FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 2

EXAMEN FINAL

Apellido y nombre: Carrera: Legajo:

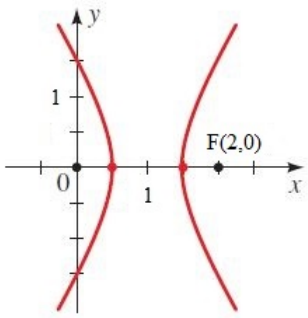
PARTE PRÁCTICA

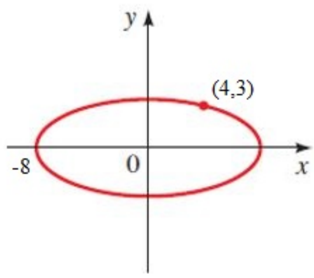
Justifique debidamente todas sus respuestas.

1. Sea la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -5 & -6 & -7 & 13-\alpha \\ 3 & 6 & 3 & \alpha - 11 \end{pmatrix}$.
   (a) Considerando a D como la matriz ampliada del sistema de ecuaciones (S), halle los valores de α para que el conjunto solución determine una recta en el espacio.
   (b) Para un valor de α hallado en el item anterior, establezca una forma paramétrica para la recta hallada.

2. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente la respuesta.
   (a) Si A, B son matrices cuadradas de igual tamaño, con determinantes distintos de cero y distintos entre sí, entonces $A + B$ es invertible.
   (b) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n! m^n}{i!(n-i)!} = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.
   (c) Si $S = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4, \overline{v}_5, \overline{v}_6, \overline{v}_7, \overline{v}_8\}$ es generador de $\mathbb{R}^6$ entonces es base.

3. Halle las ecuaciones de las siguientes cónicas y determine sus elementos característicos (centro, radio, focos, vértices, ejes mayor y menor, asíntotas o directriz, según corresponda).





4. Considere la ecuación $x + y + z = 60$, con $x, y, z \in \mathbb{N}$. Si a la ecuación se le añaden las siguientes restricciones:
$$x, y, z \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1, \quad y \geq 2, \quad z \geq 3.$$
, obtenga la cantidad de soluciones diferentes de la misma.

Complemento para alumnos libres

5. Dado el siguiente lugar geométrico: $H = \left\{P(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 4x - 4y + 2z - 3\right\}$.

   (a) Identifique la superficie que determina H y, si corresponde, indique sus elementos (centro, vértices).

   (b) Identifique la curva C obtenida al considerar la traza de H sobre el plano $z = 1$ y escriba las ecuaciones paramétricas de C.

PARTE TEÓRICA

1. Enuncie y demuestre la Regla del Producto.

2. Seleccione la o las opciones correctas, **justificando** adecuadamente su elección:

   (a) Sea e la OEF: $f_1 \to f_1 + \alpha f_3$ que se aplica sobre matrices con 3 filas. Entonces la matriz elemental asociada a e es:

   ☐ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ☐ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

   (b) Sea S un conjunto de n vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^n$. Entonces:

   ☐ S es un conjunto l.i. de $\mathbb{R}^{n-1}$.

   ☐ S es un conjunto generador de $\mathbb{R}^n$.

   ☐ S no contiene al vector nulo.

   ☐ S es una base de $\mathbb{R}^n$.

3. Considere las siguientes matrices:

$$R = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dichas matrices representan las matrices ampliadas de tres sistemas de ecuaciones, (S_1), (S_2) y (S_3), respectivamente. Para cada sistema:

   (a) describa explícitamente el sistema representado,

   (b) indique su tamaño (cantidad de ecuaciones y de incógnitas),

   (c) indique si es homogéneo o no,

   (d) describa su conjunto solución, indicando su cardinal.

4. Enuncie y demuestre los siguientes resultados:

   (a) La descomposición de una matriz cuadrada como diferencia de una matriz simétrica y una antisimétrica.

   (b) El determinante de una matriz que se obtiene intercambiando dos filas es el opuesto del determinante de la matriz original.

5. Defina el concepto geométrico de parábola. Describa sus elementos. Fije un sistema de coordenadas y obtenga a partir de la definición geométrica la ecuación cartesiana de la misma.

6. Considere las siguientes ecuaciones e indique brevemente en cada caso qué lugar geométrico del espacio representan:

   i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 1 = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 1 = 0\}$.

   ii) eje $y \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, z = 3\}$.

   iii) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sin\alpha, \\ y & = & \cos\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ z & = & \alpha. \end{array}\right.$

   iv) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 + 2\sigma - 3\theta, \\ y & = & -2 + 3\sigma, \qquad\quad \sigma, \theta \in \mathbb{R}, \\ z & = & 3\sigma + 3\theta. \end{array}\right.$

   v) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 + 5\theta, \\ y & = & \theta^2, \qquad\quad \theta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ z & = & \gamma. \end{array}\right.$