Pitinari
Tomás
P-5039/3
LCC
1

1)

$$A \overset{*1}{=} LU \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} \qquad L = \left(E_{32}(-2)\,E_{31}(-2)\,E_{21}(-2)\right)^{-1}$$

$$L = E_{21}(2)\,E_{31}(2)\,E_{32}(2)$$

a)

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & g+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & g+8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{21}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & g+8 \end{bmatrix} = A$$

$*^1$ ya que Toda matriz A tiene una descomposicion PA = LU, siendo P las permutaciones de filas (las cuales el ejercicio no tiene), L una matriz triangular inferior obtenida a partir de los multiplicadores $E_{ij}(c)$ y U una matriz triangular superior.

b) Como el rango de una matriz esta dado por la cantidad de pivotes no nulos de la matriz escalonada de su descomposicion LU, vemos que sin dar ningun valor a g, la matriz U tiene 2 pivotes no nulos U_1^1 y U_2^2.

c) Como vimos en el apartado anterior U tiene al menos 2 pivotes no nulos, por lo que si $g=0$, $rg(A)=2$.

d) Si $g=0$, entonces la matriz va a tener una variable libre: $Ax = LUx = Ux = 0$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge Ux = 0$$

Tomamos a x_3 como variable libre, $x_3 = w \in \mathbb{R}$

$$x_1 + x_2 + 3w = 0 \Longrightarrow x_1 = -x_2 + 3w = 4w$$

$$x_2 + w = 0 \Longrightarrow \boxed{x_2 = -w}$$

$N(A) = \{(4w, -w, w), w \in \mathbb{R}\}$

e) Para buscar la solución de $Ax = (1,-1,-2)^T$ usamos la matriz ampliada y aplicamos operaciones elementales:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{31}(-2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Se ve que nos quedaría $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$, absurdo.
Es sistema es incompatible (no tiene solución).

Pitinari
Tomás
P-5039/3
LCC
2

f) Si $g \neq 0$, entonces $rg(A) = 3$ y $A \in \mathbb{R}_{3\times3}$, por lo tanto A es no ~~se~~ singular, entonces A tiene una solución unica para cada sistema, $N(A) = \{0\}$, tambien podemos decir que $C(A) = \{A^i : i \in \{1,2,3\}\}$ son linealmente independientes, ya que ~~existe~~ no existe una combinación lineal de $C(A)$ con coeficientes no nulos que sea igual a 0.

$$C(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ g+8 \end{bmatrix} \right\}$$

2) a) 1) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+2y+3z \leq 0\}$

Sabemos que $A \subset \mathbb{R}^3$, ahora tenemos que probar que se cumplen las propiedades de los espacios vec:

Dados $u, v, w \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Clausura suma: $u \leq 0 \land v \leq 0 \Rightarrow u+v \leq 0$
2. Asociativa y conmutativa se heredan de $\mathbb{R}^3$
3. $\exists\, 0 \in A$, ya que $2 0 + 2 . 0 + 3 . 0 = 0 \leq 0$ y $v + 0 = v$
4. Vemos que no existe un elemento neutro de la suma, ya que por ser un subconjunto de $\mathbb{R}^3$, el opuesto de v es $-v$, y si $v \in A \Rightarrow v \leq 0 \Rightarrow -v \geq 0$.

A no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

2) $B = \left\{ b \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = b \ ,\ x \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Podemos resolver la matriz para buscar su escalonada:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Al llegar a su forma escalonada de M, vemos que es no singular, por lo tanto $\forall\, b \in \mathbb{R}^3\ \exists\, x \in \mathbb{R}^3 / Mx = b$. 5
Como todos los elementos de $b \in B$, entonces $b \in \mathbb{R}^3$.
Para $b \in B$, se verifica

* $\exists\, 0 \in B$, ya que para un $x = 0$, se tiene $Mx = 0$, $b + 0 = b$ (neutro)
* $\exists\, -b \in B$, ya que si existe $x / Mx = b \Rightarrow$ existe $-x / M(-x) = -Mx = -b$
y $b + (-b) = 0$ (opuesto)

El resto de las propiedades se heredan de $\mathbb{R}^3$

$\therefore$ B es espacio vectorial $\Rightarrow$ B es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

b) Como para cualquier $b \in \mathbb{R}^3$, $\exists\, x \in \mathbb{R}^3 / Mx = b$, entonces todos los elementos de $\mathbb{R}^3$ están en B

6

Pitinari
Tomás
P-5039/3
LCC
3

Por lo tanto podemos utilizar una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

3) a) ~~La cardinalidad de B_1 es 3, si mostramos que sea l.i. es una base. Para $a,b,c \in \mathbb{R}$~~

~~$a(3+x)+b(x^2+5)+c(-2)=0$~~

Los polinomios pueden ser expresados por vectores y la variable. Si $p \in \mathbb{R}^2[x]$, existe un a, b y c, tal que $a x^2 + b x + c x^0 = p$ y $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Entonces una base de $\mathbb{R}^2[x]$ tendría cardinalidad 3 y vectores no nulos en ella, ambas bases tienen cardinalidad 3, pero B_2 tiene un vector nulo, con eso, si los vectores de B_1 son l.i. entonces B_1 es base.

$$\alpha_1(0,1,2)+\alpha_2(1,0,3)+\alpha_3(0,0,-2)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow -2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = 0$$

Entonces los vectores de B_1 son l.i. $\therefore B_1$ es base

b) Tenemos que B_2 no era base de $\mathbb{R}^2[x]$ ya que tenía ~~una compon~~ un vector nulo. Si ~~tenemos~~ tomamos $B_3 = \{x, 1, x^2\}$ o escrito como vectores de $\mathbb{R}^3$, $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$ es base ya que tiene cardinal 3, como su dimensión, y falta probar que es l.i.:

$$\alpha_1(0,1,0)+\alpha_2(0,0,1)+\alpha_3(1,0,0)=(0,0,0)$$

$$\begin{cases}\alpha_3=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}$$

$\therefore B_3$ tiene vectores l.i. $\Longrightarrow B_3$ es base de $\mathbb{R}^2[x]$

c) ~~Dados datos~~ Queremos encontrar la matriz A, tal que

$$A.\begin{bmatrix} B_1^1 & B_1^2 & B_1^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_3^1 & B_3^2 & B_3^3\end{bmatrix}$$

$$A.\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\Longrightarrow A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&3&-2\end{bmatrix}^{-1}$$

Busco la inversa con Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\2&3&-2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{P_{12}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\2&3&-2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{E_{31}(-2)}$$

Pitinari
Tomas
P-5039/3
LCC
4

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = 1 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{23} P_{12} I$$

$$\cancel{A =} \quad A = P_{23} P_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = P_{23} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A es la matriz de cambio de base

4) a) ~~$x \in \mathbb{R}^2$~~ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$A_1 . x = (-x_1, x_2) \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 \, x = (x_2, 0) \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) matriz asociada de $T_1 \circ T_2$ es $A_1 A_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1 A_2$$

d) T_1 rota 90° ~~[illegible]~~ ~~una recta~~ un vector en el plano, igualmente T_1^{-1}. T_2 hace una reflexion del ~~[illegible]~~ vector y luego una proyección en el eje x

Luego $T_1 \circ T_2$, hace una reflexión de un vector, luego la proyección del mismo en el eje x y finalmente una rotación de 90°.