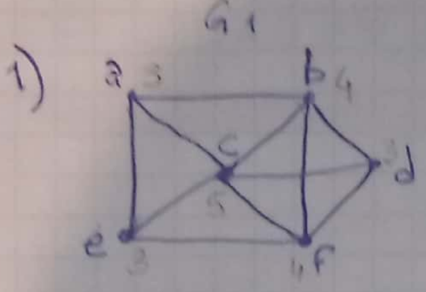
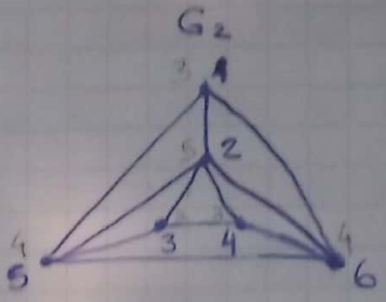
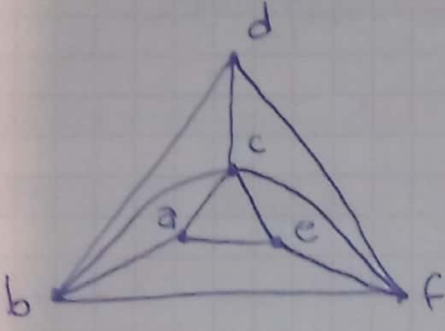
1

Tomás
Pitinari
LCC
P-5039/3

1) 





Existe $f: G_1 \to G_2$ la cual hace que G_1 y G_2 sean isomorfos

$f(a) = 3$, $f(b) = 5$, $f(c) = 2$, $f(d) = 1$, $f(e) = 4$ y $f(f) = 6$

2) c) Si G es un grafo euleriano, entonces todos los vertices de G tienen grado par. Pasando al grafo $L(G)$, cada vertice es una arista de G, entonces cada vertice de $L(G)$, por ejemplo $\{x,y\}$, $x,y \in V(G)$, va a ser adyacente con todas las aristas incidentes de x e y descontando la arista $\{x,y\}$ para ambos.

Como se dijo al principio, $\forall x \in V(G) \Rightarrow deg(x)$ es par, con eso llegamos que $\forall e = \{x,y\} \in E(G)\ \exists e = \{x,y\} \in V(L(G)) \,/\, deg(e) =$

$$\underbrace{(\underbrace{deg(x)}_{\text{par}} - 1)}_{\text{impar}} + \underbrace{(\underbrace{deg(y)}_{\text{par}} - 1)}_{\text{impar}} \Rightarrow deg(e) \text{ es par}$$

$\therefore$ Si G es un grafo euleriano, $L(G)$ tambien lo es

b) Si G es conexo, entonces $\forall a, b \in V(G)$, $\exists$ un camino de a hasta b, que es representable como una sucecion de aristas. ~~Si~~

$$\overline{ab} = \{\{a, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{i-1}, v_i\}, \{v_i, b\}\}$$

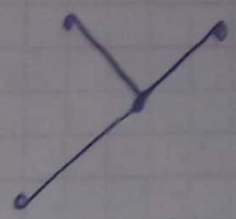
Tomás Pitinari LCC

Cada una de esas aristas representan un vertice en L(G) y todos van a ser adyacentes, ya que comparten un vertice ~~adya~~ incidente, por ejemplo $\{v_{i-1}, v_i\}$ y $\{v_i, b\}$ comparten a v_i, por lo tanto son adyacentes. Entonces para todo $\{a, x\}$ existe un camino hasta $\{y, b\}$, por lo tanto L(G) tambien es conexo.

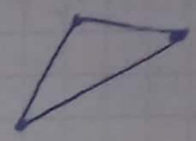
a) Teniendo G un grafo euleriano, significa que se puede pasar por todas las aristas 1 vez, luego la definición de ciclo hamiltoniano dice que debe ser un ciclo que pase por todos los vertices. La ~~primera~~ segunda parte ya se cumple, ya que los vertices de L(G) son las aristas de G, y existe un ~~recorrido~~ circuito euleriano en G. Falta mencionar que un ~~recorrido~~ circuito en G es es un ciclo en L(G). No habran ~~aristas~~ ~~se~~ vertices repetidos ya que el circuito euleriano nos dice que solo pasa una unica vez por cada arista, y tampoco habran aristas repetida, ya que existe una unica arista en L(G), para 2 aristas de G. Por lo tanto un circuito euleriano en G implica un ciclo hamiltoniano en L(G)

Tomás
Pitinari
LCC

d) Podemos dar el grafo G:



no euleriano ya que todos sus vertices son de grado impar, pero su $L(G)$:



isomorfo a un K_3 con todos sus vertices de grado par, por lo tanto contiene un circuito euleriano.

e) para el grafo K_5 sabemos que es 4-regular y tiene $|E(K_5)| = \frac{4.5}{2} = 10 = |V(L(K_5))|$

Se vio antes en el apartado c), que el grado de un $e \in V(L(K_5))$, formado como $\{x,y\} / x,y \in V(K_5)$, es $deg(e) = deg(x) + deg(y) - 2$

Entonces $|E(L(K_5))| = \frac{4+4-2.10}{2} = 30$

Si asumimos que $L(K_5)$ es planar, se debería cumplir

$$m \leq 3n - 6 \;/\; m = |E(L(K_5))| \wedge n = |V(L(K_5))|$$

pero llegamos a $30 > 24$, por lo tanto queda mostrado por absurdo, que no es planar.

3) Si sabemos que $G = (V, E)$ es planar y conexo, entonces el teorema de euler nos dice que: $n - m + r = 2$

$n = |V|$ $m = |E| = \frac{4.n}{2}$ (por se 4-regular) y $r = 10$

suma de grados / 2 cantidad de regiones (por dato)

Tomás
Pitinari
LCC

Si planteamos la ecuación, nos queda:

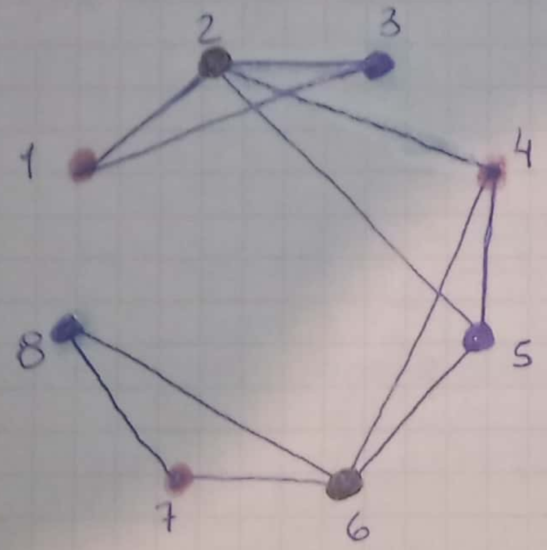
$$n - \frac{4n}{2} + 10 = 2$$

$$-n = -8$$

$$|V| = \boxed{n = 8}$$

Entonces G tiene 8 vertices

4) Planteamos un grafo donde cada uno de sus vertices equivalen a un horario de paseo y sus aristas equivalen a si hay solapamiento de horarios entre paseos:



Al intentar colorear el grafo pensamos como ~~de~~ cada color es un automovil diferente, al intentar ~~lo~~ colorear como arriba, llegamos a que es 3-coloreable y que no puede ser 2-coloreable, ya que contiene un ciclo de long. impar 1-2-3-1. Por lo tanto la menor cantidad de automoviles diferentes que hay que alquilar, es 3. (La cant. de colores)