

# Analisi Matematica

Marco Pittarello

## Contents

<b>1 Principio di Induzione</b>	<b>2</b>
<b>2 Coefficienti Binomiali</b>	<b>3</b>
2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$ . . . . .	4
<b>3 Limiti di funzioni</b>	<b>4</b>

# 1 Principio di Induzione

## Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare prediciati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

## Teorema 1: 1° forma

Sia  $P(n)$  un predicato con parametro  $n \in \mathbb{N}$  e tale che:

1.  $P(0)$  è vero (**caso base**)
2.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$  (**passo induttivo**)

Allora  $P(n)$  è vera  $\forall n \in \mathbb{N}$

## Esempio 1

Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{P(n)}$ .

CASO BASE:  $P(0) \quad 2^0 \geq 1 \quad$  vero

PASSO INDUTTIVO:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che  $2^n \geq n+1$  e dimostro che  $2^{n+1} \geq n+2$

$$2^n \geq n+1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2$$

Dunque abbiamo dimostrato che  $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che  $\forall n \in \mathbb{N}$  vale  $P(n)$

## Esempio 2

Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE :  $P(0) : "0 = 0"$  è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che  $P(n)$  è vera e dimostro che è vera anche  $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

### Teorema 2: 2° forma

Sia  $P(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  un predicato tale che:

1.  $P(0)$  è vera (**caso base**)
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$  (**passo induttivo**)

Se  $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$  è vera allora lo è anche  $P(n)$  (**ipotesi induttiva**)

Allora  $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$  è vera

**OSSERVAZIONE** è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare  $P(n)$  si usa la condizione che  $P(m)$  vale per tutti gli  $m < n$

**OSSERVAZIONE** in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque  $n_0 \in \mathbb{N}$ .  
Ovvero, se per un predicato  $P(m)$  dimostriamo:

- il caso base per  $n_0$
- il passo induttivo  $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che  $\forall n \geq n_0 P(n)$  è vera

### Esempio 3

Dimostriamo che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE :  $P(2)$  è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che  $P(m)$  vale  $\forall \quad 1 \leq m < n$ , ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche  $n$  si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se  $n$  è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se  $n$  non è primo allora è divisibile per un numero  $m_1$  con  $m_1 \neq n$  e  $m_1 \neq 1$ ,

in particolare  $2 \leq m_1 < n$

Dunque  $\exists m_2 \in \mathbb{N}$  tale che

$n = m_1 m_2$  con  $m_1, m_2$  diversi da  $n$  e da 1

Inoltre  $2 \leq m_2 < n$

perchè  $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva  $P(m_1)$  e  $P(m_2)$  sono vere.

## 2 Coefficienti Binomiali

### Definizione 2

Definiamo  $C_{n,k}$  = numero totale di modi possibile, e si chiama:  
numero di combinazioni di  $n$  elementi di classe  $k$

Spesso  $C_{n,k}$  viene anche denotato con il simbolo  $\binom{n}{k}$ , chiamato  
coefficiente binomiale  $n$  su  $k$

Quanto vale  $\binom{n}{k}$ ?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## 2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

### Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$  si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

**OSSERVAZIONE:** Abbiamo un altro metodo per calcolare  $\binom{n}{k}$ .  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$   
Utilizzando il teorema e  $\binom{n}{0} = 1$  possiamo calcolare ogni valore di  $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$ , evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

### Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga  $n$  è composta da  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \tag{4}$$

### Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

## 3 Limiti di funzioni

### Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di  $r$  con  $r \in \mathbb{R}$ , un intervallo  $]r-\epsilon, r+\epsilon[$  con  $\epsilon > 0$ ;  $\epsilon$  viene detta raggio dell'intorno

- Se  $r = +\infty$ , si dice intorno di  $+\infty$  un intervallo del tipo  $]M, +\infty[$  con  $M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ )
- Se  $r = -\infty$ , si dice intorno di  $-\infty$  un intervallo del tipo  $]-\infty, -M[$  con  $M > 0$  ( $M \in \mathbb{R}$ )

Dato  $f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{dom } f \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  è punto di accumulazione a  $\text{dom } f$ ,  $l \in \bar{\mathbb{R}}$

Si dice che  $f$  ha limite  $l$  per  $x \rightarrow x_0$  e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se  $\forall V$  intorno di  $l \quad \exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom } f$ ,  $x \neq x_0$  allora  $f(x) \in V$

**OSSERVAZIONE:**

- Se  $l \in \mathbb{R}$ , si dice che  $f$  ha limite finito in  $x_0$
- Se  $l = +\infty$  o  $l = -\infty$ , allora  $f$  si dice divergente per  $x \rightarrow x_0$
- Se  $l = 0$ , allora si dice che  $f$  è infinitesima in  $x_0$

#### Teorema 4: Unicità del limite

Se  $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora  $l_1 = l_2$

**Dim:** Suppongo per assurdo che  $l_1 \neq l_2$

$P_1$  la proposizione di separazione di  $\mathbb{R}$

$\exists V_1$  intorno di  $l_1$

$\exists V_2$  intorno di  $l_2$

tale che  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$  intorno di  $x_0$  tale che  
 $x \in U_1 \cap \text{dom } f, x \neq x_0$   
 allora  $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$  intorno di  $x_0$  tale che  
 $x \in U_2 \cap \text{dom } f, x \neq x_0$   
 allora  $f(x) \in V_2$

Pongo

$$U = U_1 \cap U_2 \text{ intorno di } x_0$$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom } f$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad \text{ASSURDO} \quad \text{poiché } \bar{x} \in U_1 \text{ e } \bar{x} \in U_2$$

#### Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}] = 0$$

$$x_0 = 2, l = 0$$

$$f(x) = 2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$  tale che se  $\underbrace{|x - 2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x - 2| < \delta}$  allora  $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \Rightarrow \textcircled{*}$$

Parto da  $\textcircled{*}$

$$2|x - 2| \underbrace{|\cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x - 2| < \epsilon$$

Voglio  $\delta > 0$  tale che se  $|x - 2| < \delta$  e  $x \neq 2$  allora  $2|x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo  $\delta = \frac{\epsilon}{2}$  e ho verificato che vale il limite.

#### Esempio 6: Limite destro e sinistro

$$\sin x =$$

$$\begin{aligned} -1 & \quad x < 0 \\ 0 & \quad x = 0 \\ 1 & \quad x > 0 \end{aligned}$$



Se  $x \rightarrow 0^-$   $\operatorname{sgn} x \rightarrow -1$   
 Se  $x \rightarrow 0^+$   $\operatorname{sgn} x \rightarrow 1$

Quindi  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$  non esiste perché i limiti destro e sinistro devono essere uguali

### Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  si dice:

- punto di acc. destro per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap ]r, r + \epsilon[ \neq \emptyset$  (cioè  $\exists a \in A$  tale che  $r < a < r + \epsilon$ )
- punto di acc. sinistro per  $A$  se  $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap ]r - \epsilon, r[ \neq \emptyset$  (cioè  $\exists a \in A$  tale che  $r - \epsilon < a < r$ )

### Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

**Soluzione:** devo mostrare  $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$  tale che se  $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$  allora  $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo  $\delta = \frac{1}{\ln M}$

### Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $x_0$  di acc. per  $\operatorname{dom} f$ . Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

**Prop:** Sia  $x_0$ ,  $l \in \bar{\mathbb{R}}$ . Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

**Osservazione:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

### Teorema 5: Permanenza del segno

Dato  $f$  reale di variabile reale,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ , di acc. per  $\text{dom } f$  e supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora  $\exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom } f$ ,  $x \neq x_0$ , allora

$$f(x) > 0$$

**Dim:** Considero il caso  $l \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ . Poiché  $l > 0 \Rightarrow \exists V$  intorno di  $l$  tale che:

$$V \subseteq ]0, +\infty[$$

$\exists U$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in U \cap \text{dom } f$ ,  $x \neq x_0$  allora  $f(x) \in V$  Poiché  $V \subseteq ]0, +\infty[$ , ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \text{ dom } f$ ,  $x \neq x_0$

**Oss:** vale l'analogo con  $l < 0$

### Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano  $f$ ,  $g$  funzioni reali di variabile reale,  $x_0$  di acc. per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ , tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

**Oss:** se  $f(x) < g(x)$  definitivamente per  $\left\{ \exists l_f \text{ e } l_g \right\} \nRightarrow l_f < l_g$

### Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

### Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$  di acc. a  $X$ . Se

$$\circledast \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

**Dim:** Suppongo per semplicità che  $\circledast$  valga  $\forall x \in X$ . Devo mostrare che  $\forall V$  intorno di  $l$   $\exists U$  intorno di  $x_0$  t.c. se  $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom } f}_{X}) \setminus \{x_0\}$ , allora  $h(x) \in V$  con  $V$  intorno di  $l$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$  allora  $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$  intorno di  $x_0$  tale che se  $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$  allora  $g(x) \in V$

Prendo  $U = U_f \cap U_g$  è intorno di  $x_0$  se  $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$ ,  $g(x) \in V$

Quindi  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  e  $V$  intervallo allora  $h(x) \in V$

### Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento : Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

### Esempio 10: Dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$