Ejercicio práctica $N2$
Análisis Matemático II

Violeta Perez - Malena Pietroski - Tomás Pitinari

Consigna

13) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funcion integrable en $[a, b]$.

(a) Sean $c \in [a, b]$ y la función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $G(x) = \int_x^c f(t)dt$. Muestre que G es continua y, además, derivable en cada punto de continuidad de f, valiendo en tal caso $G'(x) = -f(x)$.

(b) Sean $\alpha \in [a, b]$ y la función $\phi : [c, d] \to \mathbb{R}$ derivable en (c, d) tal que $\alpha < \phi(x) < b$ para todo $x \in [c, d]$. Se define la función $H : [c, d] \to \mathbb{R}$ como $H(x) = \int_\alpha^{\phi(x)} f(t)dt$.
Muestre que H es continua y, además, derivable en cada punto x tal que $\phi(x)$ es un punto de continuidad de la función f, valiendo en tal caso $H'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x) = f[\phi(x)]\phi'(x)$.

Respuesta

13)a) Como f es integrable en $[a, b]$, entonces por definición, f es acotada. Por lo tanto existe M tal que:

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$$

Para cualquier $c \in [a, b]$, suponemos un $z \in [a, b]$ y $h > 0$, entonces

$$G(z + h) - G(z) = \int_{z+h}^c f(t)dt - \int_z^c f(t)dt = \int_{z+h}^z f(t)dt = -\int_z^{z+h} f(t)dt$$

Sabiendo que $-M \leq f(x) \leq M$ y utilizando el teorema 27 de la Unidad 1

$$-Mh \leq -\int_z^{z+h} f(t)dt \leq Mh \to -Mh \leq G(z) - G(z + h) \leq Mh \ (1)$$

Si $h < 0$

$$G(z + h) - G(z) = \int_{z+h}^z f(t)dt \overbrace{\to}^{Teo27} -M(-h) = Mh \leq \int_{z+h}^z f(t)dt \to Mh \leq G(z + h) - G(z) \leq -Mh \ (2)$$

de (1) y (2) se tiene

$$|G(z + h) - G(z)| \leq M|h|$$

Por lo tanto para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene

$$|G(z + h) - G(z)| \leq \varepsilon$$

si vale $|h| < \frac{\varepsilon}{M}$, lo cual demuestra que

$$\lim_{h\to 0} G(z + h) = G(z)$$

es decir G es continua para todo $c, z \in [a, b]$. Sabiendo que G es continua en todo su dominio queremos analizar su derivabilidad. Para identificar la derivada, usamos el teorema 29 y que $c \in [a, b]$, tenemos que:

$$G(x) = \int_x^c f(t)dt = -\int_c^x f(t)dt \to -G(x) = \int_c^x f(t)dt$$

Entonces si $c < x$:

$$-G'(x) = f(x) \to G'(x) = -f(x)$$

Por otro lado si $c > x$:

$$G'(x) = -f(x)$$

Por lo tanto para todos los $c, x \epsilon [a, b]$, se sabe que $G'(x) = -f(x)$.

b) Podemos ver que H es una función compuesta por dos funciones, la función ϕ y $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Luego tenemos que $Dom(\phi) = [c, d] = Dom(H)$ y $Im(\phi) = (\alpha, b)$, también sabemos que $\alpha \epsilon [a, b]$ y que al ser ϕ derivable, también es continua en (c, d) y $Im(\phi) = (a, b) = Dom(f)$. Sabemos

$$H(x) = \int_{\alpha}^{\phi(x)} f(t)dt, \forall \alpha \in [a, b]$$

Tomamos $z \in [c, d]/\phi(z) \in (\alpha, b)$, y tambien sabemos que $\exists M > 0/|f(x)| \leq M$. Para un $h > 0$ tenemos

$$H(z + h) - H(c) = \int_{\alpha}^{\phi(z+h)} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\phi(z)} f(t)dt = \int_{\phi(z)}^{\phi(z+h)} f(t)dt$$

entonces podesmos llegar

$$-M \leq f(x) \leq M \overbrace{\rightarrow}^{Teo27} -M(\phi(z + h) - \phi(z)) \leq \int_{\phi(z)}^{\phi(z+h)} f(t)dt \leq M(\phi(z + h) - \phi(z))$$

Que equivale a

$$|H(z + h) - H(z)| \leq M|(\phi(z + h) - \phi(z))|$$

Sabiendo que ϕ es continua, tenemos que $\lim\limits_{h \to 0} \phi(z + h) - \phi(z) = \phi(z)$, entonces

$$\lim_{h \to 0} H(z + h) - H(z) = \lim_{h \to 0} \int_{\phi(z)}^{\phi(z+h)} f(t)dt = \int_{\phi(z)}^{\phi(z)} f(t)dt = 0 \rightarrow \lim_{h \to 0} H(z + h) = H(z)$$

Con esto demostramos que H es continua para todo $z \in [c, d]$, lo que quiere decir que es continua en todo su dominio.
Ahora como sabemos que f es integrable, definimos $F(x) = \int f(t)dt$, por ende sabemos que $F(x)$ es derivable $[a, b]$ y es igual a $f(x)$. Luego definimos H de otra forma

$$H(x) = \int_{\alpha}^{\phi(x)} f(t)dt = F(\phi(x)) - F(\alpha)$$

Ya sabemos que F y ϕ son derivables, por lo tanto derivamos de ambos lados

$$H'(x) = (F(\phi(x)) - F(\alpha))'$$

α es una constante, por lo que se va, y luego aplicamos teorema de la cadena en $F(\phi(x))$ y queda

$$H'(x) = f(\phi(x)).\phi'(x)$$

Para todo $x \in (c, d)$, ya que es donde ϕ es derivable.