1

Tomás

Pitinari

P-5039/3

1)

a) $\phi \to \psi \models \phi \leftrightarrow (\phi \wedge \psi)$

$\exists v$ / Si $[\![\phi \to \psi]\!]_v = T \Longrightarrow [\![\phi \leftrightarrow (\phi \wedge \psi)]\!]_v$

En particular $[\![\phi \to \psi]\!]_v = T \overset{\text{def de } \to}{\Longleftrightarrow} [\![\phi]\!]_v \overset{①}{\leq} [\![\psi]\!]_v$

Entonces vemos por casos

- $[\![\phi]\!]_v = T \overset{①}{\Longrightarrow} [\![\psi]\!]_v = T$, entoces despejamos del otro lado

$[\![\phi \leftrightarrow (\phi \wedge \psi)]\!]_v = T \overset{\text{def } \leftrightarrow}{\Longleftrightarrow} [\![\phi]\!]_v = [\![\phi \wedge \psi]\!]_v \Longleftrightarrow$

$[\![\phi]\!]_v \overset{②}{=} \min([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) \Longleftrightarrow T = \min(T, T)$

$T = T$

- $[\![\phi]\!]_v = F$

Llegando a ② tenemos que:

$[\![\phi]\!]_v = \min([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) \overset{\text{def } [\![]\!]_v}{\Longleftrightarrow} F = \min(F, [\![\psi]\!]_v) = F$

Cubiertos todos los casos, podemos afirmar que

$\phi \to \psi \models \phi \leftrightarrow (\phi \wedge \psi)$

b) $(p_1 \wedge p_2) \to p_3 \not\models p_1 \to p_3$

Vemos que no ~~se~~ ~~a~~ es consecuencia semántica, ya que $\exists v$ / $[\![p_1]\!]_v = T$, $[\![p_2]\!]_v = F$, $[\![p_3]\!]_v = F$, que hace que: $[\![(p_1 \wedge p_2) \to p_3]\!]_v \overset{①}{=} T$ y $[\![p_1 \to p_3]\!]_v \overset{②}{=} F$

① $[\![(p_1 \wedge p_2) \to p_3]\!]_v = T \Longleftrightarrow [\![p_1 \wedge p_2]\!]_v \leq [\![p_3]\!]_v \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \min([\![p_1]\!]_v, [\![p_2]\!]_v) \leq [\![p_3]\!]_v \Longleftrightarrow \min(T, F) \leq F$ ✓

② $[\![p_1 \to p_3]\!]_v = T \iff [\![p_1]\!]_v \leq [\![p_3]\!]_v$

pero $[\![p_1]\!]_v = T > [\![p_3]\!]_v = F$ $\therefore$ $[\![p_1 \to p_3]\!]_v = F$ ✓

absurdo

Tomás Pitinari

$\therefore (p_1 \wedge p_2) \to p_3 \not\models p_1 \to p_3$

3) a) $[\![p_1 \oplus p_2]\!] = F \iff [\![p_1]\!]_v = [\![p_2]\!]_v$

b)
$$\frac{\phi \qquad \neg\psi}{\phi \oplus \psi}\, i_\oplus \qquad \frac{\neg\phi \qquad \psi}{\phi \oplus \psi}\, i_\oplus$$

$$\frac{\phi \oplus \psi \qquad \phi}{\neg\psi}\, e_\oplus \qquad \frac{\phi \oplus \psi \qquad \neg\phi}{\psi}\, e_\oplus$$

$\Updownarrow$ mismas $\qquad \Updownarrow$

$$\frac{\phi \oplus \psi \qquad \psi}{\neg\phi}\, e_\oplus \qquad \frac{\phi \oplus \psi \qquad \neg\psi}{\phi}\, e_\oplus$$

✓

c) $p \oplus q \vdash \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$

Por Soundness sabemos que $p \oplus q \overset{③}{\models} \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$

Si analizamos el secuente tenemos

$[\![\neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)]\!]_v = T \iff \max(\underset{①}{[\![\neg(p \to q)]\!]_v}, \underset{②}{[\![\neg(q \to p)]\!]_v})$

① $[\![\neg(p \to q)]\!]_v = T \iff [\![p \to q]\!]_v = F \iff [\![p]\!]_v > [\![q]\!]_v$

② Analogamente $[\![\neg(q \to p)]\!]_v = T \iff [\![q]\!]_v > [\![p]\!]_v$

3

Tomas Pitinari

Para que se cumpla ③ se debe cumplir que

$\forall v \,/\, [\![p \oplus q]\!]_v = T \Rightarrow [\![\neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)]\!]_v = T$

Por la def semantica de $\oplus$ tenemos que

$[\![p \oplus q]\!]_v = T \Longleftrightarrow \begin{cases} [\![p]\!]_v = T \text{ y } [\![q]\!]_v = F & ④ \\ \text{o} \\ [\![p]\!]_v = F \text{ y } [\![q]\!]_v = T & ⑤ \end{cases}$

Para la valuación ④ vemos que se cumple ①, entonces $\max(T, [\![\neg(q \to p)]\!]_v) = T$.

Para la valuacion ⑤ vemos que se cumple ②, entonces $\max([\![\neg(p \to q)]\!]_v, T) = T$

$\therefore p \oplus q \models \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \xRightarrow{\text{completitud}} p \oplus q \vdash \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$

2) Si $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \phi \wedge \psi \overset{\text{soundness}}{\underset{①}{\overset{\text{completitud}}{\Longleftrightarrow}}} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \models \phi \wedge \psi$

$v \,/\, [\![\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)]\!]_v = T \overset{\text{def } \neg}{\Longleftrightarrow} [\![(\neg\phi \vee \neg\psi)]\!]_v = F \overset{\text{def } \vee}{\Longleftrightarrow}$

$\max([\![\neg\phi]\!]_v, [\![\neg\psi]\!]_v) = F \Longleftrightarrow [\![\neg\phi]\!]_v = F$ y $[\![\neg\psi]\!]_v = F$

$\overset{\text{def } \neg}{\Longleftrightarrow} [\![\phi]\!]_v = T$ y $[\![\psi]\!]_v = T$

Dado la valuacion anterior, evaluamos si:

$[\![\phi \wedge \psi]\!]_v = T \overset{\text{def } \wedge}{\Longleftrightarrow} \min([\![\phi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v) = T \overset{\text{def } [\![\,]\!]_v}{\Longleftrightarrow}$

$\min(T, T) = T$

$\therefore \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \models \phi \wedge \psi \Longleftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \phi \wedge \psi$

Por lo tanto el secuente es válido.

4) a) Tenemos

$$\gamma \models \alpha \vee \beta \iff \text{sea } v / [\![\gamma]\!]_v = T \longrightarrow [\![\alpha \vee \beta]\!]_v = T \overset{\text{def} \vee}{\iff} \max([\![\alpha]\!]_v, [\![\beta]\!]_v) = T$$

$$\gamma \models \alpha \to \beta \iff \text{"} \quad \text{"} \longrightarrow [\![\alpha \to \beta]\!]_v = T \overset{\text{def} \to}{\iff} [\![\alpha]\!]_v \leq [\![\beta]\!]_v$$

Tomás Pitinari

$$\gamma \not\models \beta \to \alpha \iff \text{"} \quad \text{"} \Longrightarrow [\![\beta \to \alpha]\!]_v = F \overset{\text{def} \to}{\iff} [\![\alpha]\!]_v < [\![\beta]\!]_v$$

Bastaría con tomar $\gamma = \{\neg(\beta \to \alpha)\}$ o $\{\beta, \neg\alpha\}$, con α y β arbitrarios

b) Si Γ es consistente, entonces existe $v / [\![\Gamma]\!]_v = T$.

Entonces:

- $[\![\neg\alpha' \to \bot]\!]_v = T \overset{\text{def} \to}{\iff} [\![\neg\alpha']\!]_v \leq [\![\bot]\!]_v \overset{\text{def} [\![\,]\!]_v}{\iff} [\![\neg\alpha']\!]_v = F$
$\overset{\text{def} \neg}{\iff} [\![\alpha']\!]_v \overset{①}{=} T$
- $[\![\alpha' \to \beta' \wedge \gamma']\!]_v = T \overset{\text{def} \to}{\iff} [\![\alpha']\!]_v \leq [\![\beta' \wedge \gamma']\!]_v \overset{① y \leq}{\iff} T = [\![\beta' \wedge \gamma']\!]_v$
$\overset{\text{def} \wedge}{\iff} \min([\![\beta']\!]_v, [\![\gamma']\!]_v) = T \iff [\![\beta]\!]_v = T$ y $[\![\gamma']\!]_v = T$
- Dada la valuacion $[\![\alpha']\!]_v = T$, $[\![\beta']\!]_v = T$, $[\![\gamma']\!] = T$,

si se cumple $[\![\beta' \to \neg\gamma']\!] = T \Rightarrow \Gamma$ es consistente

Asumimos $[\![\beta' \to \neg\gamma']\!]_v = T \overset{\text{def} \to}{\iff} [\![\beta']\!] \leq [\![\neg\gamma']\!]_v \overset{\text{def} [\![\,]\!]_v}{\Longrightarrow}$
$T \leq [\![\neg\gamma']\!]_v$ absurdo!

y $[\![\gamma']\!]_v = T \Rightarrow [\![\neg\gamma']\!]_v = F$

$\therefore \Gamma$ inconsistente

No existe conjunto de formulas que hagan a Γ consistente

Tomás
Pitinari

c) Γ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \bot$, lo que nos dice que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ / Γ_1 finito y $\Gamma_1 \vdash \bot$. Por lo tanto si $\Gamma_1 \vdash \bot$ es inconsistente, y al ser un subconjunto de Γ sirve como contraejemplo para ~~afirm~~ afirmar que no existen formulas en Γ que cumplan la proposición.

2) Hago el 2 de vuelta ~~con deduccion natural tambien~~
sin usar Soundness y completitud

1) $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$ premisa
2) $\neg\phi$ hipotesis
3) $\neg\phi \vee \neg\psi$ $i_{\vee_1}$
4) $\bot$ $i_{\bot(3)(1)}$
5) ϕ RAA
6) $\neg\psi$ hipotesis
7) $\neg\phi \vee \neg\psi$ $i_{\vee_2}$
8) $\bot$ $i_{\bot(7)(1)}$
9) ψ RAA
10) $\phi \wedge \psi$ $i_{\wedge(5)(9)}$

$$\therefore \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vdash \phi \wedge \psi$$