UNIDAD 3: Resumen Continuidad y Límite
Análisis Matemático I

1.1 Distancia de Puntos y Entornos

Se recurre al valor absoluto para cuantificar la distancia en que se encuentran dos puntos, recordando que, para $x, y \in \mathbb{R}$ y representando a la distancia entre estos dos como $d(x, y)$:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Definición Llamamos entorno (o entorno abierto) de un número real a, de radio δ, al intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$, y lo notamos por $E(a, \delta)$. Esto es,

$$\begin{array}{rcc} E(a, \delta) & = & \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : -\delta < x - a < \delta\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} \end{array}$$

Además, llamamos entorno reducido del punto a y de radio δ, al conjunto $E(a, \delta) - \{a\}$, y lo notamos por $E'(a, \delta)$. Esto es,

$$\begin{array}{rcc} E'(a, \delta) & = & \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \wedge x \neq a\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\} \end{array}$$

Nota. Sean a un número real y dos números reales positivos δ_1 y δ_2. Entonces, si δ es un número positivo tal que $\delta \leq \textbf{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene

$$E(a, \delta) \subseteq E(a, \delta_1) \cap E(a, \delta_2),$$

y

$$E'(a, \delta) \subseteq E'(a, \delta_1) \cap E'(a, \delta_2)$$

. En efecto,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \delta_1 \wedge |x - a| < \delta_2$$

, y

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1 \wedge 0 < |x - a| < \delta_2$$

Nota: Si una propiedad se cumple en un entorno δ_1 y otra propiedad se cumple en un entorno δ_2, entonces ambas se cumple en un entorno $\delta/min\{\delta_1, \delta_2\}$, demostraremos más adelante.

1.2 Definición de Límite Finito en un Punto

Definición: Dada una función real f y un número real a, de manera que f está definida en un entorno reducido del punto a, decimos que un valor l es el límite de la función f, cuando la variable independiente tiende al valor a, y lo notamos con el símbolo

$$\lim_{x \to a} f(x) = l,$$

si, para cualquier valor $\varepsilon > 0$, existe un δ, tal que,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

En términos de entornos, si

$$x \in E'(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(l, \varepsilon)$$

Entonces de forma proposicional,

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

si y solo si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0/\forall x : (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Nota: no es necesario que a este en el dominio de f, esta solo debe estar definida en el entorno reducido de a.
Nota: Lo siguiente es equivalente

$$\lim_{x\to a} f(x) = l,\ \lim_{x\to 0} f(x+a) = l,\ \lim_{x\to a} f(x) - l = 0$$

Nota: δ depende de a y de ε, tambien se sabe que para cualquier $\delta' < \delta$ es válido. Y por otro lado, si un valor δ es útil para un ε, tambien lo es para un $\varepsilon' > \varepsilon$

1.3 Algunos Límites Finitos

La función constante: $f(x) = c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} c = c$$

Se verifica viendo que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $\delta > 0$, se tiene que
$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.
La función lineal: $f(x) = mx + h$ con $m \neq 0$

$$\lim_{x\to a} mx + h = ma + h$$

Dado $\varepsilon > 0, |f(x) - l| = |(mx + h) - (ma - h)| = |mx - ma| = |m||x-a|$, basta considerar $\delta < \dfrac{\varepsilon}{|m|}$
La función cuadrática: $f(x) = x^2$

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$$

Entonces

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a|$$

Supongamos que elegimos $\delta = 1$, y sea x tal que $|x-a| < \delta = 1$. Entonces

$$\begin{array}{rcc} |x-a| & < & \delta \Rightarrow -1 < x - a < 1 \\ & \Rightarrow & a - 1 < x < a + 1 \\ & \Rightarrow & 2a - 1 < x + a < 2a + 1 \\ & \Rightarrow & |x + a| < 2a + 1 \end{array}$$

Entonces, eligiendo $\delta \leq min\{1, \frac{\varepsilon}{2a+1}\}$, se tiene $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2a+1}$ y $|x+a| < 2a+1$, y entonces

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a| < |x-a|.2a+1 < \delta 2a + 1 < \frac{\varepsilon}{2a+1} 2a + 1 = \varepsilon$$

La función recíproca: $\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \text{ con } a \neq 0$$

observamos

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a-x}{ax} \right| = \frac{|x-a|}{|xa|}$$

Elegimos un $\delta = 1$, tenemos que

$$\begin{array}{rcc} |x-a| & < & \delta \Rightarrow -1 < x - a < 1 \\ & \Rightarrow & a - 1 < x < a + 1 \\ & \Rightarrow & a^2 - a < xa < a^2 + a \\ & \Rightarrow & |xa| > a^2 - a \end{array}$$

Con esto vemos que para todo $\varepsilon > 0$, eligiendo $\delta \leq min\{1, (a^2 - a)\varepsilon\}$, se tiene que $|x-a| < (a^2 - a)\varepsilon$ y $|xa| > a^2 - a$, y en consecuencia

$$\frac{|x-a|}{|xa|} < \frac{|x-a|}{a^2 - a} < \frac{(a^2 - a)\varepsilon}{a^2 - a} = \varepsilon$$

1.4 Unicidad del Límite

Teorema 1 (Unicidad del límite) Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a y sean l_1 y l_2 dos números tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x\to a} f(x) = l_2 \Rightarrow l_1 = l_2$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, (cuya existencia garantizamos por ser l_1 y l_2 límites de la función en el punto a) tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces, si consideramos $\delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}$ y consideramos cualquier $x \in E'(a, \delta)$, tendremos

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

De la arbitrariedad de ε, por consecuencia de la propiedad arquimediana, surge

$$|l_1 - l_2| = 0 \Rightarrow l_1 = l_2$$

Observación: Propiedad Arquimediana: dados $x, y \in \mathbb{R}, z > 0$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $x \leq y < x + \frac{z}{n} \Rightarrow x = y$.

1.5 No Existencia de Límite

Negando nuestra definición de límite tenemos una propocisión para afirmar que l no es el ĺimite de nuestra función en un punto.

$$\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0, \exists x : (0 < |x-a| < delta \wedge |f(x) - l| \geq \varepsilon)$$

1.6 Límites Laterales

Definición:

- Se dice que un número l es límite por derecha de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (\exists \delta > 0 / a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

- Se dice que un número l es límite por izquierda de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 (\exists \delta > 0 / a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Proposición 1 Sean a un número real y f una función. Entonces

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a^-} f(x) = l \wedge \exists \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

Demostración: Si existe $\lim_{x\to a} f(x) = l$ se cumple que dado un $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ que cumple con la def. de límite. Entonces para ese δ, si x verifica

$$a - \delta < x < a \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

y

$$a < x < a + \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

entonces se verifica

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si valen

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \text{ y } \lim_{x\to a^+} f(x) = l$$

entonces, para $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ y } a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Entonces para $\delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\begin{array}{c} a - \delta < x < a \Rightarrow a - \delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ a < x < a + \delta \Rightarrow a < x < a + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{array}$$

con lo que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$$

Nota: En vista de que la existencia e igualdad de límites laterales en un punto es condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de límite allí, la no existencia de alguno de los límites laterales, o la diferencia entre ambos en el caso de existir, implica la no existencia de límite finito de la función en el punto.

1.7 Teoremas

Proposición 2: Sean f una función y a un número real tal que existe

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Entonces, existe

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si x verifica

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Como además

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| \text{ para } \delta, \text{ vale } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$$

Nota: La proposición inversa no siempre vale.
Teorema 2: (Caracter local de límite). Sean a un número real y dos funciones f y g para las cuales se verifican

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \text{ y } f(x) = g(x) \text{ en algún } E'(a, \rho)$$

Entonces g tiene límite en el punto a y vale $\lim_{x \to a} g(x) = l$ *Demostración:* Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Por hipótesis existe un $\rho > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \rho \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Tomando en cuenta esas afirmaciones, y eligiendo $\delta \leq min\{\delta', \rho\}$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \text{ y } f(x) = g(x) \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon \text{ entonces } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$$

Definición: Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y f una función definida en A (no necesariamente el dominio de f). Decimos que f esta acotada en A, si existe un número real $M > 0$, tal que para todo $x \in A$ se tiene

$$|f(x)| \leq M$$

Alternativamente decimos que f esta acotada en A si el conjunto $\{f(x) : x \in A\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$
Teorema 3: Sean f una función y a un número real tal que existe $\lim_{x \to a} f(x) = l$, entonces existes un entorno reducido $E'(a, \delta)$ en el cual f esta acotada
Demostración: Como f tiene límite l en el punto a, en particular, para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E'(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < 1$. Con lo cual

$$|f(x) - l| < 1 \Rightarrow l - 1 < f(x) - l < 1 + l \Rightarrow -|l| - 1 \leq l - 1 < f(x) < l + 1 \leq |l| + 1 \Rightarrow |f(x)| < |l| + 1$$

Nota: La recíproca de la anterior no es cierta.
Teorema 4: Sean f una función, a un número real tal que existe $\lim_{x \to a} f(x) = l$, y dos números k y h, tales que $h < l < k$. Entonces existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$, donde para todo x allí se verifica $h < f(x) < k$.
Demonstración: Siendo $k > l$, como $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y eligiendo $\varepsilon = k - l > 0$, sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $x \in E'(a, \delta_1) \Rightarrow |f(x) - l| < k - l$, con lo cual, en ese entorno $E'(a, \delta_1)$,

$$f(x) - l \leq |f(x) - l| < k - l \Rightarrow f(x) < k \ (1)$$

Ahora, como $l > h$, si elegimos $\varepsilon = l - h > 0$, sabemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $x \in E'(a, \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < l - h$, con lo cual, en ese entorno $E'(a, \delta_2)$,

$$h - l < f(x) - l < l - h \Rightarrow h < f(x) < 2l - h \ (2)$$

Considerando, $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ de (1) y (2) vale que si

$$x \in E'(a, \delta) \Rightarrow h < f(x) < k$$

Corolario 1 (Teorema de conservación del signo) Sean f una función, a un número real tal que existe $\lim_{x \to a} f(x) = l \neq 0$ entonces existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$, donde $f(x) \neq 0$; y vale, por ejemplo $|f(x)| > \frac{|l|}{2}$
Demostración: Si $l > 0$, consideramos $h = \frac{l}{2} < l$, y si $l < 0$, tomamos $k = \frac{l}{2} > l$, y aplicamos el teorema anterior y luego la proposición 2, obtenemos $\lim_{x \to a} |f(x)| = |l| \neq 0$, siendo $\frac{|l|}{2} < |l|$, sigue la segunda afirmación del enunciado.

1.8 Álgebra de Límites

Teorema 5 Sean a un número real, f y g dos funciones tales que existen los límites en el punto a, y valen $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$. Entonces se verifican:

1. La función $f + g$ tiene límite en el punto a, y vale $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l_1 + l_2$.
2. Si $c \in \mathbb{R}$, la función cf tiene límite en el punto a, y vale $\lim_{x \to a} (cf)(x) = cl_1$.
3. La función $f - g$ tiene límite en el punto a, y vale $\lim_{x \to a} (f - g)(x) = l_1 - l_2$.

Demostración:

1. Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que se cumple la definición de límite de f y g para un $\frac{\varepsilon}{2}$, entonces para $\delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}$ y
$x/0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
2. Si $c = 0$ el resultado es trivial, sea entonces $c \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{|c|}$, entonces para los
$x/0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(cf)(x) - (cl_1)| = |c(f(x) - l_1)| = |c||f(x) - l_1| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$.
3. $\lim_{x \to a} (f - g)(x) = \lim_{x \to a} (f + (-1)g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + (-1) \lim_{x \to a} g(x) = l_1 - l_2$

Teorema 6 Sean a un número real, f y g dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y g está acotada en $E'(a, \rho)$. Entonces, la función fg tiene límite en el punto a, y vale $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$ *Demostración:* Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta' > 0$ y $M > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ y } 0 < |x - a| < \rho \Rightarrow |g(x)| \leq M$$

Entonces para $\delta \leq min\{\rho, \delta'\}$ tenemos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(fg)(x) - 0| = |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$$

Teorema 7 Sean a un número real , f y g funciones tales que existen los límites en el punto a y valen $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l_2$

1. existe el límite de la función fg en el punto a y vale $\lim_{x \to a} (fg)(x) = l_1 l_2$
2. Si $l_2 \neq 0$ la función $\frac{f}{g}$ tiene límite en a y vale $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$

Demostración:

1. En primer lugar, recordemos (por teorema 3) que como f tiene límite l_1 en el punto a, está acotada en un $E'(a, \rho)$, por un número $M > 0$, esto es $0 < |x - a| < \rho \Rightarrow |f(x)| \leq M$. Si $l_2 = 0$, el enunciado es edel teorema anterior. Supongamos entonces $l_2 \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sean δ_1 y δ_2 tales que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2|l_2|} \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Entonces para $\delta \leq min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(fg)(x) - (l_1 l_2)| = |f(x)g(x) - f(x)l_2 + f(x)l_2 - l_1 l_2| \leq$$
$$|f(x)g(x) - f(x)l_2| + |f(x)l_2 - l_1 l_2| = |f(x)||g(x) - l_2| + |f(x) - l_1||l_2| < M\tfrac{\varepsilon}{2M} + \tfrac{\varepsilon}{2|l_2|}|l_2| = \varepsilon$$

2. Casos:

   (a) Caso $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{l_2}$, como $l_2 \neq 0$ por el corolario 1, existe un $E'(a,\rho)$, tal que $|g(x)| > m$, para $m > 0$, por ejemplo $\frac{|l_2|}{2}$. Luego para $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$, tal que $0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |g(x) - l_2| < m|l_2|\varepsilon$, entonces para $\delta \leq min\{\rho, \delta'\}$

   $$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{l_2}\right| = \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2}\right| = \left|\frac{l_2 - g(x)}{g(x)l_2}\right| = |g(x) - l_2|\frac{1}{|g(x)|}\frac{1}{|l_2|} < m|l_2|\varepsilon\frac{1}{m}\frac{1}{|l_2|} = \varepsilon$$

   (b) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = l_1\dfrac{1}{l_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Nota: Combinando los resultados de esta parte podemos afirmar:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$, existe $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$
2. Dado un polinomio $p(x)$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$
3. Dados los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ y un $a \in \mathbb{R}$, existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$ si $q(a) \neq 0$

Proposicion 3 El algebra de límites se aplica tambien para $x \to a^+$ o $x \to a^-$

1.9 Limite de Funciones Trigonometricas

Proposicion 4: Si $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow |sin(x)| \leq |x| \leq |tan(x)|$ y son iguales si $x = 0$
Demostracion: Ya sabemos que para $x = 0$ se cumple la igualdad. Para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, x \neq 0$, se compara graficamente viendo las areas de los triangulos que forman
Nota: La desigualdad $|sin(x)| < |x|$ se cumple para todo los $x \neq 0$. Luego para $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, se tiene $|sin(x)| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$
Teorema 8: Para $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} sin(x) = sin(a) \wedge \lim\limits_{x\to a} cos(x) = cos(a)$
Demostracion: $\lim\limits_{x\to a} sin(x) = \lim\limits_{x\to 0} sin(x+a) = \lim\limits_{x\to 0}(sin(x)cos(a) + cos(x)sin(x)) = 0.cos(a) + 1.sin(a) = sin(a)$
y
$\lim\limits_{x\to a} cos(x) = \lim\limits_{x\to 0} cos(x+a) = \lim\limits_{x\to 0}(cos(x)cos(a) - sin(x)sin(a)) = 1.cos(a) - 0.sin(a) = cos(a)$
Corolario 2:

1. Para $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\lim\limits_{x\to a} tan(x) = tan(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} sec(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{cos(x)} = \dfrac{1}{cos(a)} = sec(a)$
2. Para $a \neq k\pi$, $\lim\limits_{x\to a} csc(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{sin(x)} = \dfrac{1}{sin(a)} = csc(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} cot(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{cos(x)}{sin(x)} = \dfrac{cos(a)}{sin(a)} = cot(a)$

1.10 El Principio de Intercalacion

Teorema 9: (principio de intercalacion) Sean f, g, h tres funciones y a un número real, tales que, en algún entorno reducido $E'(a,\rho)$ se tiene que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ y ademas las funciones g y h tienen limite en el punto a, siendo l para ambos. Entonces la funcion f tambien tiene límite en el punto a y vale l
Demostracion: Si para un δ_1 se cumple el limite de $g(x)$ en un a, si para un δ_2 se cumple el limite de $h(x)$ en a, entonces para $\delta = min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, se tiene

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \wedge l - \varepsilon < g(x) \wedge h(x) < l + \varepsilon$$
$$\Rightarrow l - \varepsilon < g(x) < f(x) < l + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposición 5: el principio de intercalacion es valido para $x \to a^+$ y $x \to a^-$
Proposición 6: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$
Demostración: Con la proposicion 4, primero vemos para los $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donde $sin(x) > 0$:

$$sin(x) < x < tan(x) \Rightarrow \frac{sin(x)}{sin(x)} < \frac{x}{sin(x)} < \frac{tan(x)}{sin(x)} \Rightarrow 1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$$

Para los $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ donde $sin(x) < 0$:

$$-sin(x) < -x < -tan(x) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{multiplicamos} -\frac{1}{sin(x)} > 0} \frac{sin(x)}{sin(x)} < \frac{x}{sin(x)} < \frac{tan(x)}{sin(x)} \Rightarrow 1 < \frac{x}{sin(x)} < \frac{1}{cos(x)}$$

Ademas sabemos $\lim_{x \to 0} \frac{1}{cos(x)} = 1 \neq 0$, y utilizando el teorema 9 se concluye que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{sin(x)} = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$