Introducción a la Teoría de Grafos Parte II

S. Bianchi P. Fekete F. Domingo

[1] Deptartamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
UNR

23 de agosto de 2021

OUTLINE

Definición: Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos no dirigidos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de grafos si:

A) f es biyectiva,

B) para todo $a, b \in V_1$, se tiene que $\{a, b\} \in E_1$ si sólo si $\{f(a), f(b)\} \in E_2$.

Cuando existe un isomorfismo entre grafos, se dice que tales grafos son *isomorfos*.

Definición: Dado $G = (V, E)$, decimos que dos vértices en V son *adyacentes* si existe una arista en E incidente en ambos.

Observación: Un isomorfismo entre grafos preserva adyacencias.

Ejemplo:

En este caso la función: $f(a) = w, f(b) = x, f(c) = y$ y $f(d) = z$ da como resultado un isomorfismo entre los grafos dados y los grafos resultan isomorfos.

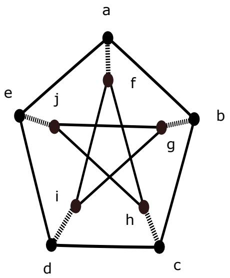
Observación: En el ejemplo cualquier función biyectiva es un isomorfismo debido a que ambos grafos son completos.

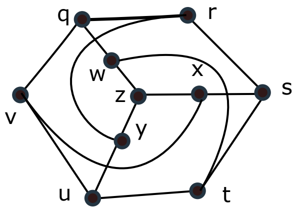
Veamos otro ejemplo:

Si consideramos la función g definida como : $g(m) = r$, $g(n) = s$, $g(p) = t$ y $g(q) = u$, es claramente biyectiva pero vemos que $\{m, q\}$ es un arista en el grafo de la izquierda y $\{g(m), g(q)\} = \{r, u\}$ no es un arista en el grafo de la derecha. Por lo tanto g no es un isomorfismo de grafos. Pero esto no asegura que los grafos no sean isomorfos.
Ahora, sea la función h definida por $h(m) = s$, $h(n) = r$, $h(p) = u$ y $h(q) = t$.

La función h es biyectiva y preserva adyacencias, por lo tanto es un isomorfismo y los grafos son isomorfos.

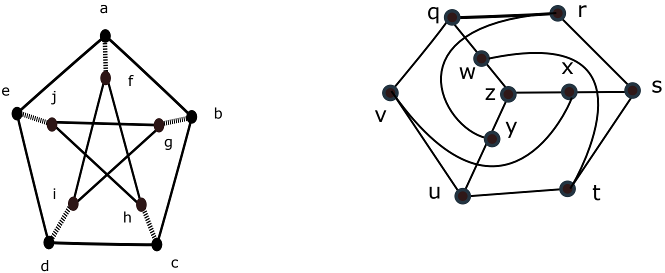
Veamos el siguiente ejemplo:





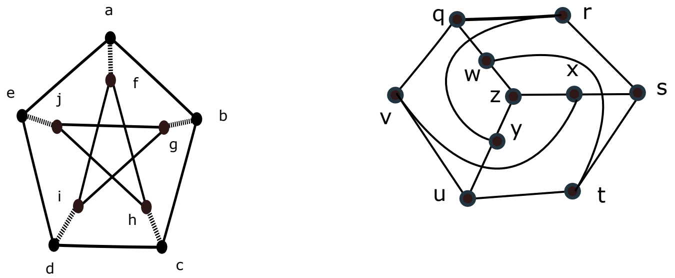
Aquí no es tan sencillo encontrar un isomorfismo. Podemos observar que ambos grafos tienen 10 vértices.
Como un isomorfismo preserva adyacencias, éste debe transformar todo camino (ciclo) de un grafo en un camino (ciclo) en el otro grafo.

Ejemplo(cont.):



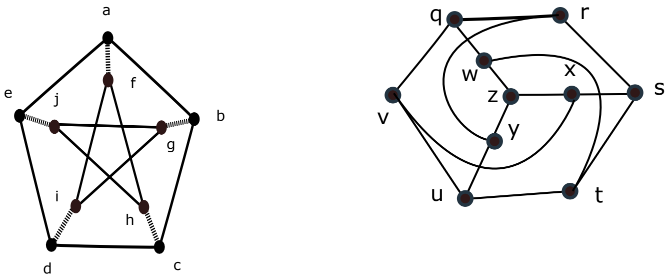
Entonces, si estos grafos son isomorfos, el ciclo formado por las aristas $\{a,f\},\{f,i\},\{i,d\},\{d,e\},\{e,a\}$ de longitud 5 debería ser transformado mediante un isomorfismo en otro ciclo en el grafo de la derecha de longitud 5.
Una opción es: $\{q,w\},\{w,z\},\{z,y\},\{y,r\},\{r,q\}$.
Otra opción es: $\{y,r\},\{r,s\},\{s,t\},\{t,u\},\{u,y\}$.

Ejemplo(cont.):



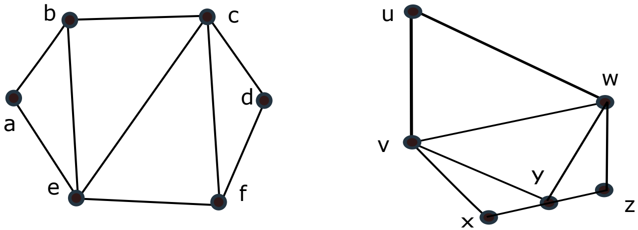
Además, a partir del vértice a en el grafo de la izquierda, encontramos un camino simple que recorre todos los vértices del grafo :
$\{a,f\},\{f,h\},\{h,c\},\{c,b\},\{b,g\},\{g,j\},\{j,e\},\{e,d\},\{d,i\}$.
Para que los grafos sean isomorfos, debe existir un camino con las mismas características en el grafo de la derecha, que es:
$\{q,w\},\{w,t\},\{t,u\},\{u,v\},\{v,x\},\{x,s\},\{s,r\},\{r,y\},\{y,z\}$.

Ejemplo(cont.):



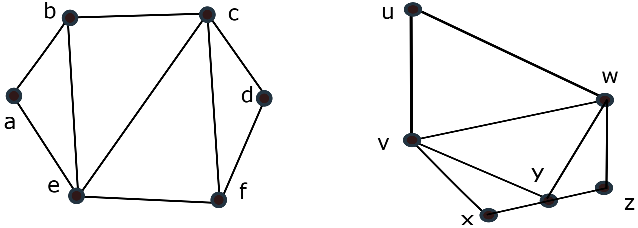
Esto nos permite definir la función F definida como:
$F(a) = q, F(b) = v, F(c) = u, F(d) = y, F(e) = r, F(f) = w, F(g) = x$
$F(h) = t, F(i) = z, F(j) = s,$
que resulta un isomorfismo. Por lo tanto ambos grafos son isomorfos.

Por último, veamos el ejemplo:



Vemos que ambos grafos tienen 6 vértices y 9 aristas. Es razonable preguntarse si son isomorfos.
Observemos que en el grafo de la izquierda el vértice a y el vértice d son ambos adyacente a exactamente 2 vértices. En el grafo de la derecha, existen 3 vértices con esta propiedad: u, x, z.
Esto nos indica que no existe un isomorfismo entre estos dos grafos.

Ejemplo (cont.):



Otra observación que nos permite la misma conclusión, es que en el grafo de la derecha es posible construir un circuito que recorra todas las aristas del grafo:
$\{u,w\},\{w,v\},\{v,y\},\{y,w\},\{w,z\},\{z,y\},\{y,x\},\{x,v\},\{v,u\}$.
No es posible encontrar tal circuito en el grafo de la izquierda.
Ejercicio: Los únicos recorridos que contemplan a todas las aristas comienzan en b o f y terminan en f o b.

Ejercicio 1

Probar que en una fiesta de 51 invitados, existe siempre una persona que conoce un número par de asistentes.

Respuesta:?
Qué ocurre si en vez de 51 personas, nos planteamos el mismo problema pero con 50?.
Si estos 50 se conocen entre ellos, entonces cada uno conoce a 49 personas, y la afirmación del ejercicio es falsa. Por esta misma razón no podemos reemplazar la cifra por ninguna cantidad par!!
Replanteamos el ejercicio así:

Ejercicio 2

Probar que en una fiesta con un número impar de invitados, existe siempre una persona que conoce un número par de asistentes.

Definición

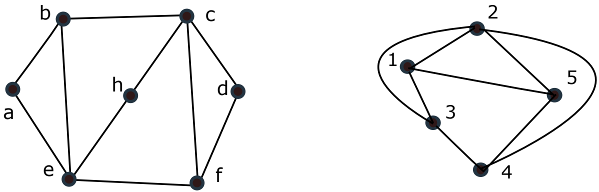
Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo no dirigido y sean $a, b \in V$. Si $\{a, b\} \in E$ entonces se dice que a y b son *vecinos*. Llamamos $N(a)$ al conjunto de vecinos del vértice $a \in V$ en el grafo G. Formalmente,
$N(a) = \{v \in V : \{a, v\} \in E\}$.
Se llama *grado* del vértice a al número de aristas en E que son incidentes en a y se lo denota por $\deg(a)$. Si el grafo no es un multigrafo se tiene $\deg(a) = |N(a)|$.

Nota: Un lazo en un vértice se considera como dos aristas incidentes en él.
El ejercicio 2 en términos de teoría de grafos se lee:

Ejercicio 2

Si un grafo tiene un número impar de vértices, siempre existe un vértice con grado par.

Veamos algunos ejemplos en donde se observa la validez del ejercicio 2.



En este grafo, los vértices de grado par son: a, h, d de grado 2 y e y c de grado 4.

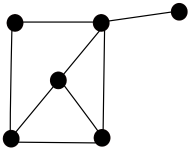
En este otro grafo hay un único vértice de grado par, $\deg(2) = 4$.

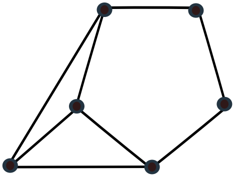
Vamos a formular un nuevo problema cuya validez demuestra el ejercicio 2 y también el primero.

EJERCICIO 3

Si un grafo tiene un número impar de vértices, el número de nodos de grado par es impar.

Qué ocurre si el número de vértices de un grafo es par?





En este grafo hay sólo dos vértices de grado par.
En este otro también hay solo 2.
De acuerdo a lo observado proponemos esta conjetura:

EJERCICIO 4

Si un grafo tiene un número par de vértices, el número de nodos de grado par es par.

Dado G y n el número de vértices en G, llamamos

- n_I al número de vértices en G de grado impar, y
- n_P al número de vértices en G de grado par.

Claramente $n = n_I + n_P$.

Ejercicio 3

Dado G, si n es impar entonces n_P es impar (equivalentemente: si n es impar entonces n_I es par.)

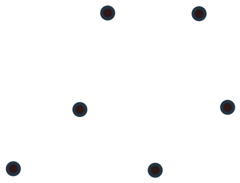
Ejercicio 4

Dado G, si n es par entonces n_P es par (equivalentemente: si n es par entonces n_I es par.).

TEOREMA

Dado un grafo $G = (V, E)$, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración Vamos a hacer la demostración por inducción sobre el número de aristas en G.
Si $m = |E| = 0$ entonces $\deg(v) = 0$ para todo $v \in V$.



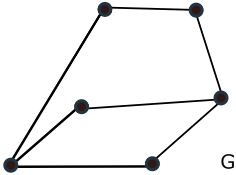
Todos lo vértices de V tienen grado par. Por lo tanto el número de vértices con grado impar es 0.
Si $m = 0$ el teorema es cierto.

Demostración(cont.)
Dado un grafo H, llamamos $n_I(H)$ al número de vértices con grado impar en H.

Supongamos que el teorema es válido para cualquier grafo con a lo sumo k aristas.

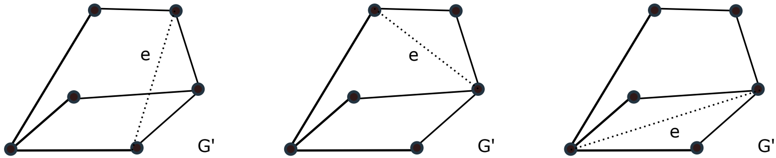
Sea G un grafo con $k+1$ aristas. Sea $e \in E$ tal que $e = \{a, b\}$ con $a, b \in V$.

El grafo $G' = G - e$ tiene k aristas, por lo tanto vale $n_I(G') = 2l$ con $l \geq 0$.



G'

Vamos a analizar distintos casos:

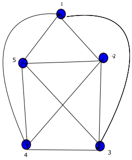


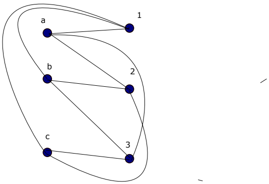
- Si $\deg(a)$ es par en G' y $\deg(b)$ es par en G', entonces $n_I(G) = 2l + 2$.
- Si $\deg(a)$ es par en G' y $\deg(b)$ es impar en G', entonces $n_I(G) = 2l$.
- Si $\deg(a)$ es impar en G' y $\deg(b)$ es par en G', entonces $n_I(G) = 2l$.
- Si $\deg(a)$ es impar en G' y $\deg(b)$ es impar en G', entonces $n_I(G) = 2l - 2$.
- En cualquier caso $n_I(G)$ es par y el teorema está demostrado.

Resultados sobre el grado de los vértices en un grafo

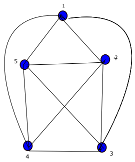
Teorema Sea $G = (V, E)$ grafo o multigrafo no dirigido. Entonces vale $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.
Demostración: Ejercicio.

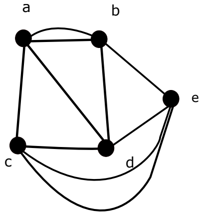
Definición Un grafo o multigrafo no dirigido $G = (V, E)$ para el cual sus vértices tienen el mismo grado de denomina *grafo regular*.
Si $\deg(v) = k$ para todo $v \in V$ se lo llama $k-$ regular.
Ejemplos: $4-$regular $3-$regular





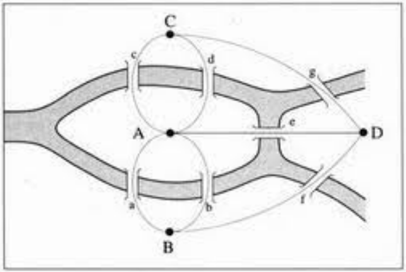
Ejercicio 1 Determinar si es existe un grafo $G = (V, E)$, $4-$regular con $|E| = 10$.
De acuerdo al Teorema anterior, debe verificarse : $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$. Es decir: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 4|V| = 20$. Entonces $|V| = 5$.
Existen dos grafos que verifican estas condiciones y no son isomorfos:





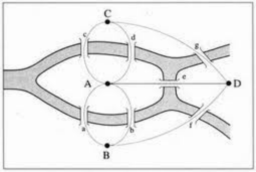
Ejercicio 2 Determinar si existe un grafo $4-$regular con 15 aristas. Entonces debería satisfacerse $4|V| = 30$. Pero esta ecuación no tiene solución entera. No existe tal grafo.

El resultado más antiguo en Teoría de Grafos se le debe a Leonard Euler, el gran matemático del siglo XVIII.
Comenzó como un desafío recreativo entre los ciudadanos de Königsberg en Prusia Oriental (actualmente Kaliningrado - Rusia).
La ciudad estaba dividida en 4 distritos por el río Pregel, y estos distritos estaban conectados por 7 puentes:



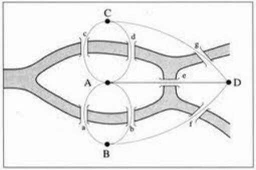
El desafío consistía en dar un paseo de modo de atravesar todos los puentes exactamente una vez.

Euler publicó un paper en 1736, en el cual demostraba la inexistencia de tal recorrido. El argumento es muy simple:



Supongamos que existe tal paseo, y consideremos uno de los 4 distritos como el distrito A (isla de Kneiphoff). Supongamos que el paseo no comienza ahí. En algún momento cruzamos alguno de los puentes y llegamos a la isla, luego abandonamos la isla a través de otro puente. En otro momento volvemos a visitar la isla utilizando un tercer puente y nos vamos por un cuarto puente. Luego visitamos la isla una vez más utilizando el quinto y último puente y ya no podemos abandonarla!!.

Esto significa que el paseo debe terminar en la isla o comenzar en la isla.

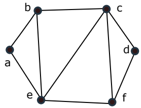


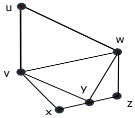
Pero este misma situación ocurre cuando consideramos cualquiera de los otros tres distritos. Todos ellos deben ser extremo inicial o final del paseo. Lo que demuestra que no es posible encontrar tal paseo!
En realidad, el resultado de Euler formula un criterio general que abarca un número cualquiera de islas y puentes bajo el cual se puede determinar si existe o no un paseo que recorra los puentes exactamente una vez.
Si bien, el concepto de grafo no fue su creación (apareció más de 100 años después), este resultado se lo considera el primer teorema en la teoría de grafos.

DEFINICIÓN

Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo no dirigido. Entonces G tiene un circuito *euleriano* si existe un circuito en G que recorre todas las aristas de G. Si existe un recorrido en G que recorre todas sus aristas el recorrido se llama *euleriano*.

Ejemplos:





Ya vimos que en el grafo de la derecha existe el circuito $\{u,w\},\{w,v\},\{v,y\},\{y,w\},\{w,z\},\{z,y\},\{y,x\},\{x,v\},\{v,u\}$ que recorre todas las aristas del grafo. Por tanto es un circuito euleriano.
En el grafo de la izquierda (ejercicio) existe un recorrido que contempla a todas las aristas del grafo, por tanto se trata de un recorrido euleriano.

TEOREMA

Sea $G=(V,E)$ un grafo o multigrafo no dirigido y conexo.

(I) Si G tiene más de dos vértices de grado impar entonces no tiene un recorrido euleriano.

(II) Si G tiene exactamente dos vértices de grado impar entonces tiene un recorrido euleriano. Más aún cada uno de estos recorridos comienza en uno de los vértices de grado impar y termina en el otro.

(III) Si G no tiene vértices de grado impar entonces tiene un recorrido euleriano. Cada recorrido euleriano es un circuito.

Demostración

Ya hemos visto que si $v \in V$ es tal que $\deg(v)$ es impar entonces cualquier recorrido euleriano debe comenzar o terminar en v. Por lo tanto queda demostrado (I).

Demostración(cont.)
También, si existe un recorrido euleriano y hay solo dos vértices de grado impar, entonces ese recorrido comienza en uno de estos vértices y termina en el otro. Y queda demostrada la segunda afirmación de (II).

Vamos a probar que si todo vértice en G es de grado par entonces existe un circuito euleriano.

Sea $v \in V$ y consideremos un circuito que comience y termine en v y tenga la mayor longitud posible. Llamamos W a ese circuito.

Si W es euleriano estonces el teorema está probado.

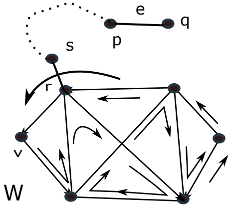
Supongamos que no lo es, es decir existe $e \in E$ que no pertenece a W.

Demostración(cont.)

Primero, vamos a probar que podemos elegir a e de modo que uno de sus extremos pertenezca a W.

Para ello supongamos que esto no courre. Es decir, sea $e = \{p,q\}$ y p,q no se encuentran en W.

Como G es conexo, existe un camino simple que une v con p. Sea r el vértice de ese camino que pertenece a W y es más cercano a p.



Sea $e' = \{r,s\}$. Es claro que e' es una arista que no pertenece a W pero uno de sus extremos está en W.

Demostración(cont.)

Sea $e = \{p, q\} \in E$ con p en W tal que $e \notin W$.

Construimos un camino W' a partir de e, de modo que:

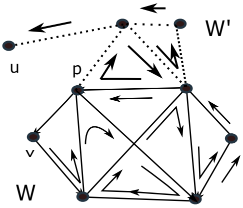
- no utilice arcos de W,
- no utilice aristas dos veces.

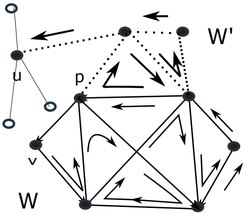
El camino W' en algún momento se detiene en una arista con extremo en u. (porqué?).

Supongamos $u \neq p$ y analicemos los distintos casos.

Demostración(cont.)

Caso $u \notin W$:

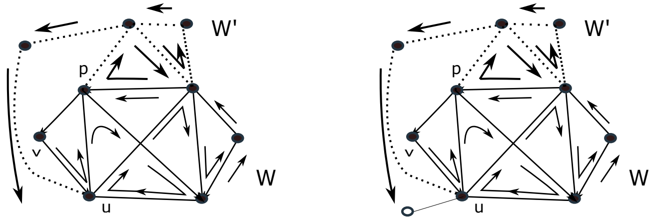




Como $\deg(u)$ es par, existe una arista en G que permite continuar el recorrido W'.

Esto significa que W' no se detiene cuando $u \notin W$.

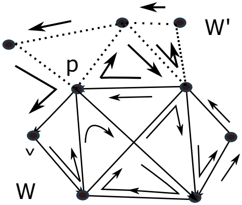
Demostración(cont.)
Caso $u \in W$:



Como $\deg(u)$ es par, existe una arista en G que no fue utilizada por W y permite continuar el recorrido W'.

Por lo tanto W' no se detiene cuando $u \in W$ y $u \neq p$.

Demostración(cont.)
Por lo tanto $u = p$



Entonces W' resulta un circuito. Además si comenzamos en el vértice v, recorremos W hasta p y ahí seguimos por el circuito W'hasta regresar a p y luego a v obtenemos un nuevo circuito que comienza en v y utiliza más aristas que W.
Llegamos así a una contradicción. De esta manera hemos demostrado (III).
(II) Ejercicio.

Por lo general el Teorema de Euler es formulado como:

Teorema de Euler

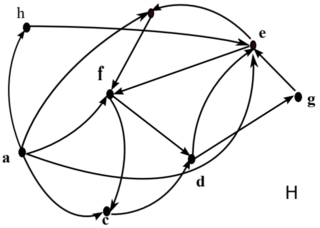
Un grafo conexo tiene un circuito euleriano si y sólo si cada uno de sus nodos tiene grado par.

Definición

Sea $G=(V,E)$ grafo o multigrafo dirigido. Sea $v\in V$.

- El grado de entrada de v se define como el número de aristas que llegan a v y se denota $\deg_e(v)$.
- El grado de salida de v se define como el número de aristas que salen de v y se denota $\deg_s(v)$.

Ejemplo:



En este caso $\deg_e(f) = 3$ y $\deg_s(f) = 2$.

Teorema Sea $G = (V, E)$ un grafo o multigrafo dirigido y conexo. G tiene un circuito euleriano si y sólo si $\deg_e(v) = \deg_s(v)$ para todo $v \in V$.
Demostración Ejercicio.