

# Analisi Matematica

Marco Pittarello

## Contents

|           |                                                     |           |
|-----------|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>Principio di Induzione</b>                       | <b>2</b>  |
| <b>2</b>  | <b>Coefficienti Binomiali</b>                       | <b>3</b>  |
| 2.1       | Proprietà del binomio . . . . .                     | 4         |
| <b>3</b>  | <b>Limiti di funzioni</b>                           | <b>4</b>  |
| 3.1       | O-piccoli . . . . .                                 | 12        |
| <b>4</b>  | <b>Successioni</b>                                  | <b>16</b> |
| <b>5</b>  | <b>Funzioni Continue</b>                            | <b>18</b> |
| <b>6</b>  | <b>Derivata</b>                                     | <b>21</b> |
| 6.1       | Massimo e minimo assoluto di una funzione . . . . . | 24        |
| <b>7</b>  | <b>Studio di Funzione</b>                           | <b>27</b> |
| <b>8</b>  | <b>Serie Numeriche</b>                              | <b>29</b> |
| <b>9</b>  | <b>Calcolo Integrale</b>                            | <b>37</b> |
| 9.1       | Metodi di integrazione . . . . .                    | 41        |
| 9.2       | Integrale improprio . . . . .                       | 43        |
| <b>10</b> | <b>Equazioni Differenziali</b>                      | <b>45</b> |
| <b>11</b> | <b>Tabelle Utili</b>                                | <b>47</b> |
| 11.1      | Proprietà potenze e logaritmi . . . . .             | 47        |
| 11.2      | Limiti notevoli . . . . .                           | 47        |
| 11.3      | Sviluppi asintotici di alcune funzioni . . . . .    | 48        |
| 11.4      | Tabella Derivate Semplici . . . . .                 | 48        |
| 11.5      | Sviluppi di McLaurin . . . . .                      | 49        |
| 11.6      | Integrali indefiniti noti . . . . .                 | 49        |
| 11.7      | Come risolvere le Equazioni Differenziali . . . . . | 50        |

# 1 Principio di Induzione

## Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

## Teorema 1: 1° forma

Sia  $P(n)$  un predicato con parametro  $n \in \mathbb{N}$  e tale che:

1.  $P(0)$  è vero ( **caso base** )
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$  ( **passo induttivo** )

Allora  $P(n)$  è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$

## Esempio 1

Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n + 1}_{P(n)}$ .

CASO BASE :  $P(0) : 2^0 \geq 1$  vero

PASSO INDUTTIVO :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che  $2^n \geq n + 1$  e dimostro che  $2^{n+1} \geq n + 2$

$$2^n \geq n + 1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n + 1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$$

Dunque abbiamo dimostrato che  $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale  $P(n)$

## Esempio 2

Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE :  $P(0) : "0 = 0"$  è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che  $P(n)$  è vera e dimostro che è vera anche  $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

#### Teorema 2: 2° forma

Sia  $P(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  un predicato tale che:

1.  $P(0)$  è vera (caso base)
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$  (passo induttivo)

Se  $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$  è vera allora lo è anche  $P(n)$  (ipotesi induttiva)

Allora  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$  è vera

**OSSERVAZIONE** è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare  $P(n)$  si usa la condizione che  $P(m)$  vale per tutti gli  $m < n$

**OSSERVAZIONE** in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque  $n_0 \in \mathbb{N}$ .  
Ovvero, se per un predicato  $P(m)$  dimostriamo:

- il caso base per  $n_0$
- il passo induttivo  $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che  $\forall n \geq n_0 P(n)$  è vera

#### Esempio 3

Dimostriamo che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE :  $P(2)$  è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che  $P(m)$  vale  $\forall 1 \leq m < n$ , ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche  $n$  si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se  $n$  è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se  $n$  non è primo allora è divisibile per un numero  $m_1$  con  $m_1 \neq n$  e  $m_1 \neq 1$ ,

in particolare  $2 \leq m_1 < n$

Dunque  $\exists m_2 \in \mathbb{N}$  tale che

$n = m_1 m_2$  con  $m_1, m_2$  diversi da  $m$  e da 1

Inoltre  $2 \leq m_2 < n$

perchè  $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva  $P(m_1)$  e  $P(m_2)$  sono vere.

## 2 Coefficienti Binomiali

#### Definizione 2

Definiamo  $C_{n,k}$  = numero totale di modi possibile, e si chiama:  
numero di combinazioni di  $n$  elementi di classe  $k$

Spesso  $C_{n,k}$  viene anche denotato con il simbolo  $\binom{n}{k}$ , chiamato  
coefficiente binomiale  $n$  su  $k$

Quanto vale  $\binom{n}{k}$ ?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 2.1 Proprietà del binomio

### Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$  si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

**OSSERVAZIONE:** Abbiamo un altro metodo per calcolare  $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$ . Utilizzando il teorema e  $\binom{n}{0} = 1$  possiamo calcolare ogni valore di  $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$ , evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

### Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga  $n$  è composta da  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \tag{4}$$

### Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

## 3 Limiti di funzioni

### Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di  $r$  con  $r \in \mathbb{R}$ , un intervallo  $]r-\epsilon, r+\epsilon[$  con  $\epsilon > 0$ ;  $\epsilon$  viene detta raggio dell'intorno

- Se  $r = +\infty$ , si dice intorno di  $+\infty$  un intervallo del tipo  $]M, +\infty[$  con  $M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ )
- Se  $r = -\infty$ , si dice intorno di  $-\infty$  un intervallo del tipo  $]-\infty, -M[$  con  $M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ )

Dato  $f: \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  è punto di accumulazione a  $\text{dom} f$ ,  $l \in \bar{\mathbb{R}}$

Si dice che  $f$  ha limite  $l$  per  $x \rightarrow x_0$  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se  $\forall V$  intorno di  $l \quad \exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$  allora  $f(x) \in V$

### OSSERVAZIONE:

- Se  $l \in \mathbb{R}$ , si dice che  $f$  ha limite finito in  $x_0$
- Se  $l = +\infty$  o  $l = -\infty$ , allora  $f$  si dice divergente per  $x \rightarrow x_0$
- Se  $l = 0$ , allora si dice che  $f$  è infinitesima in  $x_0$

#### Teorema 4: Unicità del limite

Se  $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora  $l_1 = l_2$

**Dim:** Suppongo per assurdo che  $l_1 \neq l_2$

$P_1$  la proposizione di separazione di  $\mathbb{R}$

$\exists V_1$  intorno di  $l_1$

$\exists V_2$  intorno di  $l_2$

tale che  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$  intorno di  $x_0$  tale che  
 $x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$   
allora  $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$  intorno di  $x_0$  tale che  
 $x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$   
allora  $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$  intorno di  $x_0$

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$  **ASSURDO** poichè  $\bar{x} \in U_1$  e  $\bar{x} \in U_2$

#### Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$  tale che se  $\underbrace{|x-2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x-2| < \delta}$  allora  $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \textcircled{*}$$

Parto da  $\textcircled{*}$

$$2|x-2| \underbrace{|\cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x-2| < \epsilon$$

Voglio  $\delta > 0$  tale che se  $|x-2| < \delta$  e  $x \neq 2$  allora  $2|x-2| < \epsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$  e ho verificato che vale il limite.

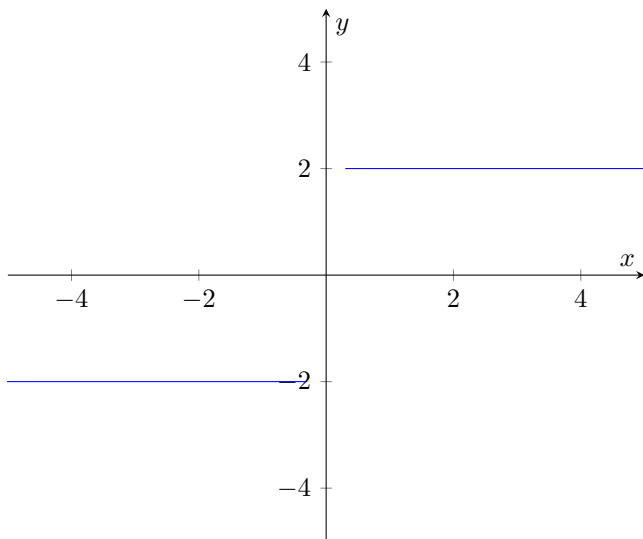
#### Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$-1 \quad x < 0$$

$$0 \quad x = 0$$

$$1 \quad x > 0$$



Se  $x \rightarrow 0^-$   $\text{sgn } x \rightarrow -1$

Se  $x \rightarrow 0^+$   $\text{sgn } x \rightarrow 1$

Quindi  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$  perchè affinché esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

#### Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  si dice:

- punto di acc. destro per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap ]r, r + \epsilon[ \neq \emptyset$  (cioè  $\exists a \in A$  tale che  $r < a < r + \epsilon$ )
- punto di acc. sinistro per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap ]r - \epsilon, r[ \neq \emptyset$  (cioè  $\exists a \in A$  tale che  $r - \epsilon < a < r$ )

#### Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

**Soluzione:** devo mostrare  $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$  tale che se  $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$  allora  $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo  $\delta = \frac{1}{\ln M}$

#### Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $x_0$  di acc. per  $\text{dom } f$ . Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

**Prop:** Sia  $x_0, l \in \bar{\mathbb{R}}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

**Osservazione:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

### Teorema 5: Permanenza del segno

Dato  $f$  reale di variabile reale,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ , di acc. per  $\text{dom} f$  e supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora  $\exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$ , allora

$$f(x) > 0$$

**Dim:** Considero il caso  $l \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Poichè  $l > 0 \Rightarrow \exists V$  intorno di  $l$  tale che:

$$V \subseteq ]0, +\infty[$$

$\exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$  allora  $f(x) \in V$  Poichè  $V \subseteq ]0, +\infty[$ , ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \cap \text{dom} f$ ,  $x \neq x_0$

**Oss:** vale l'analogo con  $l < 0$

### Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano  $f, g$  funzioni reali di variabile reale,  $x_0$  di acc. per  $\text{dom} f \cap \text{dom} g$ , tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

**Oss:** se  $f(x) < g(x)$  definitivamente per  $\left\{ \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ \exists l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow l_f < l_g$

### Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

### Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  di acc. a  $X$ . Se

$$\textcircled{*} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

**Dim:** Suppongo per semplicità che  $\textcircled{*}$  valga  $\forall x \in X$ . Devo mostrare che  $\forall V$  intorno di  $l$   $\exists U$  intorno di  $x_0$  t.c. se  $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom} f}_X) \setminus \{x_0\}$ , allora  $h(x) \in V$  con  $V$  intorno di  $l$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$  allora  $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$  allora  $g(x) \in V$

Prendo  $U = U_f \cap U_g$  è intorno di  $x_0$  se  $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, g(x) \in V$

Quindi  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  e  $V$  intervallo allora  $h(x) \in V$

### Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**Svolgimento:** Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

### Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**Svolgimento:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

### Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano  $f, g$  funzioni reali di variabile reale, tale che  $g$  o  $f$  sia definita in un insieme  $X$  che abbia  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  come punto di acc. supp.

1.  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
3.  $f(x) \neq y_0$  def. per  $x \rightarrow x_0$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \quad \text{con } y = f(x)$$

### Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} g\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$



### Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  punto di acc. per  $X$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g, \quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1.  $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = c l_f$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g} \quad \text{se } l_g \neq 0$
5.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f} \quad \text{se } l_f \neq 0$

**Oss**: il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinistro

### Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

**Svolgimento**:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln((f(x))^{g(x)})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow l_g \ln l_f} e^t = \\
&= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\
&= l_f^{l_g}
\end{aligned}$$

**Proposizione**: Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  punto di acc. per  $X$ ,  $f$  infinitesima in  $x_0$  (cioè  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ) e  $g$  sia limitata def. per  $x \rightarrow x_0$ . Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di  $f$ . infinitesima per  $g$ . limitata è infinitesimo")

### Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) + \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] = \\
y = \frac{1}{2^x + 1} \quad y \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty & \\
= \lim_{y \rightarrow 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] &= \lim_{y \rightarrow 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_1 - \sin y] = \\
= 1 - 0 = 1 &
\end{aligned}$$

#### Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

**Svolgimento:** Pongo  $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \\ \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\cos y}{\sin y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}}_1 \cdot \cos y = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

#### Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x^2}$$

**Soluzione:** il limite vale 0 poichè  $\sqrt{|x|}$  è infinitesima in  $x = 0$  e  $\cos \frac{1}{x^2}$  è limitata def. per  $x \rightarrow 0$

#### Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

**Soluzione:**  $x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{+\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

#### Definizione 8: Forme Indeterminate

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0$  punto di acc. per  $X$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{F.I. } 0 \cdot \infty$$

Oppure

$$\text{F.I.} \quad +\infty - \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^0 \quad +\infty^0 \quad 1^{+\infty}$$

#### Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

**Soluzione:**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_e^\alpha = e^\alpha \quad \checkmark$$

### Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

**Soluzione :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_e) = \ln e = 1 \quad \checkmark$$

### Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Soluzione :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= & y = e^x - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = & \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

### Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

### Esempio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + |\sin x|}{x} \right)^x \quad \text{F.I. } 0^\infty$$

**Svolgimento :** Uso il teorema del confronto

Visto che  $0 \leq |\sin x| \leq 1$  allora  $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$ , quindi  $\frac{1}{x} \leq \frac{1 + \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$ .  
I due estremi tendono a 0 per  $x \rightarrow +\infty$  quindi anche  $\frac{1 + |\sin x|}{x}$  tende a 0.

### Esempio 21

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3 \sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

**Svolgimento :**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}) \ln(1 + 3 \sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole  $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$  per  $y \rightarrow 0$  Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x) + \frac{3}{3 \sin e^x} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x)]$$

Adesso pongo  $y = 3 \sin e^x$  che tende a 0 per  $x \rightarrow -\infty$  e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \quad \ln(1 + 3 \sin e^x) = 0 \quad 3 \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_1 = 3$$

Il risultato è quindi  $1 \cdot 0 + 3 = 3$

### 3.1 O-piccoli

#### Definizione 10: O-Piccolo

Date  $f, g$  funzioni reali di variabile reale,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  di acc. per  $\text{dom} f \cap \text{dom} g$ ,  $g(x) \neq 0$  def. per  $x \rightarrow x_0$   
Si dice che  $f$  è "o-piccolo" di  $g$  per  $x \rightarrow x_0$  se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive:  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$   $f(x) \in o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$

**Osservazione :**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

#### Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ ?

**Svolgimento :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad x = 0 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi  $0 \cdot \frac{1}{2} = 0$  ✓ e  $1 - \cos x$  è o-piccolo di  $x$  per  $x \rightarrow 0$

**Osservazione :**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ f_2(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad \nRightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

**Osservazione :**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = lg(x) + o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0$$

**Dim :**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_l - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_l \right) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

**Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi**

$X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g, f_1, g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  punto di acc. per  $X$ .

Se  $g(x) \neq 0$  def. per  $x \rightarrow x_0$  e:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

**Dim:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) \left(1 + \frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}\right)}{g_1(x) \left(1 + \frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}\right)} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Osservazione:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

**Esempio 23: Calcolare**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

**Svolgimento:**

Conoscendo gli sviluppi in serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\text{NUM} = \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} -\frac{x^3}{6} &= o\left(\frac{x^2}{2}\right) && o(x^3) = o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{DEN} = x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= x^2 + x o(x) - 2x^2 - 4x o(x) - 2(o(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

### Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per} \quad x \rightarrow -\infty$$

**Svolgimento:** Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che  $y$  deve tendere a 0, abbiamo  $e^x$  che tende a 0 per  $x \rightarrow -\infty$  quindi la sostituzione è valida

### Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

### Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow x^n = o(e^x) \quad \text{per} \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln x = o(x^n) \quad \text{per} \quad x \rightarrow +\infty$$

Quindi:

$$e^x \gg x^n \gg \ln x \quad \text{per} \quad x \rightarrow +\infty$$

### Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^x + \sin x}{3e^x + x^{15} \ln x} \quad \text{F.I.} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

**Svolgimento:**

$$\text{NUM:} \quad x^5 = o(e^x) \quad \frac{x \sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \sin x = 0 \cdot f \text{ limitata} = 0 \\ = e^x + o(e^x)$$

$$\text{DEN:} \quad \frac{x^{15} \ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{quindi è } o(e^x) \\ = 3e^x + o(3e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{3e^x + o(3e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

### Definizione 12: Nomenclatura

$$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in \bar{\mathbb{R}} \text{ di acc. per } X$$

$$\text{Se } \lim |f(x)| = +\infty, \quad \lim |g(x)| = +\infty$$

$+\infty$  si dice che  $f$  è un infinito di ordine superiore a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

$\Rightarrow$

$l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  si dice che  $f$  e  $g$  sono infiniti dello stesso ordine per  $x \rightarrow x_0$

$0$  si dice che  $f$  è un infinito di ordine inferiore a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$

$\nexists$  si dice che  $f$  e  $g$  non sono confrontabili

Se  $\lim f(x) = 0$ ,  $\lim g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

$\Rightarrow$

$+\infty$  si dice che  $f$  è un infinito di ordine inferiore a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$

$l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  si dice che  $f$  e  $g$  sono infiniti dello stesso ordine per  $x \rightarrow x_0$

$0$  si dice che  $f$  è un infinito di ordine superiore a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$

$\nexists$  si dice che  $f$  e  $g$  non sono confrontabili

#### Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$  e  $x^2$  sono infiniti dello stesso ordine per  $x \rightarrow 0$

**Svolgimento :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \quad \checkmark \quad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

#### Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 \sin(\sqrt{x}) + (1 - \cos x)^2}{\sqrt{x} \sinh(x^2) + (e^x - 1)^3}$$

**Svolgimento :** Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

Allora NUM:  $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2}) \quad (1 - \cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \rightarrow 0$

$$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente}$$

DEN:  $\sqrt{x} \sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2}) \quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \rightarrow 0^+$

$$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1} = 4$$

## 4 Successioni

### Definizione 13: Successione

Una successione è una funzione il cui dominio è  $\mathbb{N}$  o un suo sottoinsieme infinito, per noi avranno valori in  $\mathbb{R}$ , ossia

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le successioni si scrivono col simbolo  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Si dice che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

Se  $\forall V$  intorno di  $l \exists N > 0$  tale che  $a_n \in V \forall n > N$

**Es:**  $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rightarrow? \quad n \rightarrow +\infty$

**Def:** sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione:

1.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente se  $\exists \lim a_n \in \mathbb{R}$ . Se  $\lim a_n = 0$ , la successione è infinitesima
2.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è divergente se  $\lim a_n = \pm\infty$
3.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è regolare o determinata se  $\exists \lim a_n$
4.  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è irregolare o indeterminata se  $\nexists \lim a_n$

### Esempio 28

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, \quad n \geq 1$$

**Svolgimento:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$a_n$  è convergente.

**Proposizione** sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  succ. convergente, allora è anche limitata, ossia  $\exists M > 0$  tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

limitata  $\nRightarrow$  convergente

convergente  $\Rightarrow$  limitata

### Teorema 11: Teorema della permanenza del segno

Se  $\lim a_n = l > 0$ , allora  $a_n > 0$  definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$

### Teorema 12: Teorema del Confronto

$\{a_n\}, \{b_n\}$  siano due succ. tali che  $a_n \leq b_n$  def. per  $x \rightarrow +\infty$  e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_b$$

Allora  $l_a \leq l_b$



### Teorema 13: Teorema dei due carabinieri

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  succ. tali che  $a_n \leq b_n \leq c_n$  def. per  $n \rightarrow +\infty$  Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

### Gerarchia degli infiniti :

$$n^n \gg n! \gg e^n \gg n^k \gg \log_b n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad a, b > 1 \quad k > 0$$

### Definizione 14: Successioni monotone

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  succ. reale, si dice

- Crescente: se  $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Decrescente: se  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Strett. Crescente: se  $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Strett. Decrescente: se  $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Es :

$$\{2^n\} = 1, 2, 4, \dots \text{ Strett. crescente}$$

$$\{1^n\} \text{ Costante}$$

$$\{\frac{1}{2^n}\} \text{ Strett. decrescente}$$

$$\{1 + \frac{1}{n}\} \text{ Strett. decrescente}$$

### Definizione 15: Successione di Cauchy

Una succ. reale  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si dice di Cauchy (o successione fondamentale) se  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$  tale che

$$n, p > N \Rightarrow |a_n - a_p| < \epsilon$$

Es :  $a_n = (-1)^n$  non è di Cauchy

$$a_n = \frac{1}{1+n} \text{ è di Cauchy}$$

Una successione reale  $a_n$  è convergente se e solo se è di Cauchy.

### Definizione 16: Sottosuccessioni

Data una succ.  $a_n$  si dice sottosuccessione di  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una succ.  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tale che  $a_k$  sia una succ. strett. crescente di numeri naturali, cioè  $n_{k+1} > n_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Es :  $n_k = 2k, k \in \mathbb{N} \quad a_{n_k} = a_{2k}, k \in \mathbb{N}$  prendo solo gli elementi pari

**Osservazione** : per mostrare che una succ. non ha limite, mi basta mostrare che due sottosucc. hanno limite diverso o che una non abbia limite.

### Teorema 14: Teorema di Bolzano-Weistrass

Sia  $a_n$  una succ. limitata. Allora  $\exists$  una sottosucc. di  $a_n$  convergente

### Esempio 29: Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln((n+5)!) - \ln(n! + 5)}{\ln(n^\alpha + \cos(n\pi))}$$

al variare di  $\alpha > 0$

**Svolgimento:**

$$\begin{aligned}\text{NUM} &= \ln((n+5)!) - \ln(n! + 5) = \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!) - \ln(n!(1 + \frac{5}{n!})) = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)) + \ln(n!) - \ln(n!) - \underbrace{\ln(1 + \frac{5}{n!})}_0 = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)) = \\ &= \ln(n^5) + o(\ln n^5) \\ &= 5 \ln n + o(\ln n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{DEN} &= \ln(n^\alpha + \underbrace{\cos(n\pi)}_{-1^n}) = \ln(n^\alpha(1 + \frac{-1^n}{n^\alpha})) = \\ &= \ln n^\alpha \cdot \underbrace{\ln(1 + \frac{-1^n}{n^\alpha})}_0 = \\ &= \ln n^\alpha = \\ &= \alpha \ln n + o(\ln n)\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln n + o(\ln n)}{\alpha \ln n + o(\ln n)} = \frac{5}{\alpha}$$

## 5 Funzioni Continue

### Definizione 17: Funzione Continua

$f$  funzione reale di variabile reale,  $x_0 \in \text{dom} f$ .  $f$  si dice continua in  $x_0$  se è verificata una delle seguenti:

- $x_0$  è punto isolato del dominio
- Se  $x_0$  non è punto isolato del dominio (ossia  $x_0$  punto di acc. per  $\text{dom} f$ ). Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua se è continua in ogni punto del suo dominio.

**Osservazione:** Si parla di continuità di  $f$  solo nei punti del dominio di  $f$ .

### Esempio 30

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \text{dom} f$$

$\Rightarrow f$  è continua in  $x_0 \quad \forall x_0 \in \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Def:** Se  $x_0 \in \text{dom} f$  è punto di acc. per  $\text{dom} f$ , ho che  $f$  è continua in  $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che se  $|x - x_0| < \delta$  e  $x \in \text{dom} f$  allora:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

#### Definizione 18: Discontinuità di I specie

Sia  $f$  funzione reale di variabile reale,  $x_0 \in \text{dom} f$  punto di acc. destro e sinistro per  $\text{dom} f$ . Se esistono i limiti finiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Allora si dice che  $x_0$  è punto di discontinuità di I specie o di salto

#### Definizione 19: Discontinuità di II specie

Sia  $f$  funzione reale di variabile reale,  $x_0 \in \text{dom} f$ , punto di acc. destro e sinistro. Se:

1. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in  $x_0$  sia infinito  
Oppure
  2. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in  $x_0$  non esiste
- Allora si dice che  $x_0$  è punto di discontinuità di II specie

#### Definizione 20: Discontinuità di III specie

$I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $l \in \mathbb{R}$ , tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Allora  $x_0$  si dice punto di discontinuità eliminabile per  $f$

#### Teorema 15: Teorema di Weistrass

Sia  $f$  funzione reale definita e continua su  $[a, b]$ . Allora  $f$  ha massimo e minimo (assoluti) in  $[a, b]$ , cioè  $\exists x_m, x_M \in [a, b]$  tale che:

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m) \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M)$$

**Dim:** dimostro che  $f$  ha minimo (la dimostrazione del massimo è analoga)

Si considera l'estremo inferiore  $I = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$

Voglio costruire una successione  $x_n$  in  $[a, b]$  tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = I$

$\{x_n\}$  È una successione minimizzante

$$-\infty < a \leq b < +\infty$$

- Suppongo che  $I = -\infty$ . Per ogni  $n \geq 1 \quad \exists x_n \in [a, b]$  tale che  $f(x_n) \leq -n$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty = I$$

- Suppongo che  $I \in \mathbb{R}$ . Ottengo che per la definizione di inf

$$I = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad I \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in [a, b] \text{ tale che } f(x) < I + \epsilon$$

Se  $\epsilon = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\exists x_n \in [a, b]$  tale che  $I \leq f(x_n) \leq I + \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = I$$

Quindi in entrambi i casi il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $f(x_n) = I$ . Per il teorema di Weistrass visto che  $\{x_n\}$  è una successione limitata, è possibile prendere una sottosuccessione di  $x_n$  convergente ad un  $x_0 \in [a, b]$ . Poichè  $f$  è continua:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Però visto che stiamo considerando una sottosuccessione di  $x_n$  che converge ad  $I$  allora anche la s.s. converge ad  $I$ . Quindi:

$$f(x_0) = I$$

Ed  $I$  è il minimo visto che si trova in  $x_0$  che è punto di minimo.

**Es:**  $\sin[-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = -1 \quad \max_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = 1$$

#### Teorema 16: Teorema degli zeri

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$  chiuso e limitato. Se  $f(a) \cdot f(b) < 0$   
Allora  $\exists \epsilon \in ]a, b[$  tale che  $f(\epsilon) = 0$

**Dim:** Suppongo  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$

Utilizzo il metodo di bisezione, ossia divido l'intervallo  $[a, b]$  in due sotto intervalli:

- Se  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$  allora  $\epsilon = \frac{a+b}{2}$
- Se  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$  allora pongo  $b = \frac{a+b}{2}$
- Se  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$  allora pongo  $a = \frac{a+b}{2}$

Ripeto lo stesso procedimento con i nuovi intervalli ...

In questo modo stiamo creando una successione di intervalli sempre più piccoli. A questo punto abbiamo  $[a_n, b_n] = \frac{1}{2}[a_{n-1}, b_{n-1}] = \dots = \frac{1}{2^n}[a, b]$

Se consideriamo quindi le successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , abbiamo che la prima è crescente e superiormente limitata, la seconda è decrescente e inferiormente limitata. Ed essendo monotone abbiamo che:

$$a_{\sup} := \sup\{a_n\} \quad b_{\inf} := \inf\{b_n\}$$

Entrambe hanno limite finito che coincide coi rispettivi estremo superiore e inferiore.

Dato che  $a_{\sup} \leq b_{\inf}$  e che  $\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{[a, b]}{2^n} = 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , allora:

$$x_0 = a_{\sup} = b_{\inf}$$

Se esiste una zero per la funzione  $f$  questo deve necessariamente coincidere con  $x_0$ , altrimenti si contraddice il teorema della permanenza del segno.

#### Teorema 17: Teorema dei valori intermedi

Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f(I)$  è un intervallo, cioè  $\forall x_1, x_2 \in I$  e  $y \in \mathbb{R}$  tale che

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

Allora  $\exists \epsilon \in I$  tale che  $f(\epsilon) = y$

**Dim:** Siano  $x_1, x_2 \in I$ ,  $f(x_1) < f(x_2)$  e  $x_1 < x_2$  (per semplicità). Voglio mostrare che esiste  $\epsilon$  pongo:

$$g(x) = f(x) - y \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Ho

$$g(x_1) < 0 \quad g(x_2) > 0$$

Quindi per il teorema degli zeri esiste  $\epsilon \in ]x_1, x_2[$  tale che:

$$g(\epsilon) = 0 \Rightarrow f(\epsilon) - y = 0 \Rightarrow f(\epsilon) = y$$

### Teorema 18: Continuità della funzione inversa

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e invertibile. Allora:

1.  $f$  è strettamente monotona
2. la  $f$  inversa  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  è continua

## 6 Derivata

### Definizione 21: Calcolo differenziale

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzione. Se esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ rapporto incrementale} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata di  $f$  in  $x_0$  (oppure derivata prima) e si indica con

$$f^1(x_0), Df(x_0), \frac{d}{dx}f(x_0)$$

Inoltre se il limite esiste finito,  $f$  si dice derivabile in  $x_0$ .

Se  $f$  è derivabile  $\forall x_0 \in I$ ,  $f$  si dice derivabile in  $I$

**Es:**  $f(x) = x^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  Calcolo  $f^1(x_0)$

$$f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad n = 0$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 1}{x - x_0} = 0 \\ f^1(x_0) &= 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n = 1$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \\ f^1(x_0) &= 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Se } n > 1 \quad f(x) = x^n$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \end{aligned}$$

$$\text{Utilizziamo il binomio di Newton: } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x_0^{n-k} \cdot h^k = \\
&= \underbrace{\frac{n!}{n!} \cdot x_0^n \cdot 1}_{x_0^n} + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!} \cdot x_0^{n-1} \cdot h}_{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h} + \underbrace{\frac{n!}{2(n-2)!} \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}_{\frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2} \quad \text{nel caso di } n=2 \text{ (per gli altri valori è analogo)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^n} + n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2 \cancel{- x_0^n}}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} n \cdot x_0^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{2}n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h}_0 = \\
&= n \cdot x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

### Teorema 19: Derivabilità

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x_0$ . Allora,  $f$  è continua in  $x_0$ .

**Dim:** Devo mostrare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Poichè  $f$  è derivabile in  $x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{o(x - x_0)}_0) = f(x_0) \quad \checkmark$$

**Osservazione:**  $f$  derivabile in  $x_0 \Rightarrow f$  continua in  $x_0$

### Definizione 22: Derivata destra e sinistra

Sia  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ . Se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata destra di  $f$  in  $x_0$ . Se  $f_+^1(x_0) \in \mathbb{R}$ ,  $f$  si dice derivabile da destra in  $x_0$

**Osservazione:**

$f$  derivabile in  $x_0$

$\Leftrightarrow$

$f$  derivabile da destra in  $x_0$

$f$  derivabile da sinistra in  $x_0$

$$f_+^1(x_0) = f_-^1(x_0)$$

### Teorema 20: Algebra delle derivate

$f, g$  derivabile in  $x_0 \in I$ ,  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

1.  $\alpha f$  è derivabile in  $x_0$  e  $(\alpha f)^1(x_0) = \alpha f^1(x_0)$
2.  $f + g$  è derivabile in  $x_0$   $(f + g)^1(x_0) = f^1(x_0) + g^1(x_0)$
3.  $f \cdot g$  è derivabile in  $x_0$   $(f \cdot g)^1(x_0) = f^1(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g^1(x_0)$
4. Se  $g(x_0) \neq 0$ , allora  $f/g$  è derivabile in  $x_0$   $(\frac{f}{g})^1(x_0) = \frac{f^1(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g^1(x_0)}{g(x_0)^2}$

### Derivata della $f$ inversa

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo aperto,  $f$  continua, invertibile in  $I$  e derivabile in  $x_0$ , tale che  $f^1(x_0) \neq 0$ . Allora  $f^{-1}$  è

invertibile in  $y_0 = f(x_0)$  e si ha:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = f'(f^{-1}(y_0))$$

### Esempio 31

$$D(\arcsin y) = ?$$

#### Svolgimento:

Posso calcolare la derivata negli  $y_0 = \sin x_0$  ove  $\sin^1(x_0) \neq 0$  ossia  $\cos(x_0) \neq 0$ , quindi  $x_0 = \pm\pi/2$

$$\begin{aligned} D \arcsin y &= \frac{1}{(D \sin)(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \end{aligned}$$

### Teorema 21: Derivata delle $f$ composte

Siano  $f, g$  funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo  $I$ , se  $g$  è derivabile in  $x_0$  e  $f$  è derivabile in  $g(x_0)$ . Allora si ha:

$$Df(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

### Esempio 32

Calcolare la derivata di  $x^\alpha$  con  $\alpha > 0$

**Svolgimento:**  $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = f \cdot g(x) \quad f(y) = e^y \quad g(x) = \alpha \log x$   
 $f'(y) = e^y, \quad g'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} \quad D(x^\alpha) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \cdot \frac{1}{x}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

### Definizione 23: Punti di non derivabilità

$I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  con derivata sinistra e destra in  $x_0$  tale che:

$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

Ed entrambi i limiti sono finiti, allora  $x_0$  si dice punto angoloso

### Definizione 24

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo aperto,  $x_0 \in I$  e si indica:

$$f^1(x_0) = \pm\infty$$

Allora  $x_0$  si dice punto di flesso a tangente verticale, quindi limite destro e sinistro sono uguali ma tendono a infinito

Se, invece si ha:

$$f'_-(x_0) = -\infty \quad f'_+(x_0) = +\infty$$

Oppure il contrario,  $x_0$  si dice punto di cuspid

### Teorema 22: Limite della derivata

$I \subseteq \mathbb{R}$ , intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ . Supp:

1.  $f$  sia continua in  $x_0$
2.  $f$  sia derivabile in  $I \setminus \{x_0\}$
3.  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$

Allora  $\exists f'(x_0)$  e vale

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

In particolare se il limite è in  $\mathbb{R}$ ,  $f$  è derivabile.

### Definizione 25: Derivata di ordine superiore

$I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile. Se  $f'$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $f$  è derivabile due volte in  $x_0$  e si dice che tale valore è la derivata seconda di  $f$  in  $x_0$  e si indica con

$$f''(x_0), D^2 f(x_0), \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

**Osservazione**: dalla definizione di derivata seconda si ottiene anche quella di derivata n-esima di  $f$  in  $x_0$ .

**Formule di Leibniz**: Date  $f, g$  derivabili  $n$  volte in  $x_0$  si ha:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0)$$

### Teorema 23: Teorema di de L'Hopital

Siano  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$   $f, g$  derivabile in  $]a, b[$ . Se:

1.  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$
2.  $f(x), g(x) \rightarrow 0$  oppure  $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow a^+$
3.  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Si ha l'analogo per  $x \rightarrow b^-$  oppure per  $x \rightarrow x_0$   $x_0 \in ]a, b[$

**Osservazione**: non sempre applicando de l'Hopital si semplifica il limite.

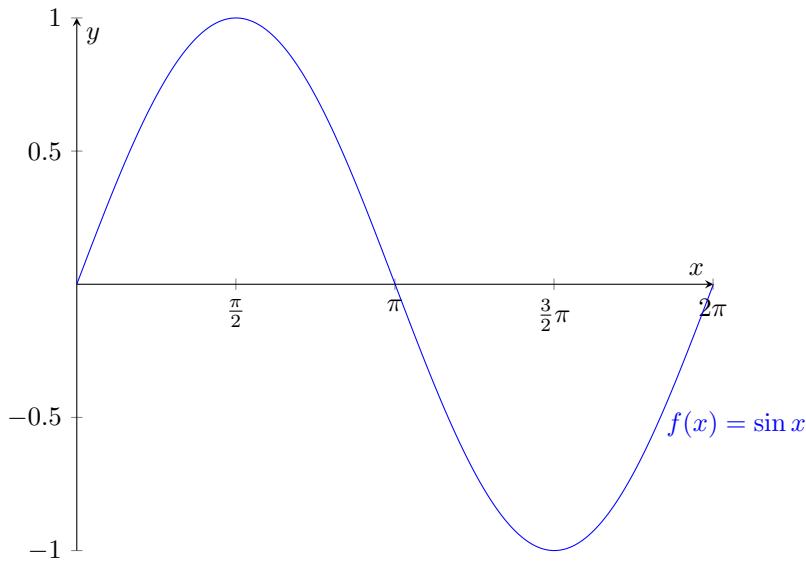
## 6.1 Massimo e minimo assoluto di una funzione

### Definizione 26

$M$  massimo assoluto per  $f$  se  $\exists x_1 \in X$  tale che  $f(x_1) = M$  e  $f(x) \leq f(x_1) = M \quad \forall x \in X$  ( $x_1$  è punto di massimo assoluto), per il minimo assoluto si ha la situazione analoga



**Esempio** :  $\sin x$



Punti di massimo assoluto = 1;

Punti di minimo assoluto = -1

**Osservazione** : per quanto riguarda massimo e minimo locale se  $\exists U$  intorno di  $x_0$  si dice che  $f(x_0)$  è max o min locale se  $f(x_0) \geq f(x)$  oppure  $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U \cap X$

#### Teorema 24: Teorema di Fermat o del punto critico

$f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in ]a, b[, f$  derivabile in  $x_0$ ,  $f$  ha estremo locale in  $x_0$ . Allora  $f'(x_0) = 0$

**Dim** : Ipotizziamo che  $x_0$  è punto di estremo locale e  $f$  è derivabile in  $x_0$ . Allora esiste  $U \subseteq ]a, b[$  intorno di  $x_0$  tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in U$$

Osservo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ se } x > x_0 \quad \geq 0 \text{ se } x < x_0$$

Applicando il Teorema di Bolzano esiste, quindi, il limite di  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  che è  $\leq 0$  per  $x \rightarrow x_0^+$  oppure  $\geq 0$  per  $x \rightarrow x_0^-$

$$\Rightarrow 0 \leq f_+^1(x_0) = f^1(x_0) = f_-^1(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow f^1(x_0) = 0$$

**Osservazione** : il teorema non è valido se  $x_0 = a$  o  $x_0 = b$  e anche se  $f$  non è derivabile.

#### Teorema 25: Teorema di Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

1.  $f$  continua in  $[a, b]$

2.  $f$  derivabile in  $]a, b[$

3.  $f(a) = f(b)$

Allora esiste  $c \in ]a, b[$  tale che  $f'(c) = 0$

**Dim** : Per il teorema di Weierstrass la funzione in  $[a, b]$  ha un massimo e minimo assoluti.

A questo punto si verificano due casi:

1.  $M = m$  quindi  $f$  è costante ed  $f'(c) = 0$ , quindi il teorema è verificato

2.  $m < M$ , visto che nell'ipotesi  $f(a) = f(b)$  almeno uno dei due valori  $m, M$  è assunto dalla funzione in un punto interno all'intervallo in  $x_0 \in ]a, b[$  quindi:

$$f(x_0) = M \quad \text{oppure} \quad f(x_0) = m$$

Per il teorema di Fermat abbiamo che  $f'(x_0) = 0$  quindi  $x_0$  è il  $c$  che stavamo cercando e il teorema è verificato ✓

### Teorema 26: Teorema di Lagrange

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $]a, b[$ . Allora esiste  $c \in ]a, b[$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

**Dim:** La dimostrazione viene da se applicando la formula del teorema, la prima parte indica il coefficiente angolare della retta che passa secante per i due estremi  $a, b$  che è uguale alla derivata prima della funzione nel punto  $c$ , che è il coefficiente angolare della tangente nel punto  $c$

### Teorema 27: Teorema di Cauchy

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue in  $[a, b]$  e derivabili in  $]a, b[$ . Allora esiste  $c \in ]a, b[$  tale che

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Se  $g'(x) \neq 0$  vale:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Osservazione:** Cauchy  $\xRightarrow{g(x)=x}$  Lagrange  $\xRightarrow{f(a)=f(b)}$  Rolle

**Proposizione:**  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $I$  e tale che

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

Allora  $f$  è costante in  $I$ .

**Dim:** dobbiamo mostrare che per ogni  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$  abbiamo  $f(x_1) = f(x_2)$   
Nell'intervallo  $[x_1, x_2]$   $f$  soddisfa il teorema di Lagrange, quindi esiste  $c \in ]x_1, x_2[$  tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Poichè  $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$  allora  $f'(c) = 0$ , quindi:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1) \quad \checkmark$$

### Teorema 28: Monotonie

$f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile:

1.  $f$  è crescente  $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$
2.  $f$  è decrescente  $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$
3. Se  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$  è strett crescente
4. Se  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \Rightarrow f$  è strett decrescente

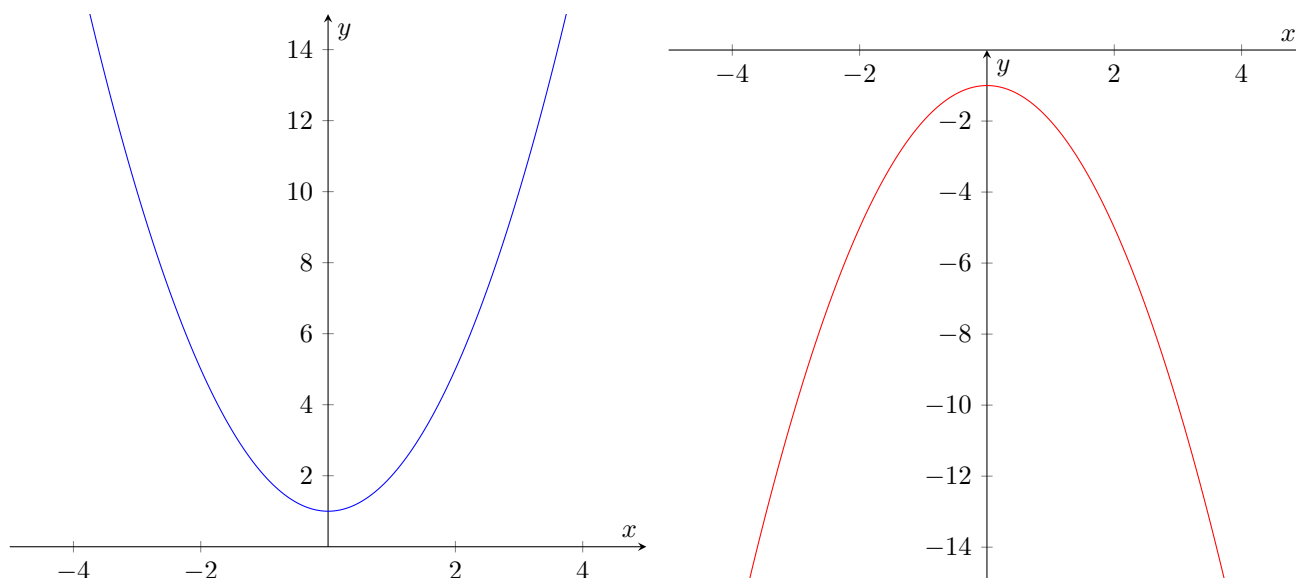
**Dim:** faccio solo punto 1 (per gli altri il ragionamento è analogo)

Se  $f$  è crescente e prendo due punti  $x, y$  con  $y > x$ , allora di conseguenza ho che  $f(y) \geq f(x)$ , quindi applicando Lagrange ho  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$  quindi se faccio il limite per  $y \rightarrow x^+$  ottengo che  $f'_+(x) \geq 0$  se ora applico il ragionamento per ogni  $x$  ottengo che  $f'(x) \geq 0$ . ✓

## 7 Studio di Funzione

### Definizione 27: Funzioni concave e convesse

$f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  $f$  è **convessa** in  $I$  se  $\forall x_1, x_2 \in I$ , il segmento che congiunge  $x_1, f(x_1)$  e  $x_2, f(x_2)$  non ha punto sotto il grafico di  $f$ . Se gli unici punti che appartengono al grafico di  $f$  sono gli estremi del segmento, allora  $f$  si dice **strettamente convessa**.  
 $f$  è **concava** se  $-f$  è convessa,  $f$  è **strettamente concava** se  $-f$  è strettamente convessa



### Teorema 29

Sia  $f$  derivabile due volte nell'intervallo  $I$ :

- $f$  convessa in  $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
- $f$  concava in  $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$
- Se  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$  è strett. convessa in  $I$
- Se  $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$  è strett. concava in  $I$

### Definizione 28: Punto di flesso

$x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  è **punto di flesso per  $f$**  se esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  in cui  $f$  cambia concavità in  $x_0$  ed esiste  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ .

Di conseguenza  $f''(x_0) = 0$

### Definizione 29: Asintoti

Sia  $f$  funzione reale di variabile reale:

- se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$  la retta  $y = c$  è asintoto orizzontale a  $+\infty$
- se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$  la retta  $y = c$  è asintoto orizzontale a  $-\infty$

Per  $x_0 \in \mathbb{R}$  punto di acc. per dom  $f$

- se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$  oppure vale lo stesso per  $x \rightarrow x_0^-$ , allora la retta  $x = x_0$  è asintoto verticale

Se esiste  $m, q \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m \cdot x = q$ , allora la retta  $y = m \cdot x + q$  è asintoto obliquo per  $x \rightarrow \pm\infty$

### Esempio 33: Studio di funzione

$$f(x) = |\arctan(\log x)|$$

**Dominio** :  $\log x \rightarrow x > 0$  quindi  $]0, +\infty[$

**Simmetrie e Periodicità** : non è pari  $f(-x) \neq f(x)$  e non è dispari  $f(-x) \neq -f(x)$  per ogni  $x \in \text{dom} f$ , inoltre non è presente nessuna periodicità evidente

**Limiti agli estremi di dom  $f$**  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\arctan(\log x)| = |\arctan(-\infty)| = \left| -\frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\arctan(\log x)| = |\arctan(+\infty)| = \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo asintoto orizzontale per  $x \rightarrow +\infty$  a  $\frac{\pi}{2}$  ma non abbiamo asintoto verticale

**Segno** :  $|\arctan(\log x)| > 0$  verificata  $\forall x \in \text{dom} f$

**Continuità** :  $f$  è composizione di funzioni continue, quindi è continua nel suo dominio.

**Derivabilità** :  $f$  è derivabile in  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  perchè per  $x = 1$   $f(x) = 0$

$$f'(x) \text{ per } 0 < x < 1 = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) \text{ per } 1 < x = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

Ora verifichiamo se è derivabile in  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{1+0} \cdot 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1+0} \cdot 1 = 1$$

Derivata destra e sinistra sono diverse quindi non è derivabile in  $x = 1$ , che è quindi punto angoloso

**Segno derivata** :  $f'(x) = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} < 0 \cdot > 0 < 0 \quad \forall x \in ]0, 1[$  quindi in quell'intervallo  $f$  è strett decrescente

$f'(x) = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} > 0 \cdot > 0 > 0 \quad \forall x \in ]1, +\infty[$  quindi in quell'intervallo  $f$  è strett crescente

**Derivata Seconda** :  $f''(x) = -[(-1) \cdot (1 + \log^2 x)^{-2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}] \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \forall x \in ]0, 1[$

$f''(x) = [(-1) \cdot (1 + \log^2 x)^{-2} \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x}] \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \forall x \in ]1, +\infty[$

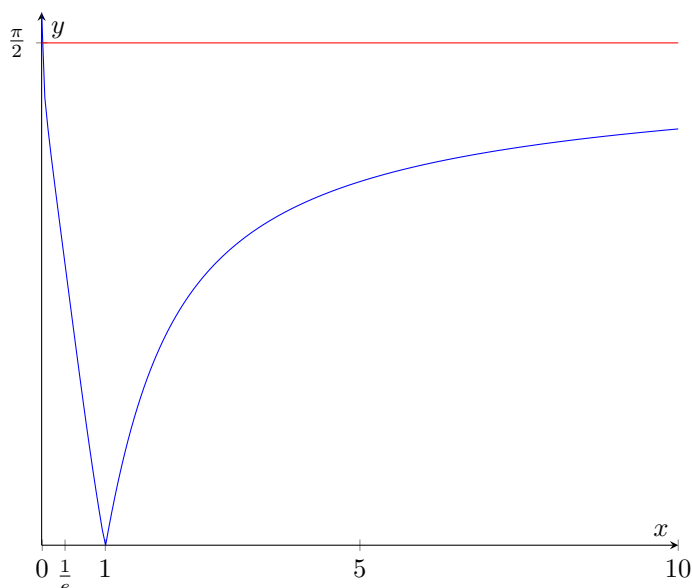
$= \frac{-1}{(1 + \log^2 x)^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot [2 \log x + 1 + \log^2 x] = < 0 \cdot > 0 \cdot \geq 0 < 0 \quad (\log x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \in ]0, 1[$

la derita seconda in quell'intervallo è però  $\geq 0$

Quindi la derivata seconda di  $f$  si annulla per  $x = \frac{1}{e}$  ed è maggiore di zero per ogni  $x \in ]0, 1[ \setminus \{1/e\}$  quindi  $f$  è strett convessa in  $]0, 1[ \setminus \{1/e\}$ , però  $x = \frac{1}{e}$  non è punto di flesso

Invece nell'intervallo  $]1, +\infty[$   $f''(x) < 0$  è quindi strett concava nell'intervallo

**Grafico** :



**Massimo e minimo**:  $f$  non ha max locale nel suo dominio, ma ha un min locale e assoluto in  $x = 1$ .  $x = 0$  è punto di max assoluto per l'estensione per continuità di  $f$ .

### Definizione 30: Formula di Taylor

Suppongo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{polinomio di grado 1}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{ERRORE}} \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se  $f$  è derivabile  $\Rightarrow f = \text{polinomio di grado 1} + \text{errore}$

**Esempio**:  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + e^0 \cdot (x - 0) + o(x - 0) \text{ per } x \rightarrow 0 \\ &= e^x = 1 + x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

### Definizione 31: Polinomio di Taylor

Prendo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo,  $x_0$  punto interno ad  $I$ ,  $f$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$ .  
Chiamo polinomio di Taylor di grado  $n$  centrato in  $x_0$  il polinomio:

$$P_{x_0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$f^{(0)} = f$$

### Teorema 30: formula di Taylor con resto nella forma di Peano

Se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo,  $x_0$  punto interno ad  $I$ ,  $f$  derivabili  $n$  volte in  $x_0$ , allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

**Osservazione**: se  $x_0 = 0$ , si chiama polinomio e formula di McLaurin.

## 8 Serie Numeriche

### Definizione 32

Data una successione  $a_n$  di numeri reali si dice serie a termine generale  $a_n$  la successione  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definita da la somma di tutti i termini della successione:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \forall n$$

Dove  $S_n$  si dice somma parziale della serie.

### Definizione 33: Carattere della serie

La serie di termine generale  $a_n$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Si dice:

- Convergente: se  $\lim S_n = s \in \mathbb{R}$  per  $n \rightarrow +\infty$ , con  $s$  che si dice somma della serie e si scrive

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$$

- Divergente: a  $\pm\infty$  se  $\lim S_n = \pm\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$
- Inderterminata: se  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  non ha limite per  $n \rightarrow +\infty$

**Osservazione**: Studiare il carattere di una serie, significa determinare se è convergente/divergente/indeterminata.

### Esempio 34: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

**Svolgimento**:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \quad q = \frac{1}{2} \\ q \neq 1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^n q^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (*) \\ q = 1 &\Rightarrow = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots = n + 1 \\ 0 < q < 1 &\Rightarrow = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Quindi  $a_n$  è convergente ed ha come somma parziale 1.

**Dim**: (\*) La dimostrazione si fa con il principio di induzione

Caso base  $n = 0$

$$S_0 = \sum_{k=0}^0 x^k = 1$$

Quindi, la formula  $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1$  è confermata per il caso base ✓

Ora dimostriamo il passo induttivo. Suppongo la tesi sia vera per  $n$ , quindi  $S_n = \sum x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  e dimostriamo che ciò implica che la tesi è vera per  $n + 1$ :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} = \\
&= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x) \cdot x^{n+1}}{1 - x} = \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato anche il passo induttivo.

#### Definizione 34: Serie Geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad r \in \mathbb{R}$$

Serie geometrica di ragione  $r$  che converge per  $|r| < 1$  a  $\frac{1}{1-r}$   
 diverge a  $+\infty$  per  $r \geq 1$   
 indeterminata per  $r \leq -1$

#### Definizione 35: Algebra delle serie

Date le serie  $\sum a_k$  e  $\sum b_k$  se convergono entrambe o divergono entrambe a  $\pm\infty$ , allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Inoltre se  $c \in \mathbb{R}$ , vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

**Proposizione**: Se  $\sum a_k$  converge, allora:

1. il suo resto n-esimo (sommatoria da  $k = n$  a  $+\infty$ ) è infinitesimo per  $n \rightarrow +\infty$
2. il suo termine generale  $a_n$  è infinitesimo per  $n \rightarrow +\infty$

**Dim**: Osservo

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Se  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$ . Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = S - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1} \quad n \rightarrow +\infty \quad S - S = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0
\end{aligned}$$

Quindi  $a_n$  è infinitesimo  $\checkmark$

#### Teorema 31: Criterio di convergenza

$a_n \not\rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum a_n$  non può convergere.

**Osservazione** : non vale però l'opposto, ossia:

$$a_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$

### Teorema 32: Criterio di Cauchy

La serie  $a_k$ , da  $k = 0$  a  $+\infty$ , converge se e solo se  $S_n$  è successione di Cauchy, ossia se e solo se  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$  tale che  $|S_n - S_m| < \epsilon \quad \forall m, n > N$

### Esempio 35: Serie Armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

**Svolgimento** : poichè non è di Cauchy diverge a  $+\infty$

### Definizione 36: Convergenza assoluta

Si dice che  $a_k$  converge assolutamente se  $\sum |a_k|$  converge

**Osservazione** : Convergenza Assoluta  $\Rightarrow$  Convergenza Semplice

### Esempio 36

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1^k}{2^k} \quad a_k = \frac{-1^k}{2^k}$$

**Svolgimento** :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-1^k}{2^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k \text{ è infinitesimo}$$

Quindi  $a_k$  può convergere. Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{-1^k}{2^k} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

Poichè  $|a_k|$  è una serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2} \in ] -1, 1[$  allora è convergente e quindi anche  $a_k$  lo è.

**Osservazione** : non vale il contrario, ossia se si ha la convergenza semplice, non si ha sempre anche quella assoluta.

### Definizione 37: Serie a termini positivi

Una serie a termini  $a_n \geq 0 \quad \forall n$  o converge o diverge a  $+\infty$

**Dim** : Basta osservare che

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$



È successione monotona crescente e quindi esiste il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $S_n$   
 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

### Teorema 33: Criterio del Confronto

Date  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  tali che  $0 \leq a_k \leq b_k$  definitivamente per  $k \rightarrow +\infty$

Allora:

1. Se  $\sum b_k$  converge  $\Rightarrow \sum a_k$  converge
2. Se  $\sum a_k$  diverge  $\Rightarrow \sum b_k$  diverge

**Osservazione:** Si confrontano le serie "difficili" con serie più "facili" di cui si riesce a determinare la convergenza o meno.

### Esempio 37: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$$

**Svolgimento:**

$$\frac{1}{2k-1} > 0 \quad \forall k \geq 1 \text{ (sarebbe per ogni } k > \frac{1}{2} \text{ ma la serie parte da } k=1)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k-1} = 0 \Rightarrow \text{il termine generale è infinitesimo}$$

$$\frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} > 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}}_{+\infty} = +\infty$$

Quindi per il secondo punto del criterio del confronto se  $\frac{1}{2k}$  diverge allora anche  $\frac{1}{2k-1}$  diverge.

### Definizione 38: Serie Armonica Generalizzata

Data la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la serie è a termini positivi e come tale può essere divergente o convergente.

In particolare:

- converge se  $\alpha > 1$
- diverge positivamente se  $\alpha \leq 1$

### Esempio 38: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^n(n^2 + \sin(e^n))}{3^n}$$

**Svolgimento:**  $a_n$  è infinitesima ed è anche  $\geq 0 \quad \forall n \geq 1$ ,

Vorrei confrontare  $a_n$  con  $(\frac{2}{3})^n$  di cui so già che è convergente, però  $0 \leq a_n \not\leq (\frac{2}{3})^n$

Se avessi  $a_n = (\frac{2}{3})^n \cdot b_n$  con  $b_n$  tale che  $(\frac{2}{3})^n b_n \leq c^n$  con  $c \in ]0, 1[$

Mi serve quindi un  $b_n = \beta^n$  tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta^n}{n^2 + \sin(e^n)} = +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$  e  $(\frac{2}{3} \cdot \beta)^n \leq c^n$ , quindi  $\frac{2}{3}\beta \leq c$  quindi visto che  $c \in ]0, 1[$  allora  $\beta \in ]0, \frac{3}{2}[$ , ma questo intervallo di  $\beta$  non renderebbe vero il limite, per far ciò devo prendere l'intervallo  $]1, \frac{3}{2}[$

Quindi:

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot (n^2 + \sin(e^n)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \beta^n = c^n \quad \forall \beta \in ]1, \frac{3}{2}[$$

Di conseguenza ho che  $a_n \leq c^n$  con  $c \in ]0, 1[$ , quindi  $\sum c^n$  è convergente, di conseguenza lo è anche  $a_n$

#### Teorema 34: Confronto asintotico

Siano  $\{a_k\}, \{b_k\}$  successioni  $\geq 0$  def. per  $k \rightarrow +\infty$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora:

1. Se  $l \in ]0, +\infty[$  allora  $a_k$  e  $b_k$  hanno lo stesso carattere
2. Se  $l = 0$  e  $b_k$  converge anche  $a_k$  converge
3. Se  $l = +\infty$  e  $b_k$  diverge anche  $a_k$  diverge

#### Teorema 35: Criterio del Rapporto

Sia  $\{a_k\}$  una successione a termini positivi (oppure def  $\geq 0$  per  $k \rightarrow \infty$ ).

Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se esiste  $0 \leq r < 1$  tale che:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \text{def per } k \rightarrow +\infty$$

Oppure

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Allora  $a_k$  converge

2. Se  $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$  def per  $k \rightarrow +\infty$

Oppure

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

Allora  $a_k$  diverge a  $+\infty$

3. Se  $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$  o il suo limite è uguale a 1 allora non posso dire nulla

**Dim:** prendiamo il punto 1 nel caso  $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$  e  $r < 1$

$$\Rightarrow a_{k+1} \leq r \cdot a_k \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_{k_0+1} \leq r \cdot a_{k_0}$$

$$\frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \leq r \Rightarrow a_{k_0+2} \leq r \cdot a_{k_0+1} \leq r \cdot r \cdot a_{k_0} = r^2 \cdot a_{k_0}$$

$$\text{In generale} \quad a_{k_0+j} \leq r \cdot a_{k_0+(j-1)} \leq r \cdot r^{j-1} \cdot a_{k_0} = r^j \cdot a_{k_0}$$

$$\Rightarrow a_{k_0+j} \leq r^j \cdot a_{k_0} \quad \forall j \geq 1$$

$$\sum a_{k_0+j} \leq a_{k_0} \cdot \sum r^j \quad \sum r^j = \text{serie è convergente } r < 1$$

Quindi per il criterio del confronto anche  $\sum a_{k_0+j}$  è convergente.

**Osservazione:** Per quanto riguarda la divergenza si può applicare lo stesso ragionamento, ma con  $r \geq 1$  e quindi verrà sempre  $\sum r^j$  che è divergente.

Oppure si può notare che  $a_{k_0+1} \geq a_{k_0} > 0$  che generalizzato vuol dire  $a_{k_0+j} \geq a_{k_0} > 0 \quad \forall j \geq 0$  e applicando il criterio di convergenza abbiamo che  $a_{k_0+1} \not\rightarrow 0$  per  $j \rightarrow +\infty$  e quindi la serie diverge.

**Osservazione:** se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$  non posso dire niente. se prendo ad esempio  $a_n = \frac{1}{n^2}$  il rapporto tende a 1 e la serie è convergente, se prendo  $a_n = \frac{1}{n}$  il rapporto tende sempre a 1, ma la serie è divergente.

### Esempio 39: Serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per quali  $x \in \mathbb{R}$  converge?

**Svolgimento :**

Studio la convergenza assoluta di  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Applico il criterio del rapporto  $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$

Quindi, per il primo punto del criterio del rapporto,

la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente)  $\forall x \in \mathbb{R}$

### Definizione 39: Serie di Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Generalizzata (non è sempre valida):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0)$$

### Teorema 36: Criterio della radice

Sia  $\{a_k\}$  successione con  $a_k \geq 0 \quad \forall k$ :

1. Se esiste  $r < 1$  tale che  $\lim \sqrt[k]{a_k} = r < 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ , allora  $a_k$  converge
2. Se  $\lim \sqrt[k]{a_k} > 1$  per  $k \rightarrow +\infty$ , allora  $a_k$  diverge
3. Altrimenti se  $r = 1$  allora non si può dir nulla

**Dim :** consideriamo il caso 1

$$\sqrt[k]{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_k \leq r^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^k \quad \sum r^k = \text{serie è convergente } r < 1$$

Quindi per il criterio del confronto anche  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  è convergente

**Osservazione :** La dimostrazione del punto 2 e 3 sono analoghe a quella del punto 1, cambiando l'intervallo in cui esiste  $r$ .

### Definizione 40: Serie Logaritmica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad x \in \mathbb{R}$$

**Svolgimento** : studio la convergenza assoluta tramite il criterio del rapporto

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n}$$

Ed ottengo  $|x| \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow |x|$  per  $n \rightarrow +\infty$ , è quindi convergente assolutamente se  $|x| < 1$ , se  $|x| = 1$  non posso dire nulla, se  $|x| > 1$  allora non è convergente assolutamente.

Provo a vedere com'è il carattere per  $x > 1$  e ottengo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty \quad \forall x > 1$$

Quindi per il criterio di convergenza  $a_n$  con  $|x| > 1$  non è convergente.

Se  $x = -1$  ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} = -\infty$$

diverge quindi a  $-\infty$

Per  $x = 1$  ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Che per determinarne il carattere ho bisogno di un nuovo criterio.

#### Teorema 37: Criterio di Leibniz

Sia  $\{a_k\}$  successione tale che

1.  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
2.  $\{a_k\}$  decrescente:  $a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
3.  $a_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$

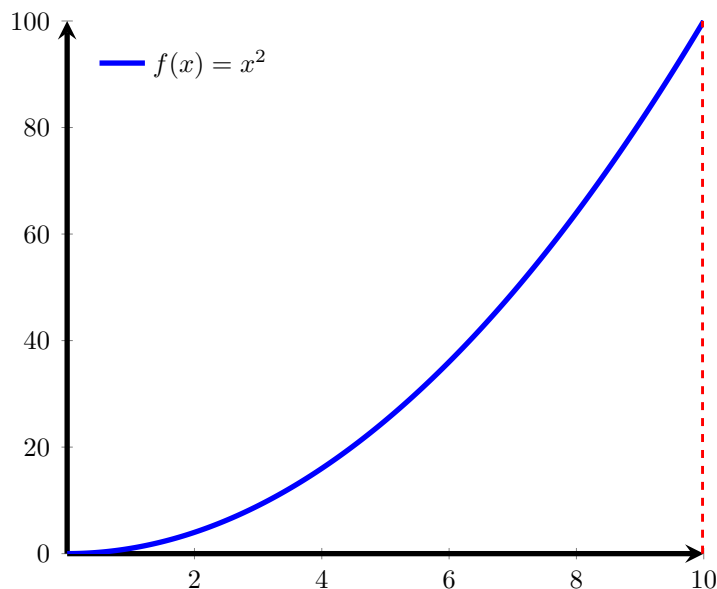
Allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

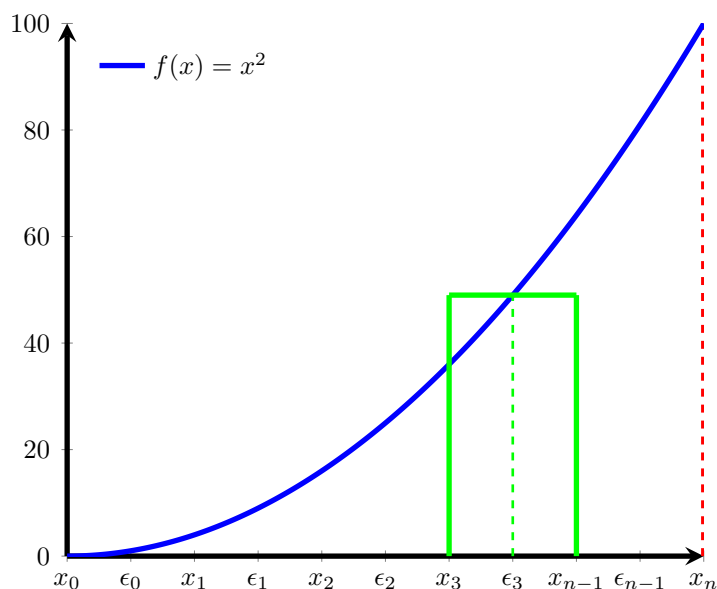
converge

**Osservazione** : il criterio di Leibniz vale solo per la convergenza semplice non assoluta.

## 9 Calcolo Integrale



**Idea:** suddivido  $[0, 10]$  in tanti intervalli  $[x_i, x_{i+1}]$  per  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  quindi in  $n$  intervalli con  $x_0 = 0$  e  $x_n = 10$ . Abbiamo quindi:  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 10$



Per ogni  $i = 0, 1, \dots, n-1$  prendo  $\epsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$  e considero il rettangolo di base  $[x_i, x_{i+1}]$  e altezza  $f(\epsilon_i) = \epsilon_i^2$

Adesso generalizziamo questo ragionamento, unendo tutti i rettangoli, attraverso la sommatoria:

$$A_{\text{tot}} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\epsilon_i)$$

Per rappresentare questa sommatoria si usa l'integrale definito:

$$A_{\text{tot}} = \int_0^{10} f(x) \cdot dx = \int_0^{10} x^2 \cdot dx$$

### Definizione 41: Integrale di Cauchy-Riemann

Si dice partizione o suddivisione di  $[a, b]$  un insieme finito di punti  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  tale che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

#### Definizione 42: Partizione Puntata

Si dice **partizione puntata** di  $[a, b]$  una coppia  $(\mathcal{P}, \epsilon)$  dove  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  è partizione di  $[a, b]$  e  $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  con  $\epsilon_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 1, \dots, n$

**Esempio:**  $I = [0, 1] \quad \mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\} \quad \mathcal{P}_4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$   
 $\epsilon = \{\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n}\} \quad \text{Quindi } (\mathcal{P}_n, \epsilon) \text{ è una partizione puntata di } [0, 1]$

#### Definizione 43: Integrale definito

Una funzione limitata  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **integrabile alla Cauchy-Riemann** in  $[a, b]$  se esiste  $I \in \mathbb{R}$  tale che  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  tale che  $\forall (\mathcal{P}, \epsilon)$  partizione puntata di  $[a, b]$  con  $|\mathcal{P}| < \delta$  si ha

$$|S(f, \mathcal{P}, \epsilon) - I| < \delta$$

Tale valore finito  $I$  viene detto **integrale definito** di  $f$  in  $[a, b]$  e si indica:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

**Osservazione:** Per  $S(f, \mathcal{P}, \epsilon)$  si intende la somma puntata di  $f$  rispetto alla partizione  $(\mathcal{P}, \epsilon)$  di  $[a, b]$  ossia:

$$S(f, \mathcal{P}, \epsilon) = \sum_{k=1}^n f(\epsilon_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

**Osservazione:**

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

**Osservazione:** Se  $f$  è non negativa e integrabile, allora il suo integrale è l'area del sottografico definito da

$$SG(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$$

#### Teorema 38

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monotona e limitata, allora  $f$  è integrabile.

Inoltre  $f$  è **continua a tratti** se è continua tranne in un numero finito di punti, in cui ha limite destro e sinistro finiti, quindi discontinuità di prima specie.

Le funzioni continue a tratti sono comunque integrabili, poichè basta sommare gli integrali nei vari tratti.

### Teorema 39: Proprietà dell'integrale

Sia  $f, g; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili. Allora:

1. Linearità dell'integrale:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) \cdot dx + \beta \int_a^b g(x) \cdot dx$$

2. Adattabilità rispetto all'insieme di integrazione: se  $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

3. Monotonia dell'integrale: se  $f \leq g$  in  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx$$

4. Se  $f$  è integrabile in  $[a, b]$ , allora anche  $|f|$  lo è, e si ha:

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

### Teorema 40: Media integrale

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile e continua per Weistrass esiste  $m = \inf f$ ,  $M = \sup f$  allora:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M$$

Se  $f$  è continua in  $[a, b]$  allora esiste  $c \in [a, b]$  tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

**Dim:** sapendo che  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b m \cdot dx \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b M \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b m \cdot dx = m \cdot \int_a^b 1 \cdot dx = m \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M$$

Se  $f$  è continua  $f([a, b]) = [m, M]$  ed esiste  $c \in [a, b]$  tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

**Osservazione:** se  $f$  non è continua, potrebbe non esistere  $c \in [a, b]$  poichè il teorema di Weistrass non assicura massimo e minimo per funzioni non continue.

#### Definizione 44: Primitiva e famiglia di primitive

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $F : A \rightarrow \mathbb{R}$  si dice primitiva di  $f$  o funzione primitiva di  $f$  in  $A$  se  $F$  è derivabile in  $A$  e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

La famiglia di primitive è invece l'unione di tutte le  $F(x)$  la cui derivata prima è uguale  $f(x)$  con l'aggiunta di una costante  $c$

**Esempio**: se  $f$  è derivabile, allora  $f$  è una primitiva di  $f'$

$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$  quindi  $F(x) + c$  è la famiglia di primitive di  $f(x)$

#### Teorema 41

Siano  $F, G$  due primitive di  $f$  sia  $A = I$  intervallo. Allora esiste  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I$$

**Dim**: so che  $G'(x) = f(x) = F'(x) \quad \forall x \in I$

$$\Rightarrow (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow F - G \text{ è costante in } I$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ tale che } F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ tale che } F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I \quad \checkmark$$

#### Teorema 42: Teorema fondamentale del calcolo 1° parte

Se  $f \in C[a, b]$  e definisco

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

allora  $F$  è derivabile (e continua) in  $[a, b]$  e si ha  $F'(x) = f(x)$  quindi  $F$  è primitiva di  $f$

#### Teorema 43: 2° parte calcolo fondamentale

Sia  $f(x)$  continua in  $[a, b]$  e sia  $F(x)$  una sua qualsiasi primitiva in  $[a, b]$ . Allora:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

**Dim**: Dalla prima parte del teorema sappiamo che la funzione integrale nel punto  $a$  è una primitiva della funzione stessa e quindi qualsiasi altra primitiva nell'intervallo  $[a, b]$  è diversa dalle altre per un valore finito  $c \in \mathbb{R}$ . Quindi:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

Otteniamo quindi che:

$$F(b) - F(a) = \left( \int_a^b f(t) dt + c \right) - \left( \int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt$$

La variabile di integrazione è indifferente quindi possiamo sostituire  $t$  con  $x$  ed abbiamo verificato la nostra tesi.



#### Definizione 45: Integrale indefinito

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  l'integrale indefinito di  $f$  in  $A$  è l'insieme di tutte le sue primitive in  $A$  e si denota

$$\int f(x) dx = \{F : F \text{ è primitiva di } f \text{ in } A\}$$

Se  $A$  è un intervallo, allora

$$\int f(x) dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

**Osservazione:** l'integrale indefinito è lineare, ossia:

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

## 9.1 Metodi di integrazione

#### Definizione 46: Integrazione per parti

Siano  $f, g$  funzioni derivabili in  $I = [a, b]$ , allora:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Quindi, integrando:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

#### Definizione 47: Integrazione per sostituzione

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  di classe  $C^1$  e tale che  $\varphi(c) = a$ ,  $\varphi(d) = b$ ,  $F$  primitiva di  $f$  in  $[a, b]$ . Allora:

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

#### Esempio 40

$$\int \left( e^{3x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \right) dx$$

**Svolgimento:**

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \int e^{3x} - \int \frac{1}{x^3} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \\ \Rightarrow & \frac{1}{3} \int \underbrace{3}_{f'(x)} \cdot e^{3x} dx + \frac{1}{2x^2} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \\ \Rightarrow & \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \\ \text{Quindi:} & \int f'(x) \cdot f(x) \\ \Rightarrow & \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \arctan(\ln x) + c \end{aligned}$$

#### Definizione 48: Integrale di funzione razionale

Consideriamo l'integrale:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{con } P \text{ e } Q \text{ polinomi}$$

L'idea è riscrivere l'integrale come la somma di due integrali di cui riusciamo a calcolare la primitiva e abbiamo tre casi:

1.  $\Delta > 0$  e  $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{x - x_2}$$

2.  $\Delta = 0$  e  $(x - x_1)^2 = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

3.  $\Delta < 0$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} = \frac{a}{2} \int \frac{\overbrace{2x + c}^{f'(x)}}{\underbrace{x^2 + cx + d}_{f(x)}} + b \int \frac{1}{x^2 + cx + d}$$

#### Esempio 41: Caso 1

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

**Svolgimento**: visto che  $\Delta > 0$  allora posso applicare il primo caso:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$

$$\begin{cases} Ax + Bx = 3x \\ -3A - 2B = 2 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema otteniamo che:  $A = -8 \quad B = 11$

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow \int \frac{-8}{x - 2} dx + \int \frac{11}{x - 3} dx$$

$$\Rightarrow -8 \ln |x - 2| + 11 \ln |x - 3| + c$$

#### Esempio 42: Caso 2

$$\int \frac{x + 2}{(x - 2)^2}$$

**Svolgimento**: visto che  $\Delta = 0$  applichiamo il secondo caso:

$$\Rightarrow \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\begin{cases} Ax = x \\ -2A + B = 2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che:  $A = 1 \quad B = 4$

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2} \Rightarrow \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{4}{(x-2)^2} dx$$

$$\Rightarrow \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$$

#### Esempio 43: Caso 3

$$\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}$$

**Svolgimento**: visto che  $\Delta < 0$  applichiamo il terzo caso:

$$\Rightarrow 3 \int \frac{x}{x^2+4x+5} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \int \underbrace{\frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}}_{f'(x)} dx + 2 \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+5| - 4 \cdot \frac{3}{2} \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx + 2 \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \ln(x^2+4x+5) - 4 \arctan(x+2) + c$$

## 9.2 Integrale improprio

### Definizione 49: Integrale generalizzato o improprio

Può capitare di avere  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f$  o  $I$  o entrambi illimitati, ma vogliamo calcolare comunque un'area (o integrale).

Sia  $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in  $[c, d]$   $\forall c \in (a, b]$ . Se esiste:

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) \cdot dx$$

Tale limite si chiama integrale improprio o generalizzato di  $f$  in  $[a, b]$ .

Se il limite esiste finito, si dice che  $f$  è integrabile in senso generalizzato e l'integrale si dice convergente, altrimenti si dice che l'integrale è divergente.

**Osservazione**: se  $|f|$  è integrabile in senso improprio si dice che  $f$  è assolutamente integrabile in senso improprio e:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b f(x) dx$$

#### Esempio 44

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

**Svolgimento** : ci accorgiamo che 0 non fa parte del dominio di  $f$  quindi dobbiamo fare:

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} 2 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 2$$

#### Teorema 44: Teorema del Confronto

Siano  $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $a \in \mathbb{R}$  con  $f, g$  integrabili in  $[c, b]$   $\forall c \in ]a, b[$  tale che:

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b]$$

Allora:

- $\int g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int f(x) dx < +\infty$
- $\int f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int g(x) dx = +\infty$

#### Teorema 45: Criterio asintotico del Confronto

$f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabili in  $[c, b]$   $\forall c \in ]a, b[$  tale che:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = l$$

1. se  $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  allora  $f$  è ass. integrabile in  $(a, b]$  se e solo se lo è anche  $g$  nello stesso intervallo
2. se  $l = 0$  allora se  $g$  è ass. integrabile in  $(a, b]$ , allora lo è anche  $f$
3. se  $l = +\infty$  allora se l'integrale da  $a$  a  $b$  di  $|g(x)| = +\infty$  allora anche lo stesso integrale per  $|f(x)| = +\infty$

**Osservazione** : è importante avere funzioni di cui conosciamo l'integrabilità.

#### Teorema 46: Criterio integrale per le serie

$f : [k_0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ , decrescente,  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Allora:

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k) < +\infty \Leftrightarrow \int_{k_0}^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

**Esempio casi importanti** :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Se  $\alpha \geq 1$  allora  $\Rightarrow +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Se  $\alpha \leq 1$  allora  $\Rightarrow +\infty$

**Osservazione** :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

## 10 Equazioni Differenziali

### Definizione 50: Equazione differenziale

Un'equazione differenziale è un'equazione che esprime una relazione tra due funzioni e le sue derivate fino ad un certo ordine.

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad *$$

Cerco una  $f. y(t)$  derivabile  $n$  volte che soddisfi l'equazione \*

Considero il Problema di Cauchy:

(PC)

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

equazione differenziale del primo ordine in forma normale (ED)

dato o condizione iniziale (C.I.)

### Teorema 47: Teorema di Cauchy Lipschitz

Considero il (PC). Suppongo che esistano due intervalli aperti  $I, J$  con  $A \in I$  e  $y_0 \in J$  tale che

$$f, \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{siano continue}$$

Allora esiste  $\tilde{I}$  intorno di  $t_0$  tale che (PC) ammette un'unica soluzione  $y : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Osservazione:** dire che esiste una soluzione  $\neq$  da dire che è determinata.

In generale (PC) e (ED) non si risolvono esplicitamente. Noi vediamo i casi in cui si possono risolvere.

### Definizione 51: Equazione differenziale di 1° ordine

Un'equazione differenziale del 1° ordine in forma normale è un'equazione del tipo:

$$y' = a(t) y + b(t)$$

Dove  $a(t)$  e  $b(t)$  sono due funzioni  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Una soluzione è

$$y'(t) = a(t) y(t) + b(t) \quad \forall t \in I$$

L'insieme di tutte le soluzioni si chiama integrale generale.

### Esempio 45

$$y' = 3y$$

**Svolgimento:** La funzione  $y(t) = e^{3t}$  è una soluzione. Infatti  $y'(t) = 3e^{3t} = 3y(t)$

$\Rightarrow y(t) = e^{3t}$  soddisfa l'equazione.

Se prendo  $y(t) = K \cdot e^{3t}$  ho l'integrale generale di  $y'(t) = 3y$

#### Esempio 46: Lineari

$$y' = 3y + t$$

**Svolgimento:**  $y' = a(t) \cdot y + b(t)$

$$a(t) = 3 \quad b(t) = t \quad a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A(t) = 3t$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{3t} \cdot \left( \int t \cdot e^{-3t} dt \right) \quad \text{utilizzato la formula di risoluzione delle ED lineari}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{3t} \cdot \left( -\frac{1}{3} e^{-3t} \cdot t - \frac{1}{9} e^{-3t} + c \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{t}{3} - \frac{1}{9} + c e^{3t} \quad c \in \mathbb{R}$$

Posso verificare che sia la soluzione derivando  $y(t)$

#### Esempio 47: A variabili separabili

$$y' = t \cdot y^2$$

**Svolgimento:**  $a(t) = t \quad b(y) = y^2$

Cerco le soluzioni costanti, quindi con  $b(\bar{y}) = 0$  ossia  $\bar{y}^2 = 0 \Rightarrow \bar{y} = 0$

L'unica soluzione costante è quindi  $y(t) = 0$ .

Adesso cerco le soluzioni non costanti: Se  $y(t) \neq 0$  posso dividere per  $(y(t))^2$

$$\frac{y'(t)}{(y(t))^2} = t$$

Da cui:

$$\Rightarrow \int \frac{y'(t)}{(y(t))^2} dt = \int t dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{s^2} ds = \frac{t^2}{2} + c \quad s = y(t)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{s} = \frac{t^2}{2} + c \quad s = y(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + c}$$

## 11 Tabelle Utili

### 11.1 Proprietà potenze e logaritmi

|                                           |                                                          |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$                 | $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$                          |
| $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$               | $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$           |
| $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$                 | /                                                        |
| $a^{\log_a(b)} = b$                       | $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$              |
| $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$         | $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$ |
| $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ | $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$                        |

### 11.2 Limiti notevoli

|                                                                         |                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$                           | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$                  |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$                       | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$               |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$           | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$               |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$       | $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$             |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$               | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$                |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$                      | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$                 |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$                      | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad a > 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \cdot \log_a x = 0 \quad a > 0, a \neq 1$ | /                                                              |

### 11.3 Sviluppi asintotici di alcune funzioni

|             |                                                                      |
|-------------|----------------------------------------------------------------------|
| $\sin x$    | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\cos x$    | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\ln(1+x)$  | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$   |
| $\cosh x$   | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\sinh x$   | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$ |
| $\tan x$    | $x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$                   |
| $\arctan x$ | $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$                   |
| $e^x$       | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$                   |

### 11.4 Tabella Derivate Semplici

| $f(x)$       | $f'(x)$                               |
|--------------|---------------------------------------|
| $k$          | 0                                     |
| $x^n$        | $n \cdot x^{n-1}$                     |
| $\ln  x $    | $\frac{1}{x}$                         |
| $\log_a  x $ | $(\log_a e) \cdot \frac{1}{x}$        |
| $e^x$        | $e^x$                                 |
| $a^x$        | $(\ln a) \cdot a^x$                   |
| $\sin x$     | $\cos x$                              |
| $\cos x$     | $-\sin x$                             |
| $\tan x$     | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$   |
| $\cot x$     | $-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$ |
| $\arcsin x$  | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$              |
| $\arccos x$  | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$             |
| $\arctan x$  | $\frac{1}{1+x^2}$                     |



## 11.5 Sviluppi di McLaurin

| $f(x)$                               | $P_0^n(x)$                                                   | $\sum_{k=0}^{n \rightarrow +\infty}$                 |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $e^x$ per $x \rightarrow 0$          | $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$            | $\sum \frac{x^k}{k!} + o(x^k)$                       |
| $\log(1+x)$ per $x \rightarrow 0$    | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ | $\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^k)$             |
| $(1+x)^\alpha$ per $x \rightarrow 0$ | $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \dots$       | $\sum \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^k)$                |
| $\cos x$ per $x \rightarrow 0$       | $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$                | $\sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$       |
| $\cosh x$ per $x \rightarrow 0$      | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$                |                                                      |
| $\sin x$ per $x \rightarrow 0$       | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$                | $\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$ |
| $\sinh x$ per $x \rightarrow 0$      | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$                |                                                      |
| $\arctan x$ per $x \rightarrow 0$    | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$                  | $\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$    |
| $\tan x$ per $x \rightarrow 0$       | $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$                |                                                      |

## 11.6 Integrali indefiniti noti

| $\int f(x)$                      | $F(x)$                                      |
|----------------------------------|---------------------------------------------|
| $\int e^x dx$                    | $e^x + c$                                   |
| $\int x^\alpha dx$               | $\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + c$ |
| $\int \frac{1}{x} dx$            | $\ln  x  + c$                               |
| $\int \alpha^x dx$               | $\frac{1}{\ln \alpha} \cdot \alpha^x + c$   |
| $\int \sin x dx$                 | $-\cos x + c$                               |
| $\int \cos x dx$                 | $\sin x + c$                                |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$     | $\tan x + c$                                |
| $\int \frac{1}{1+x^2} dx$        | $\arctan x + c$                             |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$     | $-\cot x + c$                               |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | $\arcsin x + c$                             |

## 11.7 Come risolvere le Equazioni Differenziali

| ED                           | $y' = a(t) \cdot y + b(t)$                                                  |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| $y' = b(t) \quad a(t) = 0$   | $\int b(t) = B(t) + c$                                                      |
| $y'(t) = a(t) \cdot b(y(t))$ | $\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt$                              |
| $y' = a(t) \cdot y + b(t)$   | $y = e^{A(t)} \cdot \int e^{-A(t)} \cdot b(t) dt \quad A(t) = \int a(t) dt$ |

Nel caso del problema di cauchy per le equazioni differenziali lineari di primo ordine si usa:

(PC)

$$\begin{aligned}
 y' &= ty + t \\
 y(t_0) &= y_0 \\
 y(t) &= e^{A(t)} \cdot \left( y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} \cdot b(s) ds \right)
 \end{aligned}$$