Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{1+2+3+\cdots+n \;=\; \frac{n\,(n+1)}{2}}_{\mathsf{P}(n)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x>1 \quad (1+x)^n \geq nx+1}_{\mathsf{P}(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia P(n) un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. P(0) è vero (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$ (passo induttivo)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{\mathsf{P}(n)}$.

CASO BASE : P(0) $\quad 2^0 \geq 1$ $\quad$ vero

PASSO INDUTTIVO : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$2^n \geq n+1 \;\to\; 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$

$2^{n+1} \;\geq\; 2n+2 \geq n+2$

Dunque abbiamo dimostrato che P$(n) \to$ P$(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale P(n)

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : P(0) : "0 = 0" è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che P(n) è vera e dimostro che è vera anche P$(n+1)$

ovvero $$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \;=\; \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $\mathsf{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $\mathsf{P}(0)$ è vera (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (passo induttivo)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad \mathsf{P}(n)$ è vera allora lo è anche $\mathsf{P}(m)$ (ipotesi induttiva)
Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $\mathsf{P}(n)$ si usa la condizione che $\mathsf{P}(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$. Ovvero, se per un predicato $\mathsf{P}(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_o
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 \mathsf{P}(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{\mathsf{P}(n)}$

CASO BASE : $\mathsf{P}(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad \mathsf{P}(m)) \rightarrow \mathsf{P}(n)$

Ovvero, assumendo che $\mathsf{P}(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allore è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1,m_2 diversi da m e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \qquad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $\mathsf{P}(m_1)$ e $\mathsf{P}(m_2)$ sono vere.

2 Coefficenti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $\mathsf{C}_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $\mathsf{C}_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \qquad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{2} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{0} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \qquad (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $\quad]M, +\infty[\quad$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $\quad]-\infty, -M[\quad$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$

Dato $f : \text{dom} f \to \mathbb{R},\ \text{dom} f \subseteq \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a $\text{dom} f,\ l \in \bar{\mathbb{R}}$
Si dice che f ha limite l per $x \to x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall\ V$ intorno di $l \quad \exists\ U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f, x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$
OSSERVAZIONE :

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \to x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim : Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di $\mathbb{R}$

$\exists\, V_1$ intorno di l_1

$\exists\, V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$

D'altra parte

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$ $\exists\, U_1$ intorno di x_0 tale che $x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$ allora $f(x) \in V_1$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$ $\exists\, U_2$ intorno di x_0 tale che $x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$ allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in U \setminus \{x_0\},\ \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ASSURDO poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \to 2} 2\,|x-2|\,\cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2\,|x-2|\,\cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$
$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta\,,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ x \neq 2}_{0<|x-2|<\delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)<\epsilon|}$

ossia

$$|2\,|x-2|\,\cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \circledast$$

Parto da $\circledast$

$$2\,|x-2|\,\underbrace{|cos[\,\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \quad \leq \quad 2\,|x-2| \quad < \quad \epsilon$$

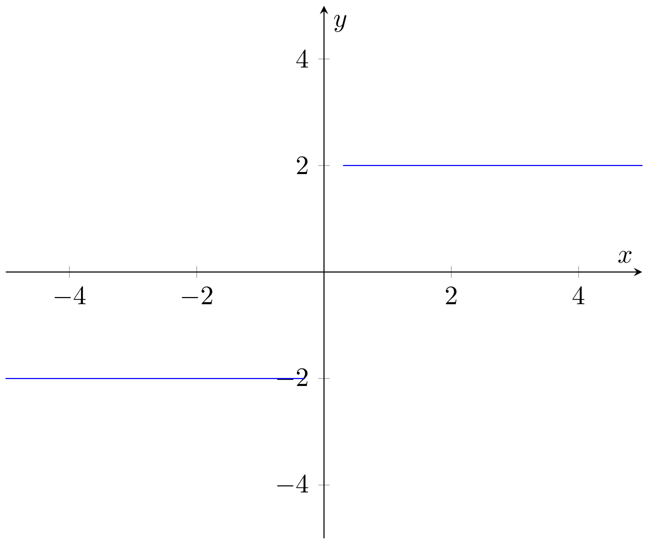
Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2\,|x-2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$\begin{matrix} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{matrix}$$



Se $x \to 0^-$ sgn $x \to -1$
Se $x \to 0^+$ sgn $x \to 1$

Quindi $\nexists \lim_{x\to 0}$ sgn x perchè affinchè esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r+\epsilon[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r < a < r+\epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r-\epsilon, r[\neq \varnothing$ (cioè $\exists\, a \in A$ tale che $r-\epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione : devo mostrare $\forall\ M > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0+\delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \tfrac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}, \quad l \in \mathbb{R}, \quad x_0$ di acc. per dom$f$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop : Sia $x_0,\ l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione :

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \quad \not\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per dom$f$ e supp.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad > \ 0$$

Allora $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim : Considero il caso $l \in \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poichè $l > 0 \Rightarrow\ \exists\, V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap$ dom$f,\ x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poichè $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x > 0)$$

$\forall x \in U$ dom$f,\ x \neq x_0$
Oss : vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano $f,\ g$ funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per dom$f \cap$ dom$g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \text{definitivamente per } x \to x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{e} \qquad l_g = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss : se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \begin{matrix} x \to x_0 \\ \exists\ l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow \quad l_f < l_g$

Esempio 8

$0 < e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \to -\infty} 0$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R},\ f, g, h\ = X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X. Se

$$\circledast \qquad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \text{def. per } x \to x_0$$

e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

Dim : Suppongo per semplicità che $\circledast$ valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U\ \cap\ \underbrace{\text{dom}f}_{X}) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow\ \exists\, U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f\ \cap\ X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$
$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \Rightarrow\ \exists\, U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g\ \cap\ X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$
Prendo $U = U_f\ \cap\ U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U\ \cap\ X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, \quad g(x) \in V$
Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e V intervallo allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento : Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \text{def. per } x \to 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y \to y_0} g(y) = l$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ def. per $x \to x_0$

allora

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = l \qquad$ con $y = f(x)$

Esempio 11

$$\lim_{x \to 0} g(x \cdot \sin \frac{1}{x}) \text{ non esiste}$$

$g(y) = \qquad \cos y$ se $y \neq 0 \qquad 0$ se $y = 0$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R},\ f, g\colon X \to \mathbb{R},\ x_0$ punto di acc. per $X,\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_g, \quad l_f,\ l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0}(c\, f(x)) = c\, l_f$
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$ se $l_g \neq 0$
5. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f}$ se $l_f \neq 0$

Oss : il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinitro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_f > 0$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$

Svolgimento :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln((f(x)^{g(x)})} = \\
&= \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = \lim_{t\to l_g \ln l_f} e^t = \\
&= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\
&= l_f^{l_g}
\end{aligned}$$

Proposizione : Sia $X \subseteq \mathbb{R},\ f, g : X \to \mathbb{R},\ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X, f infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \to x_0$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f. infinitesima per f. limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x\to +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x+1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} [(2^x)\sin(\frac{1}{2^x+1}) + \sin(\frac{1}{2^x+1}) - \sin(\frac{1}{2^x+1})] = \lim_{x\to +\infty} [(2^x+1)\sin(\frac{1}{2^x+1}) - \sin(\frac{1}{2^x+1})] =$$

$y = \dfrac{1}{2^x+1}$ $\quad y \to 0$ per $x \to +\infty$

$$= \lim_{y\to 0} [\frac{1}{y}\sin y - \sin y] = \lim_{y\to 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{1} - \sin y] =$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Svolgimento : Pongo $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$
Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} =$$

$$\lim_{y\to 0} y \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \underbrace{(\frac{\sin y}{y})^{-1}}_{1} \cdot \cos y = 1 \cdot 1 = 1$$

Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}\ \cos\frac{1}{x^2}$$

Soluzione : il limite vale 0 poichè $\sqrt{|x|}$ è infinitesima in $x = 0$ e $\cos\frac{1}{x^2}$ è limitata def. per $x \to 0$

Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} (x + \sin x)$$

Soluzione : $\quad x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{+\infty} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x\to +\infty} x + \sin x = +\infty$$

Definizione 8: Forme Indeterminate

$f, g : \ X \to \mathbb{R}, \quad x_0$ punto di acc. per X

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \qquad \text{F.I. } 0 \cdot \infty$$

Oppure

$$\text{F.I.} \qquad +\infty - \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0^0 \qquad +\infty^0 \qquad 1^{+\infty}$$

Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x\to \pm\infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^x = e^x \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to \pm\infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^x = \lim_{y\to \pm\infty} (1 + \frac{1}{y})^{\alpha y} = \lim_{y\to \pm\infty} (\underbrace{(1 + \frac{1}{y})^y}_{e})^\alpha = e^\alpha \quad \checkmark$$

Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_{e}) = \ln e = 1 \qquad \checkmark$$

Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \qquad y = e^x - 1$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \qquad \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)}$$

$$=1 \quad \checkmark$$

Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \qquad \forall \alpha > 0$$

Esempio 20

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+|\sin x|}{x}\right)^x \qquad \text{F.I. } 0^\infty$$

Svolgimento : Uso il teorema del confronto
Visto che $0 \le |\sin x| \le 1$ allora $1 \le 1 + \sin x \le 2$, quindi $\frac{1}{x} \le \frac{1+\sin x}{x} \le \frac{2}{x}$.
I due estremi tendono a 0 per $x \to +\infty$ quindi anche $\frac{1+|\sin x|}{x}$ tende a 0.

Esempio 21

$$\lim_{x\to -\infty} (1 + 3\sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x\to -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}) \ln(1+3\sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ per $y \to 0$Quindi:

$$\lim_{x\to -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1+3\sin e^x) + \frac{3}{3\sin e^x} \cdot \ln(1+3\sin e^x)]$$

Adesso pongo $y = 3\sin e^x$ che tende a 0 per $x \to -\infty$ e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \qquad \ln(1 + 3\sin e^x) = 0 \qquad 3 \cdot \underbrace{\frac{ln(1+y)}{y}}_{1} = 3$$

Il risultato è quindi $1 \cdot 0 + 3 = 3$

3.1 O-piccoli

Definizione 10: O-Piccolo

Date f, g funzioni reali di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per dom$f$ $\cap$ dom$g$, $g(x) \neq 0$ def. per $x \to x_0$
Si dice che f è "o-piccolo" di g per $x \to x_0$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive: $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ $\quad f(x) \in o(g(x))$ per $x \to x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \to x_0$$

Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$ per $x \to 0$?

Svolgimento :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \qquad x = 0 \qquad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $\quad 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 \quad \checkmark$ e $1 - \cos x$ è o-piccolo di x per $x \to 0$

Osservazione :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \to x_0 \\ f_2(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \to x_0 \end{aligned} \qquad \not\Rightarrow \qquad f_1(x) = f_2(x) \text{ per } x \to x_0$$

Osservazione :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = lg(x) + o[g(x)] \quad \text{per } x \to x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \quad \text{per } x \to x_0$$

Dim :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} (\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{l} - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_{l}) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f, g, f_1, g_1 : \ X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X.
Se $g(x) \neq 0$ def. per $x \to x_0$ e:

$$f(x) = f_1(x) + o(f_1(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$
$$g(x) = g_1(x) + o(g_1(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Osservazione :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempio 23: Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2\sin^2 x + 1 - \cos x} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Svolgimento :
Conoscendo gli sviluppi in serie

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0$

$\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

NUM $= \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2})$

$$-\frac{x^3}{6} = o(\frac{x^2}{2}) \qquad\qquad o(x^3) = o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2})$$

DEN $= x\ln(1+x) - 2\sin^2 x + 1 - \cos x \qquad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2)$ per $x \to 0$

$$= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= x^2 + x\ o(x) - 2x^2 - 4x\ o(x) - 2(0(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

Sviluppi asintotici di alcune funzioni

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \to 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \to 0$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$
$\cosh x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \to 0$
$\sinh x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \to 0$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \to 0$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} +$ per $x \to 0$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per} \quad x \to -\infty$$

Svolgimento : Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che y deve tendere a 0, abbiamo e^x che tende a 0 per $x \to -\infty$ quindi la sostituzione è valida

Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow x^n = o(e^x)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \qquad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow \ln x = o(x^n)$ per $x \to +\infty$

Quindi:

$$e^x >> x^n >> \ln x \qquad \text{per } x \to +\infty$$

Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + e^x + \sin x}{3e^x + x^{15}\ln x} \qquad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

Svolgimento :

NUM: $\quad x^5 = o(e^x) \qquad \frac{x \sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \sin x = 0 \cdot f\text{limitata} = 0$
$= e^x + o(e^x)$

DEN: $\quad \frac{x^{15}\ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$ quindi è $o(e^x)$
$= 3e^x + o(3e^x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{3e^x + o(3e^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

Definizione 12: Nomenclatura

$f, g: \ X \to \mathbb{R}, \ x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Se $\lim |f(x)| = +\infty, \ \lim |g(x)| = +\infty$

$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \quad \Longrightarrow$$

- $+\infty$ si dice che f è un infinito di ordine superiore a g per $x \to x_0$
- $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$
- 0 si dice che f è un infinito di ordine inferiore a g per $x \to x_0$
- $\nexists$ si dice che f e g non sono confrontabili

Se $\lim f(x) = 0, \ \lim g(x) = 0$

$$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \quad \Longrightarrow$$

- $+\infty$ si dice che f è un infinito di ordine inferiore a g per $x \to x_0$
- $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che f e g sono infiniti dello stesso ordine per $x \to x_0$
- 0 si dice che f è un infinito di ordine superiore a g per $x \to x_0$
- $\nexists$ si dice che f e g non sono confrontabili

Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$ e x^2 sono infiniti dello stesso ordine per $x \to 0$

Svolgimento :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \checkmark \qquad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2\sin(\sqrt{x}) + (1-\cos x)^2}{\sqrt{x}\,\sinh(x^2) + (e^x - 1)^3}$$

Svolgimento : Sapendo che

$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ per $y \to 0$

$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2)$ per $y \to 0$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$

$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ per $y \to 0$

Allora NUM: $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2})$ $\quad (1-\cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \to 0$

$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$

$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2})$ per $x \to 0^+$ perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente

DEN: $\sqrt{x}\,\sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2})$ $\quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \to 0^+$

$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2})$ per $x \to 0^+$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{1} = 4$$

4 Successioni

Definizione 13: Successione

Una successione è una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme infinito, per noi avranno valori in $\mathbb{R}$, ossia

$$f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Le successioni si scrivono col simbolo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Si dice che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

Se $\forall\ V$ intorno di $l\ \exists\ N > 0$ tale che $a_n \in V\ \forall\ n > N$

Es : $\{\frac{1}{n}\}_{n\geq 1}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \to ? \quad n \to +\infty$

Def : sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente se $\exists\ \lim a_n \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_n = 0$, la successione è infinitesima
2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente se $\lim a_n = \pm\infty$
3. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare o determinata se $\exists\ \lim a_n$
4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare o indeterminata se $\nexists\ \lim a_n$

Esempio 28

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, \ n \geq 1$$

Svolgimento :

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

a_n è convergente.

Proposizione sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. convergente, allora è anche limitata, ossia $\exists \ M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

limitata $\not\Rightarrow$ convergente
convergente $\Rightarrow$ limitata

Teorema 11: Teorema della permanenza del segno

Se $\lim a_n = l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \to +\infty$

Teorema 12: Teorema del Confronto

$\{a_n\}, \{b_n\}$ siano due succ. tali che $a_n \leq b_n$ def. per $x \to +\infty$ e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l_a \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = l_b$$

Allora $\qquad l_a \leq l_b$

Teorema 13: Teorema dei due carabinieri

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ succ. tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ def. per $n \to +\infty$ Se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = l$$

Gerarchia degli infiniti :

$$n^n >> n! >> e^n >> n^k >> \log_b n \qquad \text{per } n \to +\infty \qquad a, b > 1 \qquad k > 0$$

Definizione 14: Successioni monotone

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. reale, si dice

- Crescente: se $a_{n+1} \geq a_n \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$
- Decrescente: se $a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$
- Strett. Crescente: se $a_{n+1} > a_n \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$
- Strett. Decrescente: se $a_{n+1} < a_n \qquad \forall \ n \in \mathbb{N}$

Es :

$\{2^n\} = 1, 2, 4, \dots$ Strett. crescente

$\{1^n\}$ Costante

$\{\frac{1}{2^n}\}$ Strett. decrescente

$\{1 + \frac{1}{n}\}$ Strett. decrescente

Definizione 15: Successione di Cauchy

Una succ. reale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice di Cauchy (o successione fondamentale) se $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N > 0$ tale che

$$n, p > N \Rightarrow |a_n - a_p| < \epsilon$$

Es : $a_n = (-1)^n$ non è di Cauchy

$a_n = \frac{1}{1+n}$ è di Cauchy

Una successione reale a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.

Definizione 16: Sottosuccessioni

Data una succ. a_n si dice sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che a_k sia una succ. strett. crescente di numeri naturali, cioè $n_{k+1} > n_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

Es : $n_k = 2k,\ k \in \mathbb{N} \qquad a_{n_k} = a_{2k},\ k \in \mathbb{N}$ prendo solo gli elementi pari

Osservazione : per mostrare che una succ. non ha limite, mi basta mostrare che due sottosucc. hanno limite diverso o che una non abbia limite.

Teorema 14: Teorema di Bolzano-Weistrass

Sia a_n una succ. limitata. Allora $\exists$ una sottosucc. di a_n convergente

Esempio 29: Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln((n+5)!) - \ln(n!+5)}{\ln(n^\alpha + \cos(n\pi))}$$

al variare di $\alpha > 0$

Svolgimento :

NUM = $\ln((n+5)!) - \ln(n!+5) = \quad \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!) - \ln(n!(1+\frac{5}{n!}) =$

$$= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1))) + \ln(n!) - \ln(n!) - \underbrace{\ln(1+\frac{5}{n!})}_{0} =$$

$$= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1))) =$$

$$= \ln(n^5) + o(\ln n^5)$$

$$= 5\ln n + o(\ln n)$$

DEN = $\ln(n^\alpha + \underbrace{\cos(n\pi)}_{-1^n}) = \quad \ln(n^\alpha(1+\frac{-1^n}{n^\alpha})) =$

$$= \ln n^\alpha \cdot \underbrace{\ln 1 + \frac{-1^n}{n^\alpha}}_{0} =$$

$$= \ln n^\alpha =$$

$$= \alpha \ln n + o(\ln n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5\ln n + o(\ln n)}{\alpha \ln n + o(\ln n)} = \frac{5}{\alpha}$$

5 Funzioni Continue

Definizione 17: Funzione Continua

f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in$ dom$f$. f si dice continua in x_0 se è verificata una delle seguenti:

- x_0 è punto isolato del dominio
- Se x_0 non è punto isolato del dominio (ossia x_0 punto di acc. per dom$f$). Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua se è continua in ogni punto del suo dominio.

Osservazione: Si parla di continuità di f solo nei punti del dominio di f.

Esempio 30

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \text{dom} f$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x_0 \quad \forall\, x_0 \in$ dom$f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Def: Se $x_0 \in$ dom$f$ è punto di acc. per dom$f$, ho che f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in$ dom$f$ allora:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 18: Discontinuità di I specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in$ dom$f$ punto di acc. destro e sinistro per dom$f$. Se esistono i limiti finiti:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Ma

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \neq \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di I specie o di salto

Definizione 19: Discontinuità di II specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom} f$, punto di acc. destro e sinistro. Se:

1. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 sia infinito
   Oppure
2. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 non esiste

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di II specie

Definizione 20: Discontinuità di III specie

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $l \in \mathbb{R}$, tale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Allora x_0 si dice punto di discontinuità eliminabile per f

Teorema 15: Teorema di Weistrass

Sia f funzione reale definita e continua su $[a, b]$. Allora f ha massimo e minimo (assoluti) in $[a, b]$, cioè $\exists\, x_m, x_M \in [a, b]$ tale che:

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_m) \qquad \max_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_M)$$

Es : $\quad \sin[-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [-2\pi,2\pi]} \sin x = -1 \qquad \max_{x \in [-2\pi,2\pi]} \sin x = 1$$

Teorema 16: Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ chiuso e limitato. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$
Allora $\exists\, \epsilon \in]a, b[$ tale che $f(\epsilon) = 0$

Teorema 17: Teorema dei valori intermedi

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ è un intervallo, cioè $\forall\, x_1, x_2 \in I$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

Allora $\exists\, \epsilon \in I$ tale che $f(\epsilon) = y$

Teorema 18: Continuità della funzione inversa

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile. Allora:

1. f è strettamente monotona
2. la f inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua

Definizione 21: Calcolo differenziale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I,\ f : I \to \mathbb{R}$ funzione. Se esiste il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (= \lim_{h \to})$$