular $\longrightarrow$ obtengo la solución $\tilde{c}$ en $\frac{n^2}{2}$ operaciones
2. Resuelvo $Ux = \tilde{c}$, sistema triangular $\longrightarrow$ obtengo la solución $\hat{x}$ en $\frac{n^2}{2}$ operaciones

Tenemos $A\hat{x} = L(U\hat{x}) = L\tilde{c} = b$

Costo de la resolución:

1. Factorizar $A \longrightarrow O(n^3)$ operaciones
2. Resolver los sistemas triangulares $\longrightarrow n^2$ operaciones

Observación: Si tengo la factorizacion LU, puedo resolver varios sistemas, con diferentes lados derechos, al costo de n^2 operaciones.

Veamos un ejercicio

Ejercicio: Sean D y A matrices $n \times n$, con D una matriz diagonal, y sea $B = DA$.
Entonces la fila k-ésima de B es la igual a la k-ésima fila de A por la entrada k-ésima de la diagonal de D. Esto es, $B_k = D_k^k A_k$, para $k = 1, \ldots, n$.

Observación: si U es (matriz) triangular superior sin ceros en la diagonal y D es la matriz diagonal cuya diagonal coincide con la diagonal U (i.e. $D_i^i = U_i^i$, para todo i) entonces $U = DV$ con

$$V_i^j = \frac{U_i^j}{U_i^i} \quad \text{para todo } i,j.$$

Observar que V es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal.

$$A = LU \longleftrightarrow A = LDV$$

Propiedad: Dada una matriz cuadradra A, si en el método de eliminación de Gauss no aparece ningún pivot nulo, A admite una *factorización* LDV. Esto es, $A = LDV$ donde:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación.
- D es una matriz diagonal con los pivotes en la diagonal.
- V es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal.

Teorema (unicidad de la descomposición LDV)
Para $i = 1,2$, sea $A = L_i D_i V_i$ donde L_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, U_i es triangular superior con 1's en la diagonal y D_i es matriz diagonal sin ceros en la diagonal. Entonces, $L_1 = L_2$, $V_1 = V_2$ y $D_1 = D_2$.

Prueba. Para $i = 1,2$, sea $U_i = D_i V_i$. Entonces, para $i = 1,2$, $A = L_i U_i$ es una factorización LU de A (justificar). Como la factorización LU de una matriz es única, tenemos que $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$. Falta verificar que si $U_1 = U_2$ entonces $V_1 = V_2$ y $D_1 = D_2$ (ejercicio).

Si A es una matriz no singular y en el proceso de eliminación de Gauss aparece algún pivot nulo, podemos intercambiar filas.

¿Qué matrices *intercambian* filas?

Ejemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Buscamos P tal que

$$P \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definición:
Llamamos *matriz de permutación (de orden* n) a toda matriz que se obtiene permutando las filas de la matriz identidad.

Una matriz de permutación es *elemental* si solo dos filas de la matriz identidad han sido intercambiadas. Notamos con P_{ij} a la matriz de permutación elemental que se obtiene intercambiando las filas i y j de la identidad.

Ejercicio: Para toda A matriz, la matriz $P_{ij}A$ se obtiene intercambiando las filas i y j de A.

Resolución: Sea $B = P_{ij}A$. Probar que B_k, la fila k-ésima de B, coindice con A_k si $k \neq i$ y $k \neq j$ y $B_i = A_j$ y $B_j = A_i$.(Ejercicio)

Ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- Si $d = 0$ entonces A es singular.
- Si $d \neq 0$:

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{13}A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}.$$

- Si $a \neq 0$:

$$A \xrightarrow{P_{13}\times} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{23}\times} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = U.$$

$$P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = U$$

$$P = P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de permutación.}$$

$$PA = U.$$

Ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E\times} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{23}\times} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E'\times} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

$$E'(P_{23}A) = U \longrightarrow P_{23}A = LU$$

con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (E')^{-1}$$

Lema: Sean P_{ij} y $E_{k\ell}(\alpha)$ matrices de permutación elemental y elemental, respectivamente, del mismo orden. Entonces,

$$P_{ij}\, E_{k\ell}(\alpha) = \begin{cases} E_{k\ell}(\alpha)\, P_{ij} & \text{si} \quad \{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset \\ E_{j\ell}(\alpha)\, P_{ij} & \text{si} \quad i = k, j \neq \ell \\ E_{kj}(\alpha)\, P_{ij} & \text{si} \quad i = \ell, j \neq k \\ E_{ik}(\alpha)\, P_{ij} & \text{si} \quad i \neq \ell, j = k \\ E_{ki}(\alpha)\, P_{ij} & \text{si} \quad i \neq k, j = \ell \\ E_{ji}(\alpha)\, P_{ij} & \text{si} \quad i = k, j = \ell \\ E_{ij}(\alpha)\, P_{ij} & \text{si} \quad i = \ell, j = k. \end{cases}$$

Prueba:

En todos los ítems, debemos probar que existe una matriz elemental $E_{rs}(\alpha)$ tal que $P_{ij}E_{kl}(\alpha) = E_{rs}(\alpha)P_{ij}$.

Llamemos ε_{rs} a la matriz con todas sus entradas nulas excepto la entrada (r,s), cuyo valor es 1. Observemos entonces que toda matriz elemental $E_{rs}(\alpha)$ verifica $E_{rs}(\alpha) = I + \alpha\varepsilon_{rs}$.

Con la observación anterior, $P_{ij}E_{k\ell}(\alpha) = P_{ij}(I + \alpha\varepsilon_{k\ell}) = P_{ij} + \alpha P_{ij}\varepsilon_{k\ell}$ y $E_{rs}(\alpha)P_{ij} = (I + \alpha\varepsilon_{rs})P_{ij} = P_{ij} + \alpha\varepsilon_{rs}P_{ij}$.
Por lo tanto, debemos probar que, en todos los posibles valores de i, j, k, ℓ, existen r y s tales que $P_{ij}\varepsilon_{k\ell} = \varepsilon_{rs}P_{ij}$. Para ello basta tomar $\varepsilon_{rs} = P_{ij}\varepsilon_{k\ell}P_{ij}$.
De esta manera, solo resta probar:

$$P_{ij}\,\varepsilon_{k\ell}\,P_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{k\ell} & \text{si} \quad \{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset \\ \varepsilon_{j\ell} & \text{si} \quad i = k, j \neq \ell \\ \varepsilon_{kj} & \text{si} \quad i = \ell, j \neq k \\ \varepsilon_{i\ell} & \text{si} \quad i \neq \ell, j = k \\ \varepsilon_{ki} & \text{si} \quad i \neq k, j = \ell \\ \varepsilon_{ji} & \text{si} \quad i = k, j = \ell. \\ \varepsilon_{ij} & \text{si} \quad i = \ell, j = k \end{cases}$$

Utilizando el resultado anterior, podemos probar:

Ejercicio: Si A es no singular, existe una matriz P de permutación y una matriz E producto de matrices elementales tales que $E\,P\,A$ es triangular superior sin ceros en la diagonal.

Propiedad: Sea A una matriz cuadrada no singular (el Método de Elimación de Gauss termina con U matriz triangular superior sin ceros en la diagonal). Entonces, existe una matriz de permutación P tal que PA tiene factorización LU (y factorización LDV). Justificar.

Veamos algunos ejercicios

Hasta ahora...

A es no singular si existe una permutación de sus filas que evita los ceros en las posiciones de pivot cuando se aplica el método de Gauss.

Equivalentemente...

A es no singular si existe matriz de permutación P tal que PA admite descomposición LU (y LDV).

Equivalentemente...

A es no singular si $Ax = b$ tienen solución única para todo b.

¿Qué otras formas de identificar "A no singular" recuerdan?

$det(A) \neq 0$, A tiene inversa, otras...

Vamos a concentrarnos en "A tiene inversa", o sea, A *inversible*.

Definición: B es la inversa de A si $BA = AB = I$. Decimos que A es inversible si existe B inversa de A.

Observación: No toda matriz es inversible. Por ejemplo:

1. la matriz nula ($A = \mathbf{0}$)
2. toda matriz no cuadrada. ¿Por qué?
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. ¿Por qué?

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4h & 0 \\ 0 & 3h & 1 \end{bmatrix} = I$$

Lema: Toda matriz tiene a lo sumo una matriz inversa.

Prueba: Sean B y C inversas de A. Entonces, $BA = I$ y $AC = I$. Así, $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$.

Notamos con A^{-1} a la (única) inversa de A.

Lema: Si A y B son matrices inversibles entonces A^{-1} y AB son inversibles con $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Prueba: Ejercicio.

Pregunta: Si A es inversible y B no es inversible, ¿puede ser AB inversible? Ejercicio.

Observaciones:

- Si A es inversible, $Ax = b$ tiene una única solución para todo b:

$$Ax = b \Longrightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Longrightarrow x = A^{-1}b.$$

- Si existe $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$, A no es inversible. ¿Por qué?

Problema: A matriz inversible. Resolver $Ax = b$.
Solución: $x = A^{-1}b$.

¿Esto hace más fácil la resolución de sistemas de ecuaciones?
¿Cómo encontramos A^{-1}?

Buscamos una matriz X tal que $AX = I$. Equivalentemente, buscamos n vectores columna X^i tales que $AX^i = e^i$, $i = 1, \ldots, n$. ¿Cómo usamos Gauss para resolver estos n sistemas?

Recordemos el método de eliminación (sin pivots nulos):

$$Ax = b \longleftrightarrow L^{-1}(Ax) = L^{-1}b \longleftrightarrow Ux = \tilde{b}$$

Podemos pensar que L^{-1} actúa sobre la matriz extendida $[A, b]$:

$$[A, b] \overset{L^{-1}\times}{\rightarrow} [L^{-1}A, L^{-1}b] = [U, \tilde{b}]$$

Para resolver por Gauss los n sistemas $AX^i = e^i$, $i = 1, \ldots, n$:

- Eliminación: $[A, e^1, \ldots, e^n] \overset{L^{-1}\times}{\longrightarrow} [U, L^{-1}e^1, \ldots, L^{-1}e^n] = [U, L^{-1}]$
- Sustitución para atrás: n procesos de sustitución.

Gauss-Jordan lo mejora.

Ejemplo:

$$[A, I] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L^{-1}\times} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-8} & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[U, L^{-1}\right] \xrightarrow{\text{0's s/ pivots}} \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{12}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{-6}{8} \\ 0 & -8 & \mathbf{0} & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\div\text{por pivots}}$$

$$\xrightarrow{\div\text{por pivots}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & \frac{-5}{16} & \frac{-6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{-2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left[I, U^{-1}L^{-1}\right] = \left[I, A^{-1}\right].$$

$$[A, e_1, \ldots, e_n] = [A, I] \stackrel{L^{-1}\times}{\rightarrow} [U, L^{-1}] \stackrel{U^{-1}\times}{\rightarrow} [I, U^{-1}L^{-1}] = [I, A^{-1}]$$

(En caso de necesitar permutar, la idea es la misma)

Gauss-Jordan es muy eficiente para calcular inversas , ¡pero sólo lo usamos si, por alguna razón, queremos encontrar a A^{-1}!

Para resolver sistemas, NO calculamos A^{-1}

Observación: Gauss-Jordan en realidad encuentra X tal que $AX = I$. ¿Cómo sabemos que $XA = I$?

¿Cómo encuentra Gauss- Jordan a X?

$$[A, I] \xrightarrow{M\times} [I, X]$$

donde M es producto de matrices elementales y de permutación.

Entonces, $M\,A = I$ y $M\,I = X$. Esto es, $M = X$ y por lo tanto $XA = I$.

Recordar:
A invertible $\Longleftrightarrow A$ no singular $\Longleftrightarrow$ Gauss encuentra n pivots no nulos (tal vez permutando)$\Longleftrightarrow$....

veremos varias otras caracterizaciones....

Definición: Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, la *transpuesta de* A, A^T, es la matriz $n \times m$ tal que, para todo $i = 1, \ldots, n$ y todo $j = 1, \ldots, m$, $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Equivalentemente, para todo $i = 1, \ldots, n$, $(A^T)_i = (A^i)^T$ y para todo $i = 1, \ldots, m$, $(A^T)^i = (A_i)^T$.

Propiedades: $(A^T)^T = A$ y $(AB)^T = B^T A^T$

Lema: Si A es inversible, A^T también lo es y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
Prueba:
$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$ y $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I$.

Definición: A es simétrica si $A = A^T$.

Observación: A simétrica $\Longrightarrow$ A cuadrada.

Lema: A simétrica e inversible, entonces A^{-1} es simétrica.
Prueba: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$.

Propiedad: Para toda matriz R $m \times n$, RR^T y $R^T R$ son simétricas.
Prueba: ejercicio.

Propiedad: Si A es simétrica y no singular admite una descomposición LDL^T, donde L es triangular inferior con 1's en la diagonal y D matriz diagonal sin ceros en la diagonal.
Prueba: $A = LDV \Longrightarrow A^T = V^T D^T L^T = A$. Por unicidad de la descomposición resulta $V = L^T$.

Comentario: Si A es simétrica, el proceso de Eliminación de Gauss se puede hacer en $\frac{n^3}{6}$ (en vez de $\frac{n^3}{3}$).