Resumen Inducción
Análisis Matemático I

Pitinari Tomás

Una idea general de las inducciones, es que sirven para desmostrar la validez de una proposición sobre todos los elementos de un conjunto.
Primero un pequeño repaso de los axiomas de los reales:

S1)	$(a+b)+c=a+(b+c)$	S2)	$a+b=b+a$	S3)	$\exists 0 \epsilon \mathbb{R}, a+0=a$
S4)	$\exists -a \epsilon \mathbb{R}, a+(-a)=0$	P1)	$(ab)c=a(bc)$	P2)	$ab=ba$
P3)	$\exists 1 \epsilon \mathbb{R}, (1 \neq 0) \wedge (a1=a)$	P4)	$(a \neq 0) \rightarrow \exists a^{-1} \epsilon \mathbb{R}, aa^{-1}=1$	D)	$a(b+c)=ab+ac$
O1)	$(a=b) \underline{\vee} (a<b) \underline{\vee} (b<a)$	O2)	$[(a<b) \wedge (b<c)] \rightarrow (a<c)$	CS)	$(a<b) \rightarrow (a+c<b+c)$
CP)	$[(a<b) \wedge (0<c)] \rightarrow (ac<bc)$	AS)	Axioma del supremo		

Un subconjunto $H \subset \mathbb{R}$ se dice *inductivo* si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $1 \epsilon H$
2. $x \epsilon H \rightarrow x+1 \epsilon H$

Lema: La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es un subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$
Se define a $\mathbb{N}$ como la intersección de todos los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$.
Observaciones:

- $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, y es el menor subconjunto inductivo posible.
- Los $\mathbb{N}$ esta compuesto por un elemento obligatorio, el 1, y sus sucesores.
- Las operaciones suma y multiplicación ya están definidas por ser un subconjunto de $\mathbb{R}$.

1 Teorema:

(Principio de Inducción)
Sea $P(n)$ una proposición que depende del número natural $n \epsilon \mathbb{N}$ tal que:

1. $P(1)$ es verdadera.
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1) \ \forall \ k \epsilon \mathbb{N}$.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \epsilon \mathbb{N}$.

Ejemplo: Probar que $2^n > n$ para todo $n \epsilon \mathbb{N}$, consideramos $P(n) : 2^n > n$:

- $P(1) : 2^1 > 1$ es verdadero.
- Veamos que $P(k) \Rightarrow P(k+1) \ \forall \ k \geq 1$.
  - Supongamos que $P(k) : 2^k > k$ es verdadera. Esto es lo que llamamos *Hipótesis Inductiva* (HI).
  - Para probar $P(k+1)$ obsevamos:

$$2^{k+1} = 2.2^k \underset{HI}{>} 2.k = k+k \geq k+1$$

- Luego por el Principio de Inducción, $P(n)$ es verdadera para todo $n \epsilon \mathbb{N}$.

2 Teorema:

Sea $P(n)$ una proposición que depende del número natural $n \epsilon \mathbb{N}$ y sea $n_0 \epsilon \mathbb{N}$. Si:

1. $P(n_0)$ es verdadera.
2. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo $k \geq n_0$.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Proposición

1. Si $n \epsilon \mathbb{N}$ y $n \neq 1$, entonces $n-1 \epsilon \mathbb{N}$. Equivalentemente, existe $m \epsilon \mathbb{N}$ tal que $n = m+1$.
2. Si $m, n \epsilon \mathbb{N}$, entonces $m+n \epsilon \mathbb{N}$ y $m.n \epsilon \mathbb{N}$.
3. Si $m, n \epsilon \mathbb{N}$, entonces $m < n \Rightarrow n - m \epsilon \mathbb{N}$.
4. Si $n \epsilon \mathbb{N}$ y $a \epsilon \mathbb{R}$ es tal que $n-1 < a < n$, entonces $a \epsilon \mathbb{N}$.

Definiciones recursivas

Una sucesión u_1, u_2, u_3, ... está definida *recursivamente* si puede obtenerse de la siguiente forma:

- se explicita el prime (o primeros) elemento(s) u_1 $(u_2, ..., u_{n0})$
- y además hay una regla para obtener el elemento u_{n+1} con $n \geq 1$ (o $n \geq n_0$) en función de los elementos anteriores de la sucesión.

Para demostrar vamos a utilizar una versión mas sofisticada llamada *Principio de Inducción Fuerte.*
Definimos *Sumatoria*

$$\sum_{i=n_0}^{n} x_i = x_{n_0} + ... + x_n$$

y *Productoria*

$$\prod_{i=n_0}^{n} x_i = x_{n_0} \cdot ... \cdot x_n$$

Principio del buen orden

Definición: Un subconjunto de A de $\mathbb{R}$ tiene primer elemento si existe $a \in A$ tal que $a \leq x, \forall x \in A$. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice bien ordenado si todo subconjunto no vacío de A tiene primer elemento.
$\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado

3 Teorema (Principio de inducción fuerte)

Sea $P(n)$ una proposición que depende del número natural n tal que

1. $P(1)$ es verdadera
2. Para todo $k \geq 1$, si $P(1), P(2), ..., P(k)$ son verdaderas, entonces $P(k+1)$ es verdadera

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$
Ejemplo: (fibonacci) cosideramos la sucesión

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \end{cases} \tag{1}$$

Probar que si F_n es la sucesión de Fibonacci, entonces $F_n \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

- Para $n = 0$:

$$F_0 = 0 \leq 1 = 2^0$$

- Para $n = 1$:

$$F_1 = 1 \leq 2 = 2^1$$

- Suponemos válida $F_n \leq 2^n$ para n como Hipotesis inductiva
- Ahora la probamos para $n + 1$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \leq 2^n + 2^{n-1} = 3.2^{n-1} \leq 4.2^{n-1} = 2^{n+1}$$

- Con esto demostramos el principio de inducción fuerte que la proposición es verdadera en todo $n \in \mathbb{N} \cup 0$