

Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Principio di Induzione | 2 |
| 2 | Coefficienti Binomiali | 3 |
| 2.1 | Proprietà di $\binom{n}{k}$ | 4 |
| 3 | Limiti di funzioni | 4 |
| 3.1 | O-piccoli | 12 |
| 4 | Successioni | 16 |
| 5 | Funzioni Continue | 19 |
| 6 | Derivata | 21 |
| 6.1 | Massimo e minimo assoluto di una funzione | 25 |
| 7 | Studio di Funzione | 27 |

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. $P(0)$ è vero (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$ (**passo induttivo**)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n + 1}_{P(n)}$.

CASO BASE : $P(0) : 2^0 \geq 1$ vero

PASSO INDUTTIVO : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n + 1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n + 2$

$$2^n \geq n + 1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n + 1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$$

Dunque abbiamo dimostrato che $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $P(n)$

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : $P(0) : "0 = 0"$ è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che $P(n)$ è vera e dimostro che è vera anche $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $P(0)$ è vera (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (passo induttivo)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$ è vera allora lo è anche $P(n)$ (ipotesi induttiva)

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $P(n)$ si usa la condizione che $P(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$.
Ovvero, se per un predicato $P(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_0
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 P(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE : $P(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che $P(m)$ vale $\forall 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1, m_2 diversi da m e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $P(m_1)$ e $P(m_2)$ sono vere.

2 Coefficienti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $C_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $C_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$

Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $] -\infty, -M[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)

Dato $f: \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a $\text{dom} f$, $l \in \mathbb{R}$

Si dice che f ha limite l per $x \rightarrow x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \quad \exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$

OSSERVAZIONE:

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \rightarrow x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim: Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di \mathbb{R}

$\exists V_1$ intorno di l_1

$\exists V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ **ASSURDO** poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$$x_0 = 2, \quad l = 0$$

$$f(x) = 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$
$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x-2| < \delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \textcircled{*}$$

Parto da $\textcircled{*}$

$$2|x-2| \underbrace{|\cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x-2| < \epsilon$$

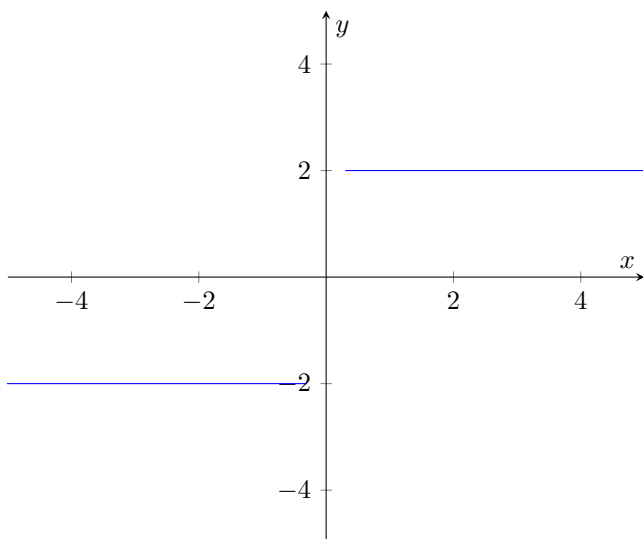
Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2|x-2| < \epsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$\begin{array}{ll} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{array}$$



Se $x \rightarrow 0^-$ $\text{sgn } x \rightarrow -1$

Se $x \rightarrow 0^+$ $\text{sgn } x \rightarrow 1$

Quindi $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$ perchè affinché esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r + \epsilon[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r < a < r + \epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r - \epsilon, r[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r - \epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione: devo mostrare $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, x_0 di acc. per $\text{dom } f$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop: Sia $x_0, l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per $\text{dom} f$ e supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora $\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim: Considero il caso $l \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poichè $l > 0 \Rightarrow \exists V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poichè $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$

Oss: vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per $\text{dom} f \cap \text{dom} g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss: se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ \exists l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow l_f < l_g$

Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X . Se

$$\textcircled{*} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Dim: Suppongo per semplicità che $\textcircled{*}$ valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom} f}_X) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$

Prendo $U = U_f \cap U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, g(x) \in V$

Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \in V$ intervallo allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento: Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ def. per $x \rightarrow x_0$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \quad \text{con } y = f(x)$$

Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} g\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per X , $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g, \quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = c l_f$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g} \quad \text{se } l_g \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f} \quad \text{se } l_f \neq 0$

Oss: il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinistro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln((f(x))^{g(x)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow l_g \ln l_f} e^t = \\ &= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\ &= l_f^{l_g} \end{aligned}$$

Proposizione: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X , f infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \rightarrow x_0$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f . infinitesima per g . limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) + \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] = \\ y = \frac{1}{2^x + 1} \quad y \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty & \\ = \lim_{y \rightarrow 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] = \lim_{y \rightarrow 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_1 - \sin y] &= \\ = 1 - 0 = 1 & \end{aligned}$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Svolgimento: Pongo $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \\ \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\cos y}{\sin y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}}_1 \cdot \cos y = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x^2}$$

Soluzione: il limite vale 0 poichè $\sqrt{|x|}$ è infinitesima in $x = 0$ e $\cos \frac{1}{x^2}$ è limitata def. per $x \rightarrow 0$

Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

Soluzione: $x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{+\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

Definizione 8: Forme Indeterminate

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0$ punto di acc. per X

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{F.I. } 0 \cdot \infty$$

Oppure

$$\text{F.I.} \quad +\infty - \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^0 \quad +\infty^0 \quad 1^{+\infty}$$

Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluzione:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_e^\alpha = e^\alpha \quad \checkmark$$

Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_e) = \ln e = 1 \quad \checkmark$$

Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= & y = e^x - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = & \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

Esempio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + |\sin x|}{x} \right)^x \quad \text{F.I. } 0^\infty$$

Svolgimento : Uso il teorema del confronto

Visto che $0 \leq |\sin x| \leq 1$ allora $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$, quindi $\frac{1}{x} \leq \frac{1 + \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$.
I due estremi tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$ quindi anche $\frac{1 + |\sin x|}{x}$ tende a 0.

Esempio 21

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3 \sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}) \ln(1 + 3 \sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ per $y \rightarrow 0$ Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x) + \frac{3}{3 \sin e^x} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x)]$$

Adesso pongo $y = 3 \sin e^x$ che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \quad \ln(1 + 3 \sin e^x) = 0 \quad 3 \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_1 = 3$$

Il risultato è quindi $1 \cdot 0 + 3 = 3$

3.1 O-piccoli

Definizione 10: O-Piccolo

Date f, g funzioni reali di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per $\text{dom} f \cap \text{dom} g$, $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$
Si dice che f è "o-piccolo" di g per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive: $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ $f(x) \in o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$?

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad x = 0 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ✓ e $1 - \cos x$ è o-piccolo di x per $x \rightarrow 0$

Osservazione :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ f_2(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad \nRightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = lg(x) + o[g(x)] \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Dim :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_l - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_l \right) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f, g, f_1, g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X .

Se $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$ e:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempio 23: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Svolgimento :

Conoscendo gli sviluppi in serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{NUM} = \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + o(x^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} -\frac{x^3}{6} &= o\left(\frac{x^2}{2}\right) && o(x^3) = o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{DEN} = x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= x^2 + x o(x) - 2x^2 - 4x o(x) - 2(o(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

Sviluppi asintotici di alcune funzioni

| | |
|-------------|--|
| $\sin x$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\cos x$ | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\ln(1+x)$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\cosh x$ | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\sinh x$ | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\tan x$ | $x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\arctan x$ | $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$ |
| e^x | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ |

Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

Svolgimento: Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che y deve tendere a 0, abbiamo e^x che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ quindi la sostituzione è valida

Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow x^n = o(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln x = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Quindi:

$$e^x \gg x^n \gg \ln x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^x + \sin x}{3e^x + x^{15} \ln x} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

Svolgimento:

NUM: $x^5 = o(e^x) \quad \frac{x \sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \sin x = 0 \cdot f \text{ limitata} = 0$
 $= e^x + o(e^x)$

DEN: $\frac{x^{15} \ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$ quindi è $o(e^x)$
 $= 3e^x + o(3e^x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{3e^x + o(3e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

Definizione 12: Nomenclatura

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Se $\lim |f(x)| = +\infty, \lim |g(x)| = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow \begin{array}{ll} +\infty & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine superiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ sono } \underline{\text{infiniti dello stesso}} \\ & \underline{\text{ordine}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ 0 & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine inferiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \nexists & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ non sono } \underline{\text{confrontabili}} \end{array}$$

Se $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow \begin{array}{ll} +\infty & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine inferiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ sono } \underline{\text{infiniti dello stesso}} \\ & \underline{\text{ordine}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ 0 & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine superiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \nexists & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ non sono } \underline{\text{confrontabili}} \end{array}$$

Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$ e x^2 sono infiniti dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$

Svolgimento:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \quad \checkmark \quad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 \sin(\sqrt{x}) + (1 - \cos x)^2}{\sqrt{x} \sinh(x^2) + (e^x - 1)^3}$$

Svolgimento: Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

Allora NUM: $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2}) \quad (1 - \cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \rightarrow 0$

$$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$
$$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente}$$

DEN: $\sqrt{x} \sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2}) \quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \rightarrow 0^+$

$$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1} = 4$$

4 Successioni

Definizione 13: Successione

Una successione è una funzione il cui dominio è \mathbb{N} o un suo sottoinsieme infinito, per noi avranno valori in \mathbb{R} , ossia

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le successioni si scrivono col simbolo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Si dice che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \exists N > 0$ tale che $a_n \in V \forall n > N$

Es: $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rightarrow ? \quad n \rightarrow +\infty$

Def: sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione:

1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente se $\exists \lim a_n \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_n = 0$, la successione è infinitesima
2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è divergente se $\lim a_n = \pm\infty$
3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è regolare o determinata se $\exists \lim a_n$
4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare o indeterminata se $\nexists \lim a_n$

Esempio 28

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

Svolgimento :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

a_n è convergente.

Proposizione sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. convergente, allora è anche limitata, ossia $\exists M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

limitata \nRightarrow convergente

convergente \Rightarrow limitata

Teorema 11: Teorema della permanenza del segno

Se $\lim a_n = l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \rightarrow +\infty$

Teorema 12: Teorema del Confronto

$\{a_n\}, \{b_n\}$ siano due succ. tali che $a_n \leq b_n$ def. per $x \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_b$$

Allora $l_a \leq l_b$

Teorema 13: Teorema dei due carabinieri

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ succ. tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ def. per $n \rightarrow +\infty$ Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

Gerarchia degli infiniti :

$$n^n \gg n! \gg e^n \gg n^k \gg \log_b n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad a, b > 1 \quad k > 0$$

Definizione 14: Successioni monotone

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. reale, si dice

- **Crescente:** se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Strett. Crescente:** se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Strett. Decrescente:** se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Es:

$\{2^n\} = 1, 2, 4, \dots$ Strett. crescente

$\{1^n\}$ Costante

$\{\frac{1}{2^n}\}$ Strett. decrescente

$\{1 + \frac{1}{n}\}$ Strett. decrescente

Definizione 15: Successione di Cauchy

Una succ. reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice di Cauchy (o successione fondamentale) se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tale che

$$n, p > N \Rightarrow |a_n - a_p| < \epsilon$$

Es: $a_n = (-1)^n$ non è di Cauchy

$a_n = \frac{1}{1+n}$ è di Cauchy

Una successione reale a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.

Definizione 16: Sottosuccessioni

Data una succ. a_n si dice sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che a_k sia una succ. strett. crescente di numeri naturali, cioè $n_{k+1} > n_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Es: $n_k = 2k, k \in \mathbb{N} \quad a_{n_k} = a_{2k}, k \in \mathbb{N}$ prendo solo gli elementi pari

Osservazione: per mostrare che una succ. non ha limite, mi basta mostrare che due sottosucc. hanno limite diverso o che una non abbia limite.

Teorema 14: Teorema di Bolzano-Weistrass

Sia a_n una succ. limitata. Allora \exists una sottosucc. di a_n convergente

Esempio 29: Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln((n+5)!) - \ln(n! + 5)}{\ln(n^\alpha + \cos(n\pi))}$$

al variare di $\alpha > 0$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \text{NUM} &= \ln((n+5)!) - \ln(n! + 5) = \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!) - \ln(n!(1 + \frac{5}{n!})) = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1))) + \underbrace{\ln(n!) - \ln(n!) - \ln(1 + \frac{5}{n!})}_0 = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1))) = \\ &= \ln(n^5) + o(\ln n^5) \\ &= 5 \ln n + o(\ln n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{DEN} &= \ln(n^\alpha + \underbrace{\cos(n\pi)}_{-1^n}) = \ln(n^\alpha(1 + \frac{-1^n}{n^\alpha})) = \\
&= \ln n^\alpha \cdot \underbrace{\ln(1 + \frac{-1^n}{n^\alpha})}_0 = \\
&= \ln n^\alpha = \\
&= \alpha \ln n + o(\ln n)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln n + o(\ln n)}{\alpha \ln n + o(\ln n)} = \frac{5}{\alpha}$$

5 Funzioni Continue

Definizione 17: Funzione Continua

f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$. f si dice continua in x_0 se è verificata una delle seguenti:

- x_0 è punto isolato del dominio
- Se x_0 non è punto isolato del dominio (ossia x_0 punto di acc. per $\text{dom} f$). Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua se è continua in ogni punto del suo dominio.

Osservazione: Si parla di continuità di f solo nei punti del dominio di f .

Esempio 30

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \text{dom} f$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x_0 \quad \forall x_0 \in \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Def: Se $x_0 \in \text{dom} f$ è punto di acc. per $\text{dom} f$, ho che f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in \text{dom} f$ allora:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 18: Discontinuità di I specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$ punto di acc. destro e sinistro per $\text{dom} f$. Se esistono i limiti finiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di I specie o di salto

Definizione 19: Discontinuità di II specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$, punto di acc. destro e sinistro. Se:

1. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 sia infinito
Oppure
 2. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 non esiste
- Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di II specie

Definizione 20: Discontinuità di III specie

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $l \in \mathbb{R}$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Allora x_0 si dice punto di discontinuità eliminabile per f

Teorema 15: Teorema di Weistrass

Sia f funzione reale definita e continua su $[a, b]$. Allora f ha massimo e minimo (assoluti) in $[a, b]$, cioè $\exists x_m, x_M \in [a, b]$ tale che:

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m) \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M)$$

Es : $\sin[-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = -1 \quad \max_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = 1$$

Teorema 16: Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ chiuso e limitato. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$
Allora $\exists \epsilon \in]a, b[$ tale che $f(\epsilon) = 0$

Teorema 17: Teorema dei valori intermedi

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ è un intervallo, cioè $\forall x_1, x_2 \in I$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

Allora $\exists \epsilon \in I$ tale che $f(\epsilon) = y$

Teorema 18: Continuità della funzione inversa

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile. Allora:

1. f è strettamente monotona
2. la f inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ è continua

6 Derivata

Definizione 21: Calcolo differenziale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione. Se esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ rapporto incrementale} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata di f in x_0 (oppure derivata prima) e si indica con

$$f^1(x_0), Df(x_0), \frac{d}{dx}f(x_0)$$

Inoltre se il limite esiste finito, f si dice derivabile in x_0 .

Se f è derivabile $\forall x_0 \in I$, f si dice derivabile in I

Es: $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ Calcolo $f^1(x_0)$

$$f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad n = 0$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 1}{x - x_0} = 0 \\ f^1(x_0) &= 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n = 1$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \\ f^1(x_0) &= 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Se } n > 1 \quad f(x) = x^n$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \end{aligned}$$

$$\text{Utilizziamo il binomio di Newton: } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x_0^{n-k} \cdot h^k = \\ &= \underbrace{\frac{n!}{n!} \cdot x_0^n \cdot 1}_{x_0^n} + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!} \cdot x_0^{n-1} \cdot h}_{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h} + \underbrace{\frac{n!}{2(n-2)!} \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}_{\frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^n + n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2 - x_0^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} n \cdot x_0^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h}_0 = \\ &= n \cdot x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

nel caso di $n = 2$ (per gli altri valori è analogo)

Tabella Derivate Semplici

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|--------------|---------------------------------------|
| k | 0 |
| x^n | $n \cdot x^{n-1}$ |
| $\ln x $ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x $ | $(\log_a e) \cdot \frac{1}{x}$ |
| e^x | e^x |
| a^x | $(\ln a) \cdot a^x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

Teorema 19: Derivabilità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0 . Allora, f è continua in x_0 .

Dim: Devo mostrare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Poichè f è derivabile in x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{o(x - x_0)}_0) = f(x_0) \quad \checkmark$$

Osservazione: f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ e $x_0 \nRightarrow f$ continua in x_0

Definizione 22: Derivata destra e sinistra

Sia I intervallo di \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata destra di f in x_0 . Se $f_+^1(x_0) \in \mathbb{R}$, f si dice derivabile da destra in x_0

Osservazione :

f derivabile in x_0



f derivabile da destra in x_0
 f derivabile da sinistra in x_0
 $f_+^1(x_0) = f_-^1(x_0)$

Teorema 20: Algebra delle derivate

f, g derivabile in $x_0 \in I$, I intervallo aperto di \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}$

1. αf è derivabile in x_0 e $(\alpha f)^1(x_0) = \alpha f^1(x_0)$
2. $f + g$ è derivabile in x_0 $(f + g)^1(x_0) = f^1(x_0) + g^1(x_0)$
3. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 $(f \cdot g)^1(x_0) = f^1(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g^1(x_0)$
4. Se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 $(\frac{f}{g})^1(x_0) = \frac{f^1(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g^1(x_0)}{g(x_0)^2}$

Derivata della f inversa

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto, f continua, invertibile in I e derivabile in x_0 , tale che $f^1(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è invertibile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$(f^{-1})^1(y_0) = \frac{1}{f^1(x_0)} = f^1(f^{-1}(y_0))$$

Esempio 31

$$D(\arcsin y) = ?$$

Svolgimento :

Posso calcolare la derivata negli $y_0 = \sin x_0$ ove $\sin^1(x_0) \neq 0$ ossia $\cos(x_0) \neq 0$, quindi $x_0 = \pm \pi/2$

$$D \arcsin y = \frac{1}{(D \sin)(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

Teorema 21: Derivata delle f composte

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo I , se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in $g(x_0)$. Allora si ha:

$$Df(g(x_0)) = f^1(g(x_0)) \cdot g^1(x_0)$$

Esempio 32

Calcolare la derivata di x^α con $\alpha > 0$

Svolgimento: $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = f \cdot g(x)$ $f(y) = e^y$ $g(x) = \alpha \log x$
 $f^1(y) = e^y$, $g^1(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x}$ $D(x^\alpha) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \cdot \frac{1}{x}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Definizione 23: Punti di non derivabilità

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con derivata sinistra e destra in x_0 tale che:

$$f_+^1(x_0) \neq f_-^1(x_0)$$

E almeno una delle due sia finita

Definizione 24

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto, $x_0 \in I$ e si indica:

$$f^1(x_0) = \pm\infty$$

Allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale

Se, invece si ha:

$$f_-^1(x_0) = -\infty \quad f_+^1(x_0) = +\infty$$

Oppure il contrario, x_0 si dice punto di cuspid

Teorema 22: Limite della derivata

$I \subseteq \mathbb{R}$, intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Supp:

1. f sia continua in x_0
2. f sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f^1(x)$

Allora $\exists f^1(x_0)$ e vale

$$f^1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^1(x)$$

In particolare se il limite è in \mathbb{R} , f è derivabile.

Definizione 25: Derivata di ordine superiore

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Se f^1 è derivabile in x_0 , allora f è derivabile due volte in x_0 e si dice che tale valore è la derivata seconda di f in x_0 e si indica con

$$f^{11}(x_0), D^2 f(x_0), \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

Osservazione: dalla definizione di derivata seconda si ottiene anche quella di derivata n-esima di f in x_0 .

Formule di Leibniz: Date f, g derivabili n volte in x_0 si ha:

$$(f \cdot g)^n(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^k(x_0)$$

Teorema 23: Teorema di de L'Hopital

Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ f, g derivabile in $]a, b[$. Se:

1. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. $f(x), g(x) \rightarrow 0$ oppure $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow a^+$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Si ha l'analogo per $x \rightarrow b^-$ oppure per $x \rightarrow x_0 \quad x_0 \in]a, b[$

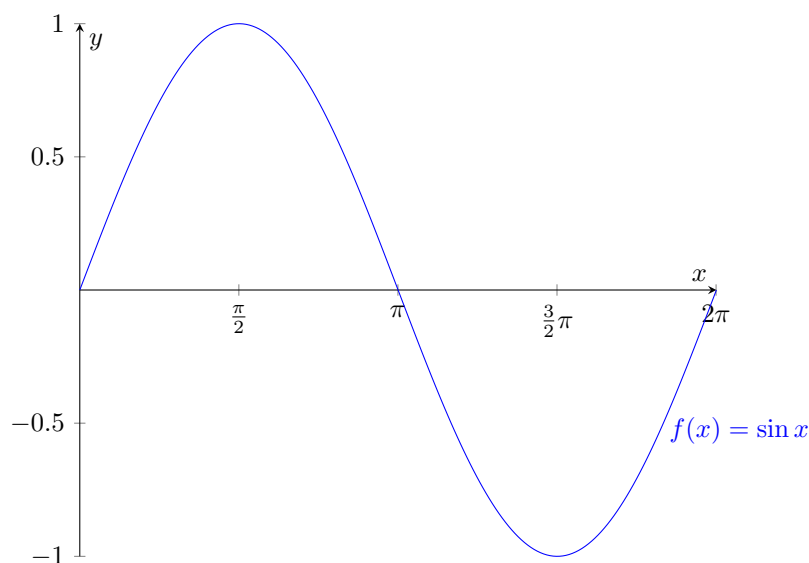
Osservazione : non sempre applicando de l'Hopital si semplifica il limite.

6.1 Massimo e minimo assoluto di una funzione

Definizione 26

M massimo assoluto per f se $\exists x_1 \in X$ tale che $f(x_1) = M$ e $f(x) \leq f(x_1) = M \quad \forall x \in X$ (x_1 è punto di massimo assoluto), per il minimo assoluto si ha la situazione analoga

Esempio : $\sin x$



Punti di massimo assoluto = 1;

Punti di minimo assoluto = -1

Osservazione : per quanto riguarda massimo e minimo locale se $\exists U$ intorno di x_0 si dice che $f(x_0)$ è max o min locale se $f(x_0) \geq f(x)$ oppure $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U \cap X$

Teorema 24: Teorema di Fermat o del punto critico

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[, f$ derivabile in x_0 , f ha estremo locale in x_0 . Allora $f'(x_0) = 0$

Dim : Ipotizziamo che x_0 è punto di estremo locale e f è derivabile in x_0 . Allora esiste $U \subseteq]a, b[$ intorno di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in U$$

Osservo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad x > x_0 \quad \geq 0 \quad x < x_0$$

Applicando la definizione di derivata esiste, quindi, il limite di $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ che è ≤ 0 per $x \rightarrow x_0^+$ oppure ≥ 0 per $x \rightarrow x_0^-$

$$\Rightarrow 0 \leq f_-^1(x_0) = f^1(x_0) = f_+^1(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow f^1(x_0) = 0$$

Osservazione: il teorema non è valido se $x_0 = a$ o $x_0 = b$ e anche se f non è derivabile.

Teorema 25: Teorema di Rolle

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

1. f continua in $[a, b]$
2. f derivabile in $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f^1(c) = 0$

Dim: Se f non c'è nulla da dimostrare poichè $f^1(c) = 0$.

Suppongo che f non sia costante, per il teorema di Weistrass ha max e min in $[a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$$

È necessario dimostrare che x_m o x_M siano all'interno dell'intervallo aperto a, b . Perchè per il teorema di Fermat f^1 si annulla in tali punti.

Suppongo per assurdo che x_m e x_M appartengono agli estremi a e b compresi. Di conseguenza ottengo che, per il terzo punto del teorema di Rolle, $f(a) = f(b)$, quindi, $f(x_m) = f(x_M)$ ciò implica che f è continua, ma all'inizio abbiamo considerato f come non continua.

Teorema 26: Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^1(c)$$

Dim: La dimostrazione viene da se applicando la formula del teorema, la prima parte indica il coefficiente angolare della retta che passa secante per i due estremi a, b che è uguale alla derivata prima della funzione nel punto c , che è il coefficiente angolare della tangente nel punto c

Teorema 27: Teorema di Cauchy

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$g^1(c)[f(b) - f(a)] = f^1(c)[g(b) - g(a)]$$

Se $g^1(x) \neq 0$ vale:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^1(c)}{g^1(c)}$$

Osservazione: Cauchy \Rightarrow Lagrange \Rightarrow Rolle
 $\underbrace{\quad}_{g(x)=x} \quad \underbrace{\quad}_{f(a)=f(b)}$

Teorema 28: Monotonie

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile:

1. f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. f è decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
3. Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strett crescente
4. Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strett decrescente

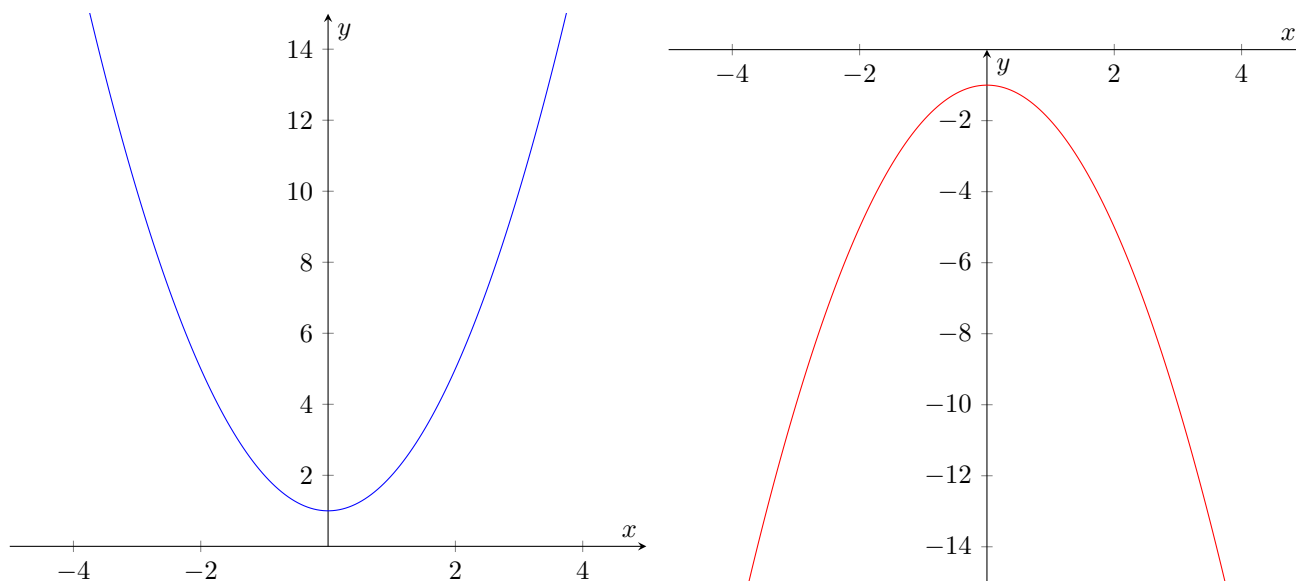
Dim: faccio solo punto 1 (per gli altri il ragionamento è analogo)

Se f è crescente e prendo due punti x, y con $y > x$, allora di conseguenza ho che $f(y) \geq f(x)$, quindi applicando Lagrange ho $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) \geq 0$ quindi se faccio il limite per $y \rightarrow x^+$ ottengo che $f'_+(x) \geq 0$ se ora applico il ragionamento per ogni x ottengo che $f'(x) \geq 0$. ✓

7 Studio di Funzione

Definizione 27: Funzioni concave e convesse

$f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f è convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I$, il segmento che congiunge $x_1, f(x_1)$ e $x_2, f(x_2)$ non ha punto sotto il grafico di f . Se gli unici punti che appartengono al grafico di f sono gli estremi del segmento, allora f si dice strettamente convessa.
 f è concava se $-f$ è convessa, f è strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa



Definizione 28: Asintoti

Sia f funzione reale di variabile reale:

- se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $+\infty$
- se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $-\infty$

Per $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di acc. per dom f

- se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure vale lo stesso per $x \rightarrow x_0^-$, allora la retta $x = x_0$ è asintoto verticale

Se esiste $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m \cdot x = q$, allora la retta $y = m \cdot x + q$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$