Resumen de funciones

Tomás Pitinari

Funciones

Definiciones básicas:

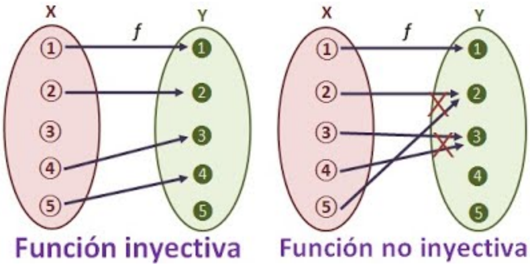
Sean A, B conjuntos no vacíos, una función de A en B es una relación de A en B que verifica que cada elemento de A es exactamente una vez primera componente de una par ordenado de la relación. Se denota como $f : A \to B$.

1. Para cada $a \epsilon A$ existe $b \epsilon B$ tal que (a, b) está enla relación.
2. No puede haber dos pares (a, b_1) y (a, b_2) con $b_1 \neq b_2$ en la relación.

Si la relación que es función es un subconjunto de AxB diremos que el *dominio* de la función f es A y el *codominio* de f es B. Escribimos *Dom(f)* y *Codom(f)* respectivamente. La imagen de A se define como: $f(A) = \{b \epsilon B : b = f(a)/a \epsilon A\}$.

Definición: $f : A \to B$ es *inyectiva* si cada elemento de B aparece a lo sumo una vez como segunda componente, osea no pueden haber dos imagenes distintas para una misma preimagen.

$$\forall a_1, a_2 \epsilon A, f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2.$$



1 Teorema

$f : A \to B, A_1, A_2 \subseteq A$

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

2 Teorema

Sea $f : A \to B$,
$\forall X_1, X_2 \subseteq A, f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2) \leftrightarrow f$ *inyectiva*

Definición: $f : A \to B, A_1 \subseteq A$

1. $f\Big|_{A_1} : A_1 \to B$ es tal que $f\Big|_{A_1}(a) = f(a)$ si $a \epsilon A_1$.
   Es **LA** restricción de f a A_1.
2. Para $A \subseteq A_2, g : A_2 \to B$ tal que $g(a) = f(a)$ si $a \epsilon A$.
   Es **UNA** extensión de f a A_2.

Definición: Dada una función $f : A \to B$ y $B_1 \subseteq B$, la *preimagen* de B_1 por medio de f, notada como $f^{-1}(B_1)$, es el conjunto:

$$f^{-1}(B_1) = \{x \epsilon A : f(a) \epsilon B_1\}.$$

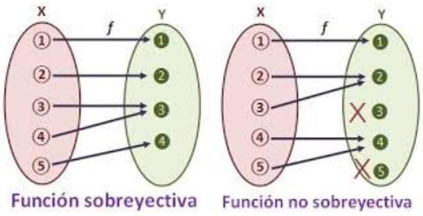
datazo: La preimagen de un conjunto siempre es otro conjunto.

3 Teorema:

$f : A \to B, B_1, B_2 \subseteq B$, entonces:

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{f^{-1}(B_1)}$

Definición: Decimos que $f : A \to B$ es *suryectiva* si cada elemento de B aparece una vez como segunda componente de los pares ordenados de la relación. Osea, $B = Im(f)$ o que dado $y \epsilon B, \epsilon A : f(x) = y$.



Definición: Una función es ***biyectiva*** si es *inyectiva* y *suryectiva*.
Definición: Sean f y g dos funciones tales que $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$. Se define la *composición* de g con f, y se la nota como $g \circ f$, a la función con dominio:

$$Dom(g \circ f) = \{x \epsilon Dom(f) : f(x) \epsilon Dom(g)\}.$$

Tips:

1. Si $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$, entonces $g \circ f$ es posible.
2. La composición no siempre es conmutativa, es decir, hay ejemplos en donde $g \circ f \neq f \circ g$.
3. La composición es asociativa, es decir, dadas las funciones f, g y h, si $(f \circ (g \circ h))$ entonces es equivalente a decir $((f \circ g) \circ h)$.

4 Teorema:

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ es inyectectiva (resp. suryectiva) entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva (resp. suryectiva) también.

Definición: Una función $f : A \to B$ es *inversible* si existe una función $g : B \to A$ tal que $gf = id_A$ y $f \circ g = id_B$. Si f es inversible, g también lo es.

5 Teorema:

Si $f : A \to B$ es inversible y $g : B \to A$ es una inversa de f, entonces es única.

6 Teorema:

$f : A \to B$ es inversible si y sólo si es biyectiva.

7 Teorema:

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son inversibles, entonces $g \circ f$ es inversible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

8 Teorema:

$f : A \to B, A$ y B finitos, $|A| = |B|$. Entonces son equivalentes:

1. f inyectiva.
2. f suryectiva.
3. f inversible.

Operaciones

Definición: Dados A y B no vacios, una función $f : AxA \to B$ es una *operación binaria* en A. Si además, $Im(f) \subseteq A$ la operación es cerrada en A.
Definición: Si $g : A \to A$ entonces g es una operación *monaria* (unaria) en A.
Definición: Dada $f : AxA \to B$ operación binaria en A.

1. f es *conmutativa* si $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$ para todo $(a_1, a_2) \epsilon AxA$.
2. Si f es cerrada, entonces f es asociativa si $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$ para todo $a, b, c \epsilon A$.

Definición: Dada $f : AxA \to A$, una operación binaria en A (cerrada). Decimos que la operación *posee neutro* si existe $a_0 \epsilon A$ tal que $f(a, a_0) = f(a_0, a) = a, \forall a \epsilon A$.
Para demostrar la existencia del mismo, hay que exhibir un elemento que cumpla la definición.

9 Teorema:

Si $f : AxA \to A$ posee neutro, este es único.

Definición: Dada $f : AxA \to A$ una operación binaria en A (cerrada). Si f posee un elemento neutro $x \epsilon A$, se dice que la operación posee inversos si para cada $a \epsilon A$ existe $a' \epsilon A$ tal que $f(a, a') = f(a', a) = x$.

10 Teorema:

Si $f : AxA \to A$ es una operación asociativa, con elemento neutro $x \epsilon A$ que posee inversos, entonces, cada elemento posee un *único inverso*.