

Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1 Principio di Induzione	2
2 Coefficienti Binomiali	3
2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$	4

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare prediciati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. $P(0)$ è vero (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$ (**passo induttivo**)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{P(n)}$.

CASO BASE: $P(0) \quad 2^0 \geq 1 \quad$ vero

PASSO INDUTTIVO: $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$$2^n \geq n+1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2$$

Dunque abbiamo dimostrato che $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $P(n)$

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : $P(0) : "0 = 0"$ è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che $P(n)$ è vera e dimostro che è vera anche $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $P(0)$ è vera (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (**passo induttivo**)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$ è vera allora lo è anche $P(n)$ (**ipotesi induttiva**)

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $P(n)$ si usa la condizione che $P(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$.
Ovvero, se per un predicato $P(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_0
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 P(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE : $P(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che $P(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1, m_2 diversi da n e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $P(m_1)$ e $P(m_2)$ sono vere.

2 Coefficienti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $C_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $C_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k}$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k}$ $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \tag{4}$$