Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2021

1er Cuatrimestre- 2do Parcial - 03/06/2021

********* ********* **********

1. Sean $\mathbb{C}^{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices complejas de tamaño 2×2 y $\langle .,. \rangle$ el siguiente producto interno definido sobre dicho espacio:

$$\langle A,B\rangle = tr(AB^H) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\overline{b_{ij}}.$$

   a) Hallar la distancia entre $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & -i+1 \\ 2i & -1 \end{bmatrix}$.

   b) Describir el complemento ortogonal del espacio generado por A y B.

2. Dada A una matriz $n\times n$ y $b\in\mathbb{R}^n$, sea $\hat{x}$ un vector que minimiza $\|Ax-b\|$ sobre todos los posibles vectores de $\mathbb{R}^n$.

   a) Si $\hat{x}=0$, ¿a qué espacio fundamental de A pertenece b? Justificar.

   b) Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. ¿Cuál es el mínimo posible de $\|Ax-b\|$? Describir (con el mayor detalle posible) todas las $\hat{x}$ posibles que dan este mínimo.

3. Sean A y B dos matrices tales que $A^TB=0$, con factorizaciones QR, $A=Q_AR_A$ y $B=Q_BR_B$. Sea $C=[A\mid B]$. Probar que $C=QR$ es la factorización QR de la matriz C, con $Q=[Q_A\mid Q_B]$ y $R=\begin{bmatrix} R_A & 0 \\ 0 & R_B\end{bmatrix}$. (Ayuda: Probar $Q_A^TQ_B=0$.)

4. Sea A una matriz real con autovalores $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-2+5i$ y $\lambda_3=-2-5i$ y autovectores x_1, x_2 y x_3, respectivamente.

   a) Determinar la traza y el determinante de la matriz $4A$.

   b) Si $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 2 \end{bmatrix}$, calcular x_3.

5. Justificar por qué tienen módulo 1 los autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 4 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Ayuda: recordar que si una matriz M tiene una fila o columna con una única entrada no nula M_i^j, su determinante es el producto de $(-1)^{i+j}M_i^j\in\mathbb{C}$ por el determinante de la submatriz de M obtenida por borrado de su fila i y su columna j.

6. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando las respuestas.

   a) Sea U una matriz unitaria entonces $U^{2021}=U^6$.

   b) Sea $\mathscr{B}=\{q^1,q^2,q^3\}$ una base ortornormal de $\mathbb{R}^3$ y $A=3q^1(q^1)^T-q^2(q^2)^T+\frac{1}{2}q^3(q^3)^T$. Entonces A tiene 3 autovalores diferentes.

   c) Sea A una matriz 6×6 tal que su forma de Jordan tiene 5 bloques de Jordan. Entonces A no es diagonalizable.