Tarea Práctica 8
Análisis Matemático II

Tomás Pitinari

Consignas

6) Suponga que a_i y b_i son los coeficientes de Taylor en a de f y g respectivamente. Es decir $a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ y $b_i = \frac{g^{(i)}(a)}{i!}$. Halle los coeficientes c_i de los polinomios de Taylor de a de las siguientes funciones en términos de a_i b_i:

d) $h(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$

13) Calcule el grado del polinomio de Taylor necesario para obtener las siete primeras cifras decimales del número $ln(1,5)$ utilizando la fórmula de Taylor correspondiente a las funciones : $f(x) = ln(x+1)$ y $g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Resolución

6)d) Primero voy a ver una forma general de nuestra integral de h:

$$h(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt \qquad \text{Definimos un } F \text{ cuya derivada es } f$$

$$h(x) = F(x) - F(a) \qquad \text{Derivamos de ambos lados}$$

$$h'(x) = F'(x) - F'(a) \qquad \text{Luego en base a la definicion de } F \text{ y sabiendo que } a \text{ es una constante}$$

$$h'(x) = f(x) - 0$$

Sabiendo eso, es facil ver que:

$$h^{(2)}(x) = f^{(1)}(x)$$
$$h^{(3)}(x) = f^{(2)}(x)$$
$$...$$
$$h^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)$$

Ahora expreso el polinomio de Taylor de grado n para h en a:

$$P_{n,a} = h(a) + \frac{h'(a)}{1!}(x-a) + \frac{h''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{h^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

$$P_{n,a} = \int_a^a f(t) \cdot dt + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}}{n!}(x-a)^n$$

Sabiendo eso tengo que expresar cada coeficiente de $P_{n,a}$ como c_i en base a a_i. Primero se sabe que:

$$c_0 = \int_a^a f(t) \cdot dt = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \cdot a_0$$

Luego se tiene:

$$c_i = \frac{1}{i} \cdot a_{i-1} \ \forall \ i = 1, 2, ..., n$$

13) Comenzamos por la función f, sabemos que:

$$ln(x+1) = \int_0^x \frac{1}{x+1}$$

Para poder buscar una forma de expresar la función, comenzamos con la igualdad:

$$1 = 1 \qquad \text{sumamos 0, tal que } t^n - t^n = 0 \text{ con } n \in N$$

$$1 = 1 + t - t + t^2 - t^2 + ... + t^n - t^n + t^{n+1} - t^{n+1} \qquad \text{sacando factor común } (1+t)$$

$$1 = 1 \cdot (1+t) - t \cdot (1+t) + ... + (-1)^n t^n \cdot (1+t) + (-1)^{n+1} t^{n+1} \qquad \text{Multiplicamos por ambos lados por } \frac{1}{1+t}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + ... + (-1)^n t^n - (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} \qquad \text{Integramos de ambos lados de } (0, x)$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} = \int_0^x 1 - \int_0^x t + \int_0^x t^2 + ... + (-1)^n \int_0^x t^n + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

$$ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Luego, tenemos que demostrar que $p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ es nuestro polinomio de Taylor en 0.
Para esto hay que probar que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}}{x^{n+1}} = 0 \overbrace{\Rightarrow}^{l'Hopital} \lim_{x \to 0} \frac{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}}{(n+1)x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{(-1)^{n-1} \frac{x}{1+x}}{(n+1)} = 0$$

Con esto queda demostrado por el corolario 84 que el polinomio de Taylor de grado n para f en 0 es $p(x)$ y $R_{n,0} = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}$.
Se puede ver que tenemos que analizar el polinomio para un $x = 0,5$, ya que $ln(1+0,5) = ln(1,5)$. Tambien se sabe que $0 \leq |R_{n,0}(\frac{1}{2})| \leq 10^{-8}$, por lo que debemos probar un n, tal que nuestro resto cumpla la inecuación. Probando diferentes n tenemos $0 \leq |R_{20,0}(\frac{1}{2})| \leq 10^{-8} \leq |R_{19,0}(\frac{1}{2})|$, vemos que la inecuación se cumple para cualquier $n \geq 20$.

Para la función g sabemos por las propiedades del logaritmo que $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ln(1+x) - ln(1-x)$, y como ya calculamos previamente el polinomio de Taylor y su resto para $ln(1+x)$, hay que hacer lo mismo para $ln(1-x)$ y restar. Para poder buscar una forma de expresar la función, comenzamos con la igualdad:

$$ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-x}$$

$$1 = 1 \qquad \text{sumamos 0, tal que } t^n - t^n = 0 \text{ con } n \in N$$

$$1 = 1 + t - t + t^2 - t^2 + ... + t^n - t^n + t^{n+1} - t^{n+1} \qquad \text{sacando factor común } (1+t)$$

$$1 = 1 \cdot (1-t) + t \cdot (1-t) + ... + t^n \cdot (1-t) + t^{n+1} \qquad \text{Multiplicamos por ambos lados por } \frac{1}{1-t}$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t} \qquad \text{Integramos de ambos lados de } (0, x)$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} = \int_0^x 1 + \int_0^x t + \int_0^x t^2 + ... + \int_0^x t^n + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Luego, tenemos que demostrar que $p(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n}$ es nuestro polinomio de Taylor en 0. Para esto hay que probar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}}{x^{n+1}} = 0 \overbrace{\Rightarrow}^{l'Hopital} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^{n+1}}{1-x}}{(n+1)x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{1-x}}{(n+1)} = 0$$

Con esto queda demostrado por el corolario 84 que el polinomio de Taylor de grado n para $ln(1-x)$ en 0 es $p(x)$ y $R_{n,0} = -\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}$.
Luego tenemos:

$$g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2.x^3}{3} + ... + \frac{2.x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t} + (-1)^{2n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t}$$

Ahora hay que mostrar que $\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t} + (-1)^{2n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t}$ es nuestro resto.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t} + (-1)^{2n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t}}{x^{2n+2}} = 0 \overbrace{\Rightarrow}^{l'Hopital} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{2n+2}}{1-x} + (-1)^{2n+2-1}\frac{x^{2n+2}}{1+x}}{(2n+2)x^{2n+1}} = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{2n+1}\cdot(\frac{x}{1-x} + (-1)^{2n+1}\frac{x}{1+x})}{(2n+2)x^{2n+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{1-x} + (-1)^{2n+1}\frac{x}{1+x}}{(2n+2)} = 0$$

Con esto queda demostrado por el corolario 84 que el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ para $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ en 0 es $2x + \frac{2.x^3}{3} + ... + \frac{2.x^{2n+1}}{2n+1}$ y $R_{2n+1,0} = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t} + (-1)^{2n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t}$.
Para analizar el $ln(1,5)$ hay que despejar la x:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{2}$$
$$1+x = \frac{3(1-x)}{2}$$
$$1+x = \frac{3}{2} - \frac{3x}{2}$$
$$x + \frac{3x}{2} = \frac{3}{2} - 1$$
$$\frac{5x}{2} = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{2}{10} = 0,2$$

Entonces hay que buscar un n, tal que el resto cumpla la inecuación $0 \leq |R_{2n+1,0}(\frac{1}{5})| \leq 10^{-8}$. Probando diferentes n se tiene que $0 \leq |R_{10,0}(\frac{1}{5})| \leq 10^{-8} \leq |R_{8,0}(\frac{1}{5})|$ cumplir que $n \geq 4$, osea $2n+2 \geq 10$