Logica cap 3

25/09/2021

Completitud

Consistencia

Sea $\Gamma \subseteq PROP$. Decimos que Γ es consistente sii $\Gamma \nvdash \bot$.
Si $\Gamma \vdash \bot$ decimos que Γ es inconsistente.

Lema 1 Def. alternativas de consistencia

Las siguientes proposiciones son equivalentes.

- Γ es consistente
- $\nexists \phi / \Gamma \vdash \phi \wedge \Gamma \vdash \neg\phi$
- existe al menos una $\phi / \Gamma \nvdash \phi$

equivalentemente, tenemos

- Γ inconsistente
- $\exists \phi / \Gamma \vdash \phi \wedge \Gamma \vdash \neg\phi$
- $\forall \phi, \Gamma \vdash \phi$

Lema 2

Sea $\Gamma \subseteq PROP$. Si existe $v/[[\Gamma]]_v = T \Rightarrow \Gamma$ es consistente.
Dem
Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $v/[[\Gamma]]_v = T$.
Supongamos $\Gamma \vdash \bot$, por el lema de correccion, $\Gamma \vDash \bot$, como $[[\Gamma]]_v = T$ tenemos $[[\bot]]_v = T$ Absurdo

Proposicion 3

Sean $\Gamma \subseteq PROP, \phi \in PROP$
(a) Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \phi$.
(b) Si $\Gamma \cup \{\phi\}$ inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \neg\phi$.
Demostracion de (a) por RAA, (b) por $i_\neg$

Consistente maximal

Un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ es consistente maximal sii
(a) Γ es consistente
(b) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' consistente entonces $\Gamma = \Gamma'$
"Cualquier formula que le agregue lo vuelve inconsistente"

Lema 4

Todo conjunto consistente esta contenido en un consistente maximal.
Dem
Sea $\Gamma \subseteq PROP$ consistente. Primero, observemos que PROP es numerable. Es decir, puedo listar todos los elementos de PROP como
$\psi_0, \psi_1, \cdots$
Definimos una sucesion de conjuntos:

$$\Gamma_0 = \Gamma$$
$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_n\} & si\ \Gamma_n \cup \{\psi_n\} \nvdash \bot, \\ \Gamma_n & si\ no. \end{cases}$$

$\Gamma^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$
(a) $\forall n, \Gamma_n$ es consistente
Dem
CB: $n = 0$, $\Gamma_0 = \Gamma$ que es consistente por hipotesis
HII: Γ_n consistente
PI: caso 1: $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ entonces Γ_{n+1} es consistente por HII.
caso2: $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_n\}$ si $\Gamma_n \cup \{\psi_n\} \nvdash \bot$, entonces por lema 1 Γ_{n+1} es consistente.
$\therefore$ Γ_{n+1} es consistente, $\forall n$
(b) Γ^* es consistente
Dem
Supongamos que no, $\Gamma^* \vdash \bot$
Por def de $\vdash$, existe una derivacion de $\bot$ a partir de un subconjunto finito de premisas de Γ^*
Sean $\psi_1, \cdots, \psi_k$ tales premisas, como $\Gamma^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ existen $n_1, \cdots, n_k$ tal que $\psi_i \in \Gamma_{n_i}$ sea $m = max\{n_1, \cdots, n_k\}$ tenemos $\{\psi_1, \cdots, \psi_k\} \subseteq \Gamma_m$. Pero si $\{\psi_1, \cdots, \psi_k\} \subseteq \Gamma_m$ entonces $\Gamma_m \vdash \bot$, absurdo por contradiccion. Por lo tanto Γ^* consistente.
(c) Γ^* es maximal
Sea Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ veremos que $\Delta \subseteq \Gamma^*$.
Sea $\phi \in \Delta$. Existe $m \in \mathbb{N}/\psi_m = \phi$

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta \\ \psi_m \in \Delta \end{array}\right\} \Gamma_m \cup \{\phi_m\} \subseteq \Delta$$

Como Δ es consistente, $\Gamma_m \cup \{\psi_m\}$ es consistente.
Por def, $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ pero $\Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$. En particular, $\phi = \psi_m \in \Gamma^*$
$\therefore \Delta \subseteq \Gamma^*$

Lema 5

Si Γ es consistente maximal entonces es cerrado bajo derivacion
$\Gamma \vdash \phi$ entonces $\phi \in \Gamma$
Dem
Sea $\phi \in PROP$ tal que $\Gamma \vdash \phi$. Supongamos que $\phi \notin \Gamma$. Como Γ es consistente maximal, $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente. Por (3.b) $\Gamma \vdash \neg\phi$

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \vdash \phi \\ \Gamma \vdash \neg\phi \end{array}\right\} \Gamma \text{ inconsistente, absurdo. } \therefore \phi \in \Gamma$$

Lema 6

Sea Γ consistente maximal
(a) $\forall \phi, \phi \in \Gamma \vee \neg\phi_1 \in \Gamma$
Primero, observemos que no puede ocurrir que $\phi \in \Gamma$ y $\neg\phi \in \Gamma$.
Sea $\Gamma' = \Gamma \cup \{\phi\}$ tenemos dos casos:
i) $\Gamma' = \Gamma$, entocnes $\phi \in \Gamma$
ii) $\Gamma' \neq \Gamma$, entonces $\Gamma' = \Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente. Por lema 3, $\Gamma \vdash \neg\phi$, y por lema 5 $\neg\phi \in \Gamma$
(b) $\phi_1 \to \phi_2 \in \Gamma$ sii $\neg\phi_1 \in \Gamma \vee \phi_2 \in \Gamma$
$\Rightarrow$) $\phi_1 \to \phi_2 \in \Gamma$
i) Si $\neg\phi_1 \in \Gamma$ se cumple
ii) Si $\neg\phi_1 \notin \Gamma$ por (a), $\phi_1 \in \Gamma$, tenemos por $(e_\to)$ que $\Gamma \vdash \phi_2$. Por lema 5, $\phi_2 \in \Gamma$
$\Leftarrow$) $\neg\phi_1 \in \Gamma \vee \phi_2 \in \Gamma$
i) $\neg\phi_1 \in \Gamma$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\phi_1 \qquad [\phi_1]^{(1)}}{\bot}{i_\bot}}{\phi_2}{e_\bot}}{\phi_1 \to \phi_2}{i_\to^{(1)}}$$

$\Gamma \vdash \phi_1 \to \phi_2 \overbrace{\Rightarrow}^{L.5} \phi_1 \to \phi_2 \in \Gamma$
ii) $\phi_2 \in \Gamma$

$$\cfrac{\cfrac{\neg\phi_2 \quad [\phi_1]^{(1)}}{\phi_2}\,t}{\phi_1 \to \phi_2}\,i_{\to}^{(1)}$$

$\Gamma \vdash \phi_1 \to \phi_2 \overbrace{\Rightarrow}^{L.5} \phi_1 \to \phi_2 \in \Gamma$
$\therefore \phi_1 \to \phi_2 \in \Gamma$
(c) $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Gamma$ sii $\phi_1 \in \Gamma \wedge \phi_2 \in \Gamma$
$\Rightarrow$) $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Gamma$, tomemos las derivaciones, $(e_{\wedge 1})$ y $(e_{\wedge 2})$, entonces $\Gamma \vdash \phi_1$ y $\Gamma \vdash \phi_2$, y por lema 5, $\phi_1 \in \Gamma$ y $\phi_2 \in \Gamma$
$\Leftarrow$) $\phi_1 \in \Gamma$ y $\phi_2 \in \Gamma$, tenemos la derivacion $(i_\wedge)$, por lo tanto $\Gamma \vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ y por lema 5, $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \Gamma$
(d) $\phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma$ sii $\phi_1 \in \Gamma \vee \phi_2 \in \Gamma$
$\Rightarrow$) $\phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma$. Supongamos que $\phi_1 \notin \Gamma$ y $\phi_2 \notin \Gamma$, entonces por (a), $\neg\phi_1 \in \Gamma$ y $\neg\phi_2 \in \Gamma$. Veamos la siguiente derivacion

$$\cfrac{\phi_1 \vee \phi_2 \qquad \cfrac{[\phi_1]^{(1)} \quad \neg\phi_1}{\bot}\,i_\bot \qquad \cfrac{[\phi_2]^{(2)} \quad \neg\phi_2}{\bot}\,i_\bot}{\bot}\,e_\vee^{(1)(2)}$$

$\therefore \Gamma \vdash \bot$, absurdo, por lo tanto $\phi_1 \in \Gamma \vee \phi_2 \in \Gamma$
$\Leftarrow$) $\phi_1 \in \Gamma \vee \phi_2 \in \Gamma$
Veamos por casos:
i) $\phi_1 \in \Gamma$ entonces por $(i_\vee)$, $\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2$. Por lema 5, $\phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma$
ii) $\phi_2 \in \Gamma$ entonces por $(i_\vee)$, $\Gamma \vdash \phi_1 \vee \phi_2$. Por lema 5, $\phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma$
$\therefore \phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma$

Lema 7 (vuelta del 2)

Si Γ es consistente entonces existe $n/[[\Gamma]]_v = T$
Dem
Por lema 4, Γ esta contenido en un conjunto consistente maximal. Sea Γ^* tal conjunto, definimos v:

$$v(p_i) = \begin{cases} T & si\ p_i \in \Gamma^*, \\ F & si\ p_i \notin \Gamma^*. \end{cases}$$

Proposicion: $\forall \phi \in PROP$, $[[\phi]]_v = T$ sii $\phi \in \Gamma^*$
Dem por ind en PROP
(i) $\phi = \bot$, $[[\bot]]_v = F$ y $\bot \notin \Gamma^*$
(ii) $\phi = p_i$ directo de la def de v.
(iii) $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, $[[\phi_1 \wedge \phi_2]]_v = T \Leftrightarrow [[\phi_1]]_v = T$ y $[[\phi_2]]_v = T \overbrace{\Leftrightarrow}^{HII} \phi_1 \in \Gamma^*$ y $\phi_2 \in \Gamma^* \Leftrightarrow \phi_1 \wedge \phi_2 \in \Gamma^*$
(iv) $\phi = \phi_1 \to \phi_2$, $[[\phi_1 \to \phi_2]]_v = F \Leftrightarrow [[\phi_1]]_v = T$ y $[[\phi_2]]_v = F \overbrace{\Leftrightarrow}^{HII} \phi_1 \in \Gamma^*$ y $\phi_2 \notin \Gamma^* \Leftrightarrow \phi_1 \in \Gamma^*$ y $\neg\phi_2 \in \Gamma^* \Leftrightarrow \phi_1 \to \phi_2 \notin \Gamma^*$
(v) $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$, $[[\phi_1 \vee \phi_2]]_v = T \Leftrightarrow [[\phi_1]]_v = T$ o $[[\phi_2]]_v = T \overbrace{\Leftrightarrow}^{HII} \phi_1 \in \Gamma^*$ o $\phi_2 \in \Gamma^* \Leftrightarrow \phi_1 \vee \phi_2 \in \Gamma^*$
(vi) $\phi = \neg\phi_1$, $[[\neg\phi_1]]_v = T \Leftrightarrow [[\phi_1]]_v = f \overbrace{\Leftrightarrow}^{HII} \phi_1 \notin \Gamma^* \Leftrightarrow \neg\phi_1 \in \Gamma^*$
Terminada esta proposicion, como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, obtenemos $[[\Gamma]]_v = T$

Corolario 8

Sean $\Gamma \subseteq PROP, \phi \in PROP, \Gamma \nvdash \phi$ sii existe $v/[[\Gamma]]_v = T$ y $[[\phi]]_v = F$
Dem
$\Gamma \nvdash \phi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\phi\}$ consistente $\Leftrightarrow \exists v/[[\Gamma \cup \{\neg\phi\}]]_v = T \Leftrightarrow \exists v/[[\Gamma]]_v = T$ y $[[\phi]]_v = F$

Teorema (completitud)

$\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \phi$
$\Rightarrow$) Soundness $\Leftarrow$) $\Gamma \vDash \phi$. Supongamos que $\gamma \nvdash \phi$, por corolario 8 existe $v/[[\Gamma]]_v = T$ y $[[\phi]]_v = F$. Entonces $\Gamma \nvDash \phi$, Absurdo.
$\therefore \Gamma \vdash \phi$