# Ejercicio 10 práctica N°5
# Análisis Matemático II

Sofía Pellegrini, Tomás Pitinari, Iago Quintero

## Consigna

10) Para la siguiente función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ se pide:

(a) determine el dominio de $f$ y estudiar su paridad
(b) determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y la existencia de extremos relativos
(c) determine los intervalos de concavidad y de convexidad y la existencia de puntos de inflexión
(d) analice la existencia o no de asíntotas horizontales y/o verticales para $f$
(e) construya un boceto de la gráfica de $f$ utilizando la información de los items anteriores
(f) analice la existencia de máximo o mínimo absoluto para esta función

## Resolución

a) Primero analizamos el dominio de la función y vemos que $1 + x^2 > 0$, por lo tanto va a estar definida en todos los reales. Luego veremos si la función es par, debería cumplirse que $f(-x) = f(x)$:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} \qquad \text{Vemos que } f(-x) = -f(x)\text{, por lo que no es par}$$

Visto lo anterior sabemos que $f(x)$ es impar, ya que $f(-x) = -f(x)$
b) Los puntos críticos de f(x) son los puntos donde f'(x) = 0

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow (1+x^2)^2 \neq 0 \wedge 1 - x^2 = 0$$

primera condicion:

$$(1+x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

Absurdo ya que $x^2 > 0 \; \forall x$

$$\therefore (1+x^2)^2 \neq 0 \; \forall x$$

segunda condicion:

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow 1 = x^2 \Rightarrow 1 = |x| \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

$f'(x)$ continua entonces en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ la funcion $f'(x)$ no cambia de signo. Por lo tanto para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento solo hay que evaluar la funcion en un punto de esos intervalos.

$$f'(-2) = -0.12 \Rightarrow \text{f(x) decreciente en (-}\infty, -1)$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \text{f(x) creciente en (-1,1)}$$

$$f'(2) = -0.12 \Rightarrow \text{f(x) decreciente en } (1,\infty)$$

$\therefore$ hay un minimo local en $x = -1$ y hay un maximo local en $x = 1$
c) Para calcular la concavidad y convexidad, vamos a utilizar el teorema 57, por lo que debemos calcular la derivada segunda de nuestra función.

$$f(x)' = (\frac{x}{1+x^2})' =$$

$$\frac{(x)'.(1+x^2) - x.(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{1.(1+x^2) - x.2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} =$$

Luego nuestra derivada segunda:

$$f(x)'' = (\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2})' =$$

$$\frac{(1-x^2)'.(1+x^2)^2 - (1-x^2).((1+x^2)^2)'}{((1+x^2)^2)^2} =$$

$$\frac{(1+x^2).(-2x.(1+x^2) - (1-x^2).4x)}{(1+x^2)^4} =$$

$$\frac{(-2x-2x^3) - (4x-4x^3)}{(1+x^2)^3} =$$

$$\frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3} =$$

Ahora hay que ubicar los puntos críticos donde $f''(x) = 0$

| | |
|---|---|
| $f(x)'' = 0 \Rightarrow$ | Por lo que el numerador debe ser 0 |
| $-6x + 2x^3 = 0$ | Ahora sacamos factor comun |
| $2x(x^2-3) = 0$ | Donde tenemos que $2x = 0$ por lo tanto $f(0) = 0$ o $x^2 - 3 = 0$ |
| $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ | $\therefore f(\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}) = 0$ |

Visto esto vamos a analizar la función en 4 intervalos, $(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, \infty)$, tomaremos un numero aleatoreo dentro de cada rango y veremos su convexidad o concavidad:

1. $(-\infty, -\sqrt{3})$ tomamos $-3$ y analizamos $f''(-3) = -\frac{9}{250}$, entonces es cóncava
2. $(-\sqrt{3}, 0)$ tomamos $-1$ y analizamos $f''(-1) = \frac{1}{2}$, entonces es convexa
3. $(0, \sqrt{3})$ tomamos 1 y analizamos $f''(1) = -\frac{1}{2}$, entonces es cóncava
4. $(\sqrt{3}, \infty)$ tomamos 3 y analizamos $f''(3) = \frac{9}{250}$, entonces es convexa

d) Para identificar si hay asintotas horizontales, calculamos el límite en el infinito:

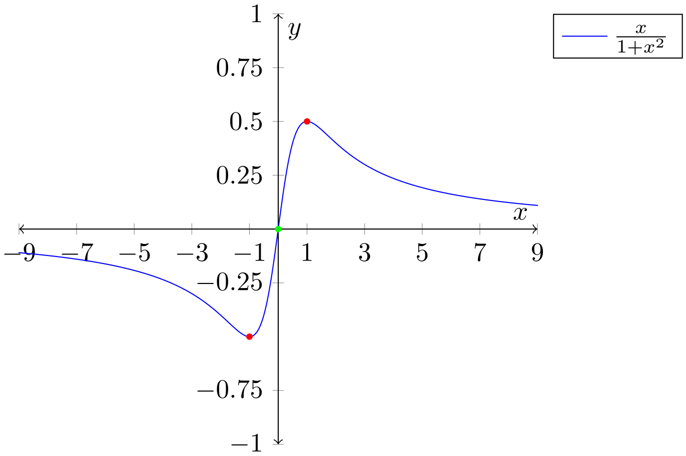
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2}$$ Vemos que nos quedaría una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(\frac{1}{x}+x)}$$ cancelamos ambas $x$ al hacer factor común

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+x}$$ Reemplazando $x$ por $\infty$, nos queda

$$\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\infty}}_{0}+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Con esto sabemos que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en 0.
No tiene asíntotas verticales pues $x^2 \geq 0 \Rightarrow 1+x^2 \geq 1$, por lo que nunca podemos llegar a un numero donde nuestro denominador se aproxime a 0. Por lo tanto no existe $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
e)




f)

$$f(x) \text{ decreciente en } (1,\infty) \Rightarrow f(1) > f(x)\ \forall\ x\ \epsilon\ (1,\infty)$$
$$f(x) \text{ creciente en } (-1,1) \Rightarrow f(1) > f(x)\ \forall\ x\ \epsilon\ (-1,1)$$
$$f(x) < 0\ \forall\ x\ \epsilon\ (-\infty,0)\ \Rightarrow\ f(1) > f(x)\ \forall\ x\ \epsilon\ (-\infty,0)$$

Por lo tanto, $x = 1$ es un maximo absoluto de $f(x)$

$$f(x) \text{ decreciente en } (-\infty,-1) \Rightarrow f(-1) < f(x)\ \forall\ x\ \epsilon\ (-\infty,-1)$$
$$f(x) \text{ creciente en } (-1,1) \Rightarrow f(-1) < f(x)\ \forall\ x\ \epsilon\ (-1,1)$$
$$f(x) > 0\ \forall\ x\ \epsilon\ (0,\infty)\ \Rightarrow\ f(-1)\ <\ f(x)\ \forall\ x\epsilon\ (0,\infty)$$

Por lo tanto, $x = -1$ es un minimo absoluto de $f(x)$