EL PROBLEMA DE COLOREO EN GRAFOS

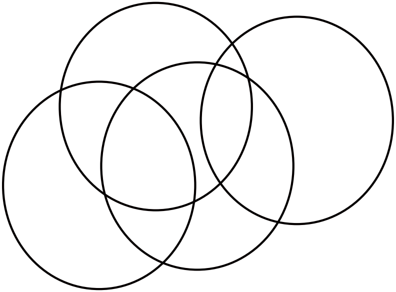
S. Bianchi P. Fekete F. Domingo

[1] Deptartamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
UNR

13 de septiembre de 2021

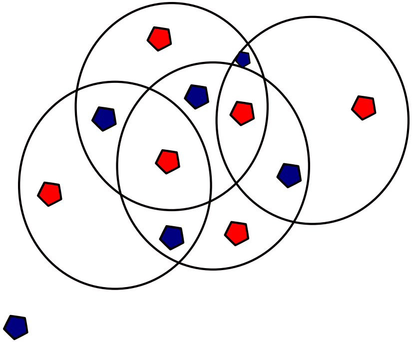
OUTLINE

Supongamos que dibujamos círculos en el plano.



Estos círculos dividen el plano en un número finito de regiones.

El siguiente dibujo muestra el mismo conjunto de círculos pero a cada región se le asignó en forma alternada un color distinto.



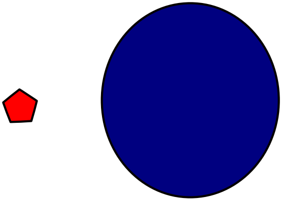
Observamos que sólo se utilizaron dos colores: rojo y azul.

Teorema

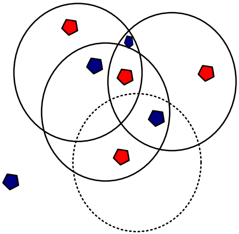
Las regiones formadas por n círculos en el plano pueden colorearse con dos colores de modo tal que cualquier par de regiones que compartan una misma frontera se pintan con distinto color.

Demostración

Por inducción sobre n. Si $n = 1$ tenemos un posible coloreo como en la figura



Supongamos el enunciado cierto para $n-1$ círculos.
Consideremos ahora n círculos, y elegimos uno de ellos al que llamamos C.
A continuación, quitamos ese círculo del plano



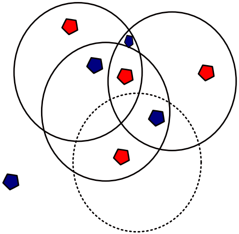
Es claro que los $n-1$ restantes círculos admiten un coloreo con solo dos colores.

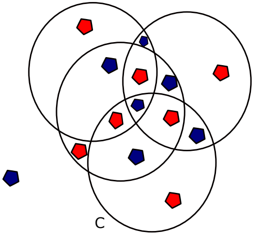
Ahora agregamos C y hacemos los siguientes cambios de colores:

1.- Fuera de C dejamos los colores como estaban.

2.- Dentro de C intercambiamos rojo con azul.

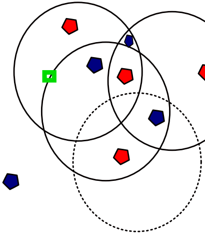
Veamos

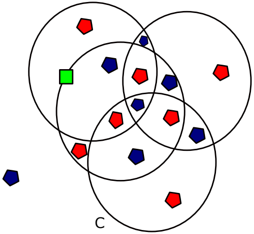




Es fácil ver que lo que hemos hecho satisface el coloreo propuesto.

1.- Si una porción de arco se encuentra fuera de C:

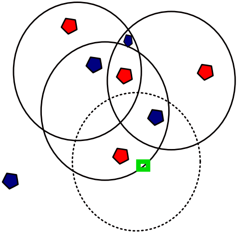


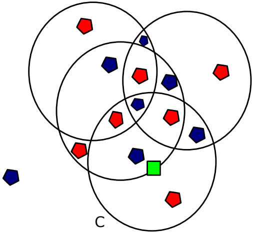


(en la figura se indica un tal arco con un cuadrado verde)

Es claro que ese arco divide dos regiones fuera de la región C y por tanto la asignación de colores no ha cambiado.

2.- Si una porción de arco se encuentra dentro de C:

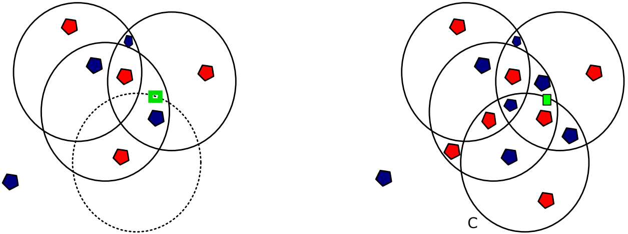




(en la figura se indica un tal arco con un cuadrado verde)

Las dos regiones a ambos lados del arco tienen distinto color. Y aún cuando hayan cambiado de color, éstos son distintos.

3.- Si una porción de arco es parte de C:



(en la figura se indica un tal arco con un cuadrado verde)

Las regiones a ambos lados de esta curva pertenecían a la misma región. Cuando agregamos a C, una de ellas (la interior a C) cambió de color, mientras que la otra permaneció con su color original.
Por tanto, hemos demostrado el teorema.

Veamos otro problema:

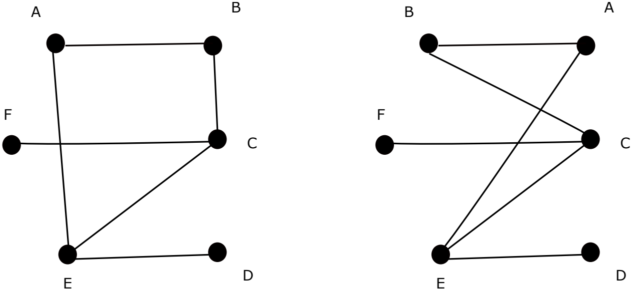
Un profesor de educación física tiene que organizar un campamento. Debe calcular el número de carpas que va a necesitar para los 6 adolescentes que participarán de la experiencia y no se llevan muy bien entre sí.

1.- Alberto no se lleva bien ni con Benito ni con Eduardo.

2.- Carlos se pelea siempre con Facundo, con Benito y con Eduardo.

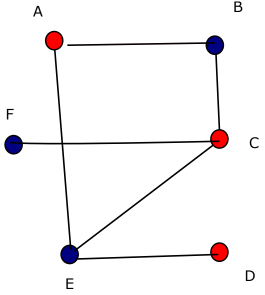
3.- Por último Daniel se enoja frecuentemente con Eduardo.

Podemos construir un grafo de “enemistades” del siguiente modo:



el grafo de la derecha es bipartito y es isomorfo al grafo de la izquierda.

Es claro que podemos asegurar que con 2 carpas alcanzan, una por cada bipartición de los vértices.
En una de ellas (la carpa azul), dormirán Benito, Facundo y Eduardo y en la otra (carpa roja) dormirán Alberto, Carlos y Daniel.
Es decir, podemos asignar colores a cada vértice de modo que dos vértices adyacentes tengan distinto color en el grafo original y así resolver el problema.



Coloreo de regiones en dos colores

El problema de colorear las regiones determinadas por los círculos en el plano, puede formularse como el problema de colorear los nodos de un grafo con 2 colores.

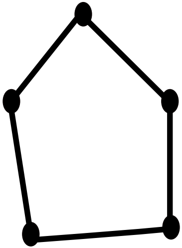
En efecto, representamos cada región mediante un vértice y dos vértices están conectados por una arista si comparten una misma frontera.

La pregunta que nos hacemos ahora es: Qué grafos pueden colorearse con dos colores?
Es decir cuáles grafos son 2-coloreables? O equivalentemente, cuáles grafos son bipartitos?

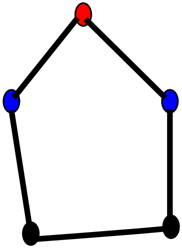
La respuesta es un ejercicio de la práctica anterior, pero veremos otro modo de responderla

Observaciones
Si un grafo consiste en una colección de vértices aislados, con un solo color basta para colorear el grafo.

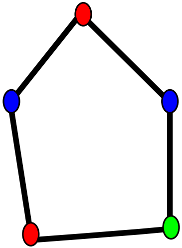
Si el grafo es un ciclo impar? Veamos C_5 (un análisis similar se puede hacer sobre cualquier ciclo impar).



Coloreamos un vértice de rojo y sus adyacentes en azul



Coloreamos un vértice de rojo y sus adyacentes en azul
Observamos que siguiendo con este criterio, necesitamos 3 colores



Sigue que un grafo que contenga un subgrafo isomorfo a un ciclo impar no es 2-coloreable.

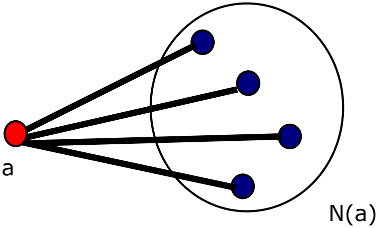
TEOREMA

Un grafo es 2-coloreable si y sólo si no contiene un ciclo impar.

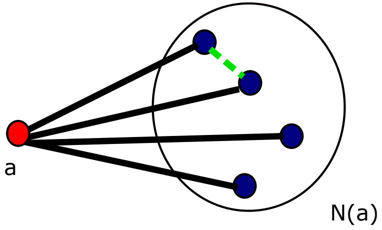
Demostración

Ya hemos visto que si un grafo contiene un ciclo impar como subgrafo no es 2-coloreable.

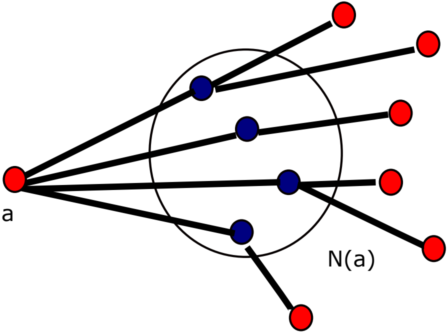
Sea $G = (V, E)$ un grafo 2-coloreable y sea $a \in V$. Coloreamos al vértice a de rojo y todos los vértices en $N(a)$ en azul.



Observemos que no existe una arista entre dos vértices en $N(a)$, ya que de este modo tendríamos un ciclo de 3 vértices y no sería G 2-coloreable.

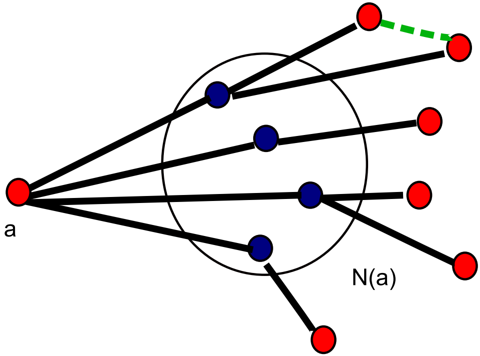


Ahora coloreamos en rojo a los vértices adyacentes a los vértices azules en $N(a)$.

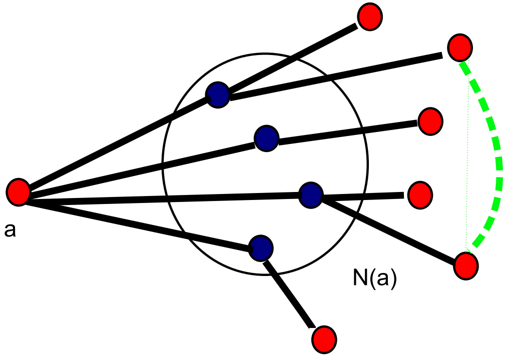


Observemos que no es posible que los nuevos vértices pintados de rojo estén conectados.

Si hay dos vértices rojos adyacentes a un mismo vértice azul entonces nuevamente encontramos un ciclo de longitud 3,

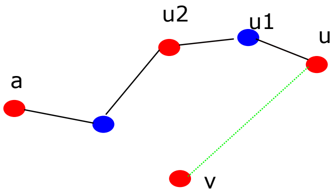


Si los vértices rojos no tienen vecinos en común, entonces aparece un ciclo de longitud 5.



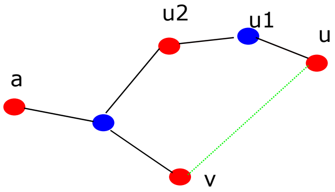
Cualquier caso contradice la hipótesis sobre G.

Continuando con este proceso, si el grafo es conexo, coloreamos con dos colores todos los vértices del grafo.
Supongamos que esto no sucede. Es decir, luego de este proceso hay dos vértices, u y v que recibieron el color rojo y son adyacentes.
El vértice u recibió el color rojo en un paso posterior al nodo adyacente de color azul, y este a su vez de un adyacente u_2 rojo. Así obtenemos un camino P que conduce hacia el vértice original a.



Del mismo modo llamamos Q al camino que conduce desde v hacia el nodo a.

Es claro que los caminos P y Q confluyen a un mismo vértice (a) pero también podrían tener otro vértice en común como se indica en la figura.



Si comenzamos con P hasta su intersección con Q y agregamos el arco $\{u, v\}$ obtenemos un ciclo.
Pero este ciclo tiene dos vértices consecutivos del mismo color (u y v) mientras que en los caminos P y Q los vértices alternan colores. Por lo tanto el ciclo es impar. Contradicción.

Sea $G = (V,E)$ un grafo no bipartito. Supongamos que queremos colorear sus vértices de modo que dos adyacentes reciban distintos colores.
Una primera posibilidad es considerar $|V|$ colores distintos.

Si $G = K_n$, esa es la única posibilidad.

DEFINICIÓN

Decimos que G es k-coloreable si G admite un coloreo con k colores distintos.

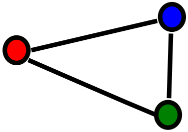
Supongamos que disponemos de tres colores (rojo,azul y verde) y queremos determinar si un grafo dado es 3-coloreable.

Existe un resultado que nos asegure cuando un grafo es 3-coloreable?
(ya vimos cuando es 2-coloreable)

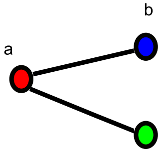
Pero, responder esta pregunta resulta un salto de dificultad muy grande.

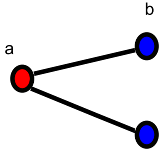
Procedemos como hicimos en el caso de 2 colores.
Comenzamos con el nodo a pintado de rojo, consideramos un nodo $b \in N(a)$ y lo pintamos de azul (o verde).

Ahora, supongo $c \in N(a)$, $c \neq b$.
Si $c \in N(b)$ entonces c debe ser pintado de verde.



Pero si c y b no están conectado puedo usar tanto el azul como el verde para pintarlo.





Elegimos una de las opciones.

En las siguientes etapas volvemos a elegir. Si alguna de las elecciones resultó en un coloreo infactible, debemos volver hacia atrás y elegir otra posibilidad de coloreo.

Eventualmente, si el grafo es 3-coloreable encontraremos una disposición de colores factible.

Sin hacer una análisis riguroso, podríamos tener que atravesar esta situación de doble elección en la mitad de los vértices.
Esto tomaría $2^{\frac{n}{2}}$ pasos.

En realidad, para resolver este problema no se conoce ningún procedimiento sustancialmente mejor.

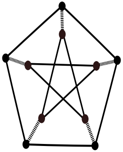
La situación es similar cuando nos preguntamos si un grafo es k-coloreable para cualquier $k > 2$.

Definición

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. Un coloreo en G ocurre cuando se asignan colores a los vértices de G de modo que dos vértices adyacentes reciban colores diferentes. El número mínimo de colores necesarios en un coloreo de G se llama número cromático y se lo simboliza como $\chi(G)$.

Veamos algunos ejemplos:

- Para grafos completos K_n es claro que $\chi(K_n)=n$.
- Si G es bipartito ya vimos que $\chi(G)=2$.
- Si G es el grafo de Petersen, $\chi(G)=3$. (Porqué?)



TEOREMA

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. Si para todo $v \in V$ se tiene que $deg(v) \leq d$ entonces G es $d+1$-coloreable. (Por lo tanto $\chi(G) \leq d+1$).

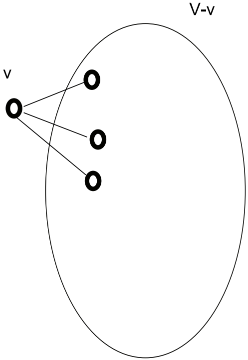
Demostración

Por inducción sobre $n=|V|$.

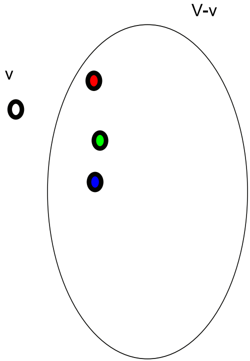
Si $|V| < d+1$, entonces puede colorearse con $d+1$ colores (o menos) entonces $\chi(G) \leq d+1$.

Supongamos que el teorema es válido para cualquier grafo con a lo sumo $n-1$ vértices

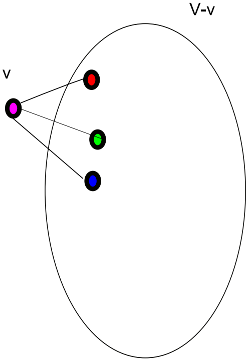
Sea G un grafo con n vértices. Elegimos $v \in V$, y consideramos a sus vecinos.



Borramos a v y a todas las aristas incidentes en él.
El grafo obtenido, llamado G' tiene $n-1$ vértices y es claro que $deg(u) \leq d$ para todo u en G'.
Por hipótesis de inducción puede colorearse con $d+1$ colores.



El vértice v tiene a lo sumo d vecinos, por lo tanto debe existir algún color entre los $d+1$ disponibles que no esté asignado a los vecinos de v en G. Coloreamos a v con ese color y queda demostrado el teorema.



⋆

Brooks en realidad demostró aún más.

Salvo ciertas excepciones, si $G = (V,E)$ es un grafo no dirigido y para todo $v \in V$ se tiene que $deg(v) \leq d$ entonces G es d-coloreable. Es decir $\chi(G) \leq d$.

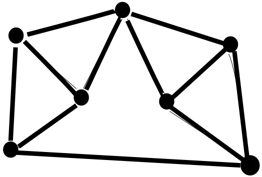
Las excepciones son:

- $d = 2$ y el grafo tiene una componente conexa que es un ciclo impar.
- $d > 2$ y el grafo tiene una componente conexa que es un grafo completo de $d+1$ vértices.

Es fácil ver que grafos como los anteriores son excepciones al resultado.

No es nada fácil ver que son las únicas excepciones

Supongamos que nos preguntamos si un grafo dado es k-colorable y el teorema de Brooks no es de ayuda.
Después de varios intentos no podemos encontrar un k-coloreo del grafo y es posible que no exista!
Si encontramos un subgrafo completo de $k+1$ vértices, entonces el problema está resuelto: el grafo no es k-coloreable.
Pero puede ocurrir, que no exista un tal subgrafo y el grafo tampoco sea k-coloreable.
A continuación vemos un grafo que no contiene a K_4 como subgrafo y sin embargo no es 3-coloreable.



Al comienzo de este capítulo vimos como colorear regiones planas determinadas por círculos.

También vimos al finalizar el tema de grafos planares:

EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

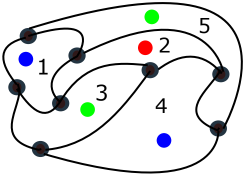
Colorear las regiones de un mapa de modo que dos países limítrofes reciban distintos colores.

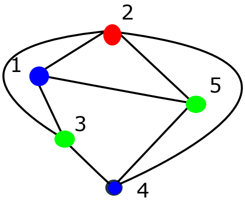
En general los mapas suelen ser más complejos en sus contornos que los círculos en el plano.

Recordando el concepto de grafo dual de un grafo planar, podemos reformular el problema del cartógrafo.

EL PROBLEMA DEL CARTÓGRAFO

Colorear los vértices del grafo dual de modo que dos vértices adyacentes reciban distintos colores.





Un poco de historia

1852 - Francis Guthrie establece el siguiente enunciado
Para colorear un mapa de modo que dos regiones limítrofes reciban diferente color, sólo bastan 4 colores.

1879 - Alfred Kemple publica una demostración (errónea).

1976 - Kenneth Appel y Wolfgang Haken obtuvieron una demostración utilizando computadoras.

Hasta el día de hoy no se conoce una prueba matemática "pura" del resultado:

TEOREMA

Todo grafo planar puede colorearse con 4 colores.

Nuestro objetivo más modesto es demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA DE LOS 5 COLORES

Todo grafo planar puede colorearse con 5 colores.

Para esto comenzamos con el siguiente lema

LEMA 1

Todo grafo planar tiene un vértice con grado a lo sumo 5.

Demostración

Sea $G=(V,E)$ con $|V|=n$ y $|E|=m$.
Recordemos la fórmula de Euler para grafos planares: $m \leq 3n-6$.
Supongamos que para todo $v \in V$ se tiene que $deg(v) \geq 6$.
Entonces sabemos que $2m = \sum_{i=1,\ldots,n} deg(v_i) \geq 6n$.
Sigue que $m \geq 3n$. Contradicción con el Teorema de Euler.

$\star$

LEMA 2

Si todo subgrafo de un grafo G tiene un nodo de grado a lo sumo d entonces G es $d+1$-coloreable.

Ejercicio para entregar

Como consecuencia inmediata obtenemos:

COROLARIO

Todo grafo planar es 6-coloreable.

Demostración Sea G un grafo planar. Todo subgrafo de G es planar.
Por el Lema 1 todo subgrafo de G tiene un vértice de grado a lo sumo 5.
Por el Lema 2 G es 6-coloreable.

$\star$

Demostración del Teorema de los 5 colores

La prueba es por inducción sobre $|V| = n$.

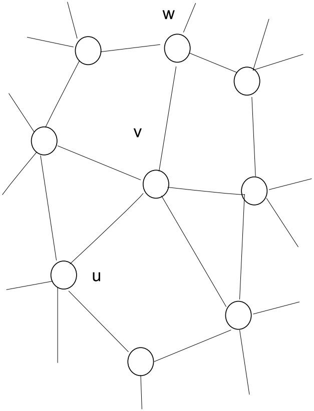
Suponemos que cualquier grafo planar con a lo sumo $n-1$ vértices es 5 coloreable.

Sea G grafo planar con n nodos. Por el Lema 1, sabemos que existe $v \in V$ con $deg(v) \leq 5$.

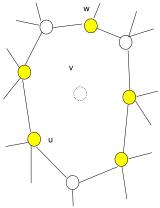
Consideremos el caso en que $deg(v) \leq 4$.
Por hipótesis de inducción $G' = G - v$ es 5-coloreable.
Como v tiene a lo sumo 4 vecinos, existe algún color no utilizado disponible para colorear a v.

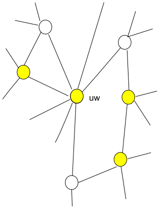
El teorema está demostrado.

Ahora consideremos $deg(v) = 5$.
Sean u, w dos vértices vecinos de v, como se muestra en la figura.



En vez de borrar a v simplemente, vamos a hacer un cambio sobre G de la siguiente manera:
Vamos a quitar a v y vamos a unir u y w en un solo vértice al que llamamos uw.
Toda arista que tenía como extremo a u o a w ahora tendrá como extremo a uw. Llamamos G' al grafo obtenido.
Veamos la siguiente figura (identificamos a los vecinos de v en amarillo).

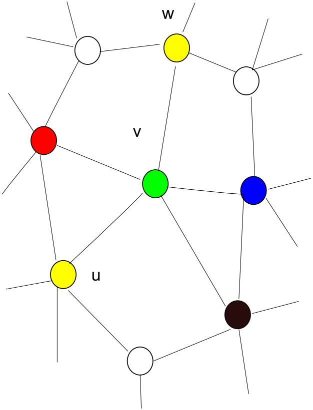




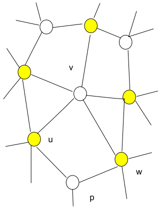
G' es planar y tiene a lo sumo $n-1$ vértices. Por hipótesis de inducción puede colorearse con 5 colores.

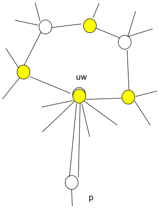
Ahora si deshacemos el procedimiento anterior, y volvemos a G con los colores asignados, todos los vértices están coloreado salvo v.

Además u y w tienen el mismo color, y los colores utilizados para colorear a G' son 5. Por lo tanto existe un color disponible para colorear a v.

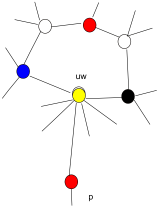


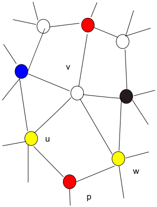
Pero, veamos dos situaciones que pueden ocurrir.
a) existe otro vértice p conectado con u y con w, luego del procedimiento aparece una arista doble que une p con uw en G'.





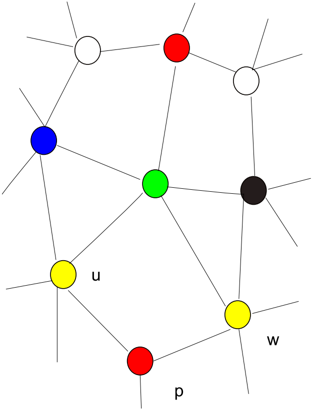
G' es planar y podemos quitar una de la aristas y sigue siéndolo.
Por lo tanto al colorear a G' con 5 colores, el nodo p recibe un color distinto que el nodo uw.





Entonces deshacemos el proceso y las aristas que unen u con p y w con p conectan vértices con distintos colores.

Nuevamente u y w tienen el mismo color, y G' fue pintado con 5 colores. Por lo tanto existe un color disponible para colorear a v.



Falta analizar el caso
b) existe la arista $\{u,w\}$ en G, luego del procedimiento aparece el lazo en uw en G'.

No podemos ignorar el lazo uw. Además es imposible que u y w reciban el mismo color en G.

En este caso, debemos elegir otro par de vértices vecinos a v que no estén conectados.
Si esto no fuera posible, significa que todos los vértices en $N(v)$ son adyacentes.

Pero, esto quiere decir que G tiene un subgrafo completo de 5 vértices y G no es planar.

Por lo tanto existen u y w vecinos de v que no estén conectados y esto completa la prueba.

$\star$