

# Analisi Matematica

Marco Pittarello

## Contents

<b>1</b>	<b>Principio di Induzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Coefficienti Binomiali</b>	<b>3</b>
2.1	Proprietà di $\binom{n}{k}$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Limiti di funzioni</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>O-piccoli</b>	<b>12</b>

# 1 Principio di Induzione

## Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

## Teorema 1: 1° forma

Sia  $P(n)$  un predicato con parametro  $n \in \mathbb{N}$  e tale che:

1.  $P(0)$  è vero ( **caso base** )
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$  ( **passo induttivo** )

Allora  $P(n)$  è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$

## Esempio 1

Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n + 1}_{P(n)}$ .

CASO BASE :  $P(0) : 2^0 \geq 1$  vero

PASSO INDUTTIVO :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che  $2^n \geq n + 1$  e dimostro che  $2^{n+1} \geq n + 2$

$$2^n \geq n + 1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n + 1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$$

Dunque abbiamo dimostrato che  $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale  $P(n)$

## Esempio 2

Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE :  $P(0) : "0 = 0"$  è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che  $P(n)$  è vera e dimostro che è vera anche  $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

### Teorema 2: 2° forma

Sia  $P(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  un predicato tale che:

1.  $P(0)$  è vera (caso base)
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$  (passo induttivo)

Se  $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$  è vera allora lo è anche  $P(n)$  (ipotesi induttiva)

Allora  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$  è vera

**OSSERVAZIONE** è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare  $P(n)$  si usa la condizione che  $P(m)$  vale per tutti gli  $m < n$

**OSSERVAZIONE** in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque  $n_0 \in \mathbb{N}$ .  
Ovvero, se per un predicato  $P(m)$  dimostriamo:

- il caso base per  $n_0$
- il passo induttivo  $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che  $\forall n \geq n_0 P(n)$  è vera

### Esempio 3

Dimostriamo che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE :  $P(2)$  è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che  $P(m)$  vale  $\forall 1 \leq m < n$ , ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche  $n$  si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se  $n$  è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se  $n$  non è primo allora è divisibile per un numero  $m_1$  con  $m_1 \neq n$  e  $m_1 \neq 1$ ,

in particolare  $2 \leq m_1 < n$

Dunque  $\exists m_2 \in \mathbb{N}$  tale che

$n = m_1 m_2$  con  $m_1, m_2$  diversi da  $m$  e da 1

Inoltre  $2 \leq m_2 < n$

perchè  $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva  $P(m_1)$  e  $P(m_2)$  sono vere.

## 2 Coefficienti Binomiali

### Definizione 2

Definiamo  $C_{n,k}$  = numero totale di modi possibile, e si chiama:  
numero di combinazioni di  $n$  elementi di classe  $k$

Spesso  $C_{n,k}$  viene anche denotato con il simbolo  $\binom{n}{k}$ , chiamato  
coefficiente binomiale  $n$  su  $k$

Quanto vale  $\binom{n}{k}$ ?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

### Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$  si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

**OSSERVAZIONE:** Abbiamo un altro metodo per calcolare  $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$

Utilizzando il teorema e  $\binom{n}{0} = 1$  possiamo calcolare ogni valore di  $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$ , evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

### Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga  $n$  è composta da  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$

$$\binom{0}{0} = 1 \quad (1)$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \quad (2)$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \quad (3)$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \quad (4)$$

### Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

## 3 Limiti di funzioni

### Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di  $r$  con  $r \in \mathbb{R}$ , un intervallo  $]r-\epsilon, r+\epsilon[$  con  $\epsilon > 0$ ;  $\epsilon$  viene detta raggio dell'intorno

- Se  $r = +\infty$ , si dice intorno di  $+\infty$  un intervallo del tipo  $]M, +\infty[$  con  $M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ )
- Se  $r = -\infty$ , si dice intorno di  $-\infty$  un intervallo del tipo  $]-\infty, -M[$  con  $M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ )

Dato  $f: \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  è punto di accumulazione a  $\text{dom} f$ ,  $l \in \mathbb{R}$

Si dice che  $f$  ha limite  $l$  per  $x \rightarrow x_0$  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se  $\forall V$  intorno di  $l \quad \exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$  allora  $f(x) \in V$

### OSSERVAZIONE:

- Se  $l \in \mathbb{R}$ , si dice che  $f$  ha limite finito in  $x_0$
- Se  $l = +\infty$  o  $l = -\infty$ , allora  $f$  si dice divergente per  $x \rightarrow x_0$
- Se  $l = 0$ , allora si dice che  $f$  è infinitesima in  $x_0$

#### Teorema 4: Unicità del limite

Se  $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora  $l_1 = l_2$

**Dim:** Suppongo per assurdo che  $l_1 \neq l_2$

$P_1$  la proposizione di separazione di  $\mathbb{R}$

$\exists V_1$  intorno di  $l_1$

$\exists V_2$  intorno di  $l_2$

tale che  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$  intorno di  $x_0$  tale che  
 $x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$   
allora  $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$  intorno di  $x_0$  tale che  
 $x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$   
allora  $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$  intorno di  $x_0$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$  **ASSURDO** poichè  $\bar{x} \in U_1$  e  $\bar{x} \in U_2$

#### Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$  tale che se  $\underbrace{|x-2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x-2| < \delta}$  allora  $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \textcircled{*}$$

Parto da  $\textcircled{*}$

$$2|x-2| \underbrace{|\cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x-2| < \epsilon$$

Voglio  $\delta > 0$  tale che se  $|x-2| < \delta$  e  $x \neq 2$  allora  $2|x-2| < \epsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$  e ho verificato che vale il limite.

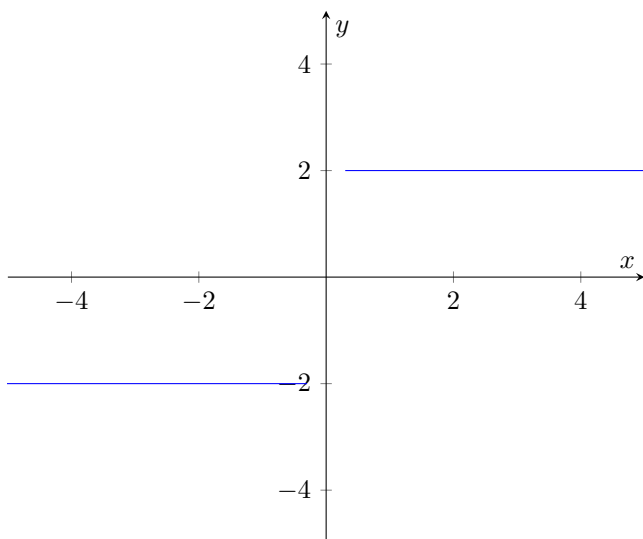
#### Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$-1 \quad x < 0$$

$$0 \quad x = 0$$

$$1 \quad x > 0$$



Se  $x \rightarrow 0^-$   $\text{sgn } x \rightarrow -1$

Se  $x \rightarrow 0^+$   $\text{sgn } x \rightarrow 1$

Quindi  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$  perchè affinché esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

#### Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  si dice:

- punto di acc. destro per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap ]r, r + \epsilon[ \neq \emptyset$  (cioè  $\exists a \in A$  tale che  $r < a < r + \epsilon$ )
- punto di acc. sinistro per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap ]r - \epsilon, r[ \neq \emptyset$  (cioè  $\exists a \in A$  tale che  $r - \epsilon < a < r$ )

#### Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

**Soluzione:** devo mostrare  $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$  tale che se  $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$  allora  $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo  $\delta = \frac{1}{\ln M}$

#### Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $x_0$  di acc. per  $\text{dom } f$ . Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

**Prop:** Sia  $x_0, l \in \bar{\mathbb{R}}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

**Osservazione:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

### Teorema 5: Permanenza del segno

Dato  $f$  reale di variabile reale,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ , di acc. per  $\text{dom} f$  e supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora  $\exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$ , allora

$$f(x) > 0$$

**Dim:** Considero il caso  $l \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Poichè  $l > 0 \Rightarrow \exists V$  intorno di  $l$  tale che:

$$V \subseteq ]0, +\infty[$$

$\exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$  allora  $f(x) \in V$  Poichè  $V \subseteq ]0, +\infty[$ , ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$

**Oss:** vale l'analogo con  $l < 0$

### Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano  $f, g$  funzioni reali di variabile reale,  $x_0$  di acc. per  $\text{dom} f \cap \text{dom} g$ , tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

**Oss:** se  $f(x) < g(x)$  definitivamente per  $\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \\ \exists l_f \text{ e } l_g \end{array} \right\} \nRightarrow l_f < l_g$

### Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

### Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  di acc. a  $X$ . Se

$$(*) \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

**Dim:** Suppongo per semplicità che  $(*)$  valga  $\forall x \in X$ . Devo mostrare che  $\forall V$  intorno di  $l$   $\exists U$  intorno di  $x_0$  t.c. se  $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom} f}_X) \setminus \{x_0\}$ , allora  $h(x) \in V$  con  $V$  intorno di  $l$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$  allora  $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$  allora  $g(x) \in V$

Prendo  $U = U_f \cap U_g$  è intorno di  $x_0$  se  $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, g(x) \in V$

Quindi  $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \in V$  intervallo allora  $h(x) \in V$

### Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Svolgimento:** Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

### Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**Svolgimento:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

### Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano  $f, g$  funzioni reali di variabile reale, tale che  $g$  o  $f$  sia definita in un insieme  $X$  che abbia  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  come punto di acc. supp.

1.  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
3.  $f(x) \neq y_0$  def. per  $x \rightarrow x_0$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \quad \text{con } y = f(x)$$

### Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} g\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

### Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  punto di acc. per  $X$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g, \quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1.  $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = c l_f$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g} \quad \text{se } l_g \neq 0$
5.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f} \quad \text{se } l_f \neq 0$

**Oss**: il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinistro

### Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

**Svolgimento**:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln((f(x))^{g(x)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow l_g \ln l_f} e^t = \\ &= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\ &= l_f^{l_g} \end{aligned}$$

**Proposizione**: Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  punto di acc. per  $X$ ,  $f$  infinitesima in  $x_0$  (cioè  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ) e  $g$  sia limitata def. per  $x \rightarrow x_0$ . Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di  $f$ . infinitesima per  $g$ . limitata è infinitesimo")

### Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) + \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] = \\ y = \frac{1}{2^x + 1} \quad y \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty & \\ = \lim_{y \rightarrow 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] = \lim_{y \rightarrow 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_1 - \sin y] &= \\ = 1 - 0 = 1 & \end{aligned}$$

#### Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

**Svolgimento:** Pongo  $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \\ \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\cos y}{\sin y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}}_1 \cdot \cos y = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

#### Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x^2}$$

**Soluzione:** il limite vale 0 poichè  $\sqrt{|x|}$  è infinitesima in  $x = 0$  e  $\cos \frac{1}{x^2}$  è limitata def. per  $x \rightarrow 0$

#### Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

**Soluzione:**  $x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{+\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

#### Definizione 8: Forme Indeterminate

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0$  punto di acc. per  $X$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{F.I. } 0 \cdot \infty$$

Oppure

$$\text{F.I.} \quad +\infty - \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^0 \quad +\infty^0 \quad 1^{+\infty}$$

#### Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

**Soluzione:**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_e^\alpha = e^\alpha \quad \checkmark$$

### Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

**Soluzione :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_e) = \ln e = 1 \quad \checkmark$$

### Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Soluzione :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= & y = e^x - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = & \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

### Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

### Esempio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + |\sin x|}{x} \right)^x \quad \text{F.I. } 0^\infty$$

**Svolgimento :** Uso il teorema del confronto

Visto che  $0 \leq |\sin x| \leq 1$  allora  $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$ , quindi  $\frac{1}{x} \leq \frac{1 + \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$ .  
 I due estremi tendono a 0 per  $x \rightarrow +\infty$  quindi anche  $\frac{1 + |\sin x|}{x}$  tende a 0.

### Esempio 21

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3 \sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

**Svolgimento :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}) \ln(1 + 3 \sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole  $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$  per  $y \rightarrow 0$  Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x) + \frac{3}{\sin e^x} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x)]$$

Adesso pongo  $y = 3 \sin e^x$  che tende a 0 per  $x \rightarrow -\infty$  e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \quad \ln(1 + 3 \sin e^x) = 0 \quad 3 \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_1 = 3$$

Il risultato è quindi  $1 \cdot 0 + 3 = 3$

## 4 O-piccoli

### Definizione 10: O-Piccolo

Date  $f, g$  funzioni reali di variabile reale,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  di acc. per  $\text{dom} f \cap \text{dom} g$ ,  $g(x) \neq 0$  def. per  $x \rightarrow x_0$ .  
Si dice che  $f$  è "o-piccolo" di  $g$  per  $x \rightarrow x_0$  se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive:  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$   $f(x) \in o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

### Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ ?

Svolgimento:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad x = 0 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi  $0 \cdot \frac{1}{2} = 0$  ✓ e  $1 - \cos x$  è o-piccolo di  $x$  per  $x \rightarrow 0$

Osservazione:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ f_2(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad \nRightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = lg(x) + o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Dim.:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_l - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_l \right) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

**Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi**

$X \subseteq \mathbb{R}$   $f, g, f_1, g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  punto di acc. per  $X$ .

Se  $g(x) \neq 0$  def. per  $x \rightarrow x_0$  e:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

**Osservazione :**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

**Esempio 23: Calcolare**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

**Svolgimento :**

Conoscendo gli sviluppi in serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{NUM} = \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + o(x^3) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} -\frac{x^3}{6} &= o\left(\frac{x^2}{2}\right) && o(x^3) = o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{DEN} = x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= x^2 + x o(x) - 2x^2 - 4x o(x) - 2(o(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

## Sviluppi asintotici di alcune funzioni

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\cosh x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\sinh x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

### Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

**Svolgimento:** Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che  $y$  deve tendere a 0, abbiamo  $e^x$  che tende a 0 per  $x \rightarrow -\infty$  quindi la sostituzione è valida

### Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

### Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow x^n = o(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln x = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Quindi:

$$e^x \gg x^n \gg \ln x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

### Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^x + \sin x}{3e^x + x^{15} \ln x} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

**Svolgimento:**

NUM:  $x^5 = o(e^x) \quad \frac{x \sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \sin x = 0 \cdot f \text{ limitata} = 0$   
 $= e^x + o(e^x)$

DEN:  $\frac{x^{15} \ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$  quindi è  $o(e^x)$   
 $= 3e^x + o(3e^x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{3e^x + o(3e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

### Definizione 12: Nomenclatura

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  di acc. per  $X$

Se  $\lim |f(x)| = +\infty, \lim |g(x)| = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow \begin{array}{ll} +\infty & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine superiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ sono } \underline{\text{infiniti dello stesso}} \\ & \underline{\text{ordine}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ 0 & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine inferiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \nexists & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ non sono } \underline{\text{confrontabili}} \end{array}$$

Se  $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow \begin{array}{ll} +\infty & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine inferiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ sono } \underline{\text{infiniti dello stesso}} \\ & \underline{\text{ordine}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ 0 & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine superiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \nexists & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ non sono } \underline{\text{confrontabili}} \end{array}$$

### Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$  e  $x^2$  sono infiniti dello stesso ordine per  $x \rightarrow 0$

**Svolgimento:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \quad \checkmark \quad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

### Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 \sin(\sqrt{x}) + (1 - \cos x)^2}{\sqrt{x} \sinh(x^2) + (e^x - 1)^3}$$

**Svolgimento:** Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

Allora NUM:  $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2}) \quad (1 - \cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \rightarrow 0$

$$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$
$$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente}$$

DEN:  $\sqrt{x} \sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2}) \quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \rightarrow 0^+$

$$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1} = 4$$