1

Consignas

Legajo:
P-5034/3
Tomás
Pitinari
LCC

1) Sea A la matriz cuya descomposición QR viene dada por las siguientes matrices

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad y \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Justificar porque $C(A) = C(Q)$

b) ¿Cual es la proyección del vector $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sobre $C(A)$?

c) Obtener el minimo $e = \min\{\|Ax-b\| : x \in \mathbb{R}^3\}$ para $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) Sea $U\hat{x} = c$ el sistema de ecuaciones normales cuyas soluciones $\hat{x}$ verifican $e = \|A\hat{x} - b\|$. Describir U y c

2) Sean $q_1 = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix}$ y $q_2 = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}$ vectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$, $S = \langle q_1, q_2 \rangle$ y P la matriz proyeccion que proyecta cada vector en $\mathbb{R}^3$ sobre S.

a) Describir los v_1 y v_2 en $\mathbb{R}^3$ tales que el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt sobre ellos produce q_1 y q_2.

b) Describir P_1^1, la entrada $(1,1)$ de P, en función de las entradas de q_1 y q_2

c) Determinar los autovalores de P y tres autovectores l.i. (Ayuda: recordar que P es una matriz de proyección, en particular proyecta los vectores de $\mathbb{R}^3$ sobre un plano y la interpretación geométrica de autovectores en $\mathbb{R}^3$)

d) ¿Cual es el $\det(P)$?

3) Hallar una matriz cuadrada de tamaño 2x2 cuyos autovalores sean -1 y 2 y tal que $N(A-2I)=\langle(1,1)^T\rangle$ y $N(A+I)=\langle(1,0)^T\rangle$.

4) Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B=AA^T$. Sin

calcular los autovalores de A responder

a) ¿Cual es la suma de los autovalores de A?

b) ¿Cual es el producto de los autovalores de A?

c) Sin calcular B ¿Cual es el producto de los autovalores de B?

d) Sin Calcular B, justificar porque los autovalores de B son estrictamente positivos. (Ayuda: recordar que los autovalores de matrices simetricas son no negativos)

5) Sea $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & i & i & i \\ -i & 0 & -i & i \\ -i & i & 0 & -i \\ -i & -i & i & 0 \end{bmatrix}$

Legajo: P-5039/3
Tomás Pitinan
LCC

a) Justificar porque A es diagonalizable por una unitaria.

b) Determinar, sin calcularlos, los autovalores de A y sus multiplicidades algebraicas y geometricas. (Ayuda: utilizar las propiedades de los autovalores de matrices unitarias y de la suma de los autovalores de una matriz)

6) a) Dar un ejemplo de una matriz no diagonalizable A tal que $\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^4$

b) Dar un ejemplo de dos matrices distintas y similares cuyos polinomios caracteristicos coinciden con $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$

c) En caso de ser posible, dar un ejemplo de dos matrices no similares cuyos polinomios caracteristicos coinciden con $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$ o justificar por que no existen dichas matrices.

Resolución

3) Tenemos que $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ son autovalores de una matriz A. Sus autovectores son ~~$x_1 = N(A-\lambda_1 I) =$~~

$$\cancel{x_1}\; N(A-\lambda_1 I) = N(A+I) = \langle (1,0)^T \rangle \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N(A-\lambda_2 I) = N(A-2I) = \langle (1,1)^T \rangle \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vemos ~~que~~ facilmente que x_1 y x_2 son l.i.

Por lo tanto A admite diagonalizacion, con una matriz ~~semejante~~ diagonalizante $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Su matriz diagonal, será $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$S^{-1} \Lambda S = A$$
$$\Lambda S = SA$$

$$\Lambda S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$SA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c = -1 \Rightarrow a = -1 \\ b+d = -1 \Rightarrow b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4) a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A) = 0 + 1 + 1 - 1 = 1$

b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$

Legajo.
P-5039/3
Tomás
Pitinari
LCC

Utilizando la propiedad, que si una fila o columna de la matriz tiene un valor ~~solo~~ no nulo y el resto nulos. Entonces $det(A) = (-1)^{j+i} A_i^j \cdot det(A')$. Siendo A' la matriz resultante de suprimir las filas y columnas i, j resp.

$$det(A) = (-1)^{3+3}\, 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot ((-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 2 \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 2$$

c) $det(B) = det(AA^T) = det(A)\, det(A^T) = det(A) \cdot det(A)$

$= det(A)^2 = 2^2 = 4$

d) Sabemos que B es simetrica, ya que:

$$B^T = (AA^T)^T = A^{T^T} A^T = AA^T = B$$

De ahi obtenemos que los autovalores de B son no negativos. Solo resta probar que todo autovalor de B es distinto a 0, eso se prueba facilmente viendo que el determinante de B es distinto de 0, ya que si algún autovalor ~~es~~ $\lambda_i = 0$, entonces $\det(B) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 4$, lo cual es absurdo, ya que cualquier escalar multiplicado por 0 es 0. Queda probado que los autovalores de B son positivos

5) a) Podemos ver facilmente que A es hermitiana ya que

$$A^H = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{-i} & \overline{-i} & \overline{-i} \\ \overline{i} & 0 & \overline{i} & \overline{-i} \\ \overline{i} & \overline{-i} & \overline{0} & \overline{i} \\ \overline{i} & \overline{i} & \overline{-i} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & i & i & i \\ -i & 0 & -i & i \\ -i & i & 0 & -i \\ -i & -i & i & 0 \end{bmatrix} = A$$

Luego sabemos que las matrices hermitianas son diagonalizables por una matriz unitaria.

b) Por un lado, sabemos que las matrices hermitianas tienen n autovectores ortonormales, ya que son diagonalizables por matrices unitarias, y las columnas de las mismas, coincidentes con los autovectores asociados, son vectores ortonormales. Por lo tanto la suma de la multiplicidad geometrica de todos los autovalores va a ser igual a 4.

La suma de los autovalores de la matriz es $tr(A) = 0$

7

Legajo: P-5039/3
Tomás Pitinari
LCC

Tambien podemos corroborar ~~a~~ facilmente que es unitaria, ya que todas sus columnas son de modulo 1, teniendo esto, tambien sabemos que el modulo de sus autovalores es 1, como es ~~hermitiana~~ hermitiana, tambien tenemos que todos los autovalores son reales. Queda como unica combinación: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, con $ma(\lambda_1) = 2 = ma(\lambda_2)$

y con $mg(\lambda_1) = 2 = mg(\lambda_2)$

6) a) Para obtener los autovalores de A, debemos resolver el polinomio caracteristico. ~~de~~ $\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^4 = 0$

$\lambda = 4$ es un ~~polinomio de mult~~ autovalor de multiplicidad algebraica 4, para que A sea no diagonalizable, la $\dim(N(A-4I)) < 4$. Por ejemplo, cuando la solución es unica

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dando como ejemplo la matriz de Jordan con un unico bloque 4x4 de el autovalor $\lambda = 4$. Es no diagonalizable

b) Podemos dar la matriz diagonal con autovalores
$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3 \quad \lambda_4 = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego planteamos una matriz unitaria cualquiera:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U^{-1} = U^{H} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego obtenemos que $U\,A\,U^{-1} = U\,A\,U^{H}$ es semejante a A.

$$U A U^{H} = U \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

9

Corroboramos que con ~~cambiar~~ intercambiar los elementos en la diagonal ~~sigue~~ sigue siendo ~~diagonalizable~~ similar.

~~c) Al ver el polinomio característico observamos~~

Legajo P-5039/3 Tomás Pitinari LCC

2) a) Por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad q_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, q_1 \rangle \cdot q_1}{\|v_2 - \langle v_2, q_1 \rangle q_1\|}$$

se omite $\|q_1\|^2$ ya que es igual a 1

$$P_{q_1} = \frac{1}{\underbrace{q_1^T q_1}_{\mathbb{R}}} q_1 q_1^T = \frac{1}{c^2+d^2+e^2} \begin{bmatrix} c^2 & cd & ec \\ cd & d^2 & ed \\ ec & ed & e^2 \end{bmatrix}$$

$$P_{q_2} = \frac{1}{\underbrace{q_2^T q_1}_{\mathbb{R}}} q_2 q_2^T = \frac{1}{f^2+g^2+h^2} \begin{bmatrix} f^2 & fg & fh \\ fg & g^2 & gh \\ fh & gh & h^2 \end{bmatrix}$$

$$P = P_{q_1} + P_{q_2} \Longrightarrow P_1^1 = \frac{c^2}{c^2+d^2+e^2} + \frac{f^2}{f^2+g^2+h^2}$$

1) a) Podemos ~~justificar~~ probar que $C(A) = C(Q)$, ya que las columnas de A son una combinación lineal de las columnas Q y son linealmente independientes por def. de la descomposición QR.

$A^1 = 1 . Q^1$

$A^2 = 2 . Q^1 + 1 . Q^2$

$A^3 = 2Q^2 + 2Q^3$

b) $C(A) = C(Q) \Longrightarrow proy_{S/C(A)} b = proy_{S/C(Q)} b =$

$proy_{S/C(Q)} b = \langle b, Q^1 \rangle . Q^1 + \langle b, Q_2 \rangle Q^2 + \langle b, Q^3 \rangle Q^3$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

chequeamos con $b - proy_{S/C(Q)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ se tene q̃e

$\left\langle proy_{S/C(Q)} b, b - proy_{C(Q)} b \right\rangle = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$