Examen Final - Primera etapa común a todos los estudiantes

Apellido y nombre:

Legajo: DNI: Comisión: Carrera:

Hora de entrega: **9h20.**

(1) Sea la función $f(x) = 2 + x + 3x^2$ con $x \in \mathbb{R}_0^+$.

- -a- Demostrar que f admite inversa.
- -b- Calcular $(f^{-1})'(6)$.
- -c- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f^{-1} en el punto de abscisa $x = 6$.

(2) Se está inflando un globo esférico. El volumen del mismo $\left(V = \dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$ aumenta a una razón constante de $1000\ cm^3/s$.

- -a- ¿A qué velocidad aumenta el radio del globo cuando éste es de $5\ cm$? ¿Y cuando el radio es de $10\ cm$?
- -b- ¿A qué velocidad aumenta la superficie del globo $(S = 4\pi r^2)$ en cada uno de los casos anteriores?

(3) Dada la sucesión $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n}$ para $n \in \mathbb{N}$:

- -a- Probar que $\frac{1}{3} < a_n < 3, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- -b- Demostrar que es convergente y calcular su límite.

Examen Final - Segunda etapa para condición regular

Apellido y nombre:

Legajo: DNI: Comisión: Carrera:

Hora de entrega: **11h45**.

(4) Sea la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-2) \cup \left(-2, -\dfrac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 & \text{si} \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right), \\ -\dfrac{3}{x+1} + 1 & \text{si} \quad x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

-a- A partir de las gráficas de funciones conocidas, elegir adecuadas transformaciones y trazar la gráfica de la función g. Indicar el dominio y recorrido de g.

-b- Estudiar la paridad de g.

-c- Mostrar, a partir de la gráfica, que g es inyectiva.

-d- A partir de la gráfica de la función g, realizar la gráfica de la función inversa.

-e- Dar el dominio y la ley de la función inversa de g.

-f- Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de g. Justificar analíticamente.

-g- Analizar la existencia de asíntotas a la gráfica de la función.

(5) Analizar la veracidad de los siguientes enunciados justificando adecuadamente.

-a- $\sup\{x \in \mathbb{R} / |x-3| > |x+2|\} = \dfrac{1}{2}$.

-b- $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2+2x} = 1$.

-c- Si f es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ y $g(x) = f(3f(4f(x)))$, entonces $g'(0) = 100$.

-d- La ecuación $x^3 - 6x^2 + 12x - 4 = 0$ admite exactamente dos soluciones reales.

Análisis Matemático I - PM - LM - LCC - PF - LF - 2019

Examen Final - Segunda etapa para condición libre

Apellido y nombre:

Legajo: DNI: Comisión: Carrera:

Hora de entrega: **12h30**.

(4) Sea la función g definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si} \quad x\in(-\infty,-2)\cup\left(-2,-\dfrac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1 & \text{si} \quad x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right), \\ -\dfrac{3}{x+1}+1 & \text{si} \quad x\in[0,+\infty). \end{cases}$$

-a- A partir de las gráficas de funciones conocidas, elegir adecuadas transformaciones y trazar la gráfica de la función g. Indicar el dominio y recorrido de g.

-b- Estudiar la paridad de g.

-c- Mostrar, a partir de la gráfica, que g es inyectiva.

-d- A partir de la gráfica de la función g, realizar la gráfica de la función inversa.

-e- Dar el dominio y la ley de la función inversa de g.

-f- Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de g. Justificar analíticamente.

-g- Analizar la existencia de asíntotas verticales y horizontales a la gráfica de la función.

(5) Analizar la veracidad de los siguientes enunciados justificando adecuadamente.

-a- $\sup\{x\in\mathbb{R}/\,|x-3|>|x+2|\}=\dfrac{1}{2}$.

-b- $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+2x}=1$.

-c- Si f es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$, $f'(0)=2$ y $g(x)=f(3f(4f(x)))$, entonces $g'(0)=100$.

-d- La ecuación $x^3-6x^2+12x-4=0$ admite exactamente dos soluciones reales.

-e- Sea $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $f(x)=x-3$ y $h=g\circ f$. Entonces h es una función impar.

-f- Si $a,b,c\in\mathbb{R}$ son tales que $ab=0$, $ac=0$ y $b\neq c$ entonces $a=0$.

-g- $f(x)=[x]+[-x]$ es continua en $x=2$.

(6) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} a(x+2)^2+1 & \text{si} \quad x\leq -1, \\ \dfrac{8}{x+3}-b & \text{si} \quad x>-1. \end{cases}$$

(a) Determinar los valores a y b de manera que f sea continua en su dominio y que $y=-1$ sea asíntota horizontal.

(b) Analizar la derivabilidad de f en todo su dominio.