# GRAFOS PLANARES

S. Bianchi P. Fekete F. Domingo

[1] Deptartamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
UNR

25 de agosto de 2021

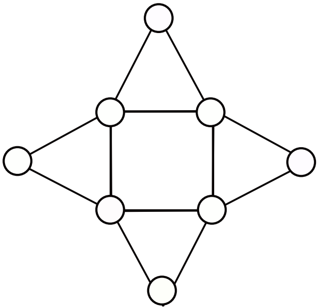
# OUTLINE

Sea $G=(V,E)$ un grafo con $V$ conjunto de vértices y $E$ conjunto de aristas.

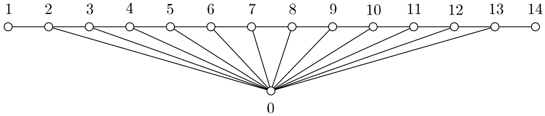
### DEFINICIÓN

Un grafo o multigrafo $G$ es planar si podemos dibujar $G$ en el plano de modo que sus aristas se intersecten sólo en los vértices de $G$. Esta representación de $G$ se denomina *inmersión* de $G$ en el plano.

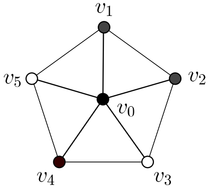
El grafo de la figura es planar



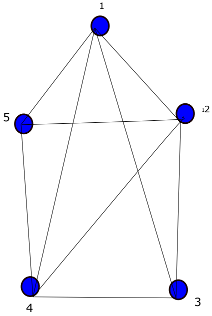
También lo es el grafo

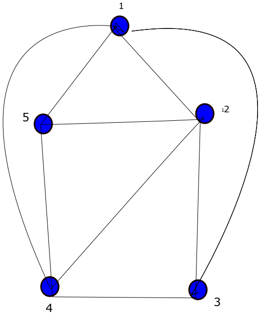



y el grafo

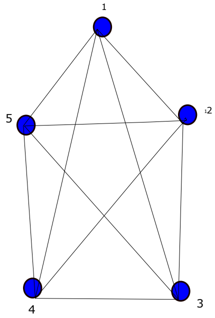


- Por ejemplo, el grafo $G$ de la figura es planar
- porque admite la siguiente inmersión en el plano



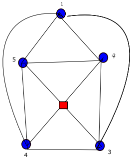
Sin embargo el grafo $K_5$ (el grafo completo de $5$ vértices)

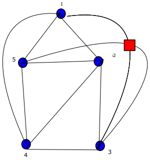


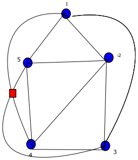

difiere del grafo $G$ en la arista $\{3, 5\}$ y no admite ninguna inmersión el plano.

Veamos la anterior afirmación intentando una inmersión en el plano de $K_5$

- si agregamos $\{3,5\}$ a $G$ y la dibujamos de esta manera, existe intersección con la arista $\{2,4\}$,
- si agregamos $\{3,5\}$ a $G$ y la dibujamos de esta manera, existe intersección con la arista $\{1,3\}$,
- si agregamos $\{3,5\}$ a $G$ y la dibujamos de esta manera, existe intersección con la arista $\{1,4\}$.



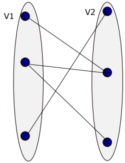
# $K_5$ NO ES UN GRAFO PLANAR

Es claro que lo visto recién no demuestra que $K_5$ no es un grafo planar. Simplemente vimos que no es posible dibujar la arista $\{3,5\}$ sin intersectar a las restantes aristas del grafo $G$ que es planar.
Más adelante veremos una demostración rigurosa.
Consideramos ahora otra clase de grafos llamados *bipartitos*

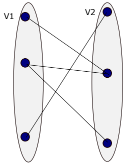
## DEFINICIÓN

Un grafo $V = (V,E)$ es bipartito si $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y cada arista de $G$ es de la forma $\{a,b\}$ con $a \in V_1$ y $b \in V_2$.

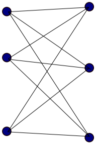
El siguiente es un grafo bipartito



Existen muchas situaciones reales que pueden modelarse a través de grafos bipartitos.
Por ejemplo, si el conjunto $V_1$ representa asignaturas que deben impartirse en una institución educativa y el conjunto $V_2$ profesores disponibles en la institución, una arista que une $a \in V_1$ con $b \in V_2$ indica que la asignatura $a$ puede ser dictada por el profesor $b$.
En el grafo de la figura, si $V_1$ representa tres asignaturas y $V_2$ tres profesores, las aristas identifican a los profesores que pueden dictar las asignaturas.

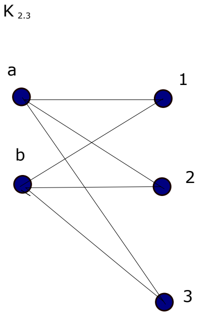


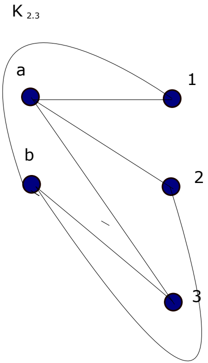
Ahora, si todos los profesores pueden dictar todas las asignaturas, entonces el grafo que modela esta situación es:



Sea $G = (V,E)$ grafo bipartito. Si para todo $a \in V_1$ y $b \in V_2$ existe $\{a,b\} \in E$, se dice que $G$ es un grafo *bipartito completo*. El grafo anterior es un ejemplo. Además, si $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$ entonces notamos a $G$ como $K_{n,m}$.
El grafo de la figura se nota $K_{3,3}$.

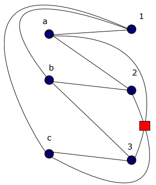
- El grafo bipartito completo $K_{2,3}$ es planar
- porque admite la siguiente inmersión en el plano

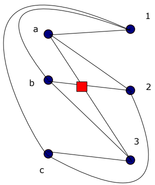


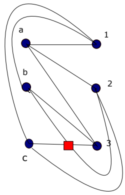



Ahora, $K_{3,3}$ es planar? Intentamos una inmersión como lo hicimos con $K_5$.

- en este intento se intersectan las aristas $\{a, 3\}$ y $\{c, 2\}$,
- en este intento se intersectan las aristas $\{a, 3\}$ y $\{b, 2\}$,
- en este último se intersectan las aristas $\{b, 2\}$ y $\{c, 3\}$.







Veamos la siguiente definición:

### DEFINICIÓN:

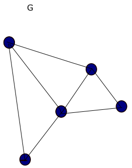
Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos y $E \neq \emptyset$. Una subdivisión elemental de $G$ se obtiene cuando se elimina una arista de $E$, digamos $e = \{u, w\}$, y se agrega un nuevo nodo $v \notin V$ y las aristas $\{u, v\}$ y $\{v, w\}$ a $G - e$. El nuevo grafo tiene como conjunto de aristas a $E - \{e\} \cup \{u, v\} \cup \{v, w\}$ y como conjunto de nodos a $V \cup \{v\}$.

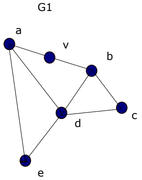
### OBSERVACIÓN:

Si $G' = (V', E')$ se obtiene de una subdivisión elemental de $G$ entonces $|V'| = |V| + 1$ y $|E'| = |E| + 1$.

Veamos el siguiente ejemplo:

- si consideramos el grafo $G$ de la figura:
- el grafo $G_1$ resulta de aplicar una subdivisión elemental luego de quitar la arista $\{a,b\}$, agregar el vértice $v$ y agregar las aristas $\{a,v\}$ y $\{v,b\}$.

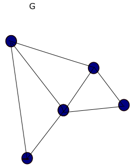


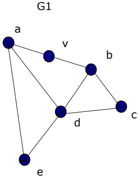

### DEFINICIÓN

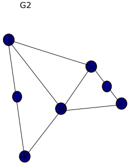
Dos grafos son homeomorfos si son isomorfos o ambos pueden obtenerse a partir de un mismo grafo a través de una sucesión finita de subdivisiones elementales.

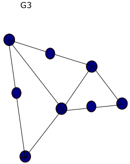
Recordemos el grafo $G$




y consideremos los grafos




Vemos que $G_3$ es homeomorfo a $G_1$ y a $G_2$. Y $G_1$ es homeomorfo a $G_2$.

# Grafos homeomorfos

### Observación:

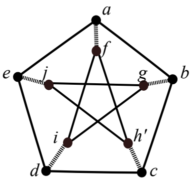
Si dos grafos son homeomorfos entonces ambos son planares o no planares.

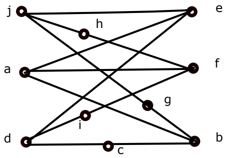
### Teorema de Kuratowski

Un grafo no es planar si y solo si contiene un subgrafo que es homeomorfo a $K_5$ o $K_{3,3}$.

No demostraremos este teorema en su totalidad. Pero si vamos a demostrar más adelante que $K_5$ y $K_{3,3}$ no son planares. Por lo tanto, esto demuestra que si un grafo contiene un subgrafo que es homeomorfo a $K_5$ o $K_{3,3}$, entonces no es planar.

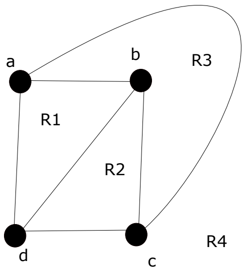
## APLICACIÓN



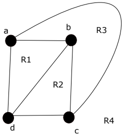




El grafo de la izquierda es el grafo de *Petersen*. Vemos a la derecha un subgrafo generador del grafo de Petersen (aquí $deg(h) = deg(g) = deg(i) = deg(c) = 2$). Este subgrafo se consigue de $K_{3,3}$ utilizando una sucesión finita de subdivisiones elementales.
De acuerdo al Teorema de Kuratowski, el grafo de Petersen no es planar.

Dado un grafo planar, en su inmersión en el plano, podemos definir regiones del plano, delimitadas por las aristas, que por su disposición, sólo se intersectan en los vértices.
Por ejemplo, el siguiente grafo define $4$ regiones, $3$ de ellas finitas y una infinita.



Veamos,




La región $R_1$ está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,d\}$ y $\{b,d\}$.
La región $R_2$ está delimitada por las aristas $\{b,c\}$, $\{c,d\}$ y $\{b,d\}$.
La región $R_3$ está delimitada por las aristas $\{a,b\}$, $\{a,c\}$ y $\{b,c\}$.
La región $R_4$ es la región exterior a la región delimitada por las aristas $\{a,d\}$, $\{a,c\}$ y $\{d,c\}$.

### TEOREMA

Sea $G = (V,E)$ grafo o multigrafo planar y conexo con $n = |V|$ y $m = |E|$. Sea $r$ el número de regiones en el plano determinadas por $G$ mediante su representación planar (inmersión). Entonces

$$n - m + r = 2.$$

**Demostración**

Por inducción sobre $m = |E|$.

Si $m = 0$ entonces como $G$ es conexo, entonces es isomorfo a un grafo con un único vértice. Es decir $n = 1$.


Sigue que $r = 1$ y vale $1 - 0 + 1 = 2$.

**Hipótesis inductiva**

Supongamos que el resultado es válido para cualquier grafo o multigrafo planar conexo con a lo sumo $m-1$ aristas.

Sea $G=(V,E)$ grafo planar con $r$ regiones $n$ vértices y $m$ aristas. Y sea $e=\{u,v\}\in E$.

Consideramos el grafo $H=G-e$
(si $G$ es un multigrafo y $e$ se repite, entonces la eliminamos una sola vez).

Es claro que $|V(H)|=n$ y $|E(H)|=m-1$.

Si llamamos $r_H$ al número de regiones planas de $H$, por hipótesis de inducción vale

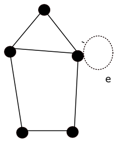
$$n-(m-1)+r_H=2$$

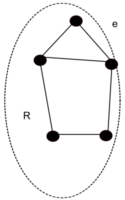
.

Tenemos distintos casos que analizar:

**caso 1**: $H$ es conexo.

Si la arista $e$ es un lazo como se ve en las figuras:

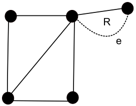


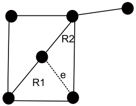




observamos que el número de regiones planas de $H$ disminuye en una unidad respecto al número de $G$, es decir $r_H = r - 1$.

# Teorema de Euler para grafos planares

Si $e$ no es un lazo, entonces:

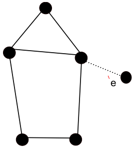


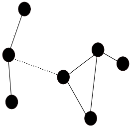




- en este caso $e$ es doble y la quitamos una sola vez,
- en este otro caso $e$ es una arista simple.

Pero en cualquier caso el número de regiones en $H$ disminuye en una unidad. Entonces hasta ahora tenemos que $n-(m-1)+r_H=2$ o equivalentemente $n-(m-1)+r-1=2$. Esto último es $n-m+r=2$.

**caso 2**: $H$ no es conexo.
Como ejemplos, vemos las siguientes figuras



Es claro que $H$ tiene en cualquier caso dos componentes conexas, $H_1$ y $H_2$. Alguna de estas componentes podría ser un sólo vértice como muestra la figura de la izquierda.

Sean $n_i$, $m_i$ y $r_i$ el número de vértices, de aristas y de regiones planas del grafo $H_i$ para $i = 1,2$.

Por hipótesis de inducción vale $n_i - m_i + r_i = 2$ para $i = 1,2$.

Por otra parte es claro que $n_1 + n_2 = n$, $m_1 + m_2 = m - 1$ y

$$r_1 + r_2 = r_H = r + 1,$$

Esto se debe a que $H_1$ y $H_2$ tienen cada uno una región infinita.

Sigue que $(n_1 + n_2) - (m_1 + m_2) + (r_1 + r_2) = 4$ y equivalentemente $n - (m-1) + r + 1 = 4$. Es decir

$$n - m + r = 2.$$

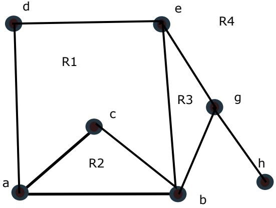
$\star$

Sea $G=(V,E)$ grafo o multigrafo planar y consideremos su inmersión planar.

### DEFINICIÓN:

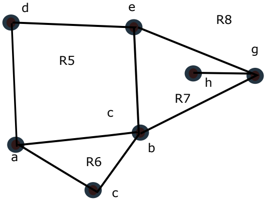
Dada $R$ una región de $G$, el grado de $R$ que se denota por $grad(R)$, es el número de aristas recorridas en un camino cerrado (más corto) por las aristas de la frontera de $R$.

Si $G=(V,E)$ es el grafo de la figura, entonces esta inmersión planar tiene $4$ regiones:




y $grad(R_1)=5$, $grad(R_2)=3$, $grad(R_3)=3$ y $grad(R_4)=7$.

Si consideramos esta otra inmersión planar de $G$,




entonces $grad(R_5) = 4$, $grad(R_6) = 3$, $grad(R_7) = 5$ y $grad(R_8) = 6$.
Además vale $\sum_{i=1}^{4} grad(R_i) = \sum_{i=5}^{8} grad(R_i) = 18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot |E|$.
En general, si $G$ es planar y $r$ es su número de regiones planas, vale

$$\sum_{i=1}^{r} grad(R_i) = 2 \cdot |E|.$$

### COROLARIO

Sea $G=(V,E)$ grafo planar, conexo, sin lazos y sin aristas múltiples con $|V|=n$, $|E|=m>2$ y $r$ regiones. Entonces

$$3r \leq 2m \text{ y } m \leq 3n-6.$$

**Demostración:**

Como $G$ no es un multigrafo, entonces $grad(R) \geq 3$.

Entonces $2|E| = 2m = \sum_{i=1}^{r} grad(R_i) \geq 3r$. Es decir

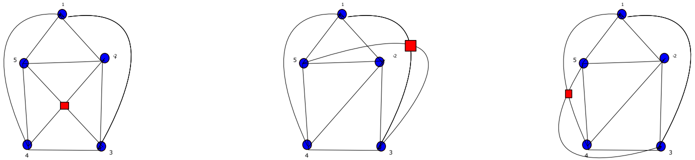
$$2m \geq 3r.$$

Aplicamos el Teorema de Euler, $2 = n-m+r \leq n-m+\frac{2}{3}m = n-\frac{1}{3}m$. Sigue que

$$6 \leq 3n-m.$$

## $K_5$ NO ES PLANAR

Recordemos el grafo $K_5$ y nuestros intentos de conseguir una inmersión en el plano:



## $K_5$ NO ES PLANAR

$K_5$ es conexo y sin lazos. Además $n = 5$ y $m = 10$.

Si $K_5$ es planar, entonces debe satisfacer la desigualdad $m \leq 3n - 6$.

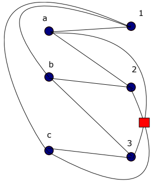
Pero, vemos que

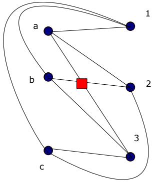
$$10 > 15 - 6$$

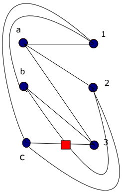
Esto prueba que $K_5$ no es planar.

## $K_{3,3}$ NO ES PLANAR

Recordemos los distintos intentos de inmersión planar para $K_{3,3}$:



## $K_{3,3}$ NO ES PLANAR

$K_{3,3}$ no contiene lazos y es conexo. Además $n = 6$ y $m = 9$.

Vemos que satisface la desigualdad $m = 9 \leq 3n - 6 = 18 - 6 = 12$. Pero esto no asegura que $K_{3,3}$ es planar.

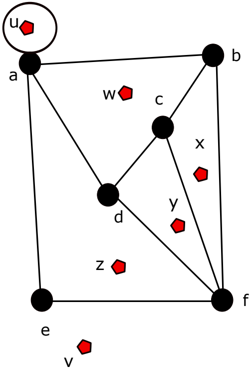
Si suponemos que $K_{3,3}$ es planar, entonces aplicando el Teorema de Euler ($n - m + r = 2$), obtenemos $6 - 9 + r = 2$. Es decir $r = 5$.

Por otra parte sabemos que $18 = \sum_{i=1}^{r} grad(R_i)$.

Observemos que $grad(R) \geq 4$ en cualquier región de $K_{3,3}$.
Entonces $\sum_{i=1}^{r} grad(R_i) \geq 4 \cdot 5 = 20$. Por lo tanto $K_{3,3}$ no es planar.

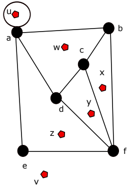
Finalizando con grafos planares, veremos el concepto de grafo dual.

La construcción del grafo dual de un grafo planar o multigrafo planar depende de su inmersión en el plano.
Consideremos el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ de la figura



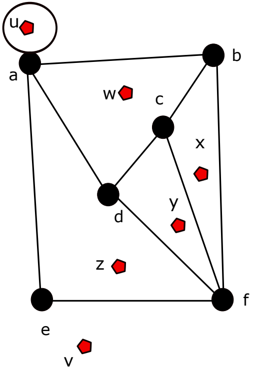

A cada región se le asocia un nodo (en rojo).

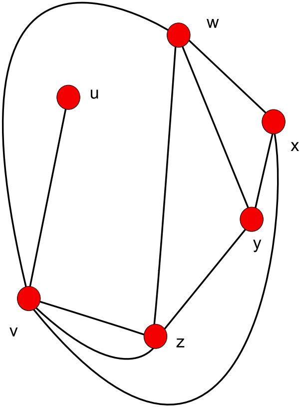
Se construye el grafo $G^d$ cuyo conjunto de vértices es $\{u, v, w, x, y, z\}$. Dos vértices son adyacentes en $G^d$ si las regiones en $G$ que representan comparten una arista en $E$.
Veamos,




$\{u, v\}$ es una arista de $G^d$ porque la región asociada a $u$ comparte la arista $\{a, a\}$ con la región externa asociada al nodo $v$.
También $\{z, v\}$, ya que la región externa identificada con $v$ comparte la arista $\{a, e\}$ con la región que representa $z$.
Pero también la arista la arista $\{e, f\}$ es compartida por esas mismas dos regiones.
Por lo tanto $\{z, v\}$ es arista doble en $G^d$. Es decir $G^d$ resulta ser un multigrafo.

Así siguiendo, el grafo $G^d$ correspondiente al grafo $G$ que se consigue a partir de la construcción es el que aparece a la derecha y se lo llama grafo dual de $G$:



Veamos algunas propiedades del grafo dual:

Cada arista de $G$ se corresponde con una arista de $G^d$. (En el ejemplo la arista $\{a,b\}$ se corresponde con la arista $\{v,w\}$)

$G^d$ podría ser un multigrafo (visto en el ejemplo).

Un lazo en $G$ resulta un pendiente en $G^d$.

El grado de un vértice en $G^d$ es el número de aristas en la frontera del camino cerrado de la región que representa en $G$.

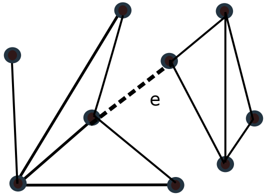
$G^d$ es un grafo dual de $G$, pues $G$ podría tener varios grafos duales (se verá en la práctica).

Recordar $\kappa(G)$ es el número de componentes conexas de $G$.

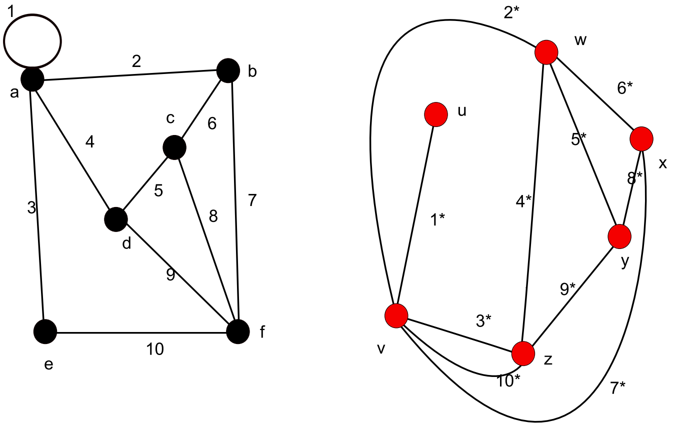
### DEFINICIÓN

Sea $G = (V, E)$ grafo o multigrafo no dirigido. $E' \subset E$ es un conjunto de corte si $G - E' = G'$ satisface $\kappa(G) < \kappa(G')$ y para cualquier $E'' \subsetneq E'$ entonces $G'' = G - E''$ satisface $\kappa(G) = \kappa(G'')$.

Es decir, si $G$ es conexo, un conjunto de corte es un conjunto minimal de aristas de desconexión.
Vemos el siguiente ejemplo



Numeramos las aristas del grafo del ejemplo anterior y su dual



Observemos que :

- Las aristas $6,7,8$ en $G$ determinan un ciclo y se corresponden con las aristas $6^*,7^*,8^*$ en $G^d$ y resultan un conjunto de corte.
- Las aristas $2,4,10$ en $G$ determinan un conjunto de corte y se corresponden con las aristas $2^*,4^*,10^*$ en $G^d$ y resultan un ciclo.

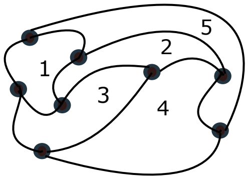
En general, dado un grafo planar $G$ y un dual $G^d$ se tiene:

- Los ciclos ( conjunto de corte ) de $n \geq 3$ nodos en $G$ se corresponde con los conjuntos de corte (ciclos) de $n$ aristas en $G^d$.
- Un lazo en $G$ corresponde a un conjunto de corte en $G^d$ de una arista.
- Un conjunto de corte de una arista en $G$ corresponde a un lazo en $G^d$.
- Un conjunto de corte de dos aristas en $G$ corresponde a un crcuito de dos aristas en $G^d$.
- Un circuito de dos aristas en $G$ corresponde a un conjunto de corte de dos aristas en $G^d$.

### EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

Veamos este ejemplo, un mapa con 5 países:

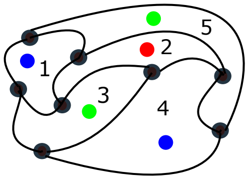



No se considera la región exterior, por lo tanto este es un subgrafo planar.

### EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

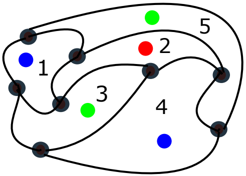
Una solución posible es:

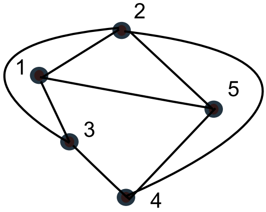


### EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

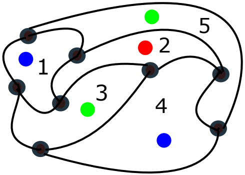
Un grafo dual correspondiente es:

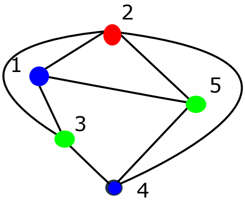


### EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear los vértices del grafo dual de modo que dos vértices adyacentes reciban distintos colores.




Problemas de coloreo (veremos más adelante).