Flujo en redes de transporte

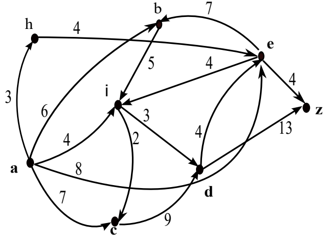
S. Bianchi P. Fekete F. Domingo

[1] Deptartamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
UNR

25 de octubre de 2021

Outline

Consideremos un grafo ponderado:



Supongamos que representa una red de tubería de corriente eléctrica, agua, datos, petróleo, etc. Cada arco en esta red tiene una capacidad máxima de transporte que está dada por el peso en cada arista.

En el ejemplo, la cantidad de material (de corriente eléctrica, agua, datos, etc..) que transporta la arista (a,h) no puede ser mayor que $3 = p(a,h)$

También la cantidad máxima de material que puede transportarse desde c hacia d es 9.

En el ejemplo, las capacidades de los arcos son cantidades enteras.

Definición:

Sea $N = (V, E)$ un grafo dirigido conexo y sin lazos. Entonces N es una red si se cumplen las condiciones:

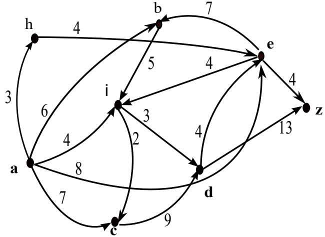
a) Existe un único vértice $a \in V$ tal que $deg_e(a) = 0$. Este vértice se llama *fuente*.

b) Existe un único vértice $z \in V$ tal que $deg_s(z) = 0$. Este vértice se llama *sumidero*.

c) Existe $c : E \to \mathbb{Z}^+$, que se llama *capacidad*.

Problema: Dada una red $N = (V, E)$, cuál es la capacidad máxima de transporte desde la fuente al sumidero?

Veamos el ejemplo anterior nuevamente:



Aquí a es la fuente y z es el sumidero. La cantidad de material que se transporta desde a no puede superar a
$c(a,b)+c(a,c)+c(a,e)+c(a,i)+c(a,h)=6+7+8+4+3=28$.
Por otra parte, las capacidades de las aristas que llegan a z suman
$c(d,z)+c(e,z)=13+4=17$.
Por lo tanto, la cantidad máxima que puede transportarse de a hacia z no puede superar a 17. Pero aún hay restricciones de capacidad de los arcos intermedios que componen la red.

Definición:

Dada una red $N = (V, E)$, una función $f : V \times V \to \mathbb{Z}_0^+$ es un flujo en N si:

A) $f(x,y) \leq c(x,y)$ si $(x,y) \in E$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin E$.

B) Si $v \in V - \{a,z\}$ entonces vale $\sum_{w \in V} f(w,v) = \sum_{w \in V} f(v,w)$.

La condición primera exige que el material transportado por cada arco no supere su capacidad.

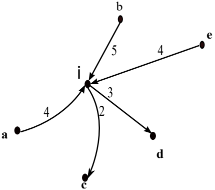
La segunda condición se conoce como *Leyes de Kirchhoff* o *Ley de conservación de flujo*.

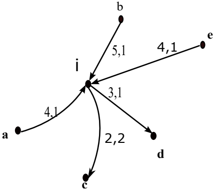
Esta ley exige que la cantidad de material que fluye hacia un vértice de la red N sea igual a la cantidad que fluye desde ese vértice, siempre que éste no sea fuente o sumidero de N.

Leyes de Kirchhoff

Veamos un ejemplo, las leyes de Kirchhoff para el vértice i del ejemplo inicial exige

$$f(a,i)+f(b,i)+f(e,i)=f(i,c)+f(i,d).$$



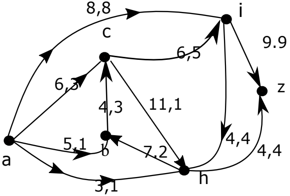


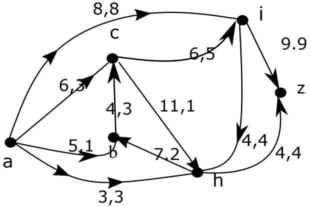
Si suponemos $f(a,i)=f(b,i)=f(e,i)=f(i,c)=f(i,d)=0$, se satisface la ecuación.

Pero si $f(a,i)=1, f(b,i)=1, f(e,i)=1$ y $f(i,c)=2, f(i,d)=1$, también se satisface la ecuación y se consigue un flujo positivo a través del vértice i.

Aclaración: El valor al lado de la capacidad y después de la coma sobre cada arco en la figura de la derecha, indica el flujo sobre cada arco.

Veamos otro ejemplo:





En la figura de la izquierda, para los vértices intermedios, las cantidades asignadas a cada arco satisfacen las leyes de Kirchhoff y no superan las capacidades, entonces corresponden a un flujo.

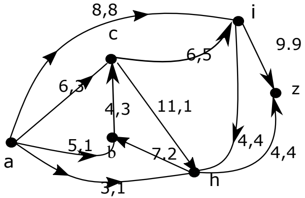
En la figura de la derecha observamos que para el vértice h las cantidades que transportan las aristas (a,h),(c,h) y (i,h) suman $3+1+4=8$, mientras que en las aristas (h,b) y (h,z) suman $2+4=6$. Por lo tanto los valores asignados a cada arco no corresponden a un flujo.

Definición Sea f un flujo de la red $N = (V,E)$ y $a \in V$ la fuente en N.

A) Se denomina *valor del flujo* f y se denota $val(f)$ a $\sum_{v \in V} f(a,v)$.

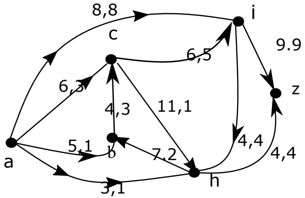
B) Se dice que una arista $e \in E$ está saturada por f si $f(e) = c(e)$. Cuando $f(e) < c(e)$ se dice que e no está saturada por f.

En el ejemplo anterior



Los arcos saturados son $(a,i),(i,z),(h,z)$ y (i,h).
Además, $val(f) = f(a,b) + f(a,c) + f(a,i) + f(a,h) = 1+3+8+1 = 13$.
Existe f' en N tal que $val(f') > val(f)$?.

Veamos nuevamente el ejemplo:



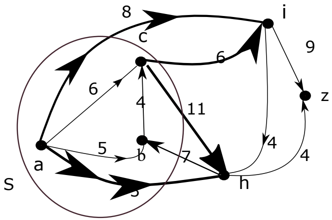
Calculamos ahora $f(i,z)+f(h,z)=9+4=13$ y es igual a $val(f)=13$.
Es decir

$$val(f)=\sum_{v\in V} f(a,v)=1+3+8+1=f(i,z)+f(h,z)=\sum_{v\in V} f(v,z).$$

Siempre se satisface esta igualdad?

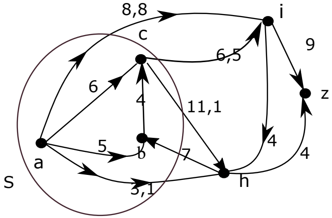
Definición de corte en una red

Definición: Sea $N=(V,E)$ y $S\subset V$ tal que $a\in S$ y $z\notin S$. El conjunto de aristas $\{(x,y): x\in S, y\notin S\}$ es *un de corte de la red* N y se denota $E(S,\bar{S})$.
En el ejemplo anterior un posible corte $E(S,\bar{S})$:



Definición: Sea $N=(V,E)$ y $E(S,\bar{S})$ un corte en N. La *capacidad de un corte* de $E(S,\bar{S})$ denotada por $c(S,\bar{S})$ se define como $\sum_{u\in S, w\notin S} c(u,w)$.
En el ejemplo
$c(S,\bar{S}) = c(a,i)+c(a,h)+c(c,h)+c(c,i) = 8+3+11+6 = 28.$

Definición: Sea $N=(V,E)$ y $E(S,\bar{S})$ un corte en N. El valor $f(S,\bar{S})$ se define como $\sum_{u\in S, w\notin S} f(u,w)$. De forma similar se define $f(\bar{S},S)=\sum_{u\notin S, w\in S} f(u,w)$. En el ejemplo anterior:



$f(S,\bar{S})=f(a,i)+f(a,h)+f(c,h)+f(c,i)=8+1+1+5=15$ y
$f(\bar{S},S)=f(h,b)=2$.
Vemos que $f(S,\bar{S})-f(\bar{S},S)=13=val(f)$.

Relación entre el valor del flujo y un corte en una red

Lema Sea $N=(V,E)$ una red, f un flujo y $E(S,\bar{S})$ un corte en N. Entonces $val(f)=f(S,\bar{S})-f(\bar{S},S)$.

Demostración:

Por hipótesis f es un flujo, entonces vale $\sum_{w\in V} f(v,w)-\sum_{w\in V} f(w,v)=0$ para todo $v\in V-\{a,z\}$.

Además como $f(w,a)=0$ para todo $w\in V$ sigue que $val(f)=\sum_{w\in V} f(a,w)-\sum_{w\in V} f(w,a)$.

Entonces

$$val(f)=\sum_{w\in V} f(a,w)-\sum_{w\in V} f(w,a)+\sum_{v\in S, v\neq a}(\sum_{w\in V} f(v,w)-\sum_{w\in V} f(w,v)).$$

Es decir,

$$val(f)=\sum_{v\in S}(\sum_{w\in V} f(v,w)-\sum_{w\in V} f(w,v)).$$

Demostración(cont.)
Podemos reescribir la suma anterior así:

$$val(f) = \sum_{v\in S, w\in V} f(v,w) - \sum_{v\in S, w\in V} f(w,v).$$

También:

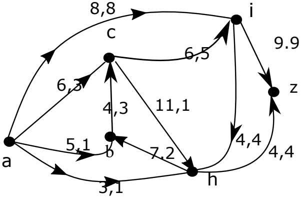
$$val(f) = \sum_{v\in S, w\in S} f(v,w) + \sum_{v\in S, w\notin S} f(v,w) - (\sum_{v\in S, w\in S} f(w,v) + \sum_{v\in S, w\notin S} f(w,v)).$$

Observemos que $\sum_{v\in S, w\in S} f(v,w) = \sum_{v\in S, w\in S} f(w,v)$, $\sum_{v\in S, w\notin S} f(v,w) = f(S,\bar{S})$ y $\sum_{v\in S, w\notin S} f(w,v) = f(\bar{S},S)$, entonces

$$val(f) = f(S,\bar{S}) - f(\bar{S},S).$$

Relación entre el valor del flujo y un corte en una red

Recordar:



$$val(f) = \sum_{v \in V} f(a,v) = 1+3+8+1 = f(i,z) + f(h,z) = \sum_{v \in V} f(v,z).$$

Siempre se satisface esta igualdad?

Sí!

Aplicamos el lema anterior cuando $S = V - \{z\}$ y

$$val(f) = f(S,\{z\}) - f(\{z\},S) = f(S,\{z\}) - 0 = f(S,\{z\}) = \sum f(v,z).$$

Relación entre el valor del flujo y la capacidad de un corte en una red

Corolario Sea $N = (V,E)$ una red, f un flujo y $E(S,\bar{S})$ un corte en N. Entonces $val(f) \leq c(S,\bar{S})$.

Demostración

Por el lema anterior tenemos $val(f) = f(S,\bar{S}) - f(\bar{S},S)$.

Por otra parte sabemos que todo flujo satisface $0 \leq f(x,y) \leq c(x,y)$ para todo $(x,y) \in E$. Sigue que $f(S,\bar{S}) \leq c(S,\bar{S})$ y $f(\bar{S},S) \geq 0$.

Entonces

$$val(f) = f(S,\bar{S}) - f(\bar{S},S) \leq f(S,\bar{S}) \leq c(S,\bar{S}).$$

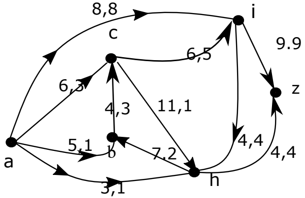
Observación

$$max\{val(f) : f \text{ es un flujo en } N\} \leq min\{c(S,\bar{S}) : E(S,\bar{S}) \text{ corte en } N\}.$$

Por lo tanto, si f en N es tal que $val(f) = c(S,\bar{S})$ para algún $E(S,\bar{S})$ corte en N, entonces f es un flujo de valor máximo y $E(S,\bar{S})$ corte de capacidad mínima.

Relación entre el valor del flujo y la capacidad de un corte en una red

Una vez más:



$val(f) = \sum_{v \in V} f(a, v) = 1 + 3 + 8 + 1 = 13$ y nos preguntamos si existe f' flujo en N tal que $val(f') > 13$.
Si encontramos un corte de capacidad 13, entonces el flujo del ejemplo tiene valor máximo y la capacidad del corte es mínima.
Si $S = V - \{z\}$ entonces $c(S, \{z\}) = c(i, z) + c(h, z) = 13$.
Resulta que f es un flujo de valor máximo y $E(S, \{z\})$ es un corte de capacidad mínima.

Sea $N = (V, E)$. El valor máximo de un flujo en la red N es igual a la capacidad mínima de un corte de la red N.

Idea de la demostración Dada una red $N = (V, E)$, la prueba consiste en definir una sucesión de flujos en N de modo que

$$val(f_0) < val(f_1) < val(f_2) < \dots$$

Como el valor de un flujo es entero, es claro que $val(f_{n+1}) \geq val(f_n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sabemos que el valor de cualquier flujo en N es a lo sumo la capacidad de un corte en N. Esto nos dice que la sucesión es acotada y que existe un término f_n de la sucesión con el valor mayor posible.

La prueba encuentra un corte $E(S, \bar{S})$ para el cual vale $val(f_n) = c(S, \bar{S})$.

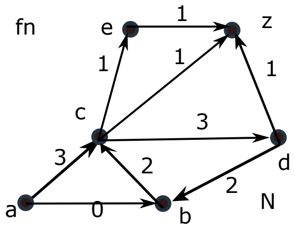
Lo que demuestra que f_n es un flujo con valor máximo y $E(S, \bar{S})$ un corte de capacidad mínima.

Teorema de Ford-Fulkerson[1956] Sea $N=(V,E)$. El valor máximo de un flujo en la red N es igual a la capacidad mínima de un corte de la red N.
Demostración Inicialmente considero $f_0 : V\times V \to \mathbb{Z}_0^+$ en N tal que $f_0(x,y)=0$ para todo $x,y\in V$.
Es claro que f_0 es un flujo en N.
Supongamos que, dado $n\in\mathbb{N}$, hemos definido $f_n : V\times V\to\mathbb{Z}_0^+$ un flujo en N.
Sea S_n el conjunto de vértices en V para los cuales existe un $a-v$ recorrido en N de la forma $x_0e_0x_1e_1\ldots e_{l-1}x_l$ y además:

- $x_0=a$ y $x_l=v$,
- $0\le f_n(e_i)<c(e_i)$ para todo $e_i=(x_i,x_{i+1})$ con $0\le i<l$,
- $0<f_n(e_i)\le c(e_i)$ para todo $e_i=(x_{i+1},x_i)$ con $0\le i<l$.

Si $z\in S_n$, sea $W=x_0e_0x_1e_1\ldots e_{m-1}x_m$ con $x_0=a$ y $x_m=z$.
Sin pérdida de generalidad puedo suponer que este recorrido es un camino simple.

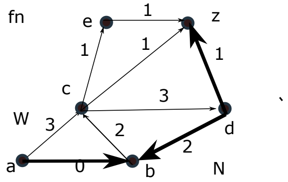
Demostración(cont.)
Veamos un ejemplo de red $N = (V, E)$ y flujo f_n para algún $n \in \mathbb{N}$ y $c(e) = 3$ para todo $e \in E$:



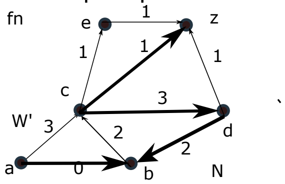
En este caso $S_n = V$, es decir existe $a - v$ camino para todo $v \in V$.
Entonces existe $a - z$ camino W.

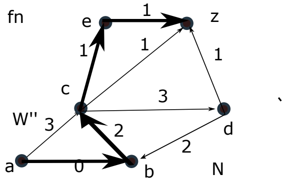
Demostración(cont.)

Un posible camino W es el de la figura ($c(e) = 3$ para todo $e \in E$):



O bien los que aparecen a continuación:





Demostración(cont.)
Sean $\varepsilon_1 = min\{c(e_i) - f_n(e_i):$ cuando $e_i = (x_i, x_{i+1}),\ 0 \leq i < m\}$ y $\varepsilon_2 = min\{f_n(e_i):$ cuando $e_i = (x_{i+1}, x_i),\ 0 \leq i < m\}$ (si no existe arco de la forma $e_i = (x_{i+1}, x_i)$ en W definimos $\varepsilon_2 = +\infty$).
Llamamos

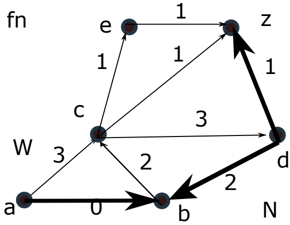
$$\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

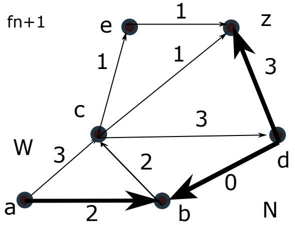
Observemos que $\varepsilon > 0$ y además entero. (Porqué?)
Definimos:

$$f_{n+1}(e) = \begin{cases} f_n(e) + \varepsilon & \text{si} \quad e = e_i = (x_i, x_{i+1}) \text{ para algún } 0 \leq i \leq m-1 \\ f_n(e) - \varepsilon & \text{si} \quad e = e_i = (x_{i+1}, x_i) \text{ para algún } 0 \leq i \leq m-1 \\ f_n(e) & \text{si} \quad e \notin W \end{cases}$$

Es inmediato que $f_{n+1}(e) \geq 0$ para todo $e \in E$.

Demostración(cont.)
Veamos en los ejemplos anteriores cómo obtenemos f_{n+1} a partir de f_n.
(Recordar que $c(e) = 3$ para todo arco en N.)

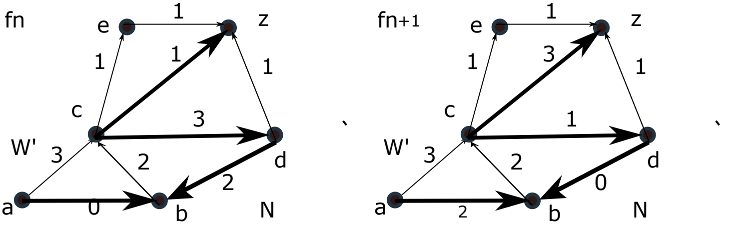




Calculamos $\varepsilon_1 = min\{c(a,b) - f_n(a,b), c(d,z) - f_n(d,z)\} = min\{3,2\} = 2$ y $\varepsilon_2 = f_n(d,b) = 2$. Entonces $\varepsilon = 2$.

Así f_{n+1} resulta un flujo en N.
Además $val(f_n) = 3 < val(f_{n+1}) = 5$.

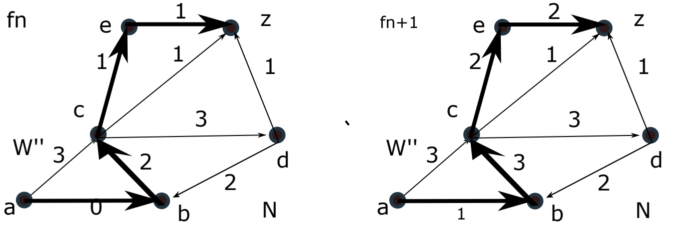
Demostración(cont.)
Veamos el caso en el cual el $a-z$ camino es W' en N y el flujo es f_n.
(Recordar que $c(e)=3$ para todo arco en N.)



Calculamos $\varepsilon_1 = min\{c(a,b)-f_n(a,b), c(c,z)-f_n(c,z)\} = min\{3,2\} = 2$ y $\varepsilon_2 = min\{f_n(d,b), f_n(c,d)\} = min\{2,3\}$. Entonces $\varepsilon = 2$.

Así f_{n+1} es también un flujo en N.
Resulta $val(f_n) = 3 < val(f_{n+1}) = 5$.

Demostración(cont.)
Por último, en el caso en que W'' es $a-z$ camino en N y el flujo es f_n, tenemos: (Recordar que $c(e)=3$ para todo arco en N.)



Calculamos $\varepsilon_1 = min\{c(a,b)-f_n(a,b), c(b,c)-f_n(b,c), c(c,e)-f_n(c,e), c(e,z)-f_n(e,z)\} = min\{3,1,2,2\} = 1$ y $\varepsilon_2 = +\infty$. Entonces $\varepsilon = 1$.

Nuevamente f_{n+1} es un flujo en N.
Vale $val(f_n) = 3 < val(f_{n+1}) = 4$.

Demostración(cont.)
Vamos a demostrar que f_{n+1} es siempre un flujo y $val(f_n+1) > val(f_n)$.
Para ello solo basta probar que se satisfacen las leyes de Kirchhoff en cada vértice x_i de W con $i \neq 0$ y $i \neq m$ (porqué?).
Por hipótesis, f_n es un flujo entonces en cada $x_i \in W$ con $1 \leq i \leq m-1$ vale:

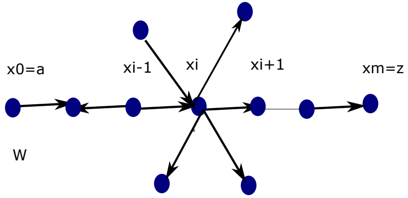
$$\sum_{w \in V} f_n(w, x_i) = \sum_{w \in V} f_n(x_i, w).$$

Sabemos que W es un camino simple, y $x_i \in W$ con $1 \leq i \leq m-1$, solo existen dos arcos en W que se conectan en x_i, estos son e_{i-1} y e_i.
Es decir, si $e = (x_i, v)$ o $e = (v, x_i)$ y además $e \notin \{e_{i-1}, e_i\}$, entonces $f_{n+1}(e) = f_n(e)$.
Pero $f_{n+1}(e_i)$ y $f_{n+1}(e_{i-1})$ varían de acuerdo al camino W en N.

Demostración(cont.)

Veamos los distintos casos:

Primer caso $e_{i-1} = (x_{i-1}, x_i)$ y $e_i = (x_i, x_{i+1})$.



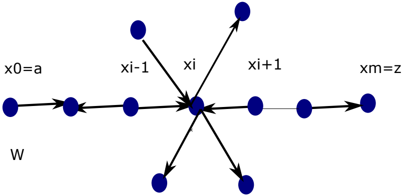
$\sum_{w \in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w \in V, w \neq x_{i-1}} f_{n+1}(w, x_i) + f_{n+1}(x_{i-1}, x_i) =$
$\sum_{w \in V, w \neq x_{i-1}} f_n(w, x_i) + f_n(x_{i-1}, x_i) + \varepsilon = \sum_{w \in V} f_n(w, x_i) + \varepsilon.$

$\sum_{w \in V} f_{n+1}(x_i, w) = \sum_{w \in V, w \neq x_{i+1}} f_{n+1}(x_i, w) + f_{n+1}(x_i, x_{i+1}) =$
$\sum_{w \in V, w \neq x_{i+1}} f_n(x_i, w) + f_n(x_i, x_{i+1}) + \varepsilon = \sum_{w \in V} f_n(x_i, w) + \varepsilon.$

Entonces vale $\sum_{w \in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w \in V} f_{n+1}(x_i, w)$.

Demostración(cont.)

Segundo caso $e_{i-1} = (x_{i-1}, x_i)$ y $e_i = (x_{i+1}, x_i)$.

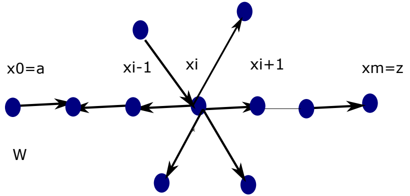


$\sum_{w \in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w \in V, w \notin \{x_{i-1}, x_{i+1}\}} f_{n+1}(w, x_i) + f_{n+1}(x_{i-1}, x_i) + f(x_{i+1}, x_i) =$
$\sum_{w \in V, w \notin \{x_{i-1}, x_{i+1}\}} f_n(w, x_i) + f_n(x_{i-1}, x_i) + \varepsilon + f_n(x_{i+1}, x_i) - \varepsilon = \sum_{w \in V} f_n(w, x_i)$.
$\sum_{w \in V} f_{n+1}(x_i, w) = \sum_{w \in V} f_n(x_i, w)$.

Entonces $\sum_{w \in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w \in V} f_{n+1}(x_i, w)$.

Demostración(cont.)

Tercer caso $e_{i-1} = (x_i, x_{i-1})$ y $e_i = (x_i, x_{i+1})$.

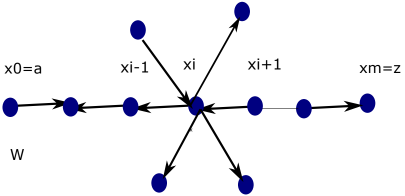


$\sum_{w\in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w\in V} f_n(w, x_i)$,
$\sum_{w\in V} f_{n+1}(x_i, w) =$
$\sum_{w\in V, w\notin\{x_{i-1},x_{i+1}\}} f_{n+1}(x_i, w) + f_{n+1}(x_i, x_{i-1}) + f_{n+1}(x_i, x_{i+1}) =$
$\sum_{w\in V, w\notin\{x_{i-1},x_{i+1}\}} f_n(x_i, w) + f_n(x_i, x_{i-1}) - \varepsilon + f_n(x_i, x_{i+1}) + \varepsilon = \sum_{w\in V} f_n(x_i, w)$.

Entonces $\sum_{w\in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w\in V} f_{n+1}(x_i, w)$.

Demostración(cont.)

Cuarto caso $e_{i-1} = (x_i, x_{i-1})$ y $e_i = (x_{i+1}, x_i)$.



$$\sum_{w \in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w \in V, w \neq x_{i+1}} f_{n+1}(w, x_i) + f_{n+1}(x_{i+1}, x_i) = \sum_{w \in V, w \neq x_{i+1}} f_n(w, x_i) + f_n(x_{i+1}, x_i) - \varepsilon = \sum_{w \in V} f_n(w, x_i) - \varepsilon.$$

$$\sum_{w \in V} f_{n+1}(x_i, w) = \sum_{w \in V, w \neq x_{i-1}} f_{n+1}(x_i, w) + f(x_i, x_{i-1}) = \sum_{w \in V, w \neq x_{i-1}} f_n(x_i, w) + f_n(x_i, x_{i-1}) - \varepsilon = \sum_{w \in V} f_n(x_i, w) - \varepsilon.$$

Entonces $\sum_{w \in V} f_{n+1}(w, x_i) = \sum_{w \in V} f_{n+1}(x_i, w)$.

Demostración(cont.)

Entonces la función f_{n+1} es un flujo en N y además asume valores enteros.

Calculamos $val(f_{n+1}) = \sum_{v\in V} f_{n+1}(a,v)$.

Uno de los sumandos de esta suma corresponde a $f_{n+1}(e_0)$, ya que e_0 es el primer arco en W y $e_0 = (a,x_1)$ (pues $deg_e(a) = 0$).

Entonces $f_{n+1}(a,x_1) = f_n(a,x_1) + \varepsilon$ y $f_{n+1}(a,v) = f_n(a,v)$ si $v \neq x_1$.

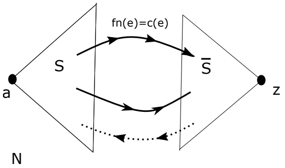
De donde sigue que
$val(f_{n+1}) = \sum_{v\in V-\{x_1\}} f_{n+1}(a,v) + f_{n+1}(a,x_1) = val(f_n) + \varepsilon > val(f_n)$, como queríamos demostrar.

En resumen, si $z \in S_n$, es posible definir un flujo f_{n+1} que cumpla la condición $val(f_n) < val(f_{n+1})$ y construir un elemento más en la sucesión

$$f_0, \ldots, f_n, f_{n+1}.$$

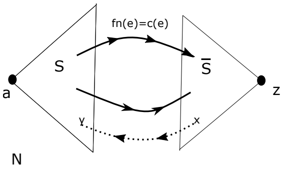
Demostración(cont.)
Si $z \notin S_n$, entonces $E(S_n, \bar{S}_n)$ es un corte en N.

Recordemos que $v \in S_n$ si existe $a - v$ camino en N y para todo e en el camino de la forma $e = (x_i, x_{i+1})$ vale $0 \leq f_n(e) < c(e)$ y para todo arco de la forma $e = (x_{i+1}, x_i)$ vale $0 < f_n(e) \leq c(e)$.
Veamos una ilustración:

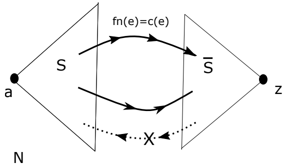


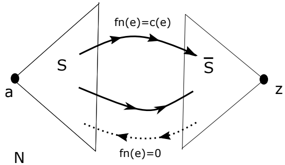
Es decir, todo arco en $E(S, \bar{S})$ debe estar saturado por el flujo f_n.
Es posible que exista (x, y) con $x \in \bar{S}_n, y \in S_n$?

Demostración(cont.)
Si suponemos existe (x,y) con $x \in \bar{S}_n, y \in S_n$ y $f_n(x,y) > 0$, al agregar (x,y) a algún $a-y$ camino, se obtiene un $a-x$ camino. De este modo se contradice $x \in \bar{S}_n$.



Demostración(cont.)
Si suponemos existe (x, y) con $x \in \bar{S}_n, y \in S_n$ y $f_n(x, y) > 0$, al agregar (x, y) a algún $a - y$ camino, se obtiene un $a - x$ camino. De este modo se contradice $x \in \bar{S}_n$.
Por lo tanto:

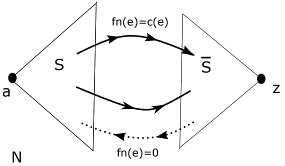




O bien no existe arco (x, y) con $x \in \bar{S}_n, y \in S_n$ o bien $f_n(x, y) = 0$.

Demostración(cont.)

Entonces los únicos arcos con extremos en S_n y $\bar{S}_n$ y flujo positivo son los arcos del corte $E(S_n, \bar{S}_n)$

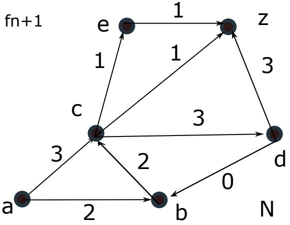


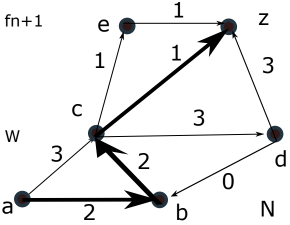
Además, para todo $e \in E(S_n, \bar{S}_n)$ vale $f_n(e) = c(e)$.

Por lo tanto $val(f_n) = f_n(S_n, \bar{S}_n) - f_n(\bar{S}_n, S_n) = f_n(S_n, \bar{S}_n) = c(S_n, \bar{S}_n)$.

Es decir f_n tiene máximo valor y $E(S_n, \bar{S}_n)$ capacidad mínima.

Veamos esto último en uno de los ejemplos anteriores.
Consideremos f_{n+1} el flujo en N conseguido mediante el camino W con $val(f_{n+1}) = 5$. (Recordar que $c(e) = 3$ para todo $e \in E$.)





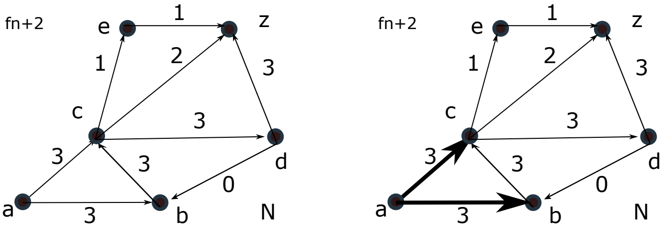
Vemos que $z \in S_{n+1}$.

Calculamos
$\varepsilon_1 = min\{c(a,b) - f_{n+1}(a,b), c(b,c) - f_{n+1}(b,c), c(c,z) - f_{n+1}(c,z)\} = \{1,1,2\}$
y $\varepsilon_2 = \infty$.

Entonces $\varepsilon = 1$.

Conseguimos así a f_{n+2} que es un flujo en N.

Además vale $val(f_{n+2}) = 6 > val(f_{n+1}) = 5$.



Observemos que $z \notin S_{n+2} = \{a\}$.

Por lo tanto $E(S_{n+2}, \bar{S}_{n+2})$ es un corte y vale

$$c(S_{n+2}, \bar{S}_{n+2}) = 6 = val(f_{n+2}).$$

Corolario Sea $N = (V, E)$ una red tal que para cada $e \in E$ vale que $c(e)$ es un entero no negativo.Entonces existe un flujo máximo f en N para el cual $f(e)$ es un entero no negativo para cada $e \in E$.
Demostración: Ejercicio.
Comentarios finales: Las definiciones de red de transporte y flujo pueden adaptarse de modo que admitan valores reales no negativos.

Si las capacidades son números racionales, el mismo procedimiento descripto en el teorema consigue un flujo máximo.

Si alguna de las capacidades es un número irracional, es posible que el procedimiento nunca termine o bien no consiga un flujo máximo. (Ford y Fulkerson[1962])

En el caso de capacidades irracionales, se utiliza la modificación hecha por Edmonds y Karp [1972]