Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{1+2+3+\cdots+n \; = \; \frac{n\,(n+1)}{2}}_{\mathsf{P}(n)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx+1}_{\mathsf{P}(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia P(n) un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. P(0) è vero (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$ (passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{\mathsf{P}(n)}$.

CASO BASE : P(0) $\quad 2^0 \geq 1 \quad$ vero

PASSO INDUTTIVO : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$2^n \geq n+1 \;\; \to \;\; 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$

$2^{n+1} \;\; \geq \;\; 2n+2 \geq n+2$

Dunque abbiamo dimostrato che P$(n) \to$ P$(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale P(n)

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : P(0) : "0 = 0" è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che P(n) è vera e dimostro che è vera anche P$(n+1)$

ovvero $$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \; = \; \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $\mathsf{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $\mathsf{P}(0)$ è vera (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (passo induttivo)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad \mathsf{P}(n)$ è vera allora lo è anche $\mathsf{P}(m)$ (ipotesi induttiva)
Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $\mathsf{P}(n)$ si usa la condizione che $\mathsf{P}(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$. Ovvero, se per un predicato $\mathsf{P}(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_o
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 \mathsf{P}(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{\mathsf{P}(n)}$

CASO BASE : $\mathsf{P}(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad \mathsf{P}(m)) \to \mathsf{P}(n)$

Ovvero, assumendo che $\mathsf{P}(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allore è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1,m_2 diversi da m e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \qquad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $\mathsf{P}(m_1)$ e $\mathsf{P}(m_2)$ sono vere.

2 Coefficenti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $\mathsf{C}_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $\mathsf{C}_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \qquad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{2} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{0} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \qquad (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $]-\infty, -M[$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$

Dato $f : \text{dom}f \to \mathbb{R},\ \text{dom}f \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a dom$f$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$
Si dice che f ha limite l per $x \to x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall\ V$ intorno di $l \quad \exists\ U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$
OSSERVAZIONE :

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \to x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim : Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di $\mathbb{R}$

$\exists\, V_1$ intorno di l_1

$\exists\, V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

D'altra parte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists\, U_1$ intorno di x_0 tale che
$x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists\, U_2$ intorno di x_0 tale che
$x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in \quad U \setminus \{x_0\},\ \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ASSURDO poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \to 2} 2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$
$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ x \neq 2}_{0<|x-2|<\delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)<\epsilon|}$

ossia

$$|2\,|x-2|\ \cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \circledast$$

Parto da $\circledast$

$$2\,|x-2|\ \underbrace{|cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \quad \leq \quad 2\,|x-2| \quad < \quad \epsilon$$

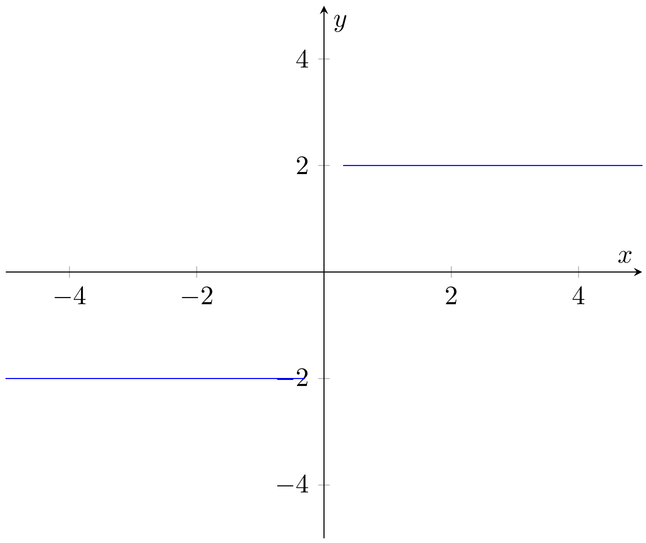
Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2\,|x-2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$\begin{array}{rl} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{array}$$



Se $x \to 0^-$ sgn $x \to -1$
Se $x \to 0^+$ sgn $x \to 1$

Quindi $\nexists \lim_{x\to 0}$ sgn x perchè affinchè esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r+\epsilon[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r < a < r+\epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r-\epsilon, r[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r - \epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione : devo mostrare $\forall\ M > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0+\delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \tfrac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}, \quad l \in \mathbb{R}, \quad x_0$ di acc. per dom$f$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop : Sia $x_0,\ l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione :

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per dom$f$ e supp.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad > \ 0$$

Allora $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim : Considero il caso $l \in \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poichè $l > 0 \Rightarrow\ \exists\, V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f,\ x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poichè $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x > 0)$$

$\forall x \in U$ dom$f,\ x \neq x_0$
Oss : vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano $f,\ g$ funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per dom$f \cap$ dom$g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{definitivamente per } x \to x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{e} \qquad l_g = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss : se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \begin{matrix} x \to x_0 \\ \exists\ l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow \quad l_f < l_g$

Esempio 8

$0 < e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \to -\infty} 0$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R},\ f, g, h\ = X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X. Se

$$\circledast \qquad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \text{def. per } x \to x_0$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

Dim : Suppongo per semplicità che $\circledast$ valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U\ \cap \underbrace{\text{dom}f}_{X}) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow\ \exists\, U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f\ \cap\ X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$
$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \Rightarrow\ \exists\, U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g\ \cap\ X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$
Prendo $U = U_f\ \cap\ U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U\ \cap\ X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, \quad g(x) \in V$
Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e V intervallo allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento : Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \text{def. per } x \to 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x\to \pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ def. per $x \to x_0$

allora

$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to y_0} g(y) = l$ con $y = f(x)$

Esempio 11

$$\lim_{x\to 0} g(x \cdot \sin \frac{1}{x}) \text{ non esiste}$$

$g(y) =$ $\cos y$ se $y \neq 0$ 0 se $y = 0$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R},\ f, g\colon X \to \mathbb{R},\ x_0$ punto di acc. per $X,\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_g, \quad l_f,\ l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0}(c\, f(x)) = c\, l_f$
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$ se $l_g \neq 0$
5. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f}$ se $l_f \neq 0$

Oss : il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinitro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_f > 0$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$

Svolgimento :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln((f(x)^{g(x)})} = \\
&= \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = \lim_{t\to l_g \ln l_f} e^t = \\
&= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\
&= l_f^{l_g}
\end{aligned}$$

Proposizione : Sia $X \subseteq \mathbb{R},\ f, g : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X, f infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \to x_0$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f. infinitesima per f. limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x\to +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [(2^x)\sin(\frac{1}{2^x+1}) + \sin(\frac{1}{2^x+1}) - \sin(\frac{1}{2^x+1})] = \lim_{x\to+\infty} [(2^x+1)\sin(\frac{1}{2^x+1}) - \sin(\frac{1}{2^x+1})] =$$

$y = \dfrac{1}{2^x+1}$ $\qquad y \to 0$ per $x \to +\infty$

$$= \lim_{y\to 0} [\frac{1}{y}\sin y - \sin y] = \lim_{y\to 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{1} - \sin y] =$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

Svolgimento : Pongo $y=\arctan x \Leftrightarrow x=\tan y$
Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}}=$$

$$\lim_{y\to 0} y\cdot\frac{\cos y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\underbrace{(\frac{\sin y}{y})^{-1}}_{1}\cdot\cos y=1\cdot 1=1$$

Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\;\cos\frac{1}{x^2}$$

Soluzione : il limite vale 0 poichè $\sqrt{|x|}$ è infinitesima in $x=0$ e $\cos\frac{1}{x^2}$ è limitata def. per $x\to 0$

Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty}(x+\sin x)$$

Soluzione : $\quad x+\sin x\geq \underbrace{x-1}_{+\infty} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x\to +\infty} x+\sin x=+\infty$$

Definizione 8: Forme Indeterminate

$f,g:\; X\to\mathbb{R},\quad x_0$ punto di acc. per X

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty \qquad \text{F.I. } 0\cdot\infty$$

Oppure

$$\text{F.I.} \qquad +\infty-\infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0^0 \qquad +\infty^0 \qquad 1^{+\infty}$$

Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x=e^x \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x=\lim_{y\to\pm\infty}(1+\frac{1}{y})^{\alpha y}=\lim_{y\to\pm\infty}(\underbrace{(1+\frac{1}{y})^{y}}_{e})^{\alpha}=e^{\alpha}\quad\checkmark$$

Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_{e}) = \ln e = 1 \qquad \checkmark$$

Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \qquad\qquad y = e^x - 1$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \qquad \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)}$$

$$= 1 \quad \checkmark$$

Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln\alpha \qquad \forall \alpha > 0$$

Esempio 20

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+|\sin x|}{x}\right)^x \qquad \text{F.I. } 0^\infty$$

Svolgimento : Uso il teorema del confronto
Visto che $0 \le |\sin x| \le 1$ allora $1 \le 1 + \sin x \le 2$, quindi $\frac{1}{x} \le \frac{1+\sin x}{x} \le \frac{2}{x}$.
I due estremi tendono a 0 per $x \to +\infty$ quindi anche $\frac{1+|\sin x|}{x}$ tende a 0.

Esempio 21

$$\lim_{x\to -\infty} (1 + 3\sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x\to -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x})\ln(1+3\sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ per $y \to 0$Quindi:

$$\lim_{x\to -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1+3\sin e^x) + \frac{3}{3\sin e^x} \cdot \ln(1+3\sin e^x)]$$

Adesso pongo $y = 3\sin e^x$ che tende a 0 per $x \to -\infty$ e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \qquad \ln(1 + 3\sin e^x) = 0 \qquad 3 \cdot \underbrace{\frac{ln(1+y)}{y}}_{1} = 3$$

Il risultato è quindi $1 \cdot 0 + 3 = 3$

3.1 O-piccoli

Definizione 10: O-Piccolo

Date f, g funzioni reali di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per dom$f \cap$ dom$g$, $g(x) \neq 0$ def. per $x \to x_0$
Si dice che f è "o-piccolo" di g per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive: $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ $\quad f(x) \in o(g(x))$ per $x \to x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \to x_0$$

Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$ per $x \to 0$?

Svolgimento :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \qquad x = 0 \qquad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\quad 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ $\checkmark$ e $1 - \cos x$ è o-piccolo di x per $x \to 0$

Osservazione :

$$\begin{matrix} f_1(x) = o[g(x)] \text{ per } x \to x_0 \\ f_2(x) = o[g(x)] \text{ per } x \to x_0 \end{matrix} \qquad \not\Rightarrow \qquad f_1(x) = f_2(x) \text{ per } x \to x_0$$

Osservazione :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = lg(x) + o[g(x)] \quad \text{per } x \to x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \quad \text{per } x \to x_0$$

Dim :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} (\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{l} - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_{l}) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f, g, f_1, g_1 : \ X \to \mathbb{R}, \ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X.
Se $g(x) \neq 0$ def. per $x \to x_0$ e:

$$f(x) = f_1(x) + o(f_1(x)) \qquad \text{per } x \to x_0$$
$$g(x) = g_1(x) + o(g_1(x)) \qquad \text{per } x \to x_0$$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Osservazione:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempio 23: Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2\sin^2 x + 1 - \cos x} \qquad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Svolgimento:
Conoscendo gli sviluppi in serie

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

NUM $= \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2})$

$$-\frac{x^3}{6} = o(\frac{x^2}{2}) \qquad\qquad o(x^3) = o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2})$$

DEN $= x\ln(1+x) - 2\sin^2 x + 1 - \cos x \qquad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2)$ per $x \to 0$

$$= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{x^2}{2}) =$$
$$= x^2 + x\ o(x) - 2x^2 - 4x\ o(x) - 2(0(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{x^2}{2}) =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

Sviluppi asintotici di alcune funzioni

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \to 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \to 0$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$
$\cosh x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \to 0$
$\sinh x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \to 0$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} +$ per $x \to 0$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per} \quad x \to -\infty$$

Svolgimento: Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che y deve tendere a 0, abbiamo e^x che tende a 0 per $x \to -\infty$ quindi la sostituzione è valida

Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow x^n = o(e^x)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \qquad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow \ln x = o(x^n)$ per $x \to +\infty$

Quindi:

$$e^x >> x^n >> \ln x \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5+e^x+\sin x}{3e^x+x^{15}\ln x} \qquad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

Svolgimento :

NUM: $x^5 = o(e^x)$ $\quad \frac{x\sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x}\cdot \sin x = 0 \cdot f$limitata $= 0$
$= e^x + o(e^x)$

DEN: $\frac{x^{15}\ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x}\cdot\frac{\ln x}{x} = 0\cdot 0 = 0$ quindi è $o(e^x)$
$= 3e^x + o(3e^x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+o(e^x)}{3e^x+o(3e^x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

Definizione 12: Nomenclatura

$f, g:\ X\to\mathbb{R},\ x_0\in\bar{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Se $\lim|f(x)| = +\infty,\ \lim|g(x)| = +\infty$

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \Rightarrow$$

$+\infty$ si dice che f è un infinito di ordine superiore a g per $x\to x_0$

$l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ si dice che f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x\to x_0$

0 si dice che f è un infinito di ordine inferiore a g per $x\to x_0$

$\nexists$ si dice che f e g non sono confrontabili

Se $\lim f(x) = 0,\ \lim g(x) = 0$

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \Rightarrow$$

$+\infty$ si dice che f è un infinito di ordine inferiore a g per $x\to x_0$

$l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ si dice che f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x\to x_0$

0 si dice che f è un infinito di ordine superiore a g per $x\to x_0$

$\nexists$ si dice che f e g non sono confrontabili

Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$ e x^2 sono infiniti dello stesso ordine per $x\to 0$

Svolgimento :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \checkmark \qquad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2\sin(\sqrt{x}) + (1-\cos x)^2}{\sqrt{x}\,\sinh(x^2) + (e^x-1)^3}$$

Svolgimento : Sapendo che

$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ per $y \to 0$

$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2)$ per $y \to 0$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$

$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ per $y \to 0$

Allora NUM: $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2})$ $\quad (1-\cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \to 0$

$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$

$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2})$ per $x \to 0^+$ perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente

DEN: $\sqrt{x}\,\sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2})$ $\quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \to 0^+$

$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2})$ per $x \to 0^+$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{1} = 4$$

4 Successioni

Definizione 13: Successione

Una successione è una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme infinito, per noi avranno valori in $\mathbb{R}$, ossia

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Le successioni si scrivono col simbolo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Si dice che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Se $\forall\ V$ intorno di l $\exists\ N > 0$ tale che $a_n \in V\ \forall\ n > N$

Es : $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}, \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \to ? \quad n \to +\infty$

Def : sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente se $\exists\ \lim a_n \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_n = 0$, la successione è infinitesima
2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente se $\lim a_n = \pm\infty$
3. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare o determinata se $\exists\ \lim a_n$
4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare o indeterminata se $\nexists\ \lim a_n$

Esempio 28

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, \; n \geq 1$$

Svolgimento :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

a_n è convergente.

Proposizione sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ succ. convergente, allora è anche limitata, ossia $\exists\, M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

limitata $\not\Rightarrow$ convergente
convergente $\Rightarrow$ limitata

Teorema 11: Teorema della permanenza del segno

Se $\lim a_n = l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \to +\infty$

Teorema 12: Teorema del Confronto

$\{a_n\}, \{b_n\}$ siano due succ. tali che $a_n \leq b_n$ def. per $x \to +\infty$ e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l_a \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = l_b$$

Allora $\qquad l_a \leq l_b$

Teorema 13: Teorema dei due carabinieri

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ succ. tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ def. per $n \to +\infty$ Se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = l$$

Gerarchia degli infiniti :

$$n^n >> n! >> e^n >> n^k >> \log_b n \qquad \text{per } n \to +\infty \qquad a, b > 1 \qquad k > 0$$

Definizione 14: Successioni monotone

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ succ. reale, si dice

- Crescente: se $a_{n+1} \geq a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$
- Decrescente: se $a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$
- Strett. Crescente: se $a_{n+1} > a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$
- Strett. Decrescente: se $a_{n+1} < a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Es :

$\{2^n\} = 1, 2, 4, \dots$ Strett. crescente

$\{1^n\}$ Costante

$\{\frac{1}{2^n}\}$ Strett. decrescente

$\{1 + \frac{1}{n}\}$ Strett. decrescente

Definizione 15: Successione di Cauchy

Una succ. reale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice di Cauchy (o successione fondamentale) se $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N > 0$ tale che

$$n, p > N \Rightarrow |a_n - a_p| < \epsilon$$

Es : $a_n = (-1)^n$ non è di Cauchy

$a_n = \frac{1}{1+n}$ è di Cauchy

Una successione reale a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.

Definizione 16: Sottosuccessioni

Data una succ. a_n si dice sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che a_k sia una succ. strett. crescente di numeri naturali, cioè $n_{k+1} > n_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

Es : $n_k = 2k,\ k \in \mathbb{N} \qquad a_{n_k} = a_{2k},\ k \in \mathbb{N}$ prendo solo gli elementi pari

Osservazione : per mostrare che una succ. non ha limite, mi basta mostrare che due sottosucc. hanno limite diverso o che una non abbia limite.

Teorema 14: Teorema di Bolzano-Weistrass

Sia a_n una succ. limitata. Allora $\exists$ una sottosucc. di a_n convergente

Esempio 29: Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln((n+5)!) - \ln(n!+5)}{\ln(n^\alpha + \cos(n\pi))}$$

al variare di $\alpha > 0$

Svolgimento :

NUM = $\ln((n+5)!) - \ln(n!+5) = \quad \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!) - \ln(n!(1+\frac{5}{n!}) =$

$$= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1))) + \ln(n!) - \ln(n!) - \underbrace{\ln(1+\frac{5}{n!})}_{0} =$$

$$= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1))) =$$

$$= \ln(n^5) + o(\ln n^5)$$

$$= 5\ln n + o(\ln n)$$

DEN = $\ln(n^\alpha + \underbrace{\cos(n\pi)}_{-1^n}) = \quad \ln(n^\alpha(1+\frac{-1^n}{n^\alpha})) =$

$$= \ln n^\alpha \cdot \underbrace{\ln 1 + \frac{-1^n}{n^\alpha}}_{0} =$$

$$= \ln n^\alpha =$$

$$= \alpha \ln n + o(\ln n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5\ln n + o(\ln n)}{\alpha \ln n + o(\ln n)} = \frac{5}{\alpha}$$

5 Funzioni Continue

Definizione 17: Funzione Continua

f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in$ dom$f$. f si dice continua in x_0 se è verificata una delle seguenti:

- x_0 è punto isolato del dominio
- Se x_0 non è punto isolato del dominio (ossia x_0 punto di acc. per dom$f$). Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua se è continua in ogni punto del suo dominio.

Osservazione : Si parla di continuità di f solo nei punti del dominio di f.

Esempio 30

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \text{dom} f$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x_0 \quad \forall\, x_0 \in$ dom$f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Def : Se $x_0 \in$ dom$f$ è punto di acc. per dom$f$, ho che f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in$ dom$f$ allora:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 18: Discontinuità di I specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in$ dom$f$ punto di acc. destro e sinistro per dom$f$. Se esistono i limiti finiti:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Ma

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \neq \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di I specie o di salto

Definizione 19: Discontinuità di II specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$, punto di acc. destro e sinistro. Se:

1. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 sia infinito
   Oppure
2. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 non esiste

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di II specie

Definizione 20: Discontinuità di III specie

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $l \in \mathbb{R}$, tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Allora x_0 si dice punto di discontinuità eliminabile per f

Teorema 15: Teorema di Weistrass

Sia f funzione reale definita e continua su $[a, b]$. Allora f ha massimo e minimo (assoluti) in $[a, b]$, cioè $\exists\, x_m, x_M \in [a, b]$ tale che:

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_m) \qquad \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_M)$$

Es : $\sin[-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [-2\pi,2\pi]} \sin x = -1 \qquad \max_{x \in [-2\pi,2\pi]} \sin x = 1$$

Teorema 16: Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ chiuso e limitato. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$
Allora $\exists\, \epsilon \in]a, b[$ tale che $f(\epsilon) = 0$

Teorema 17: Teorema dei valori intermedi

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ è un intervallo, cioè $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

Allora $\exists\, \epsilon \in I$ tale che $f(\epsilon) = y$

Teorema 18: Continuità della funzione inversa

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile. Allora:

1. f è strettamente monotona
2. la f inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua

6 Derivata

Definizione 21: Calcolo differenziale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I,\ f: I \to \mathbb{R}$ funzione. Se esiste il limite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ rapporto incrementale} \qquad (= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata di f in x_0 (oppure derivata prima) e si indica con

$$f^1(x_0),\ Df(x_0),\ \frac{d}{dx}f(x_0)$$

Inoltre se il limite esiste finito, f si dice derivabile in x_0.
Se f è derivabile $\forall\, x_0 \in I$, f si dice derivabile in I

Es: $f(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ Calcolo $f^1(x_0)$

$$f(x) = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad n = 0$$

$$f^1(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1-1}{x-x_0} = 0$$

$f^1(x_0) = 0 \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$ se $n = 0$

$$f(x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad n = 1$$

$$f^1(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

$$f^1(x_0) = 1 \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}$$

Se $n > 1 \qquad f(x) = x^n$

$$f^1(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_o+h)^n - x_0^n}{h} =$$

Utilizziamo il binomio di Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x_0^{n-k} \cdot h^k =$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{n!} \cdot x_0^n \cdot 1}_{x_0^n} + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!} \cdot x_0^{n-1} \cdot h}_{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h^2} + \underbrace{\frac{n!}{2(n-2)!} \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}_{\frac{1}{2}n(n-1)\cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}$$ nel caso di $n = 2$ (per gli altri valori è analogo)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0^n + n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2 - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} n \cdot x_0^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h}_{0} =$$

$$= n \cdot x_0^{n-1} \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Tabella Derivate Semplici

f(x)	f^1(x)
k	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\log_a \lvert x \rvert$	$(\log_a e) \cdot \frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x''}}$
$\arctan x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Teorema 19: Derivabilità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I,\ f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in x_0. Allora, f è continua in x_0.

Dim : Devo mostrare

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Poichè f è derivabile in x_0
$f(x) = f(x_0) + f^1(x_0)\ (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

Quindi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + \underbrace{f^1(x_0)\ (x - x_0)}_{0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{0}) = f(x_0) \quad \checkmark$$

Osservazione : f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ e $x_0 \not\Leftarrow f$ continua in x_0

Definizione 22: Derivata destra e sinistra

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Se esiste

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice <u>derivata destra di f in x_0</u>. Se $f^1_+(x_0) \in \mathbb{R}$, f si dice <u>derivabile da destra in x_0</u>

Osservazione:

f derivabile in x_0 $\Leftrightarrow$ f derivabile da destra in x_0
f derivabile da sinitra in x_0
$f^1_+(x_0) = f^1_-(x_0)$

Teorema 20: Algebra delle derivate

f, g derivabile in $x_0 \in I$, I intervallo aperto di $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1. αf è derivabile in x_0 e $\quad (\alpha f)^1(x_0) = \alpha f^1(x_0)$
2. $f+g$ è derivabile in x_0 $\quad (f+g)^1(x_0) = f^1(x_0) + g^1(x_0)$
3. $f\cdot g$ è derivabile in x_0 $\quad (f\cdot g)^1(x_0) = f^1(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g^1(x_0)$
4. Se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 $\quad (\frac{f}{g})^1(x_0) = \frac{f^1(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g^1(x_0)}{g(x_0)^2}$

Derivata della f inversa

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto, f continua, invertibile in I e derivabile in x_0, tale che $f^1(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è invertibile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$(f^{-1})^1(y_0) = \frac{1}{f^1(x_0)} \qquad = f^1(f^{-1}(y_0))$$

Esempio 31

$$\mathrm{D}(\arcsin y) = ?$$

Svolgimento:

Posso calcolare la derivata negli $y_0 = \sin x_0$ ove $\sin^1(x_0) \neq 0$ ossia $\cos(x_0) \neq 0$, quindi $x_0 = \pm\pi/2$

$$\mathrm{D}\arcsin y = \frac{1}{(\mathrm{D}\sin)(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

Teorema 21: Derivata delle f composte

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo I, se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in $g(x_0)$. Allora si ha:

$$\mathrm{D}f(g(x_0)) = f^1(g(x_0)) \cdot g^1(x_0)$$

Esempio 32

Calcolare la derivata di x^α con $\alpha > 0$

Svolgimento : $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = f \cdot g(x) \quad f(y) = e^y \quad g(x) = \alpha \log x$
$f^1(y) = e^y, \qquad g^1(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \qquad \mathsf{D}(x^\alpha) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \cdot \frac{1}{x}) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$

Definizione 23: Punti di non derivabilità

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ con derivata sinistra e destra in x_0 tale che:

$$f^1_+(x_0) \neq f^1_-(x_0)$$

E almeno una delle due sia finita, allora x_0 si dice punto angoloso

Definizione 24

$f : I \to \mathbb{R}, \ I$ intervallo aperto, $x_0 \in I$ e si indica:

$$f^1(x_0) = \pm\infty$$

Allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale
Se, invece si ha:

$$f^1_-(x_0) = -\infty \qquad f^1_+(x_0) = +\infty$$

Oppure il contrario, x_0 si dice punto di cuspide

Teorema 22: Limite della derivata

$I \subseteq \mathbb{R}$, intervallo, $f : I \to \mathbb{R}, \ x_0 \in I$. Supp:

1. f sia continua in x_0
2. f sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$
3. $\exists \lim_{x \to x_0} f^1(x)$

Allora $\exists \ f^1(x_0)$ e vale

$$f^1(x_0) = \lim_{x \to x_0} f^1(x)$$

In particolare se il limite è in $\mathbb{R}, \ f$ è derivabile.

Definizione 25: Derivata di ordine superiore

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile. Se f^1 è derivabile in x_0, allora f è derivabile due volte in x_0 e si dice che tale valore è la derivata seconda di f in x_0 e si indica con

$$f^{11}(x_0), \ \mathsf{D}^2 f(x_0), \ \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

Osservazione : dalla definizione di derivata seconda si ottiene quella di derivata n-esima di f in x_0.

Formule di Leibniz : Date f, g derivabili n volte in x_0 si ha:

$$(f \cdot g)^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \cdot f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^k(x_0)$$

Teorema 23: Teorema di de L'Hopital

Siano $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}, \quad a, b \in \bar{\mathbb{R}} \quad f, g$ derivabile in $]a, b[$. Se:

1. $g^1(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in]a, b[$
2. $f(x),\ g(x) \to 0$ oppure $f(x),\ g(x) \to +\infty$ per $x \to a^+$
3. $\exists\ \lim_{x \to a^+} \frac{f^1(x)}{g^1(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$

Allora

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Si ha l'analogo per $x \to b^-$ oppure per $x \to x_0 \quad x_0 \in]a, b[$

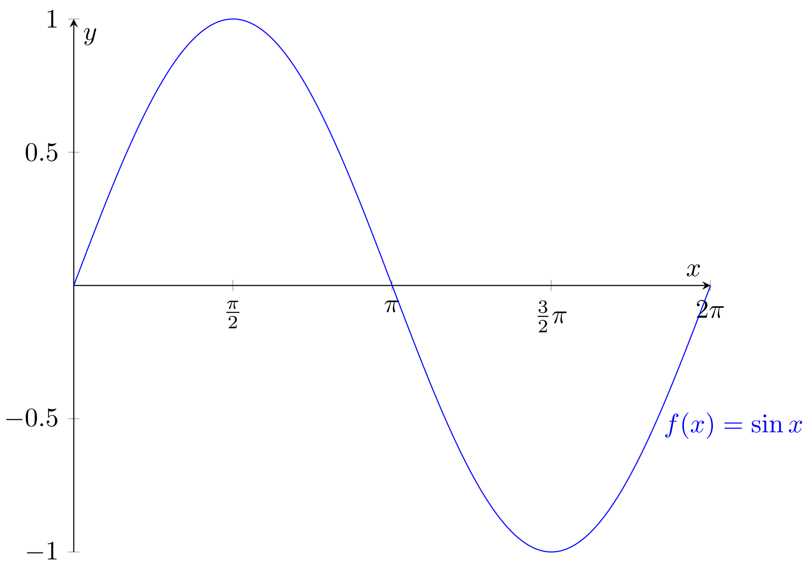
Osservazione : non sempre applicando de l'Hopital si semplifica il limite.

6.1 Massimo e minimo assuluto di una funzione

Definizione 26

M massimo assoluto per f se $\exists\, x_1 \in X$ tale che $f(x_1) =$ M e $f(x) \leq f(x_1) =$ M $\forall\, x \in X$ (x_1 è punto di massimo assoluto), per il minimo assoluto si ha la situazione analoga

Esempio : $\sin x$



Punti di massimo assoluto = 1;

Punti di minimo assoluto = -1

Osservazione : per quanto riguarda massimo e minimo locale se $\exists\, U$ intorno di x_0 si dice che $f(x_0)$ è max o min locale se $f(x_0) \geq f(x)$ oppure $f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in U \cap X$

Teorema 24: Teorema di Fermat o del punto critico

$f :]a, b[\to \mathbb{R} \qquad x_0 \in]a, b[$, f derivabile in x_0, f ha estremo locale in x_0. Allora $f^1(x_0) = 0$

Dim : Ipotizziamo che x_0 è punto di estremo locale e f è derivabile in x_0. Allora esiste $U \subseteq]a, b[$ intorno di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in U$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \qquad \forall x \in U$$

Osservo
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \leq 0 \; x > x_0 \qquad \geq 0 \; x < x_0$$
Applicando la definizione di derivata esiste, quindi, il limite di $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ che è ≤ 0 per $x \to x_0^+$ oppure ≥ 0 per $x \to x_0^-$

$\Rightarrow \qquad 0 \leq f^1_-(x_0) = f^1(x_0) = f^1_+(x_0) \leq 0$
$\Rightarrow \qquad f^1(x_0) = 0$
Osservazione : il teorema non è valido se $x_0 = a$ o $x_0 = b$ e anche se f non è derivabile.

Teorema 25: Teorema di Rolle

$f: \; [a,b] \to \mathbb{R}$,

1. f continua in $[a,b]$
2. f derivabile in $]a,b[$
3. $f(a) = f(b)$

Allora esiste $c \in \;]a,b[$ tale che $f^1(c) = 0$

Dim : Se f non c'è nulla da dimostrare poichè $f^1(c) = 0$.
Suppongo che f non sia costante, per il teorema di Weistrass ha max e min in $[a,b]$ tali che
$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall \, x \in \; [a,b]$$
È necessario dimostrare che x_m o x_M siano all'interno dell'intervallo aperto a,b. Perchè per il teorema di Fermat f^1 si annulla in tali punti.

Suppongo per assurdo che x_m e x_M appartengono agli estremi a e b compresi. Di conseguenza ottengo che, per il terzo punto del teorema di Rolle, $f(a) = f(b)$, quindi, $f(x_m) = f(x_M)$ ciò implica che f è continua, ma all'inizio abbiamo considerato f come non continua.

Teorema 26: Teorema di Lagrange

Sia $f: \; [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora esiste $c \in \;]a,b[$ tale che
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^1(c)$$

Dim : La dimostrazione viene da se applicando la formula del teorema, la prima parte indica il coefficiente angolare della retta che passa secante per i due estremi a,b che è uguale alla derivata prima della funzione nel punto c, che è il coefficiente angolare della tangente nel punto c

Teorema 27: Teorema di Cauchy

$f, g: \; [a,b] \to \mathbb{R}$, continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Allora esiste $c \in \;]a,b[$ tale che
$$g^1(c)[f(b)-f(a)] = f^1(c)[g(b)-g(a)]$$
Se $g^1(x) \neq 0$ vale:
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^1(c)}{g^1(c)}$$

Osservazione : Cauchy $\underbrace{\Rightarrow}_{g(x)=x}$ Lagrange $\underbrace{\Rightarrow}_{f(a)=f(b)}$ Rolle

Teorema 28: Monotonie

$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile:
1. f è crescente $\Leftrightarrow f^1(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. f è decrescente $\Leftrightarrow f^1(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
3. Se $f^1(x) > 0 \quad \forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strett crescente
4. Se $f^1(x) < 0 \quad \forall\, x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strett decrescente

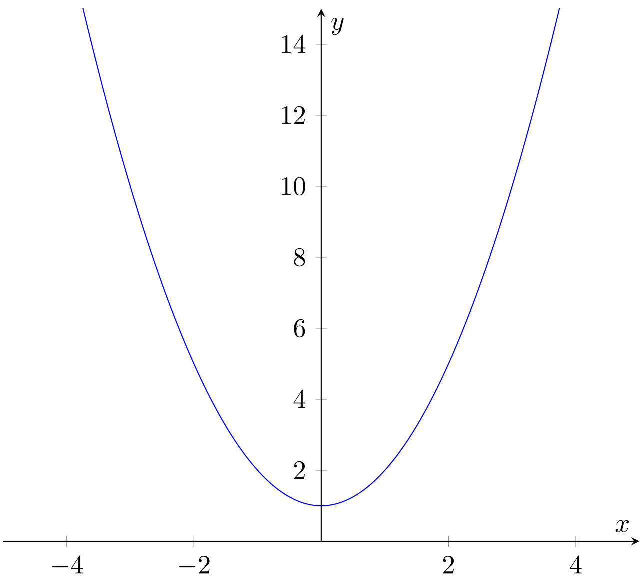
Dim : faccio solo punto 1 (per gli altri il ragionamento è analogo)

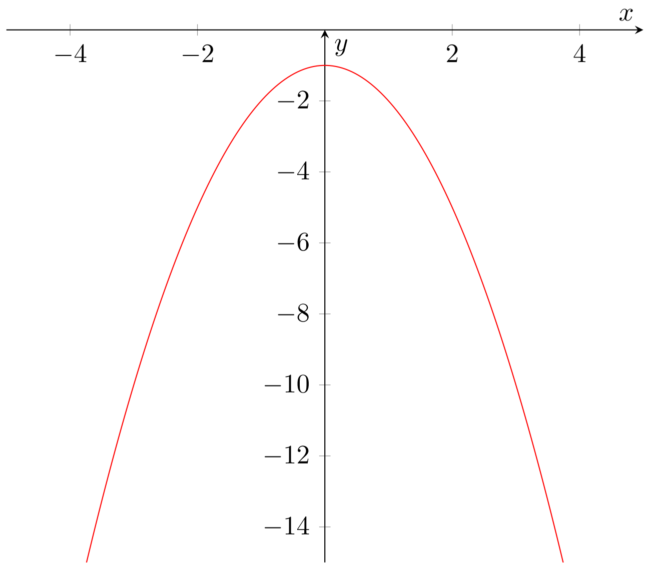
Se f è crescente e prendo due punti x, y con $y > x$, allora di conseguenza ho che $f(y) \geq f(x)$, quindi applicando Lagrange ho $\frac{f(y)-f(x)\geq 0}{y-x>0} = f^1(c) \quad \geq 0$ quindi se faccio il limite per $y \to x^+$ ottengo che $f^1_+(x) \geq 0$ se ora applico il ragionamento per ogni x ottengo che $f^1(x) \geq 0$. ✓

7 Studio di Funzione

Definizione 27: Funzioni concave e convesse

$f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R},\ I$ intervallo, f è convessa in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$, il segmento che congiunge $x_1, f(x_1)$ e $x_2, f(x_2)$ non ha punto sotto il grafico di f. Se gli unici punti che appartengono al grafico di f sono gli estremi del segmento, allora f si dice strettamente convessa.
f è concava se $-f$ è convessa, f è strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa





Definizione 28: Asintoti

Sia f funzione reale di variabile reale:
- se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $+\infty$
- se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $-\infty$

Per $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di acc. per dom$f$
- se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure vale lo stesso per $x \to x_0^-$, allora la retta $x = x_0$ è asintoto verticale

Se esiste $m, q \in \mathbb{R},\ m \neq 0$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - m \cdot x = q$, allora la retta $y = m \cdot x + q$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$

Esempio 33: Studio di funzione

$$f(x) = |\arctan(\log x)|$$

Dominio : $\log x \ \rightarrow \ x > 0$ quindi $]0, +\infty[$
Simmetrie e Periodicità : non è pari $f(-x) \neq f(x)$ e non è dispari $f(-x) \neq -f(x)$ per ogni $x \in$ dom$f$, inoltre non è presente nessuna periodicità evidente
Limti agli estremi di dom$f$:

$$\lim_{x\to 0^+} |\arctan(\log x)| = |\arctan(-\infty)| = |-\frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} |\arctan(\log x)| = |\arctan(+\infty)| = \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo asintoto orrizzontale per $x \rightarrow +\infty$ a $\frac{\pi}{2}$ ma non abbiamo asintoto verticale
Segno : $|\arctan(\log x)| > 0$ verificata $\forall x \in$ dom$f$
Continuità : f è conposizione di funzioni continue, quindi è continua nel suo dominio.
Derivabilità : f è derivabile in $]0, +\infty[\smallsetminus\{1\}$ perchè per $x = 1$ $\quad f(x) = 0$

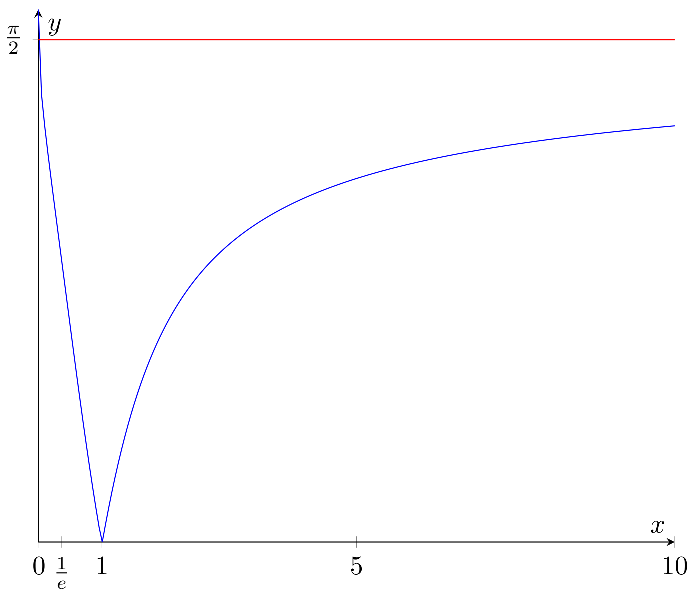
$f^1(x)$ per $0 < x < 1 \qquad = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$
$f^1(x)$ per $1 < x \qquad = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$
Ora verifichiamo se è derivabile in $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{1+0} \cdot 1 = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1+0} \cdot 1 = 1$$

Derivata destra e sinistra sono diverse quindi non è derivabile in $x = 1$, che è quindi punto angoloso
Segno derivata : $f^1(x) = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = < 0 \cdot \ > 0 = < 0 \qquad \forall x \in]0, 1[$ quindi in quell'intervallo f è strett decrescente
$f^1(x) = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = > 0 \cdot \ > 0 = > 0 \qquad \forall x \in]1, +\infty[$ quindi in quell'intervallo f è strett crescente
Derivata Seconda : $f^{11}(x) = -[((-1) \cdot (1 + \log^2 x)^{-2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2}] \qquad \forall x \in]0, 1[$
$f^{11}(x) = [((-1) \cdot (1 + \log^2 x)^{-2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2}] \qquad \forall x \in]1, +\infty[$
$= \frac{-1}{(1+\log^2 x)^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot [2 \log x + 1 + \log^2 x] = < 0 \cdot > 0 \cdot \geq 0 = < 0 \qquad (\log x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \in]0, 1[$
la derita seconda in quell'intervallo è però ≥ 0
Quindi la derivata seconda di f si annulla per $x = \frac{1}{e}$ ed è maggiore di zero per ogni $x \in]0, 1[\smallsetminus\{1/e\}$ quindi f è strett convessa in $]0, 1[\smallsetminus\{\frac{1}{e}\}$, però $x = \frac{1}{e}$ non è punto di flesso
Invece nell'intervallo $]1, +\infty[\qquad f^{11}(x) < 0$ è quindi strett concava nell'intervallo

Grafico :



Massimo e minimo: f non ha max locale nel suo dominio, ma ha un min locale e assuluto in $x = 1$. $x = 0$ è punto di max assoluto per l'estensione per continuità di f.

Definizione 29: Formula di Taylor

Suppongo:

$$f^1(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Rightarrow \ f(x) - f(x_0) = f^1(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow \ f(x) = \underbrace{f(x_0) + f^1(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{polinomio di grado 1}} \quad \underbrace{+o(x - x_0)}_{\text{ERRORE}}$ per $x \to x_0$

se f è derivabile $\Rightarrow$ $f =$ polinomio di grado 1 + errore

Esempio: $f(x) = e^x, \qquad x_0 = 0$

$$e^x = e^0 + e^0 \cdot (x - 0) + o(x - 0) \quad \text{per } x \to 0$$
$$= e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

Definizione 30: Polinomio di Taylor

Prendo $f: \ I \to \mathbb{R}$, I intervallo, x_0 punto interno ad I, f derivabile n volte in x_0.
Chiamo polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 il polinomio:

$$\mathrm{P}^n_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$f^{(0)} = f$

Teorema 29: formula di Taylor con resto nella forma di Peano

Se $f: \ I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, x_0 punto interno ad I, f derivabili n volte in x_0, allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(x)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

Osservazione: se $x_0 = 0$, si chiama polinomio e formula di McLaurin.

Sviluppi di McLaurin

f(x)	$\mathrm{P}_0^n(x)$	$\sum_{k=0}^{n\to+\infty}$
e^x per $x \to 0$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\sum \frac{x^k}{k!} + o(x^k)$
$\log(1+x)$ per $x \to 0$	$x + -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\sum(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^k)$
$(1+x)^\alpha$ per $x \to 0$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \dots$	$\sum \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^k)$
$\cos x$ per $x \to 0$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$\sum(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$
$\cosh x$ per $x \to 0$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	
$\sin x$ per $x \to 0$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$\sum(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$
$\sinh x$ per $x \to 0$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	
$\arctan x$ per $x \to 0$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$	$\sum(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$
$\tan x$ per $x \to 0$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$	

8 Serie Numeriche

Definizione 31

Data una successione a_n di numeri reali si dice serie a termine generale a_n la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ definita da la somma di tutti i termini della successione:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \forall n$$

Dove S_n si dice somma parziale della serie.

Definizione 32: Carattere della serie

La serie di termine generale a_n

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Si dice:

- Convergente: se $\lim S_n = s \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, con s che si dice somma della serie e si scrive

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$$

- Divergente: a $\pm\infty$ se $\lim S_n = \pm\infty$ per $n \to +\infty$
- Inderterminata: se $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite per $n \to +\infty$

Osservazione : Studiare il carattere di una serie, significa determinare se è convergente/divergente/indeterminata.

Esempio 34: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

Svolgimento:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \qquad q = \frac{1}{2}$$

$$q \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \circledast$$

$$q = 1 \quad \Rightarrow \quad = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = n + 1$$

$$0 < q < 1 \quad \Rightarrow \quad = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Quindi a_n è convergente ed ha come somma parziale 1.

Dim: $\circledast$ La dimostrazione si fa con il principio di induzione
Caso base $n = 0$

$$S_0 = \sum_{k=0}^{0} x^k = 1$$

Quindi, la formula $\frac{1-x^{0+1}}{1-x} = 1$ è confermata per il caso base ✓
Ora dimostriamo il passo induttivo. Suppongo la tesi sia vera per n, quindi $S_n = \sum x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ e dimostriamo che ciò implica che la tesi è vera per $n+1$:

$$S_{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

$$= (\sum_{k=0}^{n} x^k) + x^{n+1} =$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1} + (1-x) \cdot x^{n+1}}{1-x} =$$

$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \checkmark$$

Abbiamo dimostrato anche il passo induttivo.

Definizione 33: Serie Geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \qquad r \in \mathbb{R}$$

Serie geometrica di ragione r che converge per $|r| < 1$ a $\frac{1}{1-r}$
diverge a $+\infty$ per $r \geq 1$
inderterminata per $r \leq -1$

Definizione 34: Algebra delle serie

Date le serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ se convergono entrambe o divergono entrambe a $\pm\infty$, allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Inotlre se $c \in \mathbb{R}$, vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Proposizione : Se $\sum a_k$ converge, allora:

1. il suo resto n-esimo (sommatoria da $k = n$ a $+\infty$) è infinitesimo per $n \to +\infty$
2. il suo termine generale a_n è infinitesimo per $n \to +\infty$

Dim : Osservo

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_n = S - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1} \quad n \to +\infty \quad S - S = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Quindi a_n è infinitesimo ✓

Teorema 30: Criterio di convergenza

$a_n \nrightarrow 0$ per $n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ non può convergere.

Osservazione : non vale però l'opposto, ossia:

$$a_n \to 0 \nRightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge}$$

Teorema 31: Criterio di Cauchy

La serie a_k, da $k = 0$ a $+\infty$, converge se e solo se S_n p successione di Cauchy, ossia se e solo se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, N > 0$ tale che $|S_n - S_m| < \epsilon \qquad \forall m, n > N$

Esempio 35: Serie Armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Svolgimento : poichè non è di Cauchy diverge a $+\infty$

Definizione 35: Convergenza assoluta

Si dice che a_k converge assolutamente se $\sum |a_k|$ converge

Osservazione : Convergenza Assoluta $\Rightarrow$ Convergenza Semplice

Esempio 36

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1^k}{2^k} \qquad a_k = \frac{-1^k}{2^k}$$

Svolgimento :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{-1^k}{2^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k \text{ è infinitesimo}$$

Quindi a_k può convergere. Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\frac{-1^k}{2^k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

Poichè $|a_k|$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ allora è convergente e quindi anche a_k lo è.

Osservazione : non vale il contrario, ossia se si ha la convergenza semplice, non si ha sempre anche quella assoluta.

Definizione 36: Serie a termini positivi

Una serie a termini $a_n \geq 0 \quad \forall n$ o converge o diverge a $+\infty$

Dim : Basta osservare che

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

È successione $\underbrace{\text{monotona crescente}}_{S_{n+1}=S_n+a_{n+1}}$ e quindi esiste il limite per $n \to +\infty$ di S_n

Teorema 32: Criterio del Confronto

Date $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tali che $\quad 0 \leq a_k \leq b_k \quad$ definitivamente per $k \to +\infty$
Allora:

1. Se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow$ $\sum a_k$ converge
2. Se $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow$ $\sum b_k$ diverge

Osservazione : Si confrontano le serie "difficili" con serie più "facili" di cui si riesce a determinare la convergenza o meno.

Esempio 37: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$$

Svolgimento :

$$\frac{1}{2k-1} > 0 \quad \forall k \geq 1 \text{ (sarebbe per ogni } k > \frac{1}{2} \text{ ma la serie parte da } k = 1)$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2k-1} = 0 \quad \Rightarrow \text{ il termine generale è infinitesimo}$$

$$\frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} > 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}}_{+\infty} = +\infty$$

Quindi per il secondo punto del criterio del contronto se $\frac{1}{2k}$ diverge allora anche $\frac{1}{2k-1}$ diverge.

Definizione 37: Serie Armonica Generalizzata

Data la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie è a termini positivi e come tale può essere divergente o convergente.
In particolare:

- converge se $\alpha > 1$
- diverge positivamente se $\alpha \leq 1$

Esempio 38: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^n(n^2 + \sin(e^n))}{3^n}$$

Svolgimento : a_n è infinitesima ed è anche $\geq 0 \quad \forall n \geq 1$,
Vorrei confrontare a_n con $(\frac{2}{3})^n$ di cui so già che è convergente, però $0 \leq a_n \nleq (\frac{2}{3})^n$
Se avessi $a_n = (\frac{2}{3})^n \cdot b_n$ con b_n tale che $(\frac{2}{3})^n b_n \leq c^n$ con $c \in]0, 1[$
Mi serve quindi un $b_n = \beta^n$ tale che $\lim \frac{\beta^n}{n^2+\sin(e^n)} = +\infty$ per $n \to +\infty$ e $(\frac{2}{3} \cdot \beta)^n \leq c^n$, quindi $\frac{2}{3}\beta \leq c$ quindi visto che $c \in]0, 1[$ allora $\beta \in]0, \frac{3}{2}[$, ma questo intervallo di β non renderebbe vero il limite, per far ciò devo prendere l'intervallo $]1, \frac{3}{2}[$
Quindi:

$$a_n = (\frac{2}{3})^n \cdot (n^2 + \sin(e^n)) \quad \leq \quad (\frac{2}{3})^n \cdot \beta^n = c^n \qquad \forall \beta \in]1, \frac{3}{2}[$$

Di conseguenza ho che $a_n \leq c^n$ con $c \in]0, 1[$, quindi $\sum c^n$ è converge, di conseguenza lo è anche a_n

Teorema 33: Confronto asintotico

Siano $\{a_k\}, \{b_k\}$ successioni ≥ 0 def. per $k \to +\infty$ tali che

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora:

1. Se $l \in]0, +\infty[$ allora a_k e b_k hanno lo stesso carattere
2. Se $l = 0$ e b_k converge anche a_k converge
3. Se $l = +\infty$ e b_k diverge anche a_k diverge

Teorema 34: Criterio del Rapporto

Sia $\{a_k\}$ una successione a termini positivi (oppure def ≥ 0 per $k \to \infty$).
Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se esiste $0 \leq r < 1$ tale che:
   $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r$ def per $k \to +\infty$
   Oppure
   $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ per $k \to +\infty$
   Allora a_k converge
2. Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ def per $k \to +\infty$
   Oppure
   $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ per $k \to +\infty$
   Allora a_k diverge a $+\infty$
3. Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ o il suo limite è uguale a 1 allora non posso dire nulla

Dim : prendiamo il punto 1 nel caso $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \qquad \forall k \geq k_0$ e $r < 1$

$$\Rightarrow \qquad a_{k+1} \leq r \cdot a_k \qquad \forall k \geq k_0$$
$$\Rightarrow \qquad a_{k_0+1} \leq r \cdot a_{k_0}$$

$$\frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \leq r \Rightarrow a_{k_0+2} \leq r \cdot a_{k_0+1} \leq r \cdot r \cdot a_{k_0} = r^2 \cdot a_{k_0}$$

In generale $\qquad a_{k_0+j} \leq r \cdot a_{k_0+(j-1)} \leq r \cdot r^{j-1} \cdot a_{k_0} = r^j \cdot a_{k_0}$

Si dimostra per induzione, ossia $\qquad a_{k_0+j} \leq r^j \cdot a_{k_0} \quad \forall j \geq 0$

$k = k_0 + j \qquad a_k \leq r^{k-k_0} \cdot a_{k_0} \quad \forall k \geq k_0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{k-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^{k-k_0} \cdot a_{k_0}$$
$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^{k-k_0} = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} r^j}_{converge} < +\infty$$

Quindi si ottiene che la sommatoria è convergente da k_0 a $+\infty$ e di conseguenza si può applicare lo stesso ragionamento, per induzione, a tutti i termini della serie da $k = 0$.

Osservazione : Per quanto riguarda la divergenza si può applicare lo stesso ragionamento, ma con $r \geq 1$ e quindi verrà sempre $\sum r^j$ che è divergente.
Oppure si può notare che $a_{k_0+1} \geq a_{k_0} > 0$ che generalizzato vuol dire $a_{k_0+j} \geq a_{k_0} > 0 \quad \forall j \geq 0$ e applicando il criterio di convergenza abbiamo che $a_{k_0+1} \nrightarrow 0$ per $j \to +\infty$ e quindi la serie diverge.

Osservazione : se $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ non posso dire niente. se prendo ad esempio $a_n = \frac{1}{n^2}$ il rapporto tende a 1 e la serie è convergente, se prendo $a_n = \frac{1}{n}$ il rapporto tende sempre a 1, ma la serie è divergente.

Esempio 39: Serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge?

Svolgimento :

Studio la convergenza assoluta di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Applico il criterio del rapporto $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ per $n \to +\infty$

Quindi, per il primo punto del criterio del rapporto,
la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) $\forall x \in \mathbb{R}$

Definizione 38: Serie di Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Generalizzata (non è sempre valida):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0)$$

Teorema 35: Criterio della radice

Sia $\{a_k\}$ successione con $a_k \geq 0 \qquad \forall k$:

1. Se esiste $r < 1$ tale che
   $\lim \sqrt[k]{a_k} = r < 1$ per $k \to +\infty$, allora a_k converge
2. Se $\lim \sqrt[k]{a_k} > 1$ per $k \to +\infty$, allora a_k diverge
3. Altrimenti se $r = 1$ allora non si può dir nulla

Dim : consideriamo il caso 1

$\sqrt[k]{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$

$\Rightarrow a_k \leq r^k$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{+\infty} r^k}_{\text{convergente}} < +\infty$$

Quindi stesso ragionamento della dimostrazione del criterio del rapporto:
abbiamo dimostrato per la serie parziale da $k = k_0$ a $+\infty$ adesso vale lo stesso per tutta la serie

Osservazione : La dimostrazione del punto 2 e 3 sono analoghe a quella del punto 1, cambiando l'intervallo in cui esiste r.

Definizione 39: Serie Logaritmica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Svolgimento : studio la convergenza assoluta tramite il criterio del rapporto

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n}$$

Ed ottengo $|x| \cdot \frac{n}{n+1} \to |x|$ per $n \to +\infty$, è quindi convergente assolutamente se $|x| < 1$, se $|x| = 1$ non posso dire nulla, se $|x| > 1$ allora non è convergente assolutamente.
Provo a vedere com'è il carattere per $x > 1$ e ottengo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty \quad \forall x > 1$$

Quindi per il criterio di convergenza a_n con $|x| > 1$ non è convergente.
Se $x = -1$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} = -\infty$$

diverge quindi a $-\infty$
Per $x = 1$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Che per determinarne il carattere ho bisogno di un nuovo criterio.

Teorema 36: Criterio di Leibniz

Sia $\{a_k\}$ successione tale che
1. $a_k \geq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$
2. $\{a_k\}$ decrescente: $a_{k+1} \leq a_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$
3. $a_k \to 0$ per $k \to +\infty$

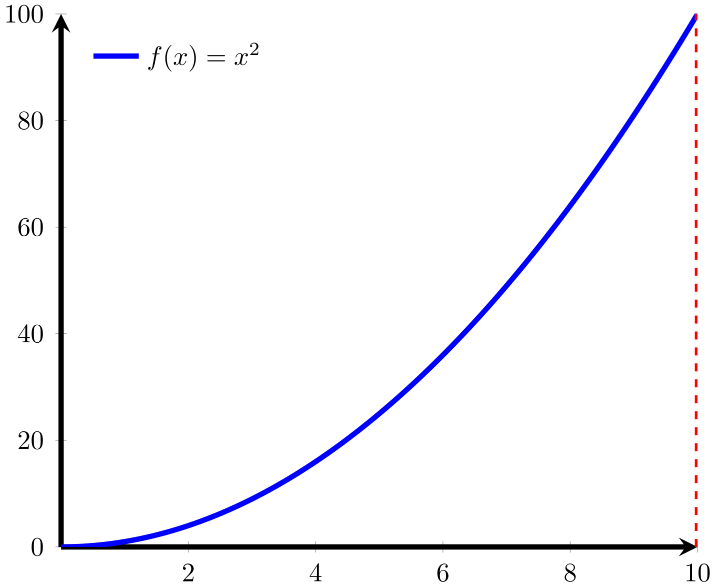
Allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

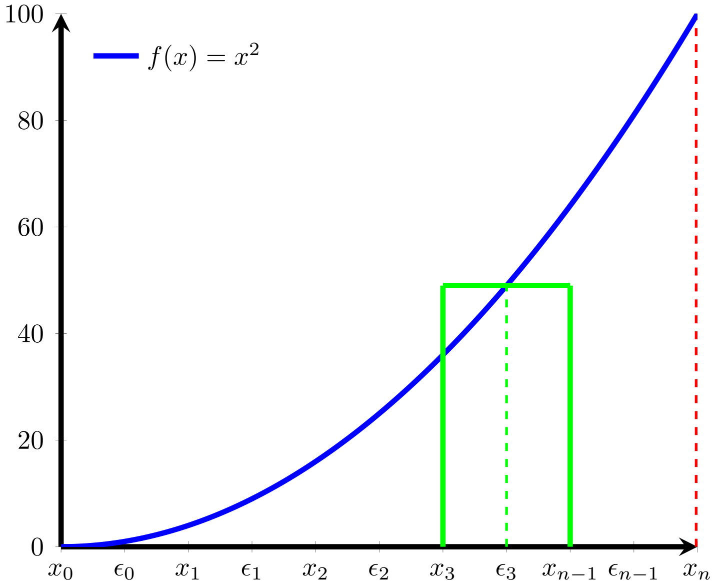
converge

Osservazione : il criterio di Leibniz vale solo per la convergenza semplice non assoluta.

9 Calcolo Integrale



Idea : suddivido $[0, 10]$ in tanti intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ per $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ quindi in n intervalli con $x_0 = 0$ e $x_n = 10$. Abbiamo quindi: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ ... \ < x_{n-1} < x_n = 10$



Pe ogni $i = 0, 1, ..., n-1$ prendo $\epsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e considero il rettangolo di base $[x_i, x_{i+1}]$ e altezza $f(\epsilon_i) = \epsilon_i^2$

Adesso generalizziamo questo ragionamento, unendo tutti i rettangoli, attraverso la sommatoria:

$$\text{A}_{\text{tot}} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\epsilon_i)$$

Per rappresentare questa sommatoria si usa l'integrale definito:

$$\text{A}_{\text{tot}} = \int_0^{10} f(x) \cdot dx = \int_0^{10} x^2 \cdot dx$$

Definizione 40: Integrale di Cauchy-Riemann

Si dice partizione o suddivisione di $[a, b]$ un insieme finito di punti $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ tale che

$$a = x_0 < x_1 < \ ... \ < x_{n-1} < x_n = b$$

Definizione 41: Partizione Puntata

Si dice partizione puntata di $[a,b]$ una coppia $(\mathcal{P},\epsilon)$ dove $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n\}$ è partizione di $[a,b]$ e $\epsilon=\{\epsilon_1,...,\epsilon_n\}$ con $\epsilon_k\in[x_{k-1},x_k] \quad \forall k=1,..,n$

Esempio : $I=[0,1] \qquad \mathcal{P}_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n},1\} \qquad \mathcal{P}_4=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$
$\epsilon=\{\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}+\frac{1}{n},...,\frac{1}{2n}+\frac{n-1}{n}\}$ Quindi $(\mathcal{P}_n,\epsilon)$ è una partizione puntata di $[0,1]$

Definizione 42: Integrale definito

Una funzione limitata $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ si dice integrabile alla Cauchy-Riemann in $[a,b]$ se esiste $I\in\mathbb{R}$ tale che $\forall\epsilon>0 \quad \exists\delta>0$ tale che $\forall(\mathcal{P}\epsilon)$ partizione puntata di $[a,b]$ con $|\mathcal{P}|<\delta$ si ha

$$|S(f,\mathcal{P},\epsilon)-I|<\delta$$

Tale valore finito I viene detto integrale definito di f in $[a,b]$ e si indica:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

Osservazione : Per $S(f,\mathcal{P},\epsilon)$ si intende la somma puntata di f rispetto alla partizione $(\mathcal{P},\epsilon)$ di $[a,b]$ ossia:

$$S(f,\mathcal{P},\epsilon)=\sum_{k=1}^{n} f(\epsilon_k)\cdot(x_k-x_{k-1})$$

Osservazione :

$$\int_a^a f(x)\cdot dx=0$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx=-\int_b^a f(x)\cdot dx$$

Osservazione : Se f è non negativa e integrabile, allora il suo integrale è l'area del sottografico definito da

$$SG(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad 0\le y\le f(x),\ x\in[a,b]\}$$

Teorema 37

Sia $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ monotona e limitata, allora f è integrabile.
Inotre f è continua a tratti se è continua tranne in un numero finito di punti, in cui ha limite destro e sinistro finiti, quindi discontinuità di prima specie.
Le funzioni continue a tratti sono comunque integrabili, poichè basta sommare gli integrali nei vari tratti.

Teorema 38: Proprietà dell'integrale

Sia $f, g;\ [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili. Allora:

1. Linearità dell'integrale:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x) \cdot dx + \beta \int_a^b g(x) \cdot dx$$

2. Adattabilità rispetto all'insieme di integrazione: se $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

3. Monotonia dell'integrale: se $f \leq g$ in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b f(x) \cdot dx$$

4. Se f è integrabile in $[a,b]$, allora anche $|f|$ lo è, e si ha:

$$|\int_a^b f(x) \cdot dx| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Teorema 39: Media integrale

Sia $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e continua per Weistrass esiste $m = \inf f, \quad M = \text{supp } f$ allora:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M$$

Se f è continua in $[a,b]$ allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Dim : sapendo che $m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \int_a^b m \cdot dx \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b M \cdot dx \\
\Rightarrow \quad & \int_a^b m \cdot dx = m \cdot \int_a^b 1 \cdot dx = m \cdot (b-a) \\
\Rightarrow \quad & m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M \cdot (b-a) \\
\Rightarrow \quad & m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M
\end{aligned}$$

Se f è continua $f([a,b]) = [m, M]$ ed esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx$$

Osservazione : se f non è continua, potrebbe non esistere $c \in [a,b]$ poichè il teorema di Weistrass non assicura massimo e minimo per funzioni non continue.

Definizione 43: Primitiva e famiglia di primitive

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione $F: A \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f o funzione primitiva di f in A se F è derivabile in A e si ha

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in A$$

La famiglia di primitive è invece l'unione di tutte le $F(x)$ la cui derivata prima è uguale $f(x)$ con l'aggiunta di una costante c

Esempio : se f è derivabile, allora f è una primitiva di f'
$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$ quindi $F(x) + c$ è la famiglia di primitive di $f(x)$

Teorema 40: Teorema fondamentale del calcolo 1° parte

Se $f \in C[a, b]$ e definisco

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \qquad \forall x \in [a, b]$$

allora F è derivabile (e continua) in $[a, b]$ e si ha $F'(x) = f(x)$ quindi F è primitiva di f

Teorema 41: 2° parte calcolo fondamentale

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua qualsiasi primitiva in $[a, b]$. Allora:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx$$

Dim : Dalla prima parte del teorema sappiamo che la funzione integrale nel punto a è una primitiva della funzione stessa e quindi qualsiasi altra primitiva nell'intervallo $[a, b]$ è diversa dalle altre per un valore finito $c \in \mathbb{R}$. Quindi:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + c$$

Otteniamo quindi che:

$$F(b) - F(a) = (\int_a^b f(t)\ dt + c) - (\int_a^a f(t)\ dt + c) = \int_a^b f(t)\ dt$$

La variabile di integrazione è indifferente quindi possiamo sostituire t con x ed abbiamo verificato la nostra tesi.

Definizione 44: Integrale indefinito

Data una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ l'integrale indefinito di f in A è l'insieme di tutte le sue primitive in A e si denota

$$\int f(x)\ dx = \{F : \ F \text{ è primitiva di } f \text{ in } A\}$$

Se A è un intervallo, allora

$$\int f(x)\ dx = \{F + c : \ c \in \mathbb{R}\}$$

Osservazione : l'integrale indefinito è lineare, ossia:

$$\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$$

9.1 Metodi di integrazione

Definizione 45: Integrazione per parti

Siano f, g funzioni derivabili in $I = [a,b]$, allora:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Quindi, integrando:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\ dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ dx$$

Definizione 46: Integrazione per sostituzione

$f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\varphi:\ [c,d] \to [a,b]$ di classe C^1 e tale che $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, F primitiva di f in $[a,b]$. Allora:

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx$$

Integrali indefiniti noti

$\int f(x)$	$F(x)$
$\int e^x\ dx$	$e^x + c$
$\int x^\alpha\ dx$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + c$
$\int \frac{1}{x}\ dx$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\int \alpha^x\ dx$	$\frac{1}{\ln \alpha} \cdot \alpha^x + c$
$\int \sin x\ dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x\ dx$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx$	$\tan x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx$	$\arctan x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx$	$-\cot x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$	$\arcsin x + c$

Esempio 40

$$\int (e^{3x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)})\, dx$$

Svolgimento :

$$\Rightarrow \quad \int e^{3x} - \int \frac{1}{x^3} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \int \underbrace{3}_{f'(x)} \cdot e^{3x}\, dx \quad + \frac{1}{2x^2} \quad + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \quad \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + (\ln x)^2}$$

Quindi: $\int f'(x) \cdot f(x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \arctan(\ln x) + c$$

Definizione 47: Integrale di funzione razionale

Consideriamo l'integrale:

$$\int \frac{\mathcal{P}(x)}{\mathcal{Q}(x)}\, dx \qquad \text{con } \mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q} \text{ polinomi}$$

L'idea è riscrivere l'integrale come la somma di due integrali di cui riusciamo a calcolare la primitiva e abbiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$ e $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{x - x_2}$$

2. $\Delta = 0$ e $(x - x_1)^2 = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

3. $\Delta < 0$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{a}{2} \int \frac{\overbrace{2x + c}^{f'(x)}}{\underbrace{x^2 + cx + d}_{f(x)}} + b \int \frac{1}{x^2 + cx + d}$$

Esempio 41: Caso 1

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Svolgimento : visto che $\Delta > 0$ allora posso applicare il primo caso:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 5x + 6 = (x-2)\cdot(x-3)$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$
$$\begin{Bmatrix} Ax + Bx = 3x \\ -3A - 2B = 2 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che: $A = -8 \quad B = 11$

$$\int \frac{3x+2}{x^2-5x+6} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{-8}{x-2}dx + \int \frac{11}{x-3}dx$$
$$\Rightarrow \qquad -8\ln|x-2| + 11\ln|x-3| + c$$

Esempio 42: Caso 2

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2}$$

Svolgimento : visto che $\Delta = 0$ applichiamo il secondo caso:

$$\Rightarrow \qquad \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$
$$\begin{Bmatrix} Ax = x \\ -2A + B = 2 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che: $A = 1 \quad B = 4$

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{4}{(x-2)^2}dx$$
$$\Rightarrow \quad \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$$

Esempio 43: Caso 3

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}$$

Svolgimento : visto che $\Delta < 0$ applichiamo il terzo caso:

$$\Rightarrow \quad 3\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx + 2\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\int \frac{\overbrace{2x+4}^{f'(x)} - 4}{\underbrace{x^2+4x+5}_{f(x)}}dx + 2\int \frac{1}{1+(x+2)^2}dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+5| \qquad -4\cdot\frac{3}{2}\int \frac{1}{1+(x+2)^2}dx + 2\int \frac{1}{1+(x+2)^2}dx$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5) - 4\arctan(x+2) + c$$

9.2 Integrale improprio

Definizione 48: Integrale generalizzato o improprio

Può capitare di avere $f: I \to \mathbb{R}$ con f o I o entrambi illimitati, ma vogliamo calcolare comunque un'area (o integrale).
Sia $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[c,d] \quad \forall c \in (a,b]$. Se esiste:

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x) \cdot dx$$

Tale limite si chiama integrale improprio o generalizzato di f in $[a,b]$.

Se il limite esiste finito, si dice che f è integrabile in senso generalizzato e l'integrale si dice convergente, altrimenti si dice che l'integrale è divergente.

Osservazione: se $|f|$ è integrabile in senso improprio si dice che f è assolutamente integrabile in senso improprio e:

$$|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b f(x)\ dx$$

Esempio 44

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$$

Svolgimento: ci accorgiamo che 0 non fa parte del dominio di f quindi dobbiamo fare:

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c\to 0^+} 2 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 2$$

Teorema 42: Teorema del Confronto

Siano $f,g: (a,b] \to \mathbb{R} \quad a \in \bar{\mathbb{R}}$ con f,g integrabili in $[c,b] \quad \forall c \in]a,b[$ tale che:

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in (a,b]$$

Allora:
- $\int g(x)\ dx < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\ dx < +\infty$
- $\int f(x)\ dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int g(x)\ dx = +\infty$

Teorema 43: Criterio asintotico del Confronto

$f,g: (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[c,b] \quad \forall c \in]a,b[$ tale che:

$$\lim_{x\to a^+} |\frac{f(x)}{g(x)}| = l$$

1. se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora f è ass. integrabile in $(a,b]$ se e solo se lo è anche g nello stesso intervallo
2. se $l = 0$ allora se g è ass. integrabile in $(a,b]$, allora lo è anche f
3. se $l = +\infty$ allora se l'integrale da a a b di $|g(x)| = +\infty$ allora anche lo stesso integrale per $|f(X)| = +\infty$

Osservazione : è importante avere funzioni di cui conosciamo l'integrabilità.

Teorema 44: Criterio integrale per le serie

$f: [k_0, +\infty[\to [0, +\infty[$, decrescente, $k_0 \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(x) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty$$

Esempio casi importanti :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

Se $\alpha \geq 1$ allora $\Rightarrow +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

Se $\alpha \leq 1$ allora $\Rightarrow +\infty$

Osservazione :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$