Numeros Reales

Analisis Matematico I, si hay algun error hablar con Maxi Nielsen 69/69/420

Axiomas de cuerpo

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Son validas las siguientes afirmaciones:

1. A) **Propiedades conmutativas:** a+b=b+a y ab=ba

2. A) **Propiedades asociativas:** a+(b+c)=(a+b)+c y a(bc)=(ab)c

3. A) **Propiedad distributiva:** a(b+c)=ab+ac

4. A) **Existencia de elementos neutros:** $\exists 0, 1 \in \mathbb{R} / \forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a \wedge a * 1 = 1 * a = a$

5. A) **Existencia de elementos reciprocos:** $\forall a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0, \exists b \in \mathbb{R} / ab = ba = 1$

Teorema 1

(Ley de simplificacion para la suma o propiedad cancelativa de la suma). Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a + b = a + c \Rightarrow b = c$.

Demostracion: Sean $a, b, c \in \mathbb{R} / a + b = a + c$. Llamaremos d=a+b (y por ende, d=a+c).
Por el axioma 5, existe al menos un numero, llamemoslo y, que es opuesto a a, es decir, verifica que a+y=y+a=0. Entonces:

$$y + d = y + (a + b) \overbrace{=}^{A2} (y + a) + b = 0 + b \overbrace{=}^{A4} b$$

Pero tambien y+d=c; en efecto:

$$y + d = y + (a + c) \overbrace{=}^{A2} (y + a) + c = 0 + c \overbrace{=}^{A4} c$$

$\therefore b = c$ qed
Junto a los axiomas se presupone la validez de las siguientes propiedades de la igualdad:

- **Propiedad de reflexividad:** $\forall a, a = a$

- **Propiedad de simetria:** si $a = b \Rightarrow b = a$

- **Propiedad de transitividad** si $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$

Corolario 1

(Unicidad del elemento neutro de la suma). Si $0' \in \mathbb{R}/$

$$a+0'=0'+a=a$$

$\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow 0' = 0/$
Demostracion: El axioma 4 afirma que 0 es un elemento neutro para la suma. Supongamos que 0' es un número que también funciona como neutro de la suma, es decir que a + 0' = 0' + a = a $\forall a \in \mathbb{R}$. Sea a un número cualquiera (por ejemplo, a = 1 o cualquier otro). Entonces

$$a+0=a \text{ y tambien } a+0'=a$$

Luego,

$$a+0=a+0'$$

y, por la propidad cancelativa de la suma,

$$0=0'$$

Corolario 2

(Unicidad del elemento opuesto). $\forall a \in \mathbb{R}, \exists ! b \in \mathbb{R}/a + b = b + a = 0$
Demostracion: Dado $a \in \mathbb{R}$, la existencia de un numero b tal que a+b=b+a=0 esta garantizada por el axioma 5. Lo que debemos probar es que hay un solo numero capaz de satisfacer aquello. Supongamos que hubiera otro: sea $b' \in \mathbb{R}/a + b' = b' + a = 0$. En particular, tenemos que:

$$a+b=0 \text{ y } a+b'=0$$
$$a+b=a+b'$$
$$b=b' \text{ Por propiedad cancelativa de la suma.}$$

Este corolario nos permite establecer la notacion: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists ! -a/a + (-a) = 0$
Definicion: Llamamos diferencia entre dos numeros reales a y b, y la denotamos con a-b, al numero dado por la suma de a y el opuesto de b, es decir.

$$a-b=a+(-b)$$

Teorema 2

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

1. $-(-a) = a$ (El numero opuesto al opuesto de a es el propio numero a)

2. $-0 = 0$

3. $0 * a = 0$

4. $a(-b) = -(ab) = (-a)b$

5. $(-a)(-b) = ab$

6. $a(b - c) = ab - ac$

Teorema 3

(Ley de sim[lificacion para el producto o Propiedad cancelativa del producto). Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.Si $ab = ac \Rightarrow b = c$

0.1 Corolario 3

(Unicidad del elemento nuetro del producto). Si 1' es un numero que verifica que $a * 1' = 1' * a = a, \forall a \in a\mathbb{R} \Rightarrow 1' = 1$

Corolario 4

(Unicidad del reciproco o inverso). $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists! b \in \mathbb{R} - \{0\}/ab = ba = 1$

Notacion: dado $a \neq 0$, al unico numero que es reciproco de a se lo denota con a^{-1}

Definicion: Si a y b son dos numeros reales y $b \neq 0$, llamaremos con $\frac{a}{b}$, al numero dado por el producto de a y el reciproco de b. Es decir

$$\tfrac{a}{b} = ab^{-1}$$

Teorema 4.

Sean a,b,c,d$\in \mathbb{R}$

1. El numero 0 no tiene reciproco

2. $1^{-1} = 1$

3. $\frac{a}{1} = a$; y si $a \neq 0, \frac{1}{a} = a^{-1}$

4. Si $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

5. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0 \Rightarrow$

   (a) $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$

   (b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

   (c) $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

6. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0 \Rightarrow (\frac{a}{b})^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$

7. $-a = (-1) * a$

Axiomas de orden

A7) Si $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \wedge ab \in \mathbb{R}^+$
A8) $\forall a \in \mathbb{R}/a \neq 0, a \in \mathbb{R}^+ \vee -a \in \mathbb{R}^+$, pero no ambas
A9) $0 \neq \mathbb{R}^+$
Definicion: los simbolos $<, >, \leq$ y $\geq$, llamados respectivamente menor que, mayor que, menor o igual que y mayor o igual que, los definiremos de la siguiente forma. Sean $a, b \in \mathbb{R}$:

- $a < b$ significa que $b - a \in \mathbb{R}^+$

- $a > b$ significa que $a - b \in \mathbb{R}^+$, es decir, $b < a$

- $a \leq b$ significa que, o bien $b - a \in \mathbb{R}^+$, o bien $a = b$

- $a \geq b$ significa que, o bien $a - b \in \mathbb{R}^+$, o bien $a = b$; es decir, $b \leq a$

Observacion: $a > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$
Se deduce:

- Si $a > 0 \Rightarrow -a < 0$

- Si $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

Teorema 5

(Propiedad de Tricotomia). Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica una y solo una de las siguientes proposiciones:

i) a<b   ii) b<a   iii)a=b

Teorema 6

(Propiedad transitiva de la relacion de menor). Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Teorema 7

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

2. Si $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

3. (a) Si $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

   (b) Si $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

4. Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

5. 1>0. Es decir, $1 \in \mathbb{R}^+$

6. Si $a < b \Rightarrow -b < -a$

7. $ab > 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^+ \vee a, b \in \mathbb{R}^-$

8. $ab < 0 \Rightarrow (a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^-) \vee (a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^+)$

9. $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$

10. Si $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Numeros naturales, enteros y racionales e irracionales

Definicion: Llamamos conjunto de numeros naturales al conjunto

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Notemos que $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^+$, pues 0<n $\forall n \in \mathcal{N}$
El conjunto de los naturales verifica dos propiedades basicas:

1. $1 \in \mathcal{N}$

2. Si $a \in \mathcal{N} \Rightarrow a + 1 \in \mathcal{N}$

$\therefore \mathcal{N}$ es inductivo.
Una definicion formal es que los naturales es el subconjunto inductivo incluido en todo subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$, es decir es el mas pequeño.
$\mathcal{N}$ tiene primer elemento, el 1.
Definicion:

$$\mathcal{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathcal{N} \vee -x \in \mathcal{N} \vee x = 0\}$$

La suma y el rpoducto son operaciones cerradas en los enteros. el cociente no.
Definicion

$$\mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathcal{Z}, q \neq 0 / x = \frac{p}{q}\}$$

Definicion

$$\mathcal{I} = \mathbb{R} - \mathcal{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathcal{Q}\}$$

1 Representacion geometrica de los numeros reales: la recta real

Se selecciona un punto que representa al 0 y uno que representa al 1, esta seleccion fija la escala. Cada punto de la recta representa a un unico numero real, y cada numero real esta representado por un unico punto de la recta. Dicha asociacion biunivoca se establece de manera tal que:

1. Si los puntos puntos A y B sobre la recta representan a los numeros reales a y b, respectivamente, entonces A esta a la izquierda de B si y solo si $a < b$.

2. Si los puntos A,B,C,D representan a los reales a,b,c,d, respectivamente, con $a < b$ y $c < d$, entonces los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si y solo si $b - a = d - c$.

Proposicion 1

$\forall a < b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / a < x < b$

Para demostrarlo, pensemos en los puntos a y b de la recta real, con a a la izquierda de b. Podemos ver que hay infinitos puntos entre ellos. Uno de ellos es el punto medio del segmento que va de a a b. Dicho punto medio se calcula como $\frac{a+b}{2}$.

Demostracion: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Sea $x = \frac{a+b}{2}$. Probaremos que $a < x < b$. En efecto:

$x - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$

Como $b - a > 0$ y $2 > 0$, se tiene $x - a > 0$, es decir, a<x.

Por otra parte,

$b - x = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-(a+b)}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$

Intervalos reales

Definicion: Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ se definen los siguientes conjuntos:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (int abierto)

- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (int semiabierto)

- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (int semiabierto)

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (int cerrado)

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

a y b son los extremos del intervalo

Valor absoluto de un numero

Defincion: Dado $x \in \mathbb{R}$, su valor absoluto es el numero real $|x|$ definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ es la distancia en la recta real entre los puntos 0 y x.

La distancia entre dos puntos cualquiera $x, y \in \mathbb{R}$ esta dada por el valor $|x - y|$.

Proposicion 2

(Propiedades del valor absoluto). Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $|x| \geq 0$. Ademas, $|x| = 0 = 0$

2. $|x| = |-x|$

3. $-|x| \leq x \leq |x|$

4. Dado a>0, se tiene

   (a) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

   (b) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee a < x$

5. Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$

6. $|x * y| = |x| * |y|$

7. Si $y \neq 0$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

2 Axioma del supremo (o de completitud)

Definicion: Sea A un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Se dice que b es una cota superior de A si

$$a \leq b, \forall a \in A$$

- Si $\exists b / b$ es cota superior de A, se dice que A esta acotado superiormente.

Definicion: Sea $A / \neq A \subset \mathbb{R}$. Se dice de un punto $b \in \mathbb{R}$ que es supremo de A si vefifica:

1. $a \leq b, \forall a \in A$

2. Si $c < b \Rightarrow$ c no es una cota superior de A.

En otra palabras, b es supremo de A si es la menor cota superior de A. b es unico.

Teorema 8

(Unicidad del supremo). Dos numeros distintos no pueden ser supremos de un mismo conjunto.
Demostracion: Sea $A / \neq A \subset \mathbb{R}$, y sean b y b' dos supremos de A.
Al ser supremos del conjunto, b y b' son cotas superiores de A (por i de la definicion de supremo). Sinedo que b es supremo de A y b' una cota superior, no puede ser $b' < b$(por ii de la definicion de supremo). Por lo tanto, $b \leq b'$. Y con razonamiento analogo, $b' \leq b$. $\therefore b = b'$.
Notacion: si b es el supremo de A,
b=sup(A)

2.1 Teorema 9

(Caracterizacion del supremo). Sea A un conjunto no vacio de numeros reales. Entonces $b = sup(A)$ si y solo si b es cota superior de A tal que para todo $\epsilon > 0$, existen algun elemento $a \in A$ tal que

$$b - \epsilon < a$$

Definicion: Sea A tal que $\neq A \subset \mathbb{R}$. Un punto $b \in \mathbb{R}$ es el maximo de A, y se denota $b = max(A)$, si:

1. $a \leq b, \forall a \in A$

2. $b \in A$

Proposicion 3

Sea $A / \neq A \subset \mathbb{R}$. Entonces $b = max(A) \Leftrightarrow b \in A \wedge b = sup(A)$.

A10) Axioma del Supremo: Todo conjunto no vacio de numeros reales que sea acotado superiormente tiene un supremo.

Teorema 10

(Existencia de raices cuadradas) Dado $a \geq 0, \exists! x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \wedge x^2 = a$

Bosquejo de demostracion:

- Para a=0, es facil probar que $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, usando el item 4 del teorema 4
- Sea $a > 0$. Aun sin usar el axioma del supremo, se prueba que si la ecuacion $x^2 = a$ teine solucion, entonces tiene exactamente dos soluciones: una valor y su opuesto. Por lo tanto, una sola de ellas es positiva. Esto prueba la unicidad en el enunciado.
- Para probar que efectivamente existe una solucion (al menos una), se define el conjunto

$$\mathcal{S}_a = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq a\}$$

- Se prueba que $\mathcal{S}_a \neq$ y que esta acotado superiormente. Luego, por el axioma del supremo, existe $b = sup(\mathcal{S}_a)$.
- Finalmente, se prueba que no puede ser $b^2 < a$ ni $b^2 > a$. Por lo tanto (Propiedad de tricotomia), $b^2 = a$

Sea $\mathcal{S}$
$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} : x = (1 + \frac{1}{n})^n, \text{ para algun} n \in \mathbb{N}\}$
Se puede mostrar que $\mathcal{S}$ esta acotado superiormente; por lo tanto, por A10, existe sup($\mathcal{S}$). Asi como π, este nuemro es irracional y tiene simbolo propio:
$sup(\mathcal{S}) = e$, numero de Euler.

Teorema 11

(Propiedad Arquimediana de los numeros reales). Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}/y < nx$

Demostracion: Si, por el contrario, fuese $nx \leq y, \forall n \in \mathbb{N}$, se tendria que y es una cota superior del conjunto

$\mathcal{S} = \{nx : n \in \mathbb{N}\} = \{x, 2x, 3x, ...\}$

Por el axima del supremo, $\mathcal{S}$ tiene supremo. Sea $b = sup(\mathcal{S})$. Por el teorema de caracterizacion del supremo (toamndo en particular $\epsilon = x$, ya que por hipotesis $x > 0$), existe un elemento $a \in \mathcal{S}$ tal que $b - x < a$.

Como $a \in \mathcal{S}$, a se escribe como $a = mx$, para algun $m \in \mathbb{N}$. Luego,

$$b - x < mx$$
$$b < mx + x = (m + 1)x$$

ahora bien, $(m + 1)x \in \mathcal{S}$, y por lo tanto b no es una cota superior de $\mathcal{S}$. Peor esto contradice el hecho que $b = sup(\mathcal{S})$.

La contradiccion se genera al suponer que $\mathcal{S}$ esta acotado superiormente. Luego, existe $n \in \mathbb{N}/y < nx$

Corolario 5

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}/y < n$

2. $\mathbb{N}$ no esta acotado superiormente.

3. Si $x > 0, \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\frac{1}{n} < x$

4. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $z > 0$. Si se verifica:

$$x \leq y < x + \tfrac{z}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

   entonces $x = y$

Cotas inferiores, infimo y minimo de un conjunto

Definicion: Sea A un subconjunto no vacio de $\mathbb{R}$

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Se dice que b es una cota inferior de A si

$$b \leq a, \forall a \in A$$

- Si $/b$ es una cota inferior de A, se dice que A esta acotado inferiormente.

Definicion: Sea $A/ \neq A \subset \mathbb{R}$. Se dice de un punto $b \in \mathbb{R}$ que es infimo de A si verifica:

1. $b \leq a, \forall a \in A$
2. Si $b < c, \Rightarrow c$ no es una cota inferior de A

Analogamente al caso del supremo, se prueba que, si existem el infimo de un conjunto A es unico; se lo denota $inf(A)$.

Definicion: Sea $A/ \neq A \subset \mathbb{R}$. Un punto $b \in \mathbb{R}$ es el minimo de A, y se lo denota $b = min(A)$, si verifica:

1. $b \leq a, \forall a \in A$
2. $b \in A$

Proposicion 4

Sea $A/ \neq A \subset \mathbb{R}$. Entonces $b = min(A) \Leftrightarrow b \in A \wedge b = inf(A)$

Teorema 12

Sea $A/ \neq A \subset \mathbb{R}$. Si A esta acotado inferiormente, enotonces $\exists b \in \mathbb{R}/b = inf(A)$.

Parte entera

Teorema

Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un unico numero entero p, tal que

$$p \leq x < p + 1$$

La desigualdad del enunciado quivale a decir que p es el mayor numero entero menor o igual que x.

Demostracion: Si $x \in \mathbb{Z}, \Rightarrow p = x$ verifica $p \leq x < p + 1$

Sino, o sea $x \notin \mathbb{Z}$, separamos la prueba en los siguinetes casos:

- Si $0 < x < 1 \Rightarrow p = 0$ verifica $p \leq x < p + 1$

- Si $x > 1$, el conjunto $\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{N} : x < n\} \neq$, pues por la propiedad arquimediana (aplicada a $y = x > 1$ y a $x = 1 > 0$) existe $n_0 \in \mathbb{N}/x < n_0$, 1, luego $n_0 \in \mathcal{S}$; ademas, $\mathcal{S}$ esta acotado inferiormente por x. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ tiene un elemento minimo (primer elemento) y este es unico, llamesmolo m, que por estar en $\mathcal{S}$ sera $x < m$ y por ser minimo $m - 1 \notin \mathcal{S}$, lo que implica que $m - 1 \leq x$.
  Luego, llamando $p = m - 1$ se verifica $p \leq x < p + 1$, siendo p unico
  Si $x < o \Rightarrow -x > 0$ por lo demostrado anteriormente existe un unico $q \in \mathbb{N}$ tal que

  $$q \leq -x < q + 1$$

  por lo tanto $-q - 1 \leq x < -q$, llamando $p = -q - 1 \in \mathbb{Z}$, se tiene $p \leq x < p + 1$, siendo p unico.
  Luego queda demostrado que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}, \exists! p \in \mathbb{Z}/$

  $$p \leq x < p + 1$$

  que suele denotarse con $[x]$ y se lo denomina **parte entera** de x,

  $$[x] \leq x < [x] + 1$$