

Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1 Principio di Induzione	2
2 Coefficienti Binomiali	3
2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$	4
3 Limiti di funzioni	4

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare prediciati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. $P(0)$ è vero (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$ (**passo induttivo**)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{P(n)}$.

CASO BASE: $P(0) \quad 2^0 \geq 1 \quad$ vero

PASSO INDUTTIVO: $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$$2^n \geq n+1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2$$

Dunque abbiamo dimostrato che $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $P(n)$

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : $P(0) : "0 = 0"$ è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che $P(n)$ è vera e dimostro che è vera anche $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $P(0)$ è vera (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (**passo induttivo**)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$ è vera allora lo è anche $P(n)$ (**ipotesi induttiva**)

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $P(n)$ si usa la condizione che $P(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$.
Ovvero, se per un predicato $P(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_0
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 P(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE : $P(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che $P(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1, m_2 diversi da n e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $P(m_1)$ e $P(m_2)$ sono vere.

2 Coefficienti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $C_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $C_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k}$. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $]-\infty, -M[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)

Dato $f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom } f \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a $\text{dom } f$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$

Si dice che f ha limite l per $x \rightarrow x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \quad \exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom } f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$

OSSERVAZIONE:

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \rightarrow x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim: Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di \mathbb{R}

$\exists V_1$ intorno di l_1

$\exists V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_1 \cap \text{dom } f, x \neq x_0$
 allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_2 \cap \text{dom } f, x \neq x_0$
 allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$$U = U_1 \cap U_2 \text{ intorno di } x_0$$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom } f$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad \text{ASSURDO} \quad \text{poiché } \bar{x} \in U_1 \text{ e } \bar{x} \in U_2$$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}] = 0$$

$$x_0 = 2, l = 0$$

$$f(x) = 2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$ tale che se $\underbrace{|x - 2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x - 2| < \delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \Rightarrow \textcircled{*}$$

Parto da $\textcircled{*}$

$$2|x - 2| \underbrace{|\cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x - 2| < \epsilon$$

Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x - 2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2|x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$$\sin x =$$

$$\begin{aligned} -1 & \quad x < 0 \\ 0 & \quad x = 0 \\ 1 & \quad x > 0 \end{aligned}$$



Se $x \rightarrow 0^-$ $\operatorname{sgn} x \rightarrow -1$
 Se $x \rightarrow 0^+$ $\operatorname{sgn} x \rightarrow 1$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ non esiste perché i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r + \epsilon[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r < a < r + \epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r - \epsilon, r[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r - \epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione: devo mostrare $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, x_0 di acc. per $\operatorname{dom} f$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop: Sia x_0 , $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per $\text{dom } f$ e supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora $\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom } f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim: Considero il caso $l \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poiché $l > 0 \Rightarrow \exists V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom } f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poiché $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \text{ dom } f$, $x \neq x_0$

Oss: vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano f , g funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per $\text{dom } f \cap \text{dom } g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss: se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \exists l_f \text{ e } l_g \right\} \nRightarrow l_f < l_g$

Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X . Se

$$\circledast \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Dim: Suppongo per semplicità che \circledast valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom } f}_{X}) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$

Prendo $U = U_f \cap U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$, $g(x) \in V$

Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e V intervallo allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento : Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ def. per $x \rightarrow x_0$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \quad \text{con } y = f(x)$$

Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x \cdot \sin \frac{1}{x}) \text{ non esiste}$$

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per X , $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g, \quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$1. c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = c l_f$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g} \quad \text{se } l_g \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f} \quad \text{se } l_f \neq 0$$

Oss: il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinistro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

$$\text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln((f(x))^{g(x)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow l_g \ln l_f} e^t = \\ &= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\ &= l_f^{l_g} \end{aligned}$$

Proposizione: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X , f infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \rightarrow x_0$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f . infinitesima per f . limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) + \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] =$$

$$y = \frac{1}{2^x + 1} \quad y \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] = \lim_{y \rightarrow 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_1 - \sin y] =$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Svolgimento: Pongo $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}}$$