Ejercicio 3 práctica N°4
Análisis Matemático II

Daria Obukhova, Milagros Osimi, Tomás Pitinari

Consigna

3) Halle las primitivas de las siguientes funciones:

$$\text{f)} f_6(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

$$\text{j)} f_{10}(x) = -\frac{14x^3}{4\sqrt{7x^2+2}}$$

$$\text{o)} f_{15}(x) = xsen(x)cos(x)$$

Resolución

f)

$$\int \sqrt{e^x - 1} \cdot dx = \qquad \text{Multiplicamos por } \frac{e^x}{e^x}$$

$$\int \sqrt{e^x - 1} \cdot \frac{e^x}{e^x} \cdot dx = \qquad u = e^x - 1,\ du = e^x dx$$

$$\int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{u+1} \cdot du = \qquad \text{Multiplicamos por } \frac{2\sqrt{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{u+1} \cdot \frac{2\sqrt{u}}{2\sqrt{u}} \cdot du = \qquad p = \sqrt{u},\ dp = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$$

$$\int \frac{p}{p^2+1} \cdot 2p \cdot dp = \qquad \text{Sacamos el 2 y sumamos } 0 = 1 - 1$$

$$2\int \frac{p^2+1-1}{p^2+1} \cdot dp = \qquad \text{Separamos las integrales}$$

$$2\int \frac{p^2+1}{p^2+1} \cdot dp - \int \frac{1}{p^2+1} \cdot dp =$$

Ahora calculamos las integrales por separado:

$$\int \frac{p^2+1}{p^2+1} \cdot dp = \int 1 \cdot dp = p + C$$

$$\int \frac{1}{p^2+1} \cdot dp = arctan(p) + C$$

$$2(p - arctan(p)) + C = \qquad \text{Reemplazamos la } p \text{ por la } \sqrt{u}$$

$$2(\sqrt{u} - arctan(\sqrt{u})) + C = \qquad \text{Reemplazamos la } u \text{ por la } e^x - 1$$

$$2(\sqrt{e^x - 1} - arctan(\sqrt{e^x - 1})) + C =$$

Mostramos que $\int \sqrt{e^x - 1} \cdot dx = 2(\sqrt{e^x - 1} - arctan(\sqrt{e^x - 1})) + C$

j)

$$\int -\frac{14x^3}{4\sqrt{7x^2+2}}dx = \qquad \text{Sacamos } -\frac{1}{4} \text{ por ser constante}$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{14x \cdot x^2}{\sqrt{7x^2+2}}dx = \qquad u = 7x^2+2,\ du = 14xdx,\ 7x^2 = u-2$$

$$-\frac{1}{4}\int \frac{u-2}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}}du = \qquad \text{Sacamos } \frac{1}{7} \text{ por ser constante}$$

$$-\frac{1}{28}\int \frac{u-2}{\sqrt{u}}du = \qquad \text{Separamos las integrales}$$

$$-\frac{1}{28}\left(\int \frac{u}{\sqrt{u}}du - \int \frac{2}{\sqrt{u}}du\right) = \qquad \text{Sacamos 2 por ser constante y reemplazamos } \frac{u}{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = \sqrt{u}$$

$$-\frac{1}{28}\left(\int \sqrt{u} \cdot du - 2\int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot du\right) =$$

Ahora calculamos las integrales por separado:

$2\int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot du = 2\int u^{-\frac{1}{2}} \cdot du = 2 \cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2 \cdot 2\sqrt{u} + C = 4\sqrt{u} + C$

$\int \sqrt{u} \cdot du = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C$

$$-\frac{1}{28}\left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3} - 4\sqrt{u}\right) + C = \qquad \text{Finalmente reemplazamos } u \text{ por } 7x^2+2 \text{ y obtenemos el resultado final}$$

$$-\tfrac{1}{28}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{(7x^2+2)^3} - 4\sqrt{7x^2+2}\right) + C =$$

Mostramos que $\int -\frac{14x^3}{4\sqrt{7x^2+2}}dx = -\frac{1}{28}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(7x^2+2)^3} - 4\sqrt{7x^2+2}\right) + C$

o)

$$\int x.sen(x).cos(x)dx = \qquad \text{Sabiendo que } sen(x).cos(x) = \frac{sen(2x)}{2}$$

$$\int x.\frac{sen(2x)}{2}dx = \qquad \text{Por ser una costante sacamos } \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int x.sen(2x)dx = \qquad \text{Usando integración por partes, tomando } f(x) = x \text{ y } g'(x) = sen(2x)$$

Ahora vamos a ver cual es $g(x)$

$\int sen(2x)dx =$	Multiplicación del elemento neutro
$\int sen(2x).\frac{2}{2}dx =$	Por ser una costante sacamos $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\int sen(2x).2dx =$	Utilizamos la regla de sustitución con $u = 2x$
$\frac{1}{2}\int sen(u)du =$	por el apunte, sabemos que la primitiva de $sen(x)$ es $-cos(x)$
$\frac{1}{2}.(-cos(u)) + C =$	Finalmente reemplazamos u por $2x$
$-\frac{1}{2}.cos(2x) + C =$	

Retomando lo anterior

$\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}.x.cos(2x) - \int 1.(-\frac{1}{2}).cos(2x)dx) =$	Por ser una constante sacamos $-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}.x.cos(2x) - (-\frac{1}{2})\int cos(2x)dx) =$	Luego utilizando el mismo razonamiento que con $\int sen(2x)dx$ obtenemos
$\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}.x.cos(2x) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}sen(2x)) + C =$	Multiplicamos y queda el resultado
$\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}.x.cos(2x) + \frac{1}{4}.sen(2x)) + C =$	

Mostramos que $\int x.sen(x).cos(x)dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}.x.cos(2x) + \frac{1}{4}.sen(2x)) + C$