

Lógica Proposicional, Deducción Natural

Dante Zanarini

LCC

22 de agosto 2019

Demostraciones

Recordemos nuestra definición de *demostración*:

Una demostración (matemática) es una justificación de una sentencia (la conclusión de la demostración). La demostración puede usar algunas proposiciones que se asumen válidas (las premisas).

Observación:

Una demostración de ϕ no garantiza que ϕ sea válida

¿Por qué?

¿Qué tenemos hasta ahora?

- Vimos una forma de realizar demostraciones: razonar **semánticamente**
- Si bien nos pueden servir, no es la forma *natural* de realizar pruebas
- Por ejemplo, ¿Cómo pruebo

$$p_0 \wedge p_1 \rightarrow p_0$$

con lo que sabemos hasta ahora?

Cálculo de Secuentes - Deducción Natural

- Hoy veremos dos sistemas de reglas que nos permiten razonar de forma **natural** sobre proposiciones:
 - ▶ Cálculo de secuentes
 - ▶ Deducción Natural
- Ambos sistemas están estrechamente relacionados, y fueron definidos en 1935 por **Gerhard Gentzen** (1909-1945)



Secuentes

Definición (Secuente)

Un secuente es una expresión de la forma

$$\Gamma \vdash \phi$$

donde ϕ es una proposición, y Γ un conjunto de proposiciones.

- Intentaremos que un secuente tenga el siguiente significado:
Hay una prueba (o derivación) de ϕ cuyas hipótesis (no descartadas) pertenecen a Γ
- Veremos más adelante qué quiere decir “no descartadas”
- Mediante reglas, iremos definiendo el conjunto de secuentes válidos

La regla trivial

DN (Regla Trivial)

Sea ϕ una proposición, entonces

$$\phi$$

es una derivación. Su conclusión es ϕ , y tiene una hipótesis (ϕ)

Regla de Secuente

Para todo par Γ, ϕ , el siguiente secuente es válido:

$$\Gamma, \phi \vdash \phi$$

Reglas para la conjunción

- ¿Cómo se prueba $\phi \wedge \psi$? (reglas de **introducción**)

DN (Introducción de la Conjunción)

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} i_{\wedge}$$

Si tengo derivaciones de ϕ y ψ , entonces tengo una derivación de $\phi \wedge \psi$

- ¿Cuáles son las hipótesis de la derivación?

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi$ y $\Delta \vdash \psi$ son secuentes válidos, entonces también lo es el secuente $\Gamma \cup \Delta \vdash \phi \wedge \psi$.

Reglas para la conjunción

- ¿Qué puedo derivar si conozco $\phi \wedge \psi$? (reglas de **eliminación**)

DN (Eliminación de la Conjunción 1)

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} e_{\wedge_1}$$

Si tengo una derivación de $\phi \wedge \psi$, entonces tengo una derivación de ϕ

- ¿Cuáles son las hipótesis de la derivación?

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$ es un seciente válido, entonces también lo es el seciente $\Gamma \vdash \phi$.

Reglas para la conjunción

- Simétricamente, tengo las siguientes reglas:

DN (Eliminación de la Conjunción 2)

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi} e_{\wedge_2}$$

Si tengo una derivación de $\phi \wedge \psi$, entonces tengo una derivación de ψ

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$ es un secuyente válido, entonces también lo es el secuyente $\Gamma \vdash \psi$.

Árboles de Derivación

Veamos algunos ejemplos

Otra forma de estructurar demostraciones

- A veces preferiremos una **prueba lineal** en lugar de un árbol de derivación
- por ejemplo, damos una prueba lineal de $\phi \wedge \psi \vdash \psi \wedge \phi$:

1)	$\phi \wedge \psi$	premisa
2)	ϕ	$e_{\wedge_1} (1)$
3)	ψ	$e_{\wedge_2} (1)$
4)	$\psi \wedge \phi$	$i_{\wedge} (3), (2)$

Reglas para la implicación (Eliminación)

- ¿Cómo uso la información que me provee \rightarrow en una hipótesis?

DN (Eliminación de la Implicación)

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi} e_{\rightarrow}$$

- Regla de secuencia asociada:

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi$ y $\Delta \vdash \phi \rightarrow \psi$ son secuentes válidos, entonces también lo es el secuente $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.

- Veamos unos ejemplos

Reglas para la implicación (Introducción)

- ¿Cómo se prueba una implicación?
 - Pensemos en lo que sabemos de matemática, y programación

DN (Introducción de la implicancia)

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi} i_{\rightarrow}$$

- En forma de secuencia:

Regla de Secuente

Si el secuente $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ es válido, también lo es $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$

- Veamos unos ejemplos

Disyunción

- **Introducción**, o ¿Cómo se prueba un \vee ?

DN (Introducción de la disyunción, 1 y 2)

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} i_{\vee 1}$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi} i_{\vee 2}$$

- Reglas de secuencia asociadas:

Regla de Secuencia

- 1 Si $\Gamma \vdash \phi$ es un secuencia válido, también lo es $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$
- 2 Si $\Gamma \vdash \psi$ es un secuencia válido, también lo es $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$

- Veamos unos ejemplos

Disyunción

- **Eliminación**, o ¿Qué puedo derivar a partir de $\phi \vee \psi$?

DN (Eliminación de la disyunción)

$$\frac{\phi \vee \psi}{\chi} \quad e_v$$

¿Cómo se completa esta regla?

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\phi]^1 \\ \vdots \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^2 \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} \quad e_v(1)(2)$$

¿Cómo se completa esta regla?

Regla de Secuente

Si los secuentes $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$, $\Gamma' \cup \{\phi\} \vdash \chi$ y $\Gamma'' \cup \{\psi\} \vdash \chi$ son válidos,

Reglas para \perp

- **Eliminación** ¿Qué pasa si conozco \perp ?
 - ▶ ¡Puedo probar cualquier cosa!

DN (Eliminación de \perp)

$$\frac{\perp}{\phi} e_{\perp}$$

Regla de Secuente

Si el secuente $\Gamma \vdash \perp$ es válido, también lo es $\Gamma \vdash \phi$, para cualquier proposición ϕ

- Veamos unos ejemplos

Reglas para \perp

- **Introducción** ¿Cómo pruebo \perp ?
- Si nuestras reglas intentan preservar el valor de verdad de las proposiciones, **¿tiene sentido probar \perp ?**
- **Sí, siempre que nuestras premisas sean contradictorias!**

DN (Introducción de \perp)

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp} i_{\perp}$$

Regla de Secuente

Si los secuentes $\Gamma \vdash \phi$ y $\Delta \vdash \neg\phi$ son válidos, entonces también lo es el secuente $\Gamma \cup \Delta \vdash \perp$

- **Ejemplos!!**

Reglas para la negación

- **Introducción** ¿Cómo pruebo $\neg\phi$?

DN (Introducción de la negación)

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\phi} i_{\neg}$$

- En forma de secuencia:

Regla de Secuente

Si el secuyente $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \perp$ es válido, también lo es el secuyente $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Reglas para la negación

- No daremos una regla para eliminar $\neg\phi$
- Observemos que la regla i_{\perp} puede pensarse como una forma de eliminar la negación
- La penúltima regla será fundamental para **pruebas indirectas** de proposiciones

DN (Eliminación de la doble negación)

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi} e_{\neg}$$

Regla de Secuente

Si el secuyente $\Gamma \vdash \neg\neg\phi$ es válido, también lo es el secuyente $\Gamma \vdash \phi$

Ayuda con lemas intermedios

- Es muy frecuente que para demostrar cierto resultado ϕ , nos ayudemos primero demostrando ψ , para luego utilizar esta prueba en la demostración de ϕ
- En los cursos de matemática a esto le solemos llamar *lema auxiliar*, *proposición*, etc.

DN (Regla de corte)

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \phi \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta \quad \phi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi} \text{ RC}$$

Regla de Secuente

Si $\Gamma \vdash \phi$ y $\Delta \cup \{\phi\} \vdash \psi$ son válidos, también lo es el secuente $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$

Tenemos un cálculo para demostrar, ¿y ahora?

- Corresponde hacer algunas preguntas sobre nuestro sistema
- ¿Es consistente? (Sólo prueba cosas verdaderas)
- ¿Es completo? (Prueba todo lo verdadero)
- Antes que nada
 - ¿Cómo se formulan, formalmente, estas preguntas?

Reglas derivadas

- Antes de responder las preguntas, veremos algunas reglas adicionales
- Estas reglas nos servirán para
 - ▶ Acortar las pruebas
 - ▶ Proveernos una forma nueva de encarar las pruebas cuando estemos trabados
- La primera regla es:

DN (Modus Tollens)

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi} \text{ MT}$$

- Veamos que es una regla derivada

Reglas derivadas

- Las otras reglas derivadas son las siguientes:

DN (Reducción al Absurdo)

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\phi] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\phi} \text{ RAA}$$

DN (Tercero Excluido)

$$\overline{\phi \vee \neg\phi} \text{ TND}$$

- Veamos que son reglas derivadas