Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{1+2+3+\cdots+n \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}}_{\mathsf{P}(n)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx+1}_{\mathsf{P}(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia P(n) un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. P(0) è vero (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$ (passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{\mathsf{P}(n)}$.

<u>CASO BASE</u> : P(0) $\quad 2^0 \geq 1 \quad$ vero

<u>PASSO INDUTTIVO</u> : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$2^n \geq n+1 \;\to\; 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$

$2^{n+1} \;\geq\; 2n+2 \geq n+2$

Dunque abbiamo dimostrato che P$(n) \to$ P$(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale P(n)

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>CASO BASE</u> : P(0) : "0 = 0" è vera

<u>PASSO INDUTTIVO</u> : Assumo che P(n) è vera e dimostro che è vera anche P$(n+1)$

$$\text{ovvero} \qquad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \;=\; \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $\mathsf{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $\mathsf{P}(0)$ è vera (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (passo induttivo)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad \mathsf{P}(n)$ è vera allora lo è anche $\mathsf{P}(m)$ (ipotesi induttiva)
Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $\mathsf{P}(n)$ si usa la condizione che $\mathsf{P}(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$. Ovvero, se per un predicato $\mathsf{P}(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_o
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 \mathsf{P}(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{\mathsf{P}(n)}$

CASO BASE : $\mathsf{P}(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad \mathsf{P}(m)) \rightarrow \mathsf{P}(n)$

Ovvero, assumendo che $\mathsf{P}(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allore è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1,m_2 diversi da m e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \qquad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $\mathsf{P}(m_1)$ e $\mathsf{P}(m_2)$ sono vere.

2 Coefficenti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $\mathsf{C}_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $\mathsf{C}_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \qquad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{2} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{0} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \qquad (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $]-\infty, -M[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)

Dato $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$, $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a dom$f$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$
Si dice che f ha limite l per $x \to x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall\ V$ intorno di $l \quad \exists\ U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$
OSSERVAZIONE :

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \to x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim : Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di $\mathbb{R}$

$\exists\, V_1$ intorno di l_1

$\exists\, V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

D'altra parte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists\, U_1$ intorno di x_0 tale che
$x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists\, U_2$ intorno di x_0 tale che
$x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in \quad U \setminus \{x_0\},\ \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ASSURDO poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \to 2} 2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$
$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ x \neq 2}_{0<|x-2|<\delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)<\epsilon|}$

ossia

$$|2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \circledast$$

Parto da $\circledast$

$$2\,|x-2|\ \underbrace{|cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \quad \leq \quad 2\,|x-2| \quad < \quad \epsilon$$

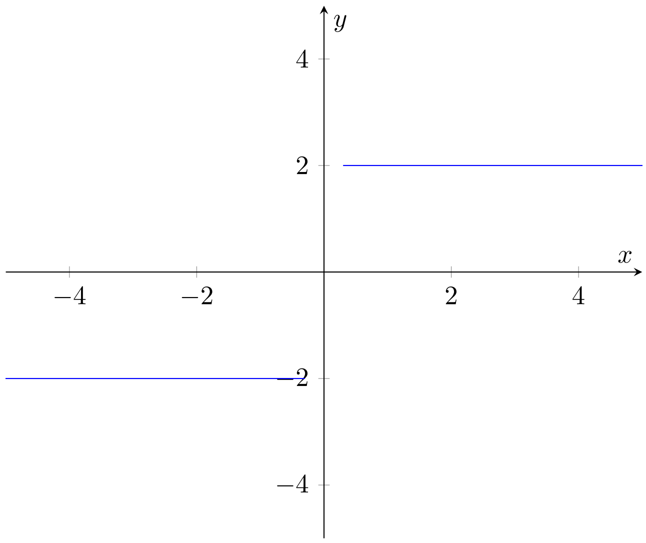
Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2\,|x-2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$\begin{array}{rl} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{array}$$



Se $x \to 0^-$ sgn $x \to -1$
Se $x \to 0^+$ sgn $x \to 1$

Quindi $\nexists \lim_{x\to 0}$ sgn x perchè affinchè esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r+\epsilon[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r < a < r+\epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r-\epsilon, r[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r-\epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione : devo mostrare $\forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0+\delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}, \quad l \in \mathbb{R}, \quad x_0$ di acc. per dom$f$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop : Sia $x_0,\ l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione :

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per dom$f$ e supp.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad > \ 0$$

Allora $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim : Considero il caso $l \in \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poichè $l > 0 \Rightarrow\ \exists\, V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f,\ x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poichè $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x > 0)$$

$\forall x \in U$ dom$f,\ x \neq x_0$
Oss : vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano $f,\ g$ funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per dom$f \cap$ dom$g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{definitivamente per } x \to x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{e} \qquad l_g = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss : se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \begin{matrix} x \to x_0 \\ \exists\ l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow \quad l_f < l_g$

Esempio 8

$0 < e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \to -\infty} 0$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R},\ f, g, h\ = X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X. Se

$$\circledast \qquad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \text{def. per } x \to x_0$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

Dim : Suppongo per semplicità che $\circledast$ valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U\ \cap \underbrace{\text{dom} f)}_{X} \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$