Éxito

Tomás Pitinari

Pag 1

1) Determinar la cardinalidad del conjunto

$$\{(k^3, n+2) \mid k, n \in \mathbb{N}_0\}$$

Si tomamos un $k_0, n_0 \in \mathbb{N}_0$ arbitrarios, tenemos que $\{(k_0^3, n_0+2)\}$ es un conjunto unitario que ~~es~~ contiene una tupla perteneciente a $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, por lo tanto el conjunto va a ser finito y numerable. Luego sabemos que $\mathbb{N}_0$ es infinito numerable, entonces tomamos una funcion $f: \mathbb{N}_0 \to \{k_0^3\} \times (\mathbb{N} - \{1\})$ definida como

$f(x) = (k_0^3, x+2)$,

demostramos la biyectividad

$\{(k_0^3, n+2) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \sim \mathbb{N}_0$

Dadas $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$, si $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \langle \text{def. de } f \rangle$$

$$(k_0^3, x_1+2) = (k_0^3, x_2+2)$$

$k_0^3 = k_0^3$ constante

$x_1 + 2 = x_2 + 2 \quad \langle \text{restamos } 2 \rangle$

$x_1 = x_2$

$\therefore f$ es inyectiva

Para algun $y_0 \in \{k_0^3\} \times (\mathbb{N} - \{1\})$ $\exists\, x_0 \in \mathbb{N}_0 / y_0 = (k_0^3, x_0+2)$

$y_0 = (k_0^3, y_{0_1})$

Entonces $y_{0_1} = x_0 + 2 \quad \langle \text{restamos } 2 \rangle$

$y_{0_1} - 2 = x_0$ $\quad \therefore f$ es sobreyectiva y biyectiva

Como existe la biyección, se tiene que $\{(k_0^3; n+2) \mid n \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N}$, o sea que es infinito numerable. Luego por union infinita numerable de conjuntos infinitos numerables, se tiene que:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{(k^3, n+2) \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{(k^3, n+2) \mid n, k \in \mathbb{N}_0\}$$

tambien es infinito numerable.

3) a) Dada una propiedad P, si verifica:

- $P(b)$ es válida
- Si $P(\alpha)$ es válida, entonces $P(abb\alpha)$ es válida
- Si $P(\alpha)$ es válida, entonces $P(bba\alpha)$ es válida

Entonces **P** es valida para todos los elementos de **T**

b) Hay que probar que $\forall \alpha \in T$, $\underbrace{cant_a(\alpha) < cant_b(\alpha)}_{\text{Tomamos esto como nuestra propiedad (P)}}$

Ahora veremos si cumple el principio

i) $P(b)$ es valido, ya que $cant_a(b) = 0 < cant_b(b) = 1$

ii) Si $P(\alpha)$ es valido, entonces $P(abb\alpha)$ es valido, ya que

$cant_a(abb\alpha) = cant_a(\alpha) + 1 \quad \wedge \quad cant_b(abb\alpha) = cant_b(\alpha) + 2$

Por HI: $cant_a(\alpha) < cant_b(\alpha)$ $\langle$sumamos 1$\rangle$

$cant_a(\alpha) + 1 < cant_b(\alpha) + 1 \quad \wedge \quad cant_b(\alpha) + 1 < cant_b(\alpha) + 2$

Por transitividad: $cant_a(\alpha) + 1 < cant_b(\alpha) + 2$

Éxito

Tomás
Pitinari

iii) Si $P(\alpha)$ es válido, entonces $P(bba\alpha)$ es válido, ya que

$$cant_a(bba\alpha) = cant_a(\alpha)+1 \quad \wedge \quad cant_b(bba\alpha) = cant_b(\alpha)+2$$

Por HI: $cant_a(\alpha) < cant_b(\alpha)$ <sumamos 1>

$$cant_a(\alpha)+1 < cant_b(\alpha)+1 \quad \wedge \quad cant_b(\alpha)+1 < cant_b(\alpha)+2$$

Por transitividad: $cant_a(\alpha)+1 < cant_b(\alpha)+2$

$\therefore$ P se cumple para todos los elementos de T

c) Vamos a demostrar la no pertenencia de bbabba enunciando la siguiente propiedad, $\forall \alpha \in T$ $\underbrace{\alpha \text{ termina con } b}_{\text{nuestra prop. } T}$

Ahora veremos si se cumple el principio.

i) $P(b)$ es valido, ya que termina con b

ii) Si $P(\alpha)$ es valida, entonces $P(abb\alpha)$ es valida, como ~~el último elemento de α no fue modificado~~ *[1], entonces $abb\alpha$ termina con b

iii) Si $P(\alpha)$ es válida, entonces $P(bba\alpha)$ es válida, como no se agregó ~~ni modificó~~ ningun elemento al final de α, entonces $bba\alpha$ termina con b.

*[1]: no se agregó ningun elemento despues de α

2) Si $A \sim B$ quiere decir que existe una función biyectiva de A en B o viceversa. La llamaremos $h: B \to A$

Sabemos que: $P(A) \sim \{f \mid f: A \to \{0,1\}\} \,/\, f(x)\begin{cases} 1 \text{ si } x \in X_0 \\ 0 \text{ si } x \notin X_0 \end{cases}$ con $X_0 \in P(A)$

ya que son ~~las~~ funciones que simbolizan con 1 si el elemento esta en el subconjunto y 0 si no lo esta

Luego $\{f \mid f: (h: B \to A) \to \{0,1\}\} \sim \{f \mid f: A \to \{0,1\}\}$ ya que