Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{1+2+3+\cdots+n \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}}_{\mathsf{P}(n)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx+1}_{\mathsf{P}(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia P(n) un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. P(0) è vero (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$ (passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{\mathsf{P}(n)}$.

CASO BASE : P(0) $\quad 2^0 \geq 1$ $\quad$ vero

PASSO INDUTTIVO : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$2^n \geq n+1 \;\to\; 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$

$2^{n+1} \;\geq\; 2n+2 \geq n+2$

Dunque abbiamo dimostrato che P$(n) \to$ P$(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale P(n)

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : P(0) : "0 = 0" è vera

PASSO INDUTTIVO : $\quad$ Assumo che P(n) è vera e dimostro che è vera anche P$(n+1)$

$$\text{ovvero} \qquad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \;=\; \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $\mathsf{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $\mathsf{P}(0)$ è vera (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (passo induttivo)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad \mathsf{P}(n)$ è vera allora lo è anche $\mathsf{P}(m)$ (ipotesi induttiva)
Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $\mathsf{P}(n)$ si usa la condizione che $\mathsf{P}(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$. Ovvero, se per un predicato $\mathsf{P}(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_o
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 \mathsf{P}(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{\mathsf{P}(n)}$

CASO BASE : $\mathsf{P}(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad \mathsf{P}(m)) \rightarrow \mathsf{P}(n)$

Ovvero, assumendo che $\mathsf{P}(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allore è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1,m_2 diversi da m e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \qquad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $\mathsf{P}(m_1)$ e $\mathsf{P}(m_2)$ sono vere.

2 Coefficenti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $\mathsf{C}_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $\mathsf{C}_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \qquad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{2} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{0} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \qquad (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $\quad]M, +\infty[\quad$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $\quad]-\infty, -M[\quad$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$

Dato $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a $\text{dom} f$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$
Si dice che f ha limite l per $x \to x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall\, V$ intorno di $l \quad \exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$
OSSERVAZIONE :

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \to x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim : Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di $\mathbb{R}$

$\exists\, V_1$ intorno di l_1

$\exists\, V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

D'altra parte

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists\, U_1$ intorno di x_0 tale che
$x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists\, U_2$ intorno di x_0 tale che
$x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in U \setminus \{x_0\},\ \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ASSURDO poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x\to 2} 2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$
$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta\ ,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{2\},\ x \neq 2}_{0<|x-2|<\delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)<\epsilon|}$

ossia

$$|2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \circledast$$

Parto da $\circledast$

$$2\,|x-2|\ \underbrace{|cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \quad \leq \quad 2\,|x-2| \quad < \quad \epsilon$$

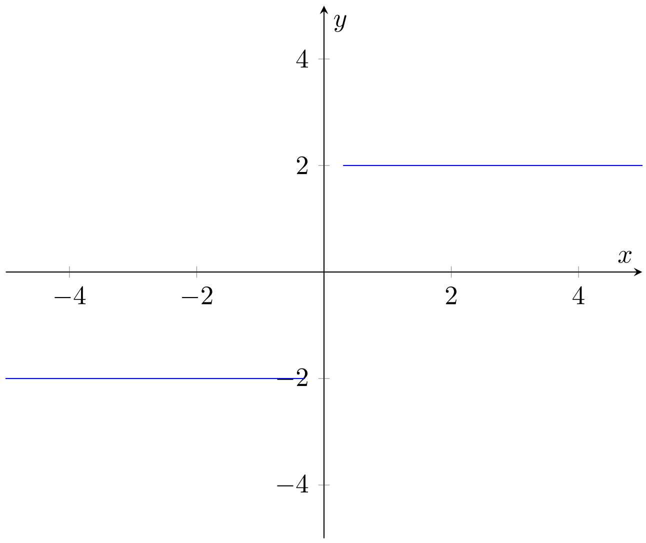
Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2\,|x-2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$\begin{array}{rl} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{array}$$



Se $x \to 0^-$ sgn $x \to -1$
Se $x \to 0^+$ sgn $x \to 1$

Quindi $\nexists \lim_{x\to 0}$ sgn x perchè affinchè esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r+\epsilon[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r < a < r+\epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r-\epsilon, r[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r-\epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione : devo mostrare $\forall\ M > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0+\delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \tfrac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}, \quad l \in \mathbb{R}, \quad x_0$ di acc. per dom$f$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop : Sia $x_0,\ l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione :

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per dom$f$ e supp.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad > \ 0$$

Allora $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim : Considero il caso $l \in \mathbb{R}, \ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poichè $l > 0 \Rightarrow \ \exists\, V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f, \ x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poichè $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x > 0)$$

$\forall x \in U$ dom$f, \ x \neq x_0$
Oss : vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano $f, \ g$ funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per dom$f \cap$ dom$g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{definitivamente per } x \to x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{e} \qquad l_g = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss : se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \begin{matrix} x \to x_0 \\ \exists \ l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow \quad l_f < l_g$

Esempio 8

$0 < e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \to -\infty} 0$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R}, \ f, g, h \ = X \to \mathbb{R}, \ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X. Se

$$\circledast \qquad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \text{def. per } x \to x_0$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

Dim : Suppongo per semplicità che $\circledast$ valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\ \exists\, U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U \ \cap \ \underbrace{\text{dom} f}_{X}) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \ \exists\, U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f \ \cap \ X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$
$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \Rightarrow \ \exists\, U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g \ \cap \ X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$
Prendo $U = U_f \ \cap \ U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U \ \cap \ X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, \quad g(x) \in V$
Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e V intervallo $\qquad$ allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Svolgimento : Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \qquad \text{def. per } x\to 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{1/2}=\frac{1}{2}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y\to y_0} g(y)=l$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$
3. $f(x)\neq y_0$ def. per $x\to x_0$

allora

$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\lim_{y\to y_0} g(y)=l \qquad$ con $y=f(x)$

Esempio 11

$$\lim_{x\to 0} g(x\cdot\sin\frac{1}{x}) \text{ non esiste}$$

$g(y)=\qquad \cos y$ se $y\neq 0 \qquad 0$ se $y=0$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R},\ f, g\colon X \to \mathbb{R},\ x_0$ punto di acc. per $X,\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_g, \quad l_f,\ l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} (c\, f(x)) = c\, l_f$
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$ se $l_g \neq 0$
5. $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f}$ se $l_f \neq 0$

Oss : il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinitro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f > 0$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$

Svolgimento :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln((f(x)^{g(x)})} = \\ = &\lim_{x \to x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \to l_g \ln l_f} e^t = \\ = &e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\ = &l_f^{l_g} \end{aligned}$$

Proposizione : Sia $X \subseteq \mathbb{R},\ f, g : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per $X,\ f$ infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \to x_0$. Allora:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f. infinitesima per f. limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x+1}) + \sin(\frac{1}{2^x+1}) - \sin(\frac{1}{2^x+1})] = \lim_{x \to +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x+1}) - \sin(\frac{1}{2^x+1})] =$$

$y = \dfrac{1}{2^x+1}$ $\qquad y \to 0$ per $x \to +\infty$

$$= \lim_{y \to 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] = \lim_{y \to 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{1} - \sin y] =$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

Svolgimento : Pongo $y=\arctan x \Leftrightarrow x=\tan y$
Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}}=$$

$$\lim_{y\to 0} y\cdot\frac{\cos y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\underbrace{(\frac{\sin y}{y})^{-1}}_{1}\cdot\cos y=1\cdot 1=1$$

Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\ \cos\frac{1}{x^2}$$

Soluzione : il limite vale 0 poichè $\sqrt{|x|}$ è infinitesima in $x=0$ e $\cos\frac{1}{x^2}$ è limitata def. per $x\to 0$

Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty}(x+\sin x)$$

Soluzione : $\quad x+\sin x\geq \underbrace{x-1}_{+\infty} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x\to +\infty} x+\sin x=+\infty$$

Definizione 8: Forme Indeterminate

$f,g:\ X\to\mathbb{R},\quad x_0$ punto di acc. per X

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty \qquad \text{F.I. } 0\cdot\infty$$

Oppure

$$\text{F.I.}\qquad +\infty-\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0^0 \qquad +\infty^0 \qquad 1^{+\infty}$$

Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x=e^x \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x=\lim_{y\to\pm\infty}(1+\frac{1}{y})^{\alpha y}=\lim_{y\to\pm\infty}(\underbrace{(1+\frac{1}{y})^y}_{e})^{\alpha}=e^{\alpha}\quad\checkmark$$

Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_{e}) = \ln e = 1 \qquad \checkmark$$

Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \qquad\qquad y = e^x - 1$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \qquad \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)}$$

$$=1 \quad \checkmark$$

Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \qquad \forall \alpha > 0$$

Esempio 20

$$\lim_{x\to +\infty} (\frac{1+|\sin x|}{x})^x \qquad \text{F.I. } 0^\infty$$

Svolgimento : Uso il teorema del confronto
Visto che $0 \leq |\sin x| \leq 1$ allora $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$, quindi $\frac{1}{x} \leq \frac{1+\sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$.
I due estremi tendono a 0 per $x \to +\infty$ quindi anche $\frac{1+|\sin x|}{x}$ tende a 0.

Esempio 21

$$\lim_{x\to -\infty} (1 + 3\sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x\to -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x})\ln(1+3\sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ per $y \to 0$Quindi:

$$\lim_{x\to -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1+3\sin e^x) + \frac{3}{3\sin e^x} \cdot \ln(1+3\sin e^x)]$$

Adesso pongo $y = 3\sin e^x$ che tende a 0 per $x \to -\infty$ e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \qquad \ln(1 + 3\sin e^x) = 0 \qquad 3 \cdot \underbrace{\frac{ln(1+y)}{y}}_{1} = 3$$

Il risultato è quindi $1 \cdot 0 + 3 = 3$

Definizione 10: O-Piccolo

Date f, g funzioni reali di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per dom$f$ $\cap$ dom$g$, $g(x) \neq 0$ def. per $x \to x_0$
Si dice che f è "o-piccolo" di g per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive: $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ $\quad f(x) \in o(g(x))$ per $x \to x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \to x_0$$