



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA  
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 2

**EXAMEN FINAL**

Apellido y nombre:

Carrera:

Legajo:

**PARTE PRÁCTICA**

**Justificar debidamente todas sus respuestas.**

1. Sea  $H$  el lugar geométrico determinado por el conjunto de todos los puntos equidistantes del punto  $(0, 2, 0)$  y del plano  $y = -2$ .
  - (a) Identificar la superficie que determina  $H$ .
  - (b) Sea  $C$  la curva obtenida al considerar la traza de  $H$  sobre el plano  $y = 2$ . Identifique dicha curva y presente sus elementos (centro, radio, foco, vértices, eje focal, asíntotas, según corresponda). Realizar un esbozo de la curva.
  - (c) Escribir las ecuaciones paramétricas de  $C$ .
2. Sean los vectores  $v_1 = (1, \alpha, 3)^t$ ,  $v_2 = (-1, 5, 2)^t$ ,  $v_3 = (2, -4, -1)^t$ ,  $v_4 = (3, 1, 1)^t$  de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Considerar la matriz cuadrada  $A = (v_1|v_2|v_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ; matriz cuya primer, segunda y tercer columna son  $v_1, v_2$  y  $v_3$  respectivamente. Determinar para qué valores de  $\alpha$  el sistema  $AX = v_4$  donde  $X = (x, y, z)^t$  resulta: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.
  - (b) Determinar, si existen, los valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para que el conjunto  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  sea base de  $\mathbb{R}^3$ . En caso afirmativo, describir  $v_4$  como combinación lineal de los elementos de  $B$ .
  - (c) Describir brevemente cómo los dos ítems anteriores se conectan entre sí.
3. Establecer la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificar adecuadamente la respuesta.
  - (a) Uno de los términos del desarrollo de  $(5x + 2y^2)^7$  es  $262500x^2y^{10}$ .
  - (b) En una estantería se ordenan 8 libros: 4 de computación, 3 de lengua y 1 de física. Si los libros son todos diferentes y todos los libros de la misma materia deben quedar juntos, hay 864 formas de ordenarlos.
  - (c) Sea la matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $|A| = -3$  y  $B$  la matriz obtenida intercambiando la primera y segunda columna de  $A$ , entonces  $\left|(2A^tB)^{-1}\right| = -72$ .

---

### Complemento para alumnos libres

1. Dada la recta  $r : (x, y, z) = (2t, 1 - t, 3 + t)$  con  $t \in \mathbb{R}$  y los puntos  $A(0, 1, 1)$  y  $B = (h, 0, 2)$  se pide:
  - (a) Hallar la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al punto  $A$  y a la recta  $r$ .
  - (b) Calcular los valores de  $h$  reales, si existen, para que la distancia del punto  $B$  al plano  $\pi$  sea igual a  $\sqrt{5}$ .

---

## PARTE TEÓRICA

1. En los siguientes items, indique la veracidad o falsedad de los enunciados **justificando** adecuadamente.

- (a) Si  $f: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  es inyectiva no puede ser biyectiva.
- (b) Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , donde  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $\delta$  indicando la función Delta de Kroenecker. Entonces  $\det(A) = 1$ .
- (c) El determinante de una matriz que se obtiene intercambiando dos columnas es el opuesto del determinante de la matriz original.

2. Seleccione la o las opciones correctas, **justificando** adecuadamente su elección:

(a) Sean  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in \mathbb{F}^{5 \times 5}$ . Entonces el elemento  $[ABC]_{2,4}$  es igual a:

- i.  $\sum_{k=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{j4} b_{kj} a_{2k}$ .
- ii.  $\sum_{k=1}^5 \sum_{j=1}^5 a_{kj} b_{4j} c_{j2}$ .
- iii.  $\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^4 a_{2k} b_{kj} c_{j4}$ .
- iv.  $\sum_{k=1}^5 \sum_{j=1}^5 a_{2k} b_{kj} c_{j4}$ .

(b) Considere las siguientes matrices:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dichas matrices representan las matrices ampliadas de tres sistemas de ecuaciones,  $(S_1)$ ,  $(S_2)$  y  $(S_3)$ , respectivamente.

- i. Los sistemas  $S_2$  y  $S_3$  son homogéneos.
- ii. El sistema  $S_1$  es compatible determinado.
- iii. El sistema  $S_3$  tiene dos variables libres.
- iv. El cardinal del conjunto solución del sistema  $S_2$  es finito.

3. (a) Defina de manera coloquial y simbólica el concepto de conjunto generador de  $\mathbb{F}^n$  para un cuerpo  $\mathbb{F}$  y un natural  $n$ .

(b) Explique porqué un conjunto de 2 vectores de  $\mathbb{R}^3$  no puede ser generador del espacio.

4. (a) Defina geométricamente el concepto de hipérbola.

(b) Deduzca las ecuaciones paramétricas de la rama de una hipérbola con eje focal  $x = x_0$  ubicada en el semiplano  $x > x_0$ .

---

5. En cada ítem proporcione un ejemplo de las ecuaciones que identifican el lugar geométrico del espacio indicado.

- (a) Parábola en el plano  $x = 1$  de vértice el punto  $(1, 2, 3)$ .
- (b) Hiperboloide de una hoja con eje de simetría el eje  $z = 3$  y centro de simetría el punto  $(1, 2, 3)$ .
- (c) Hélice circular de paso proporcional a 2.
- (d) Cono doble recto con vértice en el punto  $(1, 2, 3)$ .
- (e) Recta por el origen (en forma cartesiana).
- (f) Plano por el origen (en forma paramétrica).