

Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1	Principio di Induzione	2
2	Coefficienti Binomiali	3
2.1	Proprietà del binomio	4
3	Limiti di funzioni	4
3.1	O-piccoli	12
4	Successioni	16
5	Funzioni Continue	18
6	Derivata	20
6.1	Massimo e minimo assoluto di una funzione	23
7	Studio di Funzione	25
8	Serie Numeriche	28
9	Calcolo Integrale	36
9.1	Metodi di integrazione	40
9.2	Integrale improprio	42
10	Tabelle Utili	44
10.1	Limiti notevoli	44
10.2	Sviluppi asintotici di alcune funzioni	44
10.3	Tabella Derivate Semplici	45
10.4	Sviluppi di McLaurin	46
10.5	Integrali indefiniti noti	46

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. $P(0)$ è vero (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$ (**passo induttivo**)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{P(n)}$.

CASO BASE : $P(0) : 2^0 \geq 1$ vero

PASSO INDUTTIVO : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$$2^n \geq n+1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2$$

Dunque abbiamo dimostrato che $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $P(n)$

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : $P(0) : "0 = 0"$ è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che $P(n)$ è vera e dimostro che è vera anche $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $P(0)$ è vera (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (passo induttivo)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$ è vera allora lo è anche $P(n)$ (ipotesi induttiva)

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $P(n)$ si usa la condizione che $P(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$.
Ovvero, se per un predicato $P(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_0
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 P(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE : $P(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che $P(m)$ vale $\forall 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1, m_2 diversi da m e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $P(m_1)$ e $P(m_2)$ sono vere.

2 Coefficienti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $C_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $C_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.1 Proprietà del binomio

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$. Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$

$$\binom{0}{0} = 1 \quad (1)$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \quad (2)$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \quad (3)$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \quad (4)$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $]-\infty, -M[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)

Dato $f: \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a $\text{dom} f$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$

Si dice che f ha limite l per $x \rightarrow x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \quad \exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$

OSSERVAZIONE:

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \rightarrow x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim: Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di \mathbb{R}

$\exists V_1$ intorno di l_1

$\exists V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ **ASSURDO** poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$
$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x-2| < \delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \textcircled{*}$$

Parto da $\textcircled{*}$

$$2|x-2| \underbrace{|\cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x-2| < \epsilon$$

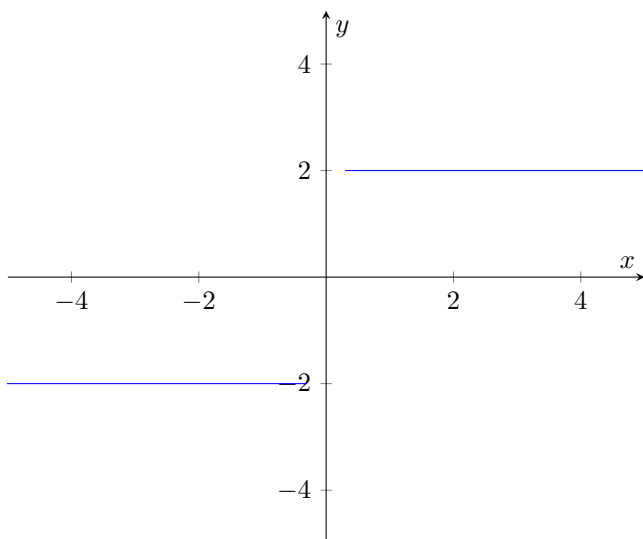
Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2|x-2| < \epsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$\begin{array}{ll} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{array}$$



Se $x \rightarrow 0^-$ $\text{sgn } x \rightarrow -1$

Se $x \rightarrow 0^+$ $\text{sgn } x \rightarrow 1$

Quindi $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$ perchè affinché esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r + \epsilon[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r < a < r + \epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r - \epsilon, r[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r - \epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione: devo mostrare $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, x_0 di acc. per $\text{dom } f$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop: Sia $x_0, l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per $\text{dom} f$ e supp .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora $\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim: Considero il caso $l \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poichè $l > 0 \Rightarrow \exists V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poichè $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$

Oss: vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per $\text{dom} f \cap \text{dom} g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss: se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ \exists l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow l_f < l_g$

Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X . Se

$$\textcircled{*} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Dim: Suppongo per semplicità che $\textcircled{*}$ valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom} f}_X) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$

Prendo $U = U_f \cap U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, g(x) \in V$

Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \in V$ intervallo allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento: Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ def. per $x \rightarrow x_0$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \quad \text{con } y = f(x)$$

Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} g\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per X , $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g, \quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = c l_f$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g} \quad \text{se } l_g \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f} \quad \text{se } l_f \neq 0$

Oss: il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinistro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln((f(x))^{g(x)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow l_g \ln l_f} e^t = \\ &= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\ &= l_f^{l_g} \end{aligned}$$

Proposizione: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X , f infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \rightarrow x_0$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f . infinitesima per g . limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) + \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] = \\ y = \frac{1}{2^x + 1} \quad y \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty & \\ = \lim_{y \rightarrow 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] &= \lim_{y \rightarrow 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_1 - \sin y] = \\ = 1 - 0 = 1 & \end{aligned}$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Svolgimento: Pongo $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \\ \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\cos y}{\sin y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}}_1 \cdot \cos y = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x^2}$$

Soluzione: il limite vale 0 poichè $\sqrt{|x|}$ è infinitesima in $x = 0$ e $\cos \frac{1}{x^2}$ è limitata def. per $x \rightarrow 0$

Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

Soluzione: $x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{+\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

Definizione 8: Forme Indeterminate

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0$ punto di acc. per X

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{F.I. } 0 \cdot \infty$$

Oppure

$$\text{F.I.} \quad +\infty - \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^0 \quad +\infty^0 \quad 1^{+\infty}$$

Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluzione:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_e^\alpha = e^\alpha \quad \checkmark$$

Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_e) = \ln e = 1 \quad \checkmark$$

Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= & y = e^x - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = & \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

Esempio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + |\sin x|}{x} \right)^x \quad \text{F.I. } 0^\infty$$

Svolgimento : Uso il teorema del confronto

Visto che $0 \leq |\sin x| \leq 1$ allora $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$, quindi $\frac{1}{x} \leq \frac{1 + \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$.
I due estremi tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$ quindi anche $\frac{1 + |\sin x|}{x}$ tende a 0.

Esempio 21

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3 \sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}) \ln(1 + 3 \sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ per $y \rightarrow 0$ Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x) + \frac{3}{\sin e^x} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x)]$$

Adesso pongo $y = 3 \sin e^x$ che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \quad \ln(1 + 3 \sin e^x) = 0 \quad 3 \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_1 = 3$$

Il risultato è quindi $1 \cdot 0 + 3 = 3$

3.1 O-piccoli

Definizione 10: O-Piccolo

Date f, g funzioni reali di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per $\text{dom} f \cap \text{dom} g$, $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$
Si dice che f è "o-piccolo" di g per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive: $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ $f(x) \in o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$?

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad x = 0 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ✓ e $1 - \cos x$ è o-piccolo di x per $x \rightarrow 0$

Osservazione :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ f_2(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad \nRightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = lg(x) + o[g(x)] \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Dim :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_l - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_l \right) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f, g, f_1, g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X .

Se $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$ e:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempio 23: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Svolgimento:

Conoscendo gli sviluppi in serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{NUM} &= \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + o(x^2) = -\frac{x^3}{6} + o(x^2) = -\frac{x^3}{6} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{DEN} = x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= x^2 + x o(x) - 2x^2 - 4x o(x) - 2(o(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

Svolgimento: Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che y deve tendere a 0, abbiamo e^x che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ quindi la sostituzione è valida

Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow x^n = o(e^x)$ per $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow \ln x = o(x^n)$ per $x \rightarrow +\infty$

Quindi:

$$e^x \gg x^n \gg \ln x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^x + \sin x}{3e^x + x^{15} \ln x} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

Svolgimento:

NUM: $x^5 = o(e^x) \quad \frac{x \sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \sin x = 0 \cdot f \text{ limitata} = 0$
 $= e^x + o(e^x)$

DEN: $\frac{x^{15} \ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$ quindi è $o(e^x)$
 $= 3e^x + o(3e^x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{3e^x + o(3e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

Definizione 12: Nomenclatura

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Se $\lim |f(x)| = +\infty, \lim |g(x)| = +\infty$

$+\infty$ si dice che f è un infinito di ordine superiore a g per $x \rightarrow x_0$

$l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x \rightarrow x_0$

0 si dice che f è un infinito di ordine inferiore a g per $x \rightarrow x_0$

\nexists si dice che f e g non sono confrontabili

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow$$

Se $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow \begin{array}{ll} +\infty & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine inferiore}} \text{ a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ sono } \underline{\text{infiniti dello stesso ordine}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ 0 & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine superiore}} \text{ a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \nexists & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ non sono } \underline{\text{confrontabili}} \end{array}$$

Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$ e x^2 sono infiniti dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \quad \checkmark \quad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 \sin(\sqrt{x}) + (1 - \cos x)^2}{\sqrt{x} \sinh(x^2) + (e^x - 1)^3}$$

Svolgimento : Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

Allora NUM: $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2}) \quad (1 - \cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \rightarrow 0$

$$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente}$$

DEN: $\sqrt{x} \sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2}) \quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \rightarrow 0^+$

$$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1} = 4$$

4 Successioni

Definizione 13: Successione

Una successione è una funzione il cui dominio è \mathbb{N} o un suo sottoinsieme infinito, per noi avranno valori in \mathbb{R} , ossia

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le successioni si scrivono col simbolo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Si dice che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \exists N > 0$ tale che $a_n \in V \forall n > N$

Es: $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rightarrow ? \quad n \rightarrow +\infty$

Def: sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione:

1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente se $\exists \lim a_n \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_n = 0$, la successione è infinitesima
2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è divergente se $\lim a_n = \pm\infty$
3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è regolare o determinata se $\exists \lim a_n$
4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare o indeterminata se $\nexists \lim a_n$

Esempio 28

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, \quad n \geq 1$$

Svolgimento:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

a_n è convergente.

Proposizione sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. convergente, allora è anche limitata, ossia $\exists M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

limitata \nRightarrow convergente

convergente \Rightarrow limitata

Teorema 11: Teorema della permanenza del segno

Se $\lim a_n = l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \rightarrow +\infty$

Teorema 12: Teorema del Confronto

$\{a_n\}, \{b_n\}$ siano due succ. tali che $a_n \leq b_n$ def. per $x \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_b$$

Allora $l_a \leq l_b$

Teorema 13: Teorema dei due carabinieri

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ succ. tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ def. per $n \rightarrow +\infty$ Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

Gerarchia degli infiniti :

$$n^n \gg n! \gg e^n \gg n^k \gg \log_b n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad a, b > 1 \quad k > 0$$

Definizione 14: Successioni monotone

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. reale, si dice

- Crescente: se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Decrescente: se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Strett. Crescente: se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Strett. Decrescente: se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Es :

$$\{2^n\} = 1, 2, 4, \dots \text{ Strett. crescente}$$

$$\{1^n\} \text{ Costante}$$

$$\{\frac{1}{2^n}\} \text{ Strett. decrescente}$$

$$\{1 + \frac{1}{n}\} \text{ Strett. decrescente}$$

Definizione 15: Successione di Cauchy

Una succ. reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice di Cauchy (o successione fondamentale) se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tale che

$$n, p > N \Rightarrow |a_n - a_p| < \epsilon$$

Es : $a_n = (-1)^n$ non è di Cauchy

$$a_n = \frac{1}{1+n} \text{ è di Cauchy}$$

Una successione reale a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.

Definizione 16: Sottosuccessioni

Data una succ. a_n si dice sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che a_k sia una succ. strett. crescente di numeri naturali, cioè $n_{k+1} > n_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Es : $n_k = 2k, k \in \mathbb{N} \quad a_{n_k} = a_{2k}, k \in \mathbb{N}$ prendo solo gli elementi pari

Osservazione : per mostrare che una succ. non ha limite, mi basta mostrare che due sottosucc. hanno limite diverso o che una non abbia limite.

Teorema 14: Teorema di Bolzano-Weistrass

Sia a_n una succ. limitata. Allora \exists una sottosucc. di a_n convergente

Esempio 29: Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln((n+5)!) - \ln(n! + 5)}{\ln(n^\alpha + \cos(n\pi))}$$

al variare di $\alpha > 0$

Svolgimento:

$$\begin{aligned}\text{NUM} &= \ln((n+5)!) - \ln(n! + 5) = \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!) - \ln(n!(1 + \frac{5}{n!})) = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)) + \ln(n!) - \ln(n!) - \underbrace{\ln(1 + \frac{5}{n!})}_0 = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)) = \\ &= \ln(n^5) + o(\ln n^5) \\ &= 5 \ln n + o(\ln n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{DEN} &= \ln(n^\alpha + \underbrace{\cos(n\pi)}_{-1^n}) = \ln(n^\alpha(1 + \frac{-1^n}{n^\alpha})) = \\ &= \ln n^\alpha \cdot \underbrace{\ln(1 + \frac{-1^n}{n^\alpha})}_0 = \\ &= \ln n^\alpha = \\ &= \alpha \ln n + o(\ln n)\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln n + o(\ln n)}{\alpha \ln n + o(\ln n)} = \frac{5}{\alpha}$$

5 Funzioni Continue

Definizione 17: Funzione Continua

f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$. f si dice continua in x_0 se è verificata una delle seguenti:

- x_0 è punto isolato del dominio
- Se x_0 non è punto isolato del dominio (ossia x_0 punto di acc. per $\text{dom} f$). Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua se è continua in ogni punto del suo dominio.

Osservazione: Si parla di continuità di f solo nei punti del dominio di f .

Esempio 30

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \text{dom} f$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x_0 \quad \forall x_0 \in \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Def: Se $x_0 \in \text{dom} f$ è punto di acc. per $\text{dom} f$, ho che f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in \text{dom} f$ allora:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 18: Discontinuità di I specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$ punto di acc. destro e sinistro per $\text{dom} f$. Se esistono i limiti finiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di I specie o di salto

Definizione 19: Discontinuità di II specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$, punto di acc. destro e sinistro. Se:

1. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 sia infinito
Oppure
 2. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 non esiste
- Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di II specie

Definizione 20: Discontinuità di III specie

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $l \in \mathbb{R}$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Allora x_0 si dice punto di discontinuità eliminabile per f

Teorema 15: Teorema di Weistrass

Sia f funzione reale definita e continua su $[a, b]$. Allora f ha massimo e minimo (assoluti) in $[a, b]$, cioè $\exists x_m, x_M \in [a, b]$ tale che:

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m) \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M)$$

Es: $\sin[-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = -1 \quad \max_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = 1$$

Teorema 16: Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ chiuso e limitato. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$
Allora $\exists \epsilon \in]a, b[$ tale che $f(\epsilon) = 0$

Teorema 17: Teorema dei valori intermedi

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ è un intervallo, cioè $\forall x_1, x_2 \in I$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

Allora $\exists \epsilon \in I$ tale che $f(\epsilon) = y$

Teorema 18: Continuità della funzione inversa

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile. Allora:

1. f è strettamente monotona
2. la f inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ è continua

6 Derivata

Definizione 21: Calcolo differenziale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione. Se esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ rapporto incrementale} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata di f in x_0 (oppure derivata prima) e si indica con

$$f^1(x_0), Df(x_0), \frac{d}{dx}f(x_0)$$

Inoltre se il limite esiste finito, f si dice derivabile in x_0 .

Se f è derivabile $\forall x_0 \in I$, f si dice derivabile in I

Es: $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ Calcolo $f^1(x_0)$

$$f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad n = 0$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 1}{x - x_0} = 0 \\ f^1(x_0) &= 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n = 1$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \\ f^1(x_0) &= 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Se } n > 1 \quad f(x) = x^n$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \end{aligned}$$

$$\text{Utilizziamo il binomio di Newton: } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x_0^{n-k} \cdot h^k = \\
&= \underbrace{\frac{n!}{n!} \cdot x_0^n \cdot 1}_{x_0^n} + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!} \cdot x_0^{n-1} \cdot h}_{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h} + \underbrace{\frac{n!}{2(n-2)!} \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}_{\frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2} \quad \text{nel caso di } n=2 \text{ (per gli altri valori è analogo)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^n + n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2 - x_0^n}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} n \cdot x_0^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h}_0 = \\
&= n \cdot x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Teorema 19: Derivabilità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0 . Allora, f è continua in x_0 .

Dim: Devo mostrare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Poichè f è derivabile in x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{o(x - x_0)}_0) = f(x_0) \quad \checkmark$$

Osservazione: f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ e $x_0 \nLeftarrow f$ continua in x_0

Definizione 22: Derivata destra e sinistra

Sia I intervallo di \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata destra di f in x_0 . Se $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, f si dice derivabile da destra in x_0

Osservazione:

f derivabile in x_0

\Leftrightarrow

f derivabile da destra in x_0
 f derivabile da sinistra in x_0
 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Teorema 20: Algebra delle derivate

f, g derivabile in $x_0 \in I$, I intervallo aperto di \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}$

1. αf è derivabile in x_0 e $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
2. $f + g$ è derivabile in x_0 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
3. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. Se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Derivata della f inversa

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto, f continua, invertibile in I e derivabile in x_0 , tale che $f'(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è invertibile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = f'(f^{-1}(y_0))$$

Esempio 31

$$D(\arcsin y) = ?$$

Svolgimento :

Posso calcolare la derivata negli $y_0 = \sin x_0$ ove $\sin'(x_0) \neq 0$ ossia $\cos(x_0) \neq 0$, quindi $x_0 = \pm\pi/2$

$$\begin{aligned} D \arcsin y &= \frac{1}{(D \sin)(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \end{aligned}$$

Teorema 21: Derivata delle f composte

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo I , se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in $g(x_0)$. Allora si ha:

$$Df(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Esempio 32

Calcolare la derivata di x^α con $\alpha > 0$

Svolgimento : $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = f \cdot g(x)$ $f(y) = e^y$ $g(x) = \alpha \log x$
 $f'(y) = e^y$, $g'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x}$ $D(x^\alpha) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \cdot \frac{1}{x}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Definizione 23: Punti di non derivabilità

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con derivata sinistra e destra in x_0 tale che:

$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

E almeno una delle due sia finita, allora x_0 si dice punto angoloso

Definizione 24

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto, $x_0 \in I$ e si indica:

$$f'(x_0) = \pm\infty$$

Allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale

Se, invece si ha:

$$f'_-(x_0) = -\infty \quad f'_+(x_0) = +\infty$$

Oppure il contrario, x_0 si dice punto di cuspid

Teorema 22: Limite della derivata

$I \subseteq \mathbb{R}$, intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Supp:

1. f sia continua in x_0
2. f sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$

Allora $\exists f'(x_0)$ e vale

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

In particolare se il limite è in \mathbb{R} , f è derivabile.

Definizione 25: Derivata di ordine superiore

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Se f' è derivabile in x_0 , allora f è derivabile due volte in x_0 e si dice che tale valore è la derivata seconda di f in x_0 e si indica con

$$f''(x_0), D^2 f(x_0), \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

Osservazione: dalla definizione di derivata seconda si ottiene anche quella di derivata n-esima di f in x_0 .

Formule di Leibniz: Date f, g derivabili n volte in x_0 si ha:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0)$$

Teorema 23: Teorema di de L'Hopital

Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ f, g derivabile in $]a, b[$. Se:

1. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. $f(x), g(x) \rightarrow 0$ oppure $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow a^+$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Si ha l'analogo per $x \rightarrow b^-$ oppure per $x \rightarrow x_0$ $x_0 \in]a, b[$

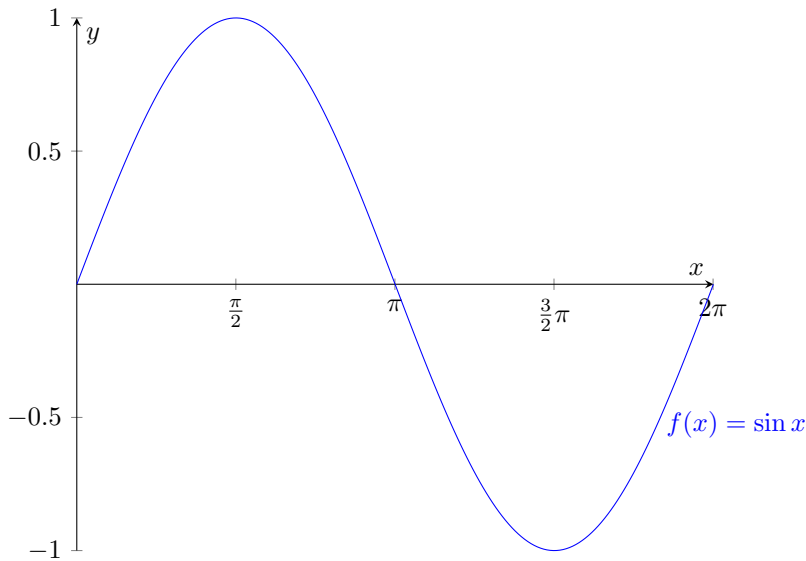
Osservazione: non sempre applicando de l'Hopital si semplifica il limite.

6.1 Massimo e minimo assoluto di una funzione

Definizione 26

M massimo assoluto per f se $\exists x_1 \in X$ tale che $f(x_1) = M$ e $f(x) \leq f(x_1) = M \quad \forall x \in X$ (x_1 è punto di massimo assoluto), per il minimo assoluto si ha la situazione analoga

Esempio : $\sin x$



Punti di massimo assoluto = 1;

Punti di minimo assoluto = -1

Osservazione : per quanto riguarda massimo e minimo locale se $\exists U$ intorno di x_0 si dice che $f(x_0)$ è max o min locale se $f(x_0) \geq f(x)$ oppure $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U \cap X$

Teorema 24: Teorema di Fermat o del punto critico

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[, f$ derivabile in x_0 , f ha estremo locale in x_0 . Allora $f'(x_0) = 0$

Dim : Ipotizziamo che x_0 è punto di estremo locale e f è derivabile in x_0 . Allora esiste $U \subseteq]a, b[$ intorno di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in U$$

Osservo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad x > x_0 \quad \geq 0 \quad x < x_0$$

Applicando la definizione di derivata esiste, quindi, il limite di $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ che è ≤ 0 per $x \rightarrow x_0^+$ oppure ≥ 0 per $x \rightarrow x_0^-$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Osservazione : il teorema non è valido se $x_0 = a$ o $x_0 = b$ e anche se f non è derivabile.

Teorema 25: Teorema di Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

1. f continua in $[a, b]$
2. f derivabile in $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$

Dim : Se f non c'è nulla da dimostrare poichè $f'(c) = 0$.

Suppongo che f non sia costante, per il teorema di Weistrass ha max e min in $[a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$$

È necessario dimostrare che x_m o x_M siano all'interno dell'intervallo aperto a, b . Perché per il teorema di Fermat f' si annulla in tali punti.

Suppongo per assurdo che x_m e x_M appartengono agli estremi a e b compresi. Di conseguenza ottengo che, per il terzo punto del teorema di Rolle, $f(a) = f(b)$, quindi, $f(x_m) = f(x_M)$ ciò implica che f è continua, ma all'inizio abbiamo considerato f come non continua.

Teorema 26: Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dim: La dimostrazione viene da se applicando la formula del teorema, la prima parte indica il coefficiente angolare della retta che passa secante per i due estremi a, b che è uguale alla derivata prima della funzione nel punto c , che è il coefficiente angolare della tangente nel punto c

Teorema 27: Teorema di Cauchy

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Se $g'(x) \neq 0$ vale:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Osservazione: Cauchy $\xRightarrow{g(x)=x}$ Lagrange $\xRightarrow{f(a)=f(b)}$ Rolle

Teorema 28: Monotonie

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile:

1. f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. f è decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
3. Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strett crescente
4. Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strett decrescente

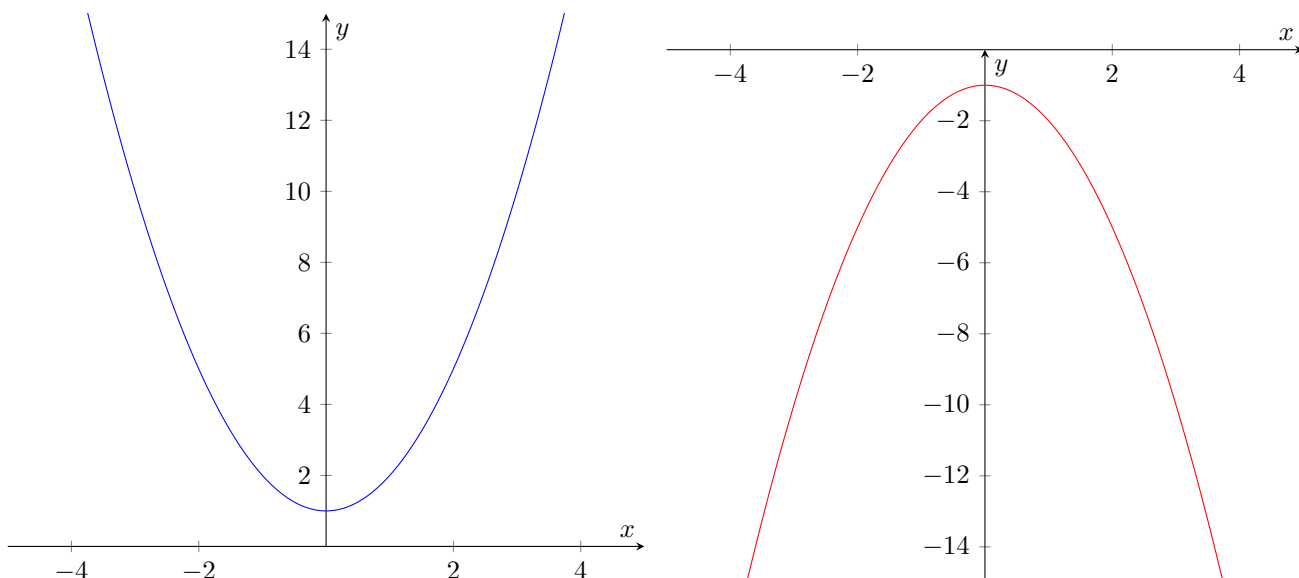
Dim: faccio solo punto 1 (per gli altri il ragionamento è analogo)

Se f è crescente e prendo due punti x, y con $y > x$, allora di conseguenza ho che $f(y) \geq f(x)$, quindi applicando Lagrange ho $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \geq 0$ quindi se faccio il limite per $y \rightarrow x^+$ ottengo che $f'_+(x) \geq 0$ se ora applico il ragionamento per ogni x ottengo che $f'(x) \geq 0$. ✓

7 Studio di Funzione

Definizione 27: Funzioni concave e convesse

$f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f è convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I$, il segmento che congiunge $x_1, f(x_1)$ e $x_2, f(x_2)$ non ha punto sotto il grafico di f . Se gli unici punti che appartengono al grafico di f sono gli estremi del segmento, allora f si dice strettamente convessa.
 f è concava se $-f$ è convessa, f è strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa



Definizione 28: Asintoti

Sia f funzione reale di variabile reale:

- se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $+\infty$
- se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $-\infty$

Per $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di acc. per $\text{dom} f$

- se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure vale lo stesso per $x \rightarrow x_0^-$, allora la retta $x = x_0$ è asintoto verticale

Se esiste $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m \cdot x = q$, allora la retta $y = m \cdot x + q$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$

Esempio 33: Studio di funzione

$$f(x) = |\arctan(\log x)|$$

Dominio : $\log x \rightarrow x > 0$ quindi $]0, +\infty[$

Simmetrie e Periodicità : non è pari $f(-x) \neq f(x)$ e non è dispari $f(-x) \neq -f(x)$ per ogni $x \in \text{dom} f$, inoltre non è presente nessuna periodicità evidente

Limiti agli estremi di $\text{dom} f$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\arctan(\log x)| = |\arctan(-\infty)| = \left| -\frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\arctan(\log x)| = |\arctan(+\infty)| = \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ a $\frac{\pi}{2}$ ma non abbiamo asintoto verticale

Segno : $|\arctan(\log x)| > 0$ verificata $\forall x \in \text{dom} f$

Continuità : f è composizione di funzioni continue, quindi è continua nel suo dominio.

Derivabilità : f è derivabile in $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ perchè per $x = 1$ $f(x) = 0$

$$f^1(x) \text{ per } 0 < x < 1 = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f^1(x) \text{ per } 1 < x = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

Ora verifichiamo se è derivabile in $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{1+0} \cdot 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + (\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + 0} \cdot 1 = 1$$

Derivata destra e sinistra sono diverse quindi non è derivabile in $x = 1$, che è quindi punto angoloso

Segno derivata: $f'(x) = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = < 0 \cdot > 0 = < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$ quindi in quell'intervallo f è strett decrescente

$f'(x) = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = > 0 \cdot > 0 = > 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$ quindi in quell'intervallo f è strett crescente

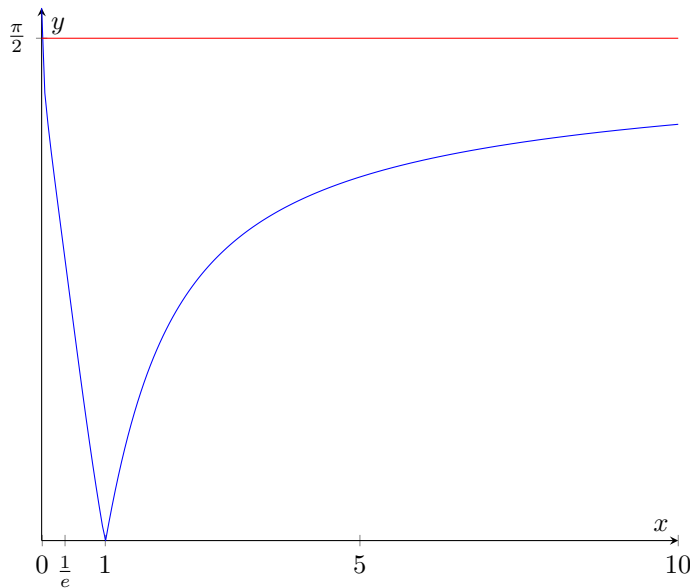
Derivata Seconda: $f''(x) = -[(-1) \cdot (1 + \log^2 x)^{-2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}] \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \forall x \in]0, 1[$

$f''(x) = [((-1) \cdot (1 + \log^2 x)^{-2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2}] \quad \forall x \in]1, +\infty[$
 $= \frac{-1}{(1 + \log^2 x)^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot [2 \log x + 1 + \log^2 x] = < 0 \cdot > 0 \cdot \geq 0 = < 0 \quad (\log x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \in]0, 1[$
 la derivata seconda in quell'intervallo è però ≥ 0

Quindi la derivata seconda di f si annulla per $x = \frac{1}{e}$ ed è maggiore di zero per ogni $x \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{e}\}$ quindi f è strett convessa in $]0, 1[\setminus \{\frac{1}{e}\}$, però $x = \frac{1}{e}$ non è punto di flesso

Invece nell'intervallo $]1, +\infty[$ $f''(x) < 0$ è quindi strett concava nell'intervallo

Grafico:



Massimo e minimo: f non ha max locale nel suo dominio, ma ha un min locale e assoluto in $x = 1$. $x = 0$ è punto di max assoluto per l'estensione per continuità di f .

Definizione 29: Formula di Taylor

Suppongo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{polinomio di grado 1}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{ERRORE}} \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se f è derivabile $\Rightarrow f = \text{polinomio di grado 1} + \text{errore}$

Esempio: $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$

$$e^x = e^0 + e^0 \cdot (x - 0) + o(x - 0) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$= e^x = 1 + x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

Definizione 30: Polinomio di Taylor

Prendo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, x_0 punto interno ad I , f derivabile n volte in x_0 .
Chiamo polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 il polinomio:

$$P_{x_0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$f^{(0)} = f$$

Teorema 29: formula di Taylor con resto nella forma di Peano

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, x_0 punto interno ad I , f derivabili n volte in x_0 , allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Osservazione: se $x_0 = 0$, si chiama polinomio e formula di McLaurin.

8 Serie Numeriche

Definizione 31

Data una successione a_n di numeri reali si dice serie a termine generale a_n la successione $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita da la somma di tutti i termini della successione:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \forall n$$

Dove S_n si dice somma parziale della serie.

Definizione 32: Carattere della serie

La serie di termine generale a_n

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Si dice:

- Convergente: se $\lim S_n = s \in \mathbb{R}$ per $n \rightarrow +\infty$, con s che si dice somma della serie e si scrive

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$$

- Divergente: a $\pm\infty$ se $\lim S_n = \pm\infty$ per $n \rightarrow +\infty$
- Inderterminata: se $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ha limite per $n \rightarrow +\infty$

Osservazione: Studiare il carattere di una serie, significa determinare se è convergente/divergente/indeterminata.

Esempio 34: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \quad q = \frac{1}{2} \\ q \neq 1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^n q^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (*) \\ q = 1 &\Rightarrow = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = n + 1 \\ 0 < q < 1 &\Rightarrow = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Quindi a_n è convergente ed ha come somma parziale 1.

Dim: (*) La dimostrazione si fa con il principio di induzione

Caso base $n = 0$

$$S_0 = \sum_{k=0}^0 x^k = 1$$

Quindi, la formula $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1$ è confermata per il caso base ✓

Ora dimostriamo il passo induttivo. Suppongo la tesi sia vera per n , quindi $S_n = \sum x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ e dimostriamo che ciò implica che la tesi è vera per $n+1$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} = \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x) \cdot x^{n+1}}{1 - x} = \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato anche il passo induttivo.

Definizione 33: Serie Geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad r \in \mathbb{R}$$

Serie geometrica di ragione r che converge per $|r| < 1$ a $\frac{1}{1-r}$
 diverge a $+\infty$ per $r \geq 1$
 indeterminata per $r \leq -1$

Definizione 34: Algebra delle serie

Date le serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ se convergono entrambe o divergono entrambe a $\pm\infty$, allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Inoltre se $c \in \mathbb{R}$, vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Proposizione: Se $\sum a_k$ converge, allora:

1. il suo resto n-esimo (sommatoria da $k = n$ a $+\infty$) è infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$
2. il suo termine generale a_n è infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$

Dim: Osservo

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$. Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = S - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1} \quad n \rightarrow +\infty \quad S - S = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \end{aligned}$$

Quindi a_n è infinitesimo ✓

Teorema 30: Criterio di convergenza

$a_n \not\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum a_n$ non può convergere.

Osservazione: non vale però l'opposto, ossia:

$$a_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$

Teorema 31: Criterio di Cauchy

La serie a_k , da $k = 0$ a $+\infty$, converge se e solo se S_n p successione di Cauchy, ossia se e solo se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tale che $|S_n - S_m| < \epsilon \quad \forall m, n > N$

Esempio 35: Serie Armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Svolgimento: poichè non è di Cauchy diverge a $+\infty$

Definizione 35: Convergenza assoluta

Si dice che a_k converge assolutamente se $\sum |a_k|$ converge

Osservazione: Convergenza Assoluta \Rightarrow Convergenza Semplice

Esempio 36

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1^k}{2^k} \quad a_k = \frac{-1^k}{2^k}$$

Svolgimento:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-1^k}{2^k} = 0 \Rightarrow a_k \text{ è infinitesimo}$$

Quindi a_k può convergere. Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{-1^k}{2^k} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

Poichè $|a_k|$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ allora è convergente e quindi anche a_k lo è.

Osservazione: non vale il contrario, ossia se si ha la convergenza semplice, non si ha sempre anche quella assoluta.

Definizione 36: Serie a termini positivi

Una serie a termini $a_n \geq 0 \quad \forall n$ o converge o diverge a $+\infty$

Dim: Basta osservare che

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

È successione monotona crescente e quindi esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$ di S_n
 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Teorema 32: Criterio del Confronto

Date $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tali che $0 \leq a_k \leq b_k$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$

Allora:

1. Se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge
2. Se $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge

Osservazione: Si confrontano le serie "difficili" con serie più "facili" di cui si riesce a determinare la convergenza o meno.

Esempio 37: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$$

Svolgimento :

$$\frac{1}{2k-1} > 0 \quad \forall k \geq 1 \text{ (sarebbe per ogni } k > \frac{1}{2} \text{ ma la serie parte da } k = 1)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k-1} = 0 \Rightarrow \text{il termine generale è infinitesimo}$$

$$\frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} > 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}}_{+\infty} = +\infty$$

Quindi per il secondo punto del criterio del confronto se $\frac{1}{2k}$ diverge allora anche $\frac{1}{2k-1}$ diverge.

Definizione 37: Serie Armonica Generalizzata

Data la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie è a termini positivi e come tale può essere divergente o convergente.

In particolare:

- converge se $\alpha > 1$
- diverge positivamente se $\alpha \leq 1$

Esempio 38: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^n(n^2 + \sin(e^n))}{3^n}$$

Svolgimento : a_n è infinitesima ed è anche $\geq 0 \quad \forall n \geq 1$,

Vorrei confrontare a_n con $(\frac{2}{3})^n$ di cui so già che è convergente, però $0 \leq a_n \not\leq (\frac{2}{3})^n$

Se avessi $a_n = (\frac{2}{3})^n \cdot b_n$ con b_n tale che $(\frac{2}{3})^n b_n \leq c^n$ con $c \in]0, 1[$

Mi serve quindi un $b_n = \beta^n$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta^n}{n^2 + \sin(e^n)} = +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$ e $(\frac{2}{3} \cdot \beta)^n \leq c^n$, quindi $\frac{2}{3}\beta \leq c$ quindi visto che $c \in]0, 1[$ allora $\beta \in]0, \frac{3}{2}[$, ma questo intervallo di β non renderebbe vero il limite, per far ciò devo prendere l'intervallo $]1, \frac{3}{2}[$

Quindi:

$$a_n = (\frac{2}{3})^n \cdot (n^2 + \sin(e^n)) \leq (\frac{2}{3})^n \cdot \beta^n = c^n \quad \forall \beta \in]1, \frac{3}{2}[$$

Di conseguenza ho che $a_n \leq c^n$ con $c \in]0, 1[$, quindi $\sum c^n$ è convergente, di conseguenza lo è anche a_n

Teorema 33: Confronto asintotico

Siano $\{a_k\}, \{b_k\}$ successioni ≥ 0 def. per $k \rightarrow +\infty$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora:

1. Se $l \in]0, +\infty[$ allora a_k e b_k hanno lo stesso carattere
2. Se $l = 0$ e b_k converge anche a_k converge
3. Se $l = +\infty$ e b_k diverge anche a_k diverge

Teorema 34: Criterio del Rapporto

Sia $\{a_k\}$ una successione a termini positivi (oppure def ≥ 0 per $k \rightarrow \infty$).

Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se esiste $0 \leq r < 1$ tale che:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \text{def per } k \rightarrow +\infty$$

Oppure

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = r \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Allora a_k converge

2. Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ def per $k \rightarrow +\infty$

Oppure

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Allora a_k diverge a $+\infty$

3. Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ o il suo limite è uguale a 1 allora non posso dire nulla

Dim: prendiamo il punto 1 nel caso $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$ e $r < 1$

$$\Rightarrow a_{k+1} \leq r \cdot a_k \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_{k_0+1} \leq r \cdot a_{k_0}$$

$$\frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \leq r \Rightarrow a_{k_0+2} \leq r \cdot a_{k_0+1} \leq r \cdot r \cdot a_{k_0} = r^2 \cdot a_{k_0}$$

$$\text{In generale} \quad a_{k_0+j} \leq r \cdot a_{k_0+(j-1)} \leq r \cdot r^{j-1} \cdot a_{k_0} = r^j \cdot a_{k_0}$$

$$\text{Si dimostra per induzione, ossia} \quad a_{k_0+j} \leq r^j \cdot a_{k_0} \quad \forall j \geq 0$$

$$k = k_0 + j \quad a_k \leq r^{k-k_0} \cdot a_{k_0} \quad \forall k \geq k_0$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k &= \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^{k-k_0} \cdot a_{k_0} \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^{k-k_0} = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} r^j}_{\text{converge}} < +\infty \end{aligned}$$

Quindi si ottiene che la sommatoria è convergente da k_0 a $+\infty$ e di conseguenza si può applicare lo stesso ragionamento, per induzione, a tutti i termini della serie da $k = 0$.

Osservazione: Per quanto riguarda la divergenza si può applicare lo stesso ragionamento, ma con $r \geq 1$ e quindi verrà sempre $\sum r^j$ che è divergente.

Oppure si può notare che $a_{k_0+1} \geq a_{k_0} > 0$ che generalizzato vuol dire $a_{k_0+j} \geq a_{k_0} > 0 \quad \forall j \geq 0$ e applicando il criterio di convergenza abbiamo che $a_{k_0+1} \not\rightarrow 0$ per $j \rightarrow +\infty$ e quindi la serie diverge.

Osservazione: se $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ non posso dire niente. se prendo ad esempio $a_n = \frac{1}{n^2}$ il rapporto tende a 1 e la serie è convergente, se prendo $a_n = \frac{1}{n}$ il rapporto tende sempre a 1, ma la serie è divergente.

Esempio 39: Serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge?

Svolgimento :

Studio la convergenza assoluta di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Applico il criterio del rapporto $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

Quindi, per il primo punto del criterio del rapporto,

la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) $\forall x \in \mathbb{R}$

Definizione 38: Serie di Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Generalizzata (non è sempre valida):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x)$$

Teorema 35: Criterio della radice

Sia $\{a_k\}$ successione con $a_k \geq 0 \quad \forall k$:

1. Se esiste $r < 1$ tale che $\lim \sqrt[k]{a_k} = r < 1$ per $k \rightarrow +\infty$, allora a_k converge
2. Se $\lim \sqrt[k]{a_k} > 1$ per $k \rightarrow +\infty$, allora a_k diverge
3. Altrimenti se $r = 1$ allora non si può dir nulla

Dim : consideriamo il caso 1

$$\sqrt[k]{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_k \leq r^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{+\infty} r^k}_{\text{convergente}} < +\infty$$

Quindi stesso ragionamento della dimostrazione del criterio del rapporto:

abbiamo dimostrato per la serie parziale da $k = k_0$ a $+\infty$ adesso vale lo stesso per tutta la serie

Osservazione : La dimostrazione del punto 2 e 3 sono analoghe a quella del punto 1, cambiando l'intervallo in cui esiste r .

Definizione 39: Serie Logaritmica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad x \in \mathbb{R}$$

Svolgimento : studio la convergenza assoluta tramite il criterio del rapporto

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n}$$

Ed ottengo $|x| \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow |x|$ per $n \rightarrow +\infty$, è quindi convergente assolutamente se $|x| < 1$, se $|x| = 1$ non posso dire nulla, se $|x| > 1$ allora non è convergente assolutamente.
 Provo a vedere com'è il carattere per $x > 1$ e ottengo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty \quad \forall x > 1$$

Quindi per il criterio di convergenza a_n con $|x| > 1$ non è convergente.

Se $x = -1$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} = -\infty$$

diverge quindi a $-\infty$

Per $x = 1$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Che per determinarne il carattere ho bisogno di un nuovo criterio.

Teorema 36: Criterio di Leibniz

Sia $\{a_k\}$ successione tale che

1. $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
2. $\{a_k\}$ decrescente: $a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
3. $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$

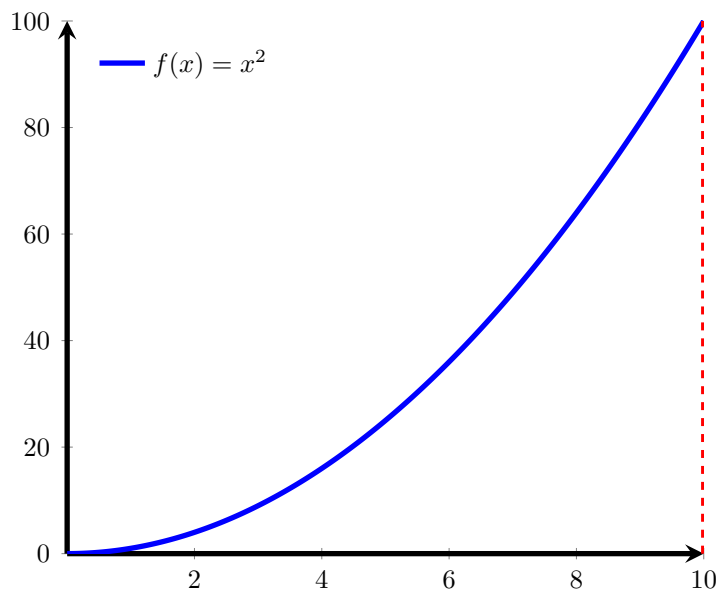
Allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

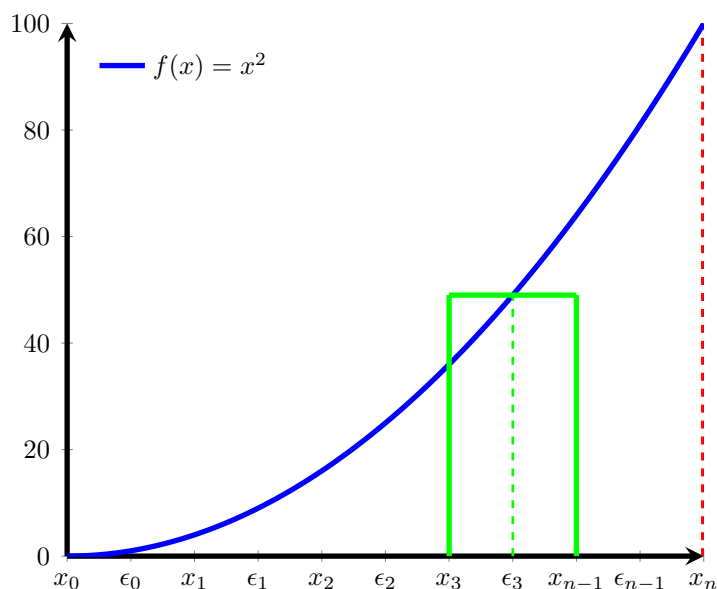
converge

Osservazione: il criterio di Leibniz vale solo per la convergenza semplice non assoluta.

9 Calcolo Integrale



Idea: suddivido $[0, 10]$ in tanti intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ per $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ quindi in n intervalli con $x_0 = 0$ e $x_n = 10$. Abbiamo quindi: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 10$



Per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$ prendo $\epsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e considero il rettangolo di base $[x_i, x_{i+1}]$ e altezza $f(\epsilon_i) = \epsilon_i^2$

Adesso generalizziamo questo ragionamento, unendo tutti i rettangoli, attraverso la sommatoria:

$$A_{\text{tot}} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\epsilon_i)$$

Per rappresentare questa sommatoria si usa l'integrale definito:

$$A_{\text{tot}} = \int_0^{10} f(x) \cdot dx = \int_0^{10} x^2 \cdot dx$$

Definizione 40: Integrale di Cauchy-Riemann

Si dice partizione o suddivisione di $[a, b]$ un insieme finito di punti $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ tale che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definizione 41: Partizione Puntata

Si dice **partizione puntata** di $[a, b]$ una coppia (\mathcal{P}, ϵ) dove $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ è partizione di $[a, b]$ e $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ con $\epsilon_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 1, \dots, n$

Esempio: $I = [0, 1] \quad \mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\} \quad \mathcal{P}_4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$
 $\epsilon = \{\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n}\} \quad \text{Quindi } (\mathcal{P}_n, \epsilon) \text{ è una partizione puntata di } [0, 1]$

Definizione 42: Integrale definito

Una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **integrabile alla Cauchy-Riemann** in $[a, b]$ se esiste $I \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall (\mathcal{P}, \epsilon)$ partizione puntata di $[a, b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta$ si ha

$$|S(f, \mathcal{P}, \epsilon) - I| < \delta$$

Tale valore finito I viene detto **integrale definito** di f in $[a, b]$ e si indica:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

Osservazione: Per $S(f, \mathcal{P}, \epsilon)$ si intende la somma puntata di f rispetto alla partizione (\mathcal{P}, ϵ) di $[a, b]$ ossia:

$$S(f, \mathcal{P}, \epsilon) = \sum_{k=1}^n f(\epsilon_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Osservazione:

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

Osservazione: Se f è non negativa e integrabile, allora il suo integrale è l'area del sottografico definito da

$$SG(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$$

Teorema 37

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e limitata, allora f è integrabile.

Inoltre f è **continua a tratti** se è continua tranne in un numero finito di punti, in cui ha limite destro e sinistro finiti, quindi discontinuità di prima specie.

Le funzioni continue a tratti sono comunque integrabili, poichè basta sommare gli integrali nei vari tratti.

Teorema 38: Proprietà dell'integrale

Sia $f, g; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili. Allora:

1. Linearità dell'integrale:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) \cdot dx + \beta \int_a^b g(x) \cdot dx$$

2. Adattabilità rispetto all'insieme di integrazione: se $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

3. Monotonia dell'integrale: se $f \leq g$ in $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx$$

4. Se f è integrabile in $[a, b]$, allora anche $|f|$ lo è, e si ha:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Teorema 39: Media integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e continua per Weistrass esiste $m = \inf f$, $M = \sup f$ allora:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M$$

Se f è continua in $[a, b]$ allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dim: sapendo che $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b m \cdot dx \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b M \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b m \cdot dx = m \cdot \int_a^b 1 \cdot dx = m \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M$$

Se f è continua $f([a, b]) = [m, M]$ ed esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Osservazione: se f non è continua, potrebbe non esistere $c \in [a, b]$ poichè il teorema di Weistrass non assicura massimo e minimo per funzioni non continue.

Definizione 43: Primitiva e famiglia di primitive

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice primitiva di f o funzione primitiva di f in A se F è derivabile in A e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

La famiglia di primitive è invece l'unione di tutte le $F(x)$ la cui derivata prima è uguale $f(x)$ con l'aggiunta di una costante c

Esempio: se f è derivabile, allora f è una primitiva di f'

$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$ quindi $F(x) + c$ è la famiglia di primitive di $f(x)$

Teorema 40: Teorema fondamentale del calcolo 1° parte

Se $f \in C[a, b]$ e definisco

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

allora F è derivabile (e continua) in $[a, b]$ e si ha $F'(x) = f(x)$ quindi F è primitiva di f

Teorema 41: 2° parte calcolo fondamentale

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua qualsiasi primitiva in $[a, b]$. Allora:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Dim: Dalla prima parte del teorema sappiamo che la funzione integrale nel punto a è una primitiva della funzione stessa e quindi qualsiasi altra primitiva nell'intervallo $[a, b]$ è diversa dalle altre per un valore finito $c \in \mathbb{R}$. Quindi:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

Otteniamo quindi che:

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t) dt + c \right) - \left(\int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt$$

La variabile di integrazione è indifferente quindi possiamo sostituire t con x ed abbiamo verificato la nostra tesi.

Definizione 44: Integrale indefinito

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ l'integrale indefinito di f in A è l'insieme di tutte le sue primitive in A e si denota

$$\int f(x) dx = \{F : F \text{ è primitiva di } f \text{ in } A\}$$

Se A è un intervallo, allora

$$\int f(x) dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Osservazione: l'integrale indefinito è lineare, ossia:

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

9.1 Metodi di integrazione

Definizione 45: Integrazione per parti

Siano f, g funzioni derivabili in $I = [a, b]$, allora:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Quindi, integrando:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Definizione 46: Integrazione per sostituzione

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 e tale che $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, F primitiva di f in $[a, b]$. Allora:

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

Esempio 40

$$\int (e^{3x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}) dx$$

Svolgimento :

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int e^{3x} - \int \frac{1}{x^3} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \\ \Rightarrow & \frac{1}{3} \int \underbrace{3}_{f'(x)} \cdot e^{3x} dx + \frac{1}{2x^2} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \\ \Rightarrow & \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \\ \text{Quindi: } & \int f'(x) \cdot f(x) \\ \Rightarrow & \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \arctan(\ln x) + c \end{aligned}$$

Definizione 47: Integrale di funzione razionale

Consideriamo l'integrale:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{con } P \text{ e } Q \text{ polinomi}$$

L'idea è riscrivere l'integrale come la somma di due integrali di cui riusciamo a calcolare la primitiva e abbiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$ e $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{x - x_2}$$

2. $\Delta = 0$ e $(x - x_1)^2 = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

3. $\Delta < 0$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{a}{2} \int \frac{\overbrace{2x + c}^{f'(x)}}{\underbrace{x^2 + cx + d}_{f(x)}} + b \int \frac{1}{x^2 + cx + d}$$

Esempio 41: Caso 1

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Svolgimento: visto che $\Delta > 0$ allora posso applicare il primo caso:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$

$$\begin{cases} Ax + Bx = 3x \\ -3A - 2B = 2 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema otteniamo che: $A = -8 \quad B = 11$

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow \int \frac{-8}{x - 2} dx + \int \frac{11}{x - 3} dx$$

$$\Rightarrow -8 \ln |x - 2| + 11 \ln |x - 3| + c$$

Esempio 42: Caso 2

$$\int \frac{x + 2}{(x - 2)^2}$$

Svolgimento : visto che $\Delta = 0$ applichiamo il secondo caso:

$$\Rightarrow \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\begin{cases} Ax = x \\ -2A + B = 2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che: $A = 1 \quad B = 4$

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2} \Rightarrow \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{4}{(x-2)^2} dx$$

$$\Rightarrow \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$$

Esempio 43: Caso 3

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}$$

Svolgimento : visto che $\Delta < 0$ applichiamo il terzo caso:

$$\Rightarrow 3 \int \frac{x}{x^2+4x+5} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \int \underbrace{\frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}}_{f'(x)} dx + 2 \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+5| - 4 \cdot \frac{3}{2} \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx + 2 \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \ln(x^2+4x+5) - 4 \arctan(x+2) + c$$

9.2 Integrale improprio

Definizione 48: Integrale generalizzato o improprio

Può capitare di avere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con f o I o entrambi illimitati, ma vogliamo calcolare comunque un'area (o integrale).

Sia $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[c, d]$ $\forall c \in (a, b]$. Se esiste:

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) \cdot dx$$

Tale limite si chiama integrale improprio o generalizzato di f in $[a, b]$.

Se il limite esiste finito, si dice che f è integrabile in senso generalizzato e l'integrale si dice convergente, altrimenti si dice che l'integrale è divergente.

Osservazione : se $|f|$ è integrabile in senso improprio si dice che f è assolutamente integrabile in senso improprio e:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b f(x) dx$$

Esempio 44

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Svolgimento : ci accorgiamo che 0 non fa parte del dominio di f quindi dobbiamo fare:

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} 2 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 2$$

Teorema 42: Teorema del Confronto

Siano $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$ con f, g integrabili in $[c, b]$ $\forall c \in]a, b[$ tale che:

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b]$$

Allora:

- $\int g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int f(x) dx < +\infty$
- $\int f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int g(x) dx = +\infty$

Teorema 43: Criterio asintotico del Confronto

$f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[c, b]$ $\forall c \in]a, b[$ tale che:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = l$$

1. se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora f è ass. integrabile in $(a, b]$ se e solo se lo è anche g nello stesso intervallo
2. se $l = 0$ allora se g è ass. integrabile in $(a, b]$, allora lo è anche f
3. se $l = +\infty$ allora se l'integrale da a a b di $|g(x)| = +\infty$ allora anche lo stesso integrale per $|f(x)| = +\infty$

Osservazione : è importante avere funzioni di cui conosciamo l'integrabilità.

Teorema 44: Criterio integrale per le serie

$f : [k_0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, decrescente, $k_0 \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k) < +\infty \Leftrightarrow \int_{k_0}^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

Esempio casi importanti :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Se $\alpha \geq 1$ allora $\Rightarrow +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Se $\alpha \leq 1$ allora $\Rightarrow +\infty$

Osservazione :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

10 Tabelle Utili

10.1 Limiti notevoli

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad a > 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \log_a x = 0 \quad a > 0, a \neq 1$	/

10.2 Sviluppi asintotici di alcune funzioni

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

10.3 Tabella Derivate Semplici

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\log_a x $	$(\log_a e) \cdot \frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

10.4 Sviluppi di McLaurin

$f(x)$	$P_0^n(x)$	$\sum_{k=0}^{n \rightarrow +\infty}$
e^x per $x \rightarrow 0$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\sum \frac{x^k}{k!} + o(x^k)$
$\log(1+x)$ per $x \rightarrow 0$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^k)$
$(1+x)^\alpha$ per $x \rightarrow 0$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \dots$	$\sum \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^k)$
$\cos x$ per $x \rightarrow 0$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$
$\cosh x$ per $x \rightarrow 0$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	
$\sin x$ per $x \rightarrow 0$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$
$\sinh x$ per $x \rightarrow 0$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	
$\arctan x$ per $x \rightarrow 0$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$
$\tan x$ per $x \rightarrow 0$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$	

10.5 Integrali indefiniti noti

$\int f(x)$	$F(x)$
$\int e^x dx$	$e^x + c$
$\int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + c$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + c$
$\int \alpha^x dx$	$\frac{1}{\ln \alpha} \cdot \alpha^x + c$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x dx$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\tan x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\arctan x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\cot x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + c$