Examen Final - 12/02/2020 - Primer etapa común a todos los estudiantes

Apellido y nombre: Comisión: Fekete - Reyero - Torres

Legajo: DNI: Condición: Regular - Libre Carrera:

✏ Hora de entrega: **9h30**.

❶ Considerar la función g dada por

$$g(x) = \begin{cases} \tan(x), & 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}, \\ mx + h, & \frac{\pi}{4} < x \leqq \pi. \end{cases}$$

-a-. Elegir las constantes m y h de manera tal que g resulte derivable en $(0, \pi)$. Luego, esbozar la gráfica de la función g.

-b-. Analizar la existencia de función inversa $l = g^{-1}$. Si existe, indicar su dominio.

-c-. Calcular, si es posible, $l'\left(\frac{1}{2}\right)$, $l'(-1)$, $l'\left(\frac{3}{2}\right)$.

-d-. Graficar la función t dada por $t(x) = g(|x|)$. Indicar el dominio de la función t y analizar su paridad.

❷ Dada la sucesión $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2}$ para $n \geqq 2$,

-a- Probar que $0 \leqq a_n \leqq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

-b- Demostrar que es convergente y calcular su límite.

❸ Un gran cubo de hielo se derrite de forma pareja y su arista cambia a razón de 7 mm por segundo. Cuando su arista es de 4 cm, hallar la razón de cambio del volumen.

Examen Final - Segunda etapa para estudiantes en condición regular

Apellido y nombre:		Comisión: Fekete - Reyero - Torres
Legajo:	DNI:	Carrera:

✏ Hora de entrega: **11h15**.

❹ Considerar la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{cuando} \quad 6+3x<12, \\ \dfrac{3x-2x^2}{2-x} & \text{cuando} \quad 6+2x>10. \end{cases}$$

(a). Encontrar el dominio de la misma.

(b). Estudiar su paridad.

(c). Analizar la existencia de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) a la gráfica de la función. Justificar adecuadamente.

(d). Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

(e). Mostrar los elementos del conjunto $C = \{x \in \text{Dom}f : f'(x) > 0\}$.

(f). Mostrar los elementos del conjunto $D = \{x \in \text{Dom}f : f(x) = 0\}$.

(g). Responder los cuatro primeros ítems para la función $g(x) = f(2+x)$, sin encontrar la ley de g.

❺ Analizar la veracidad de los siguientes enunciados justificando adecuadamente.

-a- $\sup\{x \in \mathbb{R} / |x-1| < |x+3|\} = -1$.

-b- $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x} = -1$.

-c- Sean $g(x) = |x|$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$ y $h(x) = (g \circ f)(x)$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces h es derivable en $x \in \mathbb{R}$.

Examen Final - Segunda etapa para estudiantes en condición libre

Apellido y nombre: Comisión: Fekete - Reyero - Torres

Legajo: DNI: Carrera:

✏ Hora de entrega: **11h45**.

❹ Considerar la función f dada por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & \text{cuando} \quad 6+3x<12,\\[2mm] \dfrac{3x-2x^2}{2-x} & \text{cuando} \quad 6+2x>10.\end{cases}$$

(a). Encontrar el dominio de la misma.
(b). Estudiar su paridad.
(c). Analizar la existencia de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas) a la gráfica de la función. Justificar adecuadamente.
(d). Calcular $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
(e). Mostrar los elementos del conjunto $C=\{x\in \text{Dom}f : f'(x)>0\}$.
(f). Mostrar los elementos del conjunto $D=\{x\in \text{Dom}f : f(x)=0\}$.
(g). Responder los cuatro primeros ítems para la función $g(x)=f(2+x)$, sin encontrar la ley de g.

❺ Considerando el Teorema de Rolle, mostrar que si $f(x)=(x-a)^m(x-b)^n$, donde $m,n\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{R}$ y $a<b$, entonces existe $c\in\mathbb{R}$ tal que c divide al intervalo $[a,b]$ en razón $\dfrac{m}{n}$.

❻ Calcular los siguientes límites justificando los pasos realizados:

$$(a).\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)-\tan(2x)}{6x}, \qquad (b).\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-2x+1}\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right).$$

❼ Analizar la veracidad de los siguientes enunciados justificando adecuadamente.

-a- $\sup\{x\in\mathbb{R}/\,|x-1|<|x+3|\}=-1$.
-b- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}=-1$.
-c- Sean $g(x)=|x|$, $f(x)=x^2-5x+6$ y $h(x)=(g\circ f)(x)$ definidas para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces h es derivable en $x\in\mathbb{R}$.
-d- $\nexists\, x\in(1,5)/$ la recta tangente a la gráfica de $f(x)=-x^2+\dfrac{10}{x}$ forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$ con el eje de las abscisas.