1

Pitinari
Tomas
P 5039/3

1) a) $\exists x \phi \wedge \exists x \psi \models \exists x(\phi \wedge \psi)$

b) $\forall x \phi \models \exists x \neg \phi \rightarrow \forall x \psi$

$[\![\forall x \phi]\!]_{M,s} = T \longleftrightarrow \min(\{[\![\phi]\!]_{M,s[t/x]} \mid t \in M\}) = T \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$

Luego vemos que

$[\![\exists x \neg \phi \rightarrow \forall x \psi]\!]_{M,s} = T \longleftrightarrow$

$[\![\exists x \neg \phi]\!]_{M,s} \overset{①}{\leq} [\![\forall x \psi]\!]_{M,s}$

~~Nos dice que existe a∈M~~ Asumimos que $[\![\exists x \neg \phi]\!]_{M,s} \overset{②}{=} T$

$\longleftrightarrow \max(\{[\![\neg \phi]\!]_{M,s[t/x]} \mid t \in M\}) = T$

Pero de la premisa sabemos que para todo elemento del universo M, vale $[\![\phi]\!]_{M,s[t/x]} = T$. Por lo tanto se llega a una contradicción de asumir ~~que~~ ② y obtenemos $[\![\exists x \neg \phi]\!]_{M,s} = F$, por lo que ① se cumplirá siempre.

2) $\forall x (S(x) \to (Q(x) \vee P(x)))$, $\neg \exists x (S(x) \wedge P(x))$

$\vdash \forall x (S(x) \to Q(x))$

1) $\forall x (S(x) \to (Q(x) \vee P(x)))$ Premisa

2) $\neg \exists x (S(x) \wedge P(x))$ Premisa

x_0

3) $S(x_0) \to (Q(x_0) \vee P(x_0))$ $e_{\forall}[x_0/x]$

4) $S(x_0)$ hipotesis

5) $Q(x_0) \vee P(x_0)$ $e_{\to}(3)(4)$

6)	$Q(x_0)$ hipotesis	$P(x_0)$ hipotesis
7)	$Q(x_0)$ Trivial(6)	$S(x_0) \wedge P(x_0)$ $i_{\wedge}(4)(6)$
8)		$\exists x\, S(x) \wedge P(x)$ $i_{\exists}$
9)		$\perp$ $i_{\perp}(2)(8)$
10)		$Q(x_0)$ $e_{\perp}(9)$

11) $Q(x_0)$ $e_{\vee}(5)(6-10)$

12) $S(x_0) \to Q(x_0)$ $i_{\to}(4-11)$

$\forall x (S(x) \to Q(x))$ $i_{\forall}$

Pitinari

Tomas

3) Planteamos el modelo:

$|M| = A = \{a, b\}$

$Q = \{(a,a), (a,b)\}$

$f \,/\, f(a) = a \wedge f(b) = a$

Vemos que $M \not\models \Phi_1$, ~~porque~~ asumiendo $M \models \Phi_1$ y llegando a absurdo

$$[\![\forall x (Q(f(x),x) \to Q(x,x))]\!]_{M,s} = T$$

$$\leftrightarrow \min(\{[\![Q(f(x),x) \to Q(x,x)]\!]_{M,s[t/x]} \mid t \in M\}) = T \quad 1$$

Si tomamos el entorno $s[b/x]$, podemos llegar a:

$$[\![Q(f(x),x) \to Q(x,x)]\!]_{M,s'} = T \leftrightarrow [\![Q(f(x),x)]\!]_{M,s'} \leq [\![Q(x,x)]\!]_{M,s'}$$

$$\leftrightarrow s'(Q(f(x),x)) \leq s'(Q(x,x)) \underset{\text{sust en FORM}}{\longleftrightarrow} Q(f(b),b) \leq Q(b,b)$$

$$Q(a,b) \leq Q(b,b)$$

$$T \leq F$$

Llegando a un absurdo de la hipotesis $\therefore M \not\models \Phi_1$.

Para mostrar que $M \models \Phi_2$, desarrollamos:

$$[\![\exists x (Q(f(x),x) \to Q(x,x))]\!] = T \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \max(\{[\![Q(f(x),x) \to Q(x,x)]\!]_{M,s[t/x]} \mid t \in M\})$$

Particularmente veremos el entorno $s[a/x] = s''$:

$$[\![Q(f(x),x) \to Q(x,x)]\!]_{M,s''} = T \leftrightarrow [\![Q(f(x),x)]\!]_{M,s''} \leq [\![Q(x,x)]\!]_{M,s''}$$

$$\leftrightarrow s''(Q(f(x),x)) \leq s''(Q(x,x)) \underset{\text{sust en FORM}}{\longleftrightarrow} Q(f(a),a) \leq Q(a,a)$$

$\leftrightarrow \varphi(a,a) \leq \varphi(a,a)$.

$\varphi(a,a) = \varphi(a,a) = T$

Al existir un entorno en donde se cumple la implicancia, entonces la proposición ya es válido $\therefore M \models \Phi_2$

4) a) Para representar la signatura (F,P) de Lattices

$F = \{\bar{\cup}, \bar{\cap}\} \;/\; ar(\bar{\cup}) = 2 \quad ar(\bar{\cap}) = 2$

$P = \{\bar{=}\} \;/\; ar(\bar{=}) = 2$

b) $\Gamma = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_8\}$

i) $\Phi_1 \equiv \forall x \forall y (x \cup y = y \cup x)$

$\Phi_2 \equiv \forall x \forall y (x \cap y = y \cap x)$

$\Phi_3 \equiv \forall x \forall y \forall z (x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z))$

$\Phi_4 \equiv \quad '' \quad ((x \cup y) \cap z = (x \cap z) \cup (y \cap z))$

$\Phi_5 \equiv \quad '' \quad (x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z))$

$\Phi_6 \equiv \quad '' \quad ((x \cap y) \cup z = (x \cup z) \cap (y \cup z))$

ii) $\Phi_7 \equiv \forall x \forall y (x \cup (x \cap y) = x)$

iii) $\Phi_8 \equiv \forall x \forall y (x \cap (x \cup y) = x)$

5

Pitinari

Tomas

c) (2) $\mathcal{I} \vdash \forall x \forall y \forall z ((x = x \cap y) \wedge (y = y \cap z) \rightarrow (x = x \cap z))$

1) $\Phi_i \,/\, i = \{1, \dots, 8\}$ Premisa

x_0

y_0

z_0

2) $(x_0 = x_0 \cap y_0) \wedge (y_0 = y_0 \cap z_0)$ hipotesis

3) $(x_0 = x_0 \cap y_0)$ $e_{1\wedge}(2)$

4) $(y_0 = y_0 \cap z_0)$ $e_{2\wedge}(2)$

5) $(x_0 = x_0 \cap y_0 \cap z_0)$ $e_{=}(3)(4)$ $\Phi \equiv (x_0 = x_0 \cap w)[y_0 \cap z_0 / w]$

6) $(x_0 = x_0 \cap z_0)$ $e_{=}(5)(3)$ $\Phi \equiv (x_0 = w \cap z_0)[x_0 / w]$

7) $(x_0 = x_0 \cap y_0) \wedge (y_0 = y_0 \cap z_0) \rightarrow (x_0 = x_0 \cap z_0)$ $i_{\rightarrow}(2-6)$

8) $\forall z ((x_0 = x_0 \cap y_0) \wedge (y_0 = y_0 \cap z) \rightarrow (x_0 = x_0 \cap z))$ $i_{\forall}(2-7)$

9) $\forall y \forall z ((x_0 = x_0 \cap y) \wedge (y = y \cap z) \rightarrow (x_0 = x_0 \cap z))$ $i_{\forall}(2-8)$

10) $\forall x \forall y \forall z ((x = x \cap y) \wedge (y = y \cap z) \rightarrow (x = x \cap z))$ $i_{\forall}(2-9)$