Tarea Práctica 9 y 10
Análisis Matemático II

Pitinari Tomás, Obukhova Daria

Consignas

Práctica 9:
3) Para cada una de las siguientes funciones, determine su dominio natural, es decir, el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^n$ donde la función está definida, y represéntelo gráficamente.

c) $f(x, y, z) = ln(xyz)$

d) $f(x, y, z) = arcsin \dfrac{1}{x + y + z}$

Práctica 10:
9) Analice en qué puntos del plano son diferenciables las funciones:

c) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

d) $f(x, y) = |x| + |y|$

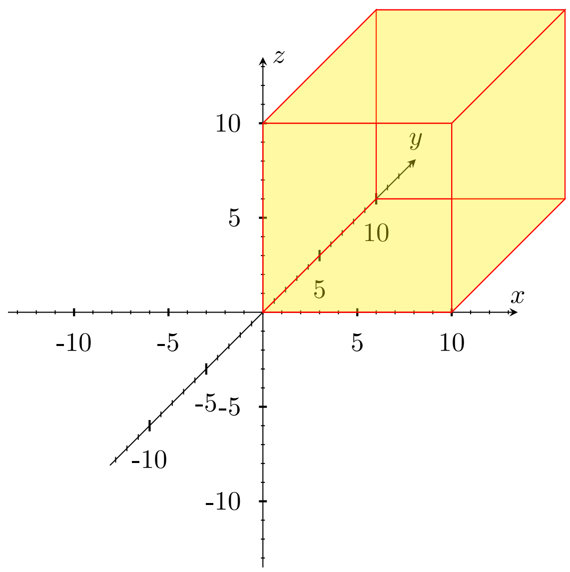
15) Una partícula se lanza desde la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en el punto $(1; 1; \sqrt{3})$ en una dirección normal a la superficie en el tiempo $t = 0$ con una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo cruza el plano xy?

Resolución

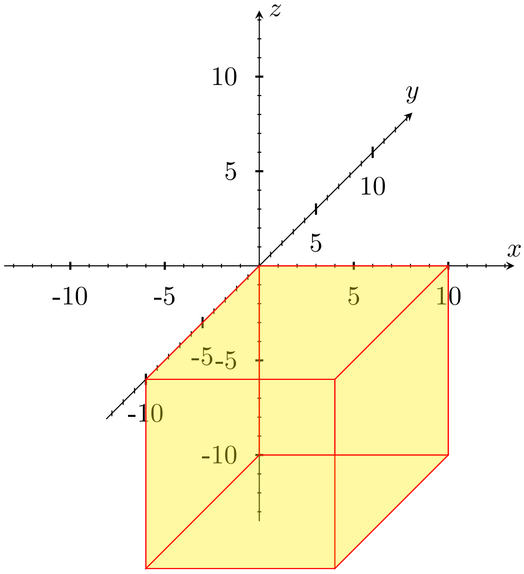
Práctica 9:
3)c) Como sabemos que el dominio de la función $ln(x)$ son los $\mathbb{R}^+$ hay que determinar un dominio para x, y y z, tal que, $x \cdot y \cdot z \in \mathbb{R}^+$. Facilmente podemos ver que hay cuatro opciones para que $x \cdot y \cdot z > 0$:

1. $x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$
2. $x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$
3. $x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0$
4. $x < 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0$

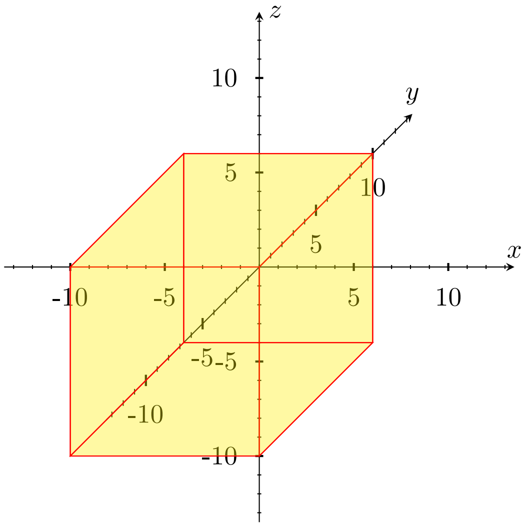
(1)



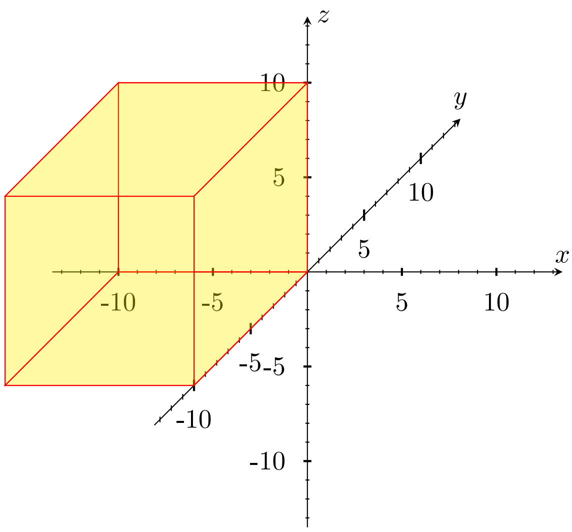
(2)

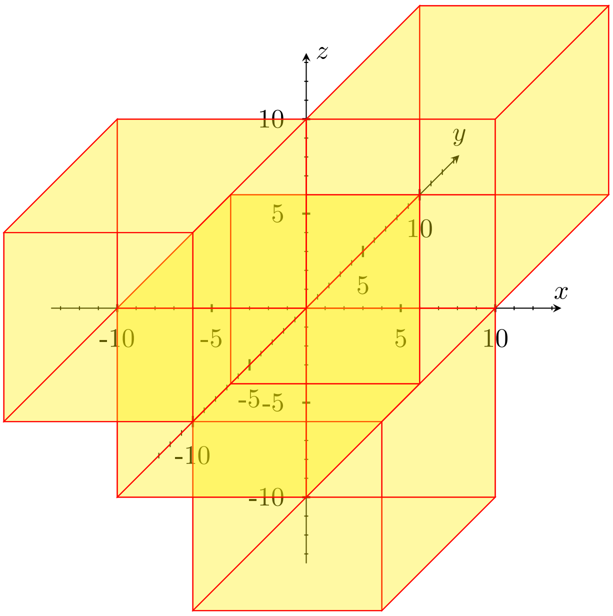

z
10
5
y
10
5
x
-10
-5
5
10
-5
-5
-10
-10

(3)


z
10
y
5
10
5
x
-10
-5
5
10
-5
-5
-10
-10

(4)


z
10
y
5
10
5
x
-10
-5
5
10
-5
-5
-10
-10

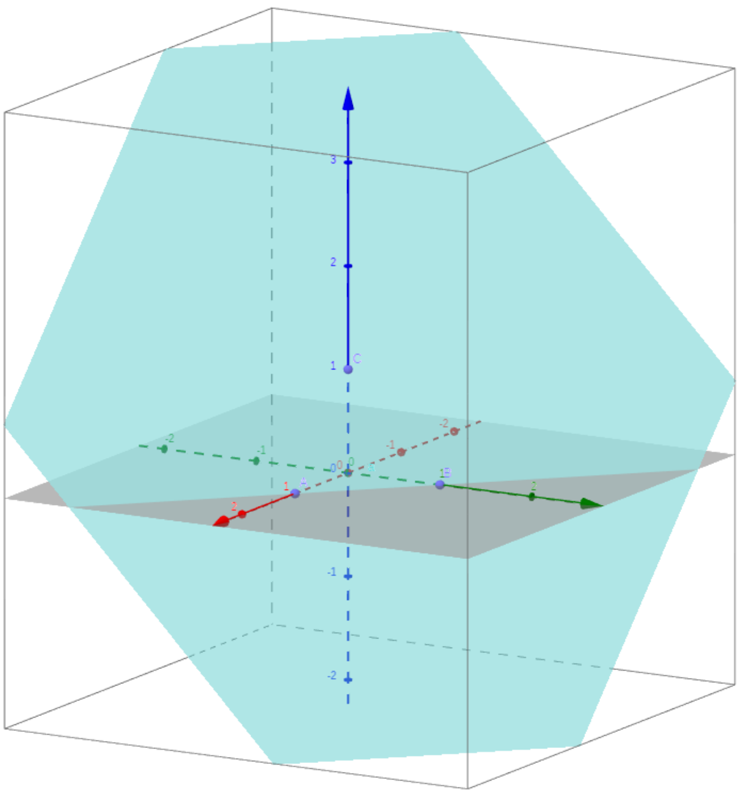


Podemos concluir que cada punto que tomemos dentro de el volumen formado por las graficas es equivalente a una terna de valores en el dominio de f

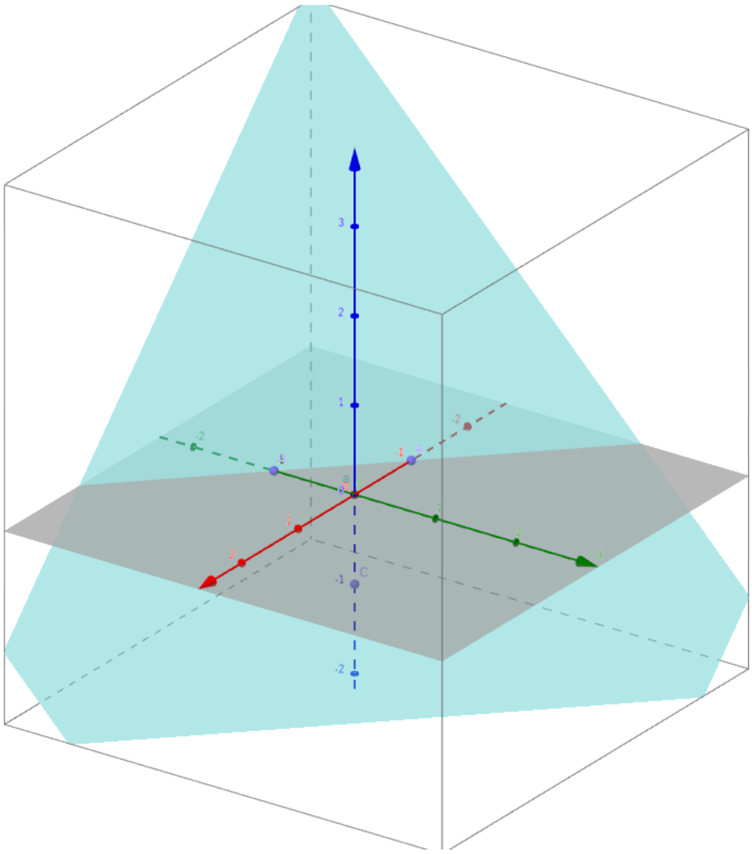
d) Sabemos que el dominio de la función $arcsin(x)$ es $[-1,1]$ por ser la inversa de la función $sin(x)$. Sabiendo eso podemos ver que $-1 \leq \dfrac{1}{x+y+z} \leq 1 \Rightarrow x+y+z \leq -1 \vee x+y+z \geq 1$, con eso vemos que tenemos dos formas de elegir nuestros numeros:

1. $x+y+z \geq 1$
2. $x+y+z \leq -1$

(1)



(2)



Estas gráficas son todos los puntos tales que $x+y+z=1$ o $x+y+z=-1$, por lo tanto el dominio de las variables seran todos los reales menos los puntos que se encuentran entre ambos planos paralelos, ya que esos puntos equivalen a $-1<x+y+z<1$

Practica 10:
9)c) Dada nuestra función $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ derivamos parcialmente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{|xy|}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{|x||y|}\overbrace{=}^{\text{regla de la cadena}}\frac{1}{2\sqrt{|x||y|}}\frac{\partial}{\partial x}(|x||y|)=\frac{x|y|}{2|x|\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}}=\frac{x\sqrt{|y|}}{2|x|\sqrt{|x|}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{|xy|}=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{|x||y|}\overbrace{=}^{\text{regla de la cadena}}\frac{1}{2\sqrt{|x||y|}}\frac{\partial}{\partial y}(|x||y|)=\frac{|x|y}{2|y|\sqrt{|x|}\sqrt{|y|}}=\frac{y\sqrt{|x|}}{2|y|\sqrt{|y|}}$$

Primero analizamos las limitaciones del dominio y facilmente podemos ver que el unico punto donde nuestra funciónes no estan definidas es cuando $2|x|\sqrt{|x|}=0\Rightarrow x=0$ o $2|y|\sqrt{|y|}=0\Rightarrow y=0$. Con esto sabemos que existen derivadas para todos $x\neq 0\wedge y\neq 0$.
Tenemos que ambas derivadas parciales de f son continuas en su dominio, en $\mathbb{R}-\{0\}$, entonces podemos afirmar que f es de clase C^1, lo que nos dice por el teorema 118 que va a ser diferenciable para todo $x,y\in\mathbb{R}-\{0\}$.
Lo que queda es analizar las derivadas para un $x=0\vee y=0$

$$\nexists\frac{\partial f(0,a)}{\partial x}\Leftrightarrow\nexists\lim_{t\to 0}\frac{f((0,a)+t(1,0))-f(0,a)}{t}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{f((t,a))-f(0,a)}{t}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{|ta|}-\sqrt{|a0|}}{t}\Rightarrow$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{|t|}\sqrt{|a|}}{t}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{|t|}\sqrt{|t|}\sqrt{|a|}}{t\sqrt{|t|}}\Rightarrow\lim_{t\to 0}\frac{|t|\sqrt{|a|}}{t\sqrt{|t|}}$$

Separamos los limites de ambos lados

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{-t\sqrt{|a|}}{t\sqrt{-t}}\Rightarrow\lim_{t\to 0^-}-\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{-t}}=-\infty$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t\sqrt{|a|}}{t\sqrt{t}}\Rightarrow\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{t}}=\infty$$

Como ambos límites son distintos entonces $\nexists \lim_{t\to 0} \frac{|t|\sqrt{|a|}}{t\sqrt{|t|}} \Rightarrow \nexists \frac{\partial f(0,a)}{\partial x}$ por lo que no existe derivada parcial de f en la variable x tal que $x = 0$. Ahora para y tenemos

$$\nexists \frac{\partial f(a,0)}{\partial y} \Leftrightarrow \nexists \lim_{t\to 0} \frac{f((a,0)+t(0,1)) - f(a,0)}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(a,t) - f(a,0)}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|at|} - \sqrt{|a0|}}{t}$$

Llegamos a la misma expresión que antes, por lo que no existe derivada parcial de f en la variable y tal que $y = 0$. Quedó demostrado que no existen las derivadas parciales para $x = 0 \vee y = 0$, entonces f es derivable en todo $x, y \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \vee y \neq 0$ d) Dada nuestra función $f(x,y) = |x| + |y|$ derivamos parcialmente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(|x| + |y|) = \frac{\partial}{\partial x}|x| + \frac{\partial}{\partial x}|y| = \frac{x}{|x|} + 0 = \frac{x}{|x|}$$

Analizamos que limitaciones tiene el dominio de la derivada, facilmente observamos que la misma no esta definida para un $x = 0$, por lo que el dominio son los $\mathbb{R} - \{0\}$ y como es la función signo, podemos afirmar que la misma es continua en todo su dominio.
Repetimos el mismo proceso con la derivada parcial de f en la variable y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(|x| + |y|) = \frac{\partial}{\partial y}|x| + \frac{\partial}{\partial y}|y| = 0 + \frac{y}{|y|} = \frac{y}{|y|}$$

Terminamos llegando a la misma conclusión que con la derivada anterior, teniendo que el dominio de nuestra derivada de f en la variable y son los $\mathbb{R} - \{0\}$ y que es continua en todo su dominio.
Ahora vamos a mostrar que no existe la derivada parcial de f en la variable x tal que $x = 0$

$$\nexists \frac{\partial f(0,a)}{\partial x} \Leftrightarrow \nexists \lim_{t\to 0} \frac{f((0,a)+t(1,0)) - f(0,a)}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(t,a) - f(0,a)}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{|t| + |a| - |a|}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

Separamos los límites por ambos lados

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{-t}{t} = -1$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1$$

Como ambos límites son distintos entonces $\nexists \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \Rightarrow \nexists \frac{\partial f(0,a)}{\partial x}$ por lo que no existe derivada parcial de f en la variable x tal que $x = 0$. Ahora para y tenemos

$$\nexists \frac{\partial f(a,0)}{\partial y} \Leftrightarrow \nexists \lim_{t\to 0} \frac{f((a,0)+t(0,1)) - f(a,0)}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(a,t) - f(a,0)}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{|a| + |t| - |a|}{t} \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

Llegamos al mismo límite que antes y podemos decir que no existe por lo tanto $\nexists \frac{\partial f(a,0)}{\partial y}$ Con esto llegamos a que nuestra función f va a ser de clase C^1 para $x \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge y \in \mathbb{R} - \{0\}$, y como ya vimos que f no es diferenciable para $x = 0 \vee y = 0$, entonces por el teorema 118 f va a ser diferenciable para todo $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$.

15) Tomamos la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Entonces la hiperboloide en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de nivel $f^{-1}(-1)$, que llamaremos $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$. Entonces el plano tangente a S en el punto $p(1,1,\sqrt{3})$ es el conjunto:

$$T_pS = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - \sqrt{3}z = -1$$

Teniendo eso buscamos 2 puntos más pertenecientes al plano, por ejemplo buscamos el punto con $z = 0$ e $y = 0$:

$$x + 0 - 0 = -1 \Rightarrow p_1(1,0,0) \in T_pS$$

y el punto con $z = 0$ y $x = 0$:

$$0 + y - 0 = -1 \Rightarrow p_2(0,1,0) \in T_pS$$

Teniendo eso podemos calcular el vector normal a la superficie en el punto p, haciendo $\overline{pp_1} \wedge \overline{pp_2}$. Tomando $o(0,0,0)$, tenemos que
$\overline{pp_1} = \overline{op_1} - \overline{op} = (1,0,0) - (1,1,\sqrt{3}) = (0,-1,-\sqrt{3}) \wedge \overline{pp_2} = \overline{op_2} - \overline{op} = (0,1,0) - (1,1,\sqrt{3}) = (-1,0,-\sqrt{3})$, entonces:

$$\overline{pp_1} \wedge \overline{pp_2} = \overline{n}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$$

Una vez que tenemos el vector $\overline{n}$, que es el vector normal a la superficie en el punto p, podemos calcular la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto p con la dirección de $\overline{n}$ que equivale al recorrido de nuestra partícula:

$$f(n) = \begin{cases} x = 1 + \lambda\sqrt{3} \\ y = 1 + \lambda\sqrt{3} \quad \forall\lambda \in R \\ z = \sqrt{3} + \lambda \end{cases}$$

Como queremos encontrar en que punto la particula pasa por el plano xy, tenemos que depejar nuestro λ cuando $z = 0$:

$$0 = \sqrt{3} + \lambda \Rightarrow \lambda = -\sqrt{3}$$

depejamos x e y

$$x = 1 - \sqrt{3}\sqrt{3} = -2 \wedge y = 1 - \sqrt{3}\sqrt{3} = -2$$

Llegamos a que la particula va a pasar por el plano xy en el punto $p_3(-2, -2, 0)$, solo quedaría calcular la distancia y podremos despejar el tiempo:

$$d(p, p_3) = \sqrt{(1+2)^2 + (1+2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 21}$$

Si la velocidad de la partícula era de 10 unidades por segundo y recorrió 21 unidades, entonces la partícula tardó $\frac{21}{10} = 2.1$ segundos en llegar.