

Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1 Principio di Induzione	2
2 Coefficienti Binomiali	3
2.1 Proprietà del binomio	4
3 Limiti di funzioni	4
3.1 O-piccoli	12
3.2 Sviluppi asintotici di alcune funzioni	14
4 Successioni	16
5 Funzioni Continue	19
6 Derivata	21
6.1 Tabella Derivate Semplici	22
6.2 Massimo e minimo assuluto di una funzione	25
7 Studio di Funzione	27
7.1 Sviluppi di McLaurin	30
8 Serie Numeriche	30
9 Calcolo Integrale	39
9.1 Metodi di integrazione	43
9.2 Integrali indefiniti noti	44
9.3 Integrale improprio	47

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare prediciati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. $P(0)$ è vero (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$ (**passo induttivo**)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{P(n)}$.

CASO BASE: $P(0) \quad 2^0 \geq 1 \quad$ vero

PASSO INDUTTIVO: $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$$2^n \geq n+1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n+2 \geq n+2$$

Dunque abbiamo dimostrato che $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $P(n)$

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : $P(0) : "0 = 0"$ è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che $P(n)$ è vera e dimostro che è vera anche $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $P(0)$ è vera (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (**passo induttivo**)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$ è vera allora lo è anche $P(n)$ (**ipotesi induttiva**)

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $P(n)$ si usa la condizione che $P(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$.
Ovvero, se per un predicato $P(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_0
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 P(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE : $P(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che $P(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1, m_2 diversi da n e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $P(m_1)$ e $P(m_2)$ sono vere.

2 Coefficienti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $C_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $C_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.1 Proprietà del binomio

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k}$. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $]-\infty, -M[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)

Dato $f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom } f \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a $\text{dom } f$, $l \in \bar{\mathbb{R}}$

Si dice che f ha limite l per $x \rightarrow x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \quad \exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom } f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$

OSSERVAZIONE:

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \rightarrow x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim: Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di \mathbb{R}

$\exists V_1$ intorno di l_1

$\exists V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_1 \cap \text{dom } f, x \neq x_0$
 allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_2 \cap \text{dom } f, x \neq x_0$
 allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$$U = U_1 \cap U_2 \text{ intorno di } x_0$$

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom } f$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad \text{ASSURDO} \quad \text{poiché } \bar{x} \in U_1 \text{ e } \bar{x} \in U_2$$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}] = 0$$

$$x_0 = 2, l = 0$$

$$f(x) = 2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$ tale che se $\underbrace{|x - 2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x - 2| < \delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x - 2| \cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \Rightarrow \textcircled{*}$$

Parto da $\textcircled{*}$

$$2|x - 2| \underbrace{|\cos[\ln|x - 2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x - 2| < \epsilon$$

Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x - 2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2|x - 2| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

Esempio 6: Limite destro e sinistro

$$\sin x =$$

$$\begin{aligned} -1 & \quad x < 0 \\ 0 & \quad x = 0 \\ 1 & \quad x > 0 \end{aligned}$$



Se $x \rightarrow 0^-$ $\operatorname{sgn} x \rightarrow -1$
Se $x \rightarrow 0^+$ $\operatorname{sgn} x \rightarrow 1$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ non esiste perché i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r + \epsilon[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r < a < r + \epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r - \epsilon, r[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r - \epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione: devo mostrare $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, x_0 di acc. per $\operatorname{dom} f$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop: Sia x_0 , $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per $\text{dom } f$ e supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora $\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom } f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim: Considero il caso $l \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poiché $l > 0 \Rightarrow \exists V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom } f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poiché $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \text{ dom } f$, $x \neq x_0$

Oss: vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano f , g funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per $\text{dom } f \cap \text{dom } g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss: se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \exists l_f \text{ e } l_g \right\} \nRightarrow l_f < l_g$

Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X . Se

$$\circledast \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Dim: Suppongo per semplicità che \circledast valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom } f}_{X}) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$

Prendo $U = U_f \cap U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$, $g(x) \in V$

Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e V intervallo allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento : Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ def. per $x \rightarrow x_0$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \quad \text{con } y = f(x)$$

Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x \cdot \sin \frac{1}{x}) \text{ non esiste}$$

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per X , $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g, \quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$1. c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = c l_f$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g} \quad \text{se } l_g \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f} \quad \text{se } l_f \neq 0$$

Oss: il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinistro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

$$\text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln((f(x))^{g(x)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow l_g \ln l_f} e^t = \\ &= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\ &= l_f^{l_g} \end{aligned}$$

Proposizione: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X , f infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \rightarrow x_0$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f . infinitesima per f . limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) + \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] =$$

$$y = \frac{1}{2^x + 1} \quad y \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] = \lim_{y \rightarrow 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_1 - \sin y] =$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Svolgimento : Pongo $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \\ \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\cos y}{\sin y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1} \cdot \cos y}_{1} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x^2}$$

Soluzione : il limite vale 0 poiché $\sqrt{|x|}$ è infinitesima in $x = 0$ e $\cos \frac{1}{x^2}$ è limitata def. per $x \rightarrow 0$

Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

Soluzione : $x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{+\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

Definizione 8: Forme Indeterminate

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per X

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{F.I. } 0 \cdot \infty$$

Oppure

$$\begin{array}{ccccccc} \text{F.I.} & +\infty - \infty & \frac{0}{0} & \frac{\infty}{\infty} & 0^0 & +\infty^0 & 1^{+\infty} \end{array}$$

Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluzione :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)}_e^\alpha = e^\alpha \quad \checkmark$$

Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_e) = \ln e = 1 \quad \checkmark$$

Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= y = e^x - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

Esempio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + |\sin x|}{x} \right)^x \quad \text{F.I. } 0^\infty$$

Svolgimento : Uso il teorema del confronto

Visto che $0 \leq |\sin x| \leq 1$ allora $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$, quindi $\frac{1}{x} \leq \frac{1+\sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$.
I due estremi tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$ quindi anche $\frac{1+|\sin x|}{x}$ tende a 0.

Esempio 21

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3 \sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}) \ln(1+3 \sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ per $y \rightarrow 0$ Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x) + \frac{3}{3 \sin e^x} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x)]$$

Adesso pongo $y = 3 \sin e^x$ che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \quad \ln(1 + 3 \sin e^x) = 0 \quad 3 \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_1 = 3$$

Il risultato è quindi $1 \cdot 0 + 3 = 3$

3.1 O-piccoli

Definizione 10: O-Piccolo

Date f, g funzioni reali di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per $\text{dom } f \cap \text{dom } g$, $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$
Si dice che f è "o-piccolo" di g per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive: $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ $f(x) \in o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$?

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad x = 0 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ✓ e $1 - \cos x$ è o-piccolo di x per $x \rightarrow 0$

Osservazione : $f_1(x) = o[g(x)]$ per $x \rightarrow x_0$
 $f_2(x) = o[g(x)]$ per $x \rightarrow x_0$ $\not\Rightarrow$ $f_1(x) = f_2(x)$ per $x \rightarrow x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = lg(x) + o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Dim :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_l - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_l \right) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f, g, f_1, g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X .

Se $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$ e:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempio 23: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Svolgimento :

Conoscendo gli sviluppi in serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{NUM} = \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2})$$

$$\begin{aligned} &- \frac{x^3}{6} = o(\frac{x^2}{2}) && o(x^3) = o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2}) \end{aligned}$$

$$\text{DEN} = x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{1}{2}x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= x^2 + x o(x) - 2x^2 - 4x o(x) - 2(0(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(\frac{x^2}{2}) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

3.2 Sviluppi asintotici di alcune funzioni

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\cosh x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\sinh x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

Svolgimento: Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che y deve tendere a 0, abbiamo e^x che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ quindi la sostituzione è valida

Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow x^n = o(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln x = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Quindi:

$$e^x >> x^n >> \ln x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^x + \sin x}{3e^x + x^{15} \ln x} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

Svolgimento :

NUM: $x^5 = o(e^x)$ $\frac{x \sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \sin x = 0 \cdot f \text{ limitata} = 0$
 $= e^x + o(e^x)$

DEN: $\frac{x^{15} \ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$ quindi è $o(e^x)$
 $= 3e^x + o(3e^x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{3e^x + o(3e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

Definizione 12: Nomenclatura

$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Se $\lim |f(x)| = +\infty, \lim |g(x)| = +\infty$

$+\infty$ si dice che f è un infinito di ordine superiore
a g per $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

\Rightarrow

$l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che f e g sono infiniti dello stesso
ordine per $x \rightarrow x_0$

0 si dice che f è un infinito di ordine inferiore
a g per $x \rightarrow x_0$

\nexists si dice che f e g non sono confrontabili

Se $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

$+\infty$ si dice che f è un infinito di ordine inferiore a
 g per $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$$

\Rightarrow

$l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che f e g sono infiniti dello stesso
ordine per $x \rightarrow x_0$

0 si dice che f è un infinito di ordine superiore a g
per $x \rightarrow x_0$

\nexists si dice che f e g non sono confrontabili

Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$ e x^2 sono infiniti dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \checkmark \quad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 \sin(\sqrt{x}) + (1 - \cos x)^2}{\sqrt{x} \sinh(x^2) + (e^x - 1)^3}$$

Svolgimento: Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

Allora NUM: $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2}) \quad (1 - \cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \rightarrow 0$

$$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$

$$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente}$$

DEN: $\sqrt{x} \sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2}) \quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \rightarrow 0^+$

$$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1} = 4$$

4 Successioni

Definizione 13: Successione

Una successione è una funzione il cui dominio è \mathbb{N} o un suo sottoinsieme infinito, per noi avranno valori in \mathbb{R} , ossia

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le successioni si scrivono col simbolo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Si dice che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \exists N > 0$ tale che $a_n \in V \forall n > N$

Es: $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rightarrow ? \quad n \rightarrow +\infty$

Def: sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione:

1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente se $\exists \lim a_n \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_n = 0$, la successione è infinitesima
2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è divergente se $\lim a_n = \pm\infty$
3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è regolare o determinata se $\exists \lim a_n$
4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare o indeterminata se $\nexists \lim a_n$

Esempio 28

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

Svolgimento :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

a_n è convergente.

Proposizione sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. convergente, allora è anche limitata, ossia $\exists M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

limitata \Rightarrow convergente

convergente \Rightarrow limitata

Teorema 11: Teorema della permanenza del segno

Se $\lim a_n = l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \rightarrow +\infty$

Teorema 12: Teorema del Confronto

$\{a_n\}, \{b_n\}$ siano due succ. tali che $a_n \leq b_n$ def. per $x \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_b$$

Allora $l_a \leq l_b$

Teorema 13: Teorema dei due carabinieri

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ succ. tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ def. per $n \rightarrow +\infty$ Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l$$

Gerarchia degli infiniti :

$$n^n >> n! >> e^n >> n^k >> \log_b n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad a, b > 1 \quad k > 0$$

Definizione 14: Successioni monotone

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. reale, si dice

- **Crescente:** se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Strett. Crescente:** se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Strett. Decrescente:** se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Es :

$\{2^n\} = 1, 2, 4, \dots$ Strett. crescente

$\{1^n\}$ Costante

$\{\frac{1}{2^n}\}$ Strett. decrescente

$\{1 + \frac{1}{n}\}$ Strett. decrescente

Definizione 15: Successione di Cauchy

Una succ. reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice di Cauchy (o successione fondamentale) se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tale che

$$n, p > N \Rightarrow |a_n - a_p| < \epsilon$$

Es : $a_n = (-1)^n$ non è di Cauchy

$a_n = \frac{1}{1+n}$ è di Cauchy

Una successione reale a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.

Definizione 16: Sottosuccessioni

Data una succ. a_n si dice sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che a_k sia una succ. strett. crescente di numeri naturali, cioè $n_{k+1} > n_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Es : $n_k = 2k, k \in \mathbb{N} \quad a_{n_k} = a_{2k}, k \in \mathbb{N}$ prendo solo gli elementi pari

Osservazione : per mostrare che una succ. non ha limite, mi basta mostrare che due sottosucc. hanno limite diverso o che una non abbia limite.

Teorema 14: Teorema di Bolzano-Weistrass

Sia a_n una succ. limitata. Allora \exists una sottosucc. di a_n convergente

Esempio 29: Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln((n+5)!)}{\ln(n^\alpha + \cos(n\pi))} - \ln(n! + 5)$$

al variare di $\alpha > 0$

Svolgimento :

$$\begin{aligned} \text{NUM} &= \ln((n+5)! - \ln(n! + 5) = \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!) - \ln(n!(1 + \frac{5}{n!})) = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)) + \ln(n!) - \ln(n!) - \ln(1 + \underbrace{\frac{5}{n!}}_0) = \\ &= \ln((n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)) = \\ &= \ln(n^5) + o(\ln n^5) \\ &= 5 \ln n + o(\ln n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{DEN} &= \ln(n^\alpha + \underbrace{\cos(n\pi)}_{-1^n}) = \ln(n^\alpha(1 + \frac{-1^n}{n^\alpha})) = \\
&= \ln n^\alpha \cdot \ln 1 + \underbrace{\frac{-1^n}{n^\alpha}}_0 = \\
&= \ln n^\alpha = \\
&= \alpha \ln n + o(\ln n)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln n + o(\ln n)}{\alpha \ln n + o(\ln n)} = \frac{5}{\alpha}$$

5 Funzioni Continue

Definizione 17: Funzione Continua

f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom } f$. f si dice continua in x_0 se è verificata una delle seguenti:

- x_0 è punto isolato del dominio
- Se x_0 non è punto isolato del dominio (ossia x_0 punto di acc. per $\text{dom } f$). Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua se è continua in ogni punto del suo dominio.

Osservazione : Si parla di continuità di f solo nei punti del dominio di f .

Esempio 30

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \text{dom } f$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x_0 \quad \forall x_0 \in \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Def: Se $x_0 \in \text{dom } f$ è punto di acc. per $\text{dom } f$, ho che f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ e $x \in \text{dom } f$ allora:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 18: Discontinuità di I specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom } f$ punto di acc. destro e sinistro per $\text{dom } f$. Se esistono i limiti finiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di I specie o di salto

Definizione 19: Discontinuità di II specie

Sia f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \text{dom } f$, punto di acc. destro e sinistro. Se:

1. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 sia infinito
Oppure

2. Almeno uno dei due limiti sinistro o destro in x_0 non esiste

Allora si dice che x_0 è punto di discontinuità di II specie

Definizione 20: Discontinuità di III specie

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $l \in \mathbb{R}$, tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Allora x_0 si dice punto di discontinuità eliminabile per f

Teorema 15: Teorema di Weistrass

Sia f funzione reale definita e continua su $[a, b]$. Allora f ha massimo e minimo (assoluti) in $[a, b]$, cioè $\exists x_m, x_M \in [a, b]$ tale che:

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_m) \quad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_M)$$

Es : $\sin[-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = -1 \quad \max_{x \in [-2\pi, 2\pi]} \sin x = 1$$

Teorema 16: Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ chiuso e limitato. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$
Allora $\exists \epsilon \in]a, b[$ tale che $f(\epsilon) = 0$

Teorema 17: Teorema dei valori intermedi

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ è un intervallo, cioè $\forall x_1, x_2 \in I$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

Allora $\exists \epsilon \in I$ tale che $f(\epsilon) = y$

Teorema 18: Continuità della funzione inversa

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile. Allora:

1. f è strettamente monotona
2. la f inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ è continua

6 Derivata

Definizione 21: Calcolo differenziale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione. Se esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ rapporto incrementale} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata di f in x_0 (oppure derivata prima) e si indica con

$$f^1(x_0), Df(x_0), \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Inoltre se il limite esiste finito, f si dice derivabile in x_0 .

Se f è derivabile $\forall x_0 \in I$, f si dice derivabile in I

Esempio: $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ Calcolo $f^1(x_0)$

$$f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad n = 0$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 1}{x - x_0} = 0 \\ f^1(x_0) &= 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n = 1$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \\ f^1(x_0) &= 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Se } n > 1 \quad f(x) = x^n$$

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \end{aligned}$$

$$\text{Utilizziamo il binomio di Newton: } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot x_0^{n-k} \cdot h^k =$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{n!} \cdot x_0^n \cdot 1}_{x_0^n} + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!} \cdot x_0^{n-1} \cdot h}_{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h^2} + \underbrace{\frac{n!}{2(n-2)!} \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}_{\frac{1}{2} n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2} \quad \text{nel caso di } n = 2 \text{ (per gli altri valori è analogo)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^n + n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2} n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2 - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot h + \frac{1}{2} n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} n \cdot x_0^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{2} n(n-1) \cdot x_0^{n-2} \cdot h}_0 =$$

$$= n \cdot x_0^{n-1} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

6.1 Tabella Derivate Semplici

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\log_a x $	$(\log_a e) \cdot \frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Teorema 19: Derivabilità

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0 . Allora, f è continua in x_0 .

Dim: Devo mostrare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Poichè f è derivabile in x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_0 + \underbrace{o(x - x_0)}_0) = f(x_0) \quad \checkmark$$

Osservazione: f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è $x_0 \not\Rightarrow f$ continua in x_0

Definizione 22: Derivata destra e sinistra

Sia I intervallo di \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h})$$

Tale limite si dice derivata destra di f in x_0 . Se $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, f si dice derivabile da destra in x_0

Osservazione :

f derivabile in x_0

\Leftrightarrow

f derivabile da destra in x_0
 f derivabile da sinistra in x_0
 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Teorema 20: Algebra delle derivate

f, g derivabile in $x_0 \in I$, I intervallo aperto di \mathbb{R} , $\alpha \in \mathbb{R}$

1. αf è derivabile in x_0 e $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$
2. $f + g$ è derivabile in x_0 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
3. $f \cdot g$ è derivabile in x_0 $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. Se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Derivata della f inversa

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto, f continua, invertibile in I e derivabile in x_0 , tale che $f'(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è invertibile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = f^1(f^{-1}(y_0))$$

Esempio 31

$$D(\arcsin y) = ?$$

Svolgimento :

Posso calcolare la derivata negli $y_0 = \sin x_0$ ove $\sin'(x_0) \neq 0$ ossia $\cos(x_0) \neq 0$, quindi $x_0 = \pm\pi/2$

$$\begin{aligned} D \arcsin y &= \frac{1}{(D \sin)(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \end{aligned}$$

Teorema 21: Derivata delle f composte

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo I , se g è derivabile in x_0 e f è derivabile in $g(x_0)$. Allora si ha:

$$Df(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Esempio 32

Calcolare la derivata di x^α con $\alpha > 0$

Svolgimento: $x^\alpha = e^{\alpha \log x} = f \cdot g(x)$ $f(y) = e^y$ $g(x) = \alpha \log x$
 $f'(y) = e^y$, $g'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x}$ $D(x^\alpha) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \cdot \frac{1}{x}) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

Definizione 23: Punti di non derivabilità

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con derivata sinistra e destra in x_0 tale che:

$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

E almeno una delle due sia finita, allora x_0 si dice punto angoloso

Definizione 24

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto, $x_0 \in I$ e si indica:

$$f^1(x_0) = \pm\infty$$

Allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale

Se, invece si ha:

$$f'_-(x_0) = -\infty \quad f'_+(x_0) = +\infty$$

Oppure il contrario, x_0 si dice punto di cuspide

Teorema 22: Limite della derivata

$I \subseteq \mathbb{R}$, intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Supp:

1. f sia continua in x_0
2. f sia derivabile in $I \setminus \{x_0\}$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f^1(x)$

Allora $\exists f^1(x_0)$ e vale

$$f^1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^1(x)$$

In particolare se il limite è in \mathbb{R} , f è derivabile.

Definizione 25: Derivata di ordine superiore

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Se f^1 è derivabile in x_0 , allora f è derivabile due volte in x_0 e si dice che tale valore è la derivata seconda di f in x_0 e si indica con

$$f^{11}(x_0), D^2 f(x_0), \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$$

Osservazione: dalla definizione di derivata seconda si ottiene anche quella di derivata n-esima di f in x_0 .

Formule di Leibniz: Date f, g derivabili n volte in x_0 si ha:

$$(f \cdot g)^n(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^k(x_0)$$

Teorema 23: Teorema di de L'Hopital

Siano $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ f, g derivabile in $]a, b[$. Se:

1. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. $f(x), g(x) \rightarrow 0$ oppure $f(x), g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow a^+$
3. $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}}$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Si ha l'analogo per $x \rightarrow b^-$ oppure per $x \rightarrow x_0 \quad x_0 \in]a, b[$

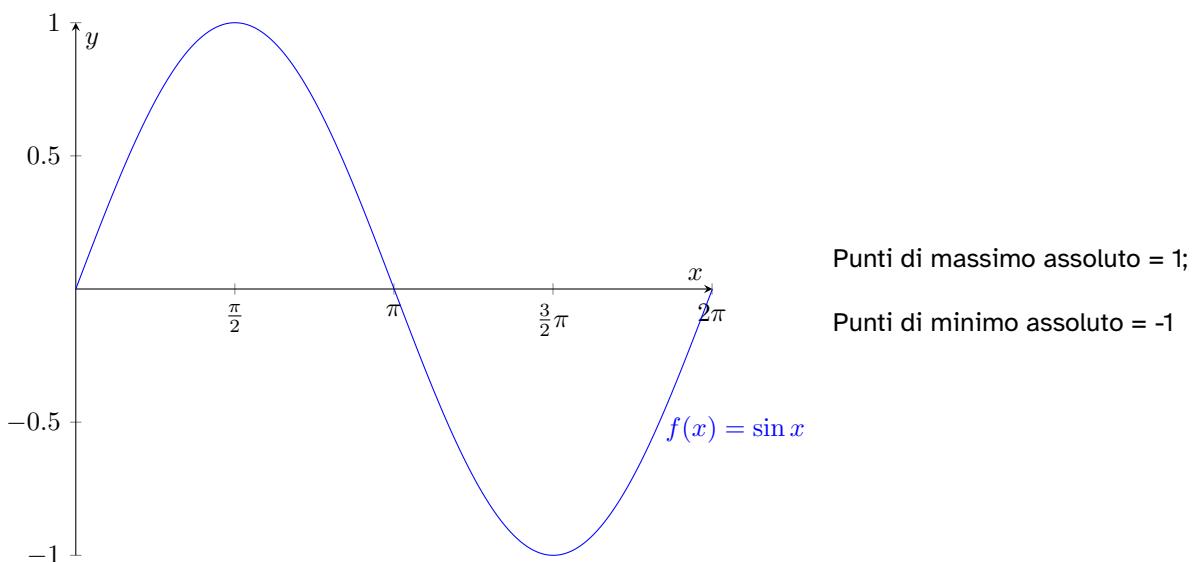
Osservazione : non sempre applicando de l'Hopital si semplifica il limite.

6.2 Massimo e minimo assoluto di una funzione

Definizione 26

M massimo assoluto per f se $\exists x_1 \in X$ tale che $f(x_1) = M$ e $f(x) \leq f(x_1) = M \quad \forall x \in X$
(x_1 è punto di massimo assoluto), per il minimo assoluto si ha la situazione analoga

Esempio : $\sin x$



Osservazione : per quanto riguarda massimo e minimo locale se $\exists U$ intorno di x_0 si dice che $f(x_0)$ è max o min locale se $f(x_0) \geq f(x)$ oppure $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U \cap X$

Teorema 24: Teorema di Fermat o del punto critico

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in]a, b[, f$ derivabile in x_0 , f ha estremo locale in x_0 . Allora $f'(x_0) = 0$

Dim : Ipotizziamo che x_0 è punto di estremo locale e f è derivabile in x_0 . Allora esiste $U \subseteq]a, b[$ intorno di x_0 tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in U$$

Osservo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad x > x_0 \quad \geq 0 \quad x < x_0$$

Applicando la definizione di derivata esiste, quindi, il limite di $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ che è ≤ 0 per $x \rightarrow x_0^+$ oppure ≥ 0 per $x \rightarrow x_0^-$

$$\Rightarrow 0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Osservazione : il teorema non è valido se $x_0 = a$ o $x_0 = b$ e anche se f non è derivabile.

Teorema 25: Teorema di Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

1. f continua in $[a, b]$
2. f derivabile in $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$

Dim : Se f non c'è nulla da dimostrare poiché $f'(c) = 0$.

Suppongo che f non sia costante, per il teorema di Weistrass ha max e min in $[a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$$

È necessario dimostrare che x_m o x_M siano all'interno dell'intervallo aperto a,b. Perchè per il teorema di Fermat f' si annulla in tali punti.

Suppongo per assurdo che x_m e x_M appartengono agli estremi a e b compresi. Di conseguenza ottengo che, per il terzo punto del teorema di Rolle, $f(a) = f(b)$, quindi, $f(x_m) = f(x_M)$ ciò implica che f è continua, ma all'inizio abbiamo considerato f come non continua.

Teorema 26: Teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dim : La dimostrazione viene da se applicando la formula del teorema, la prima parte indica il coefficiente angolare della retta che passa secante per i due estremi a,b che è uguale alla derivata prima della funzione nel punto c, che è il coefficiente angolare della tangente nel punto c

Teorema 27: Teorema di Cauchy

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Se $g'(x) \neq 0$ vale:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Osservazione : Cauchy $\xrightarrow[g(x)=x]{\quad}$ Lagrange $\xrightarrow[f(a)=f(b)]{\quad}$ Rolle

Teorema 28: Monotonie

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile:

1. f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
2. f è decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a, b[$
3. Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strettamente crescente
4. Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]a, b[\Rightarrow f$ è strettamente decrescente

Dim: faccio solo punto 1 (per gli altri il ragionamento è analogo)

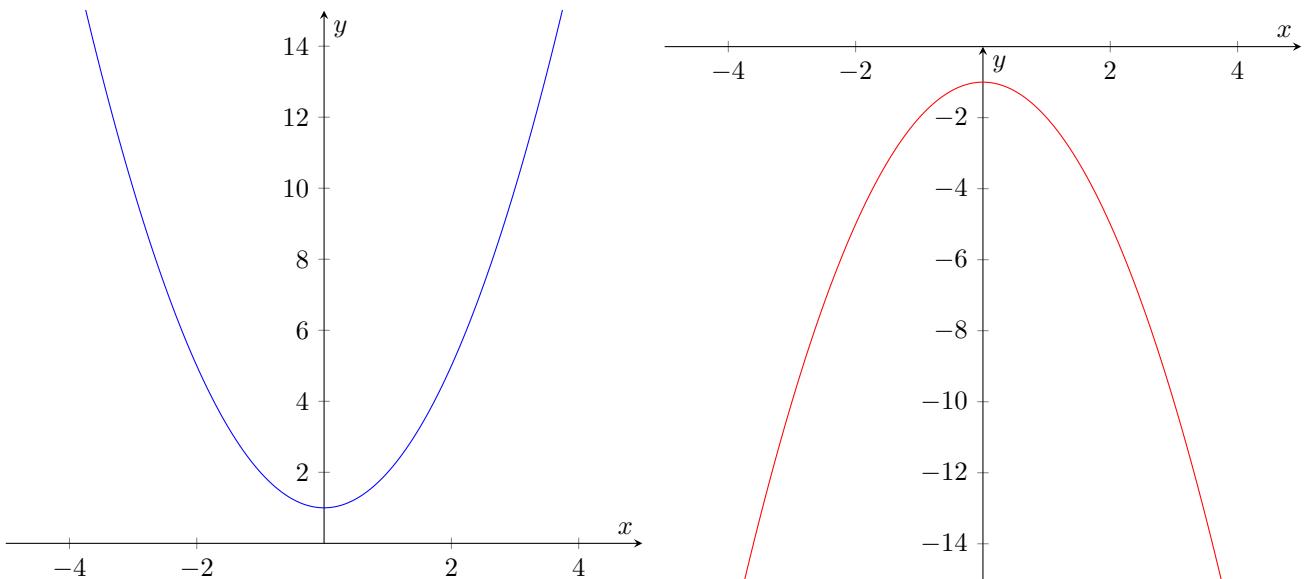
Se f è crescente e prendo due punti x, y con $y > x$, allora di conseguenza ho che $f(y) \geq f(x)$, quindi applicando Lagrange ho $\frac{f(y)-f(x)\geq 0}{y-x>0} = f'(c) \geq 0$ quindi se faccio il limite per $y \rightarrow x^+$ ottengo che $f'_+(x) \geq 0$ se ora applico il ragionamento per ogni x ottengo che $f'(x) \geq 0$. ✓

7 Studio di Funzione

Definizione 27: Funzioni concave e convesse

$f : \mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f è convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I$, il segmento che congiunge $x_1, f(x_1)$ e $x_2, f(x_2)$ non ha punto sotto il grafico di f . Se gli unici punti che appartengono al grafico di f sono gli estremi del segmento, allora f si dice strettamente convessa.

f è concava se $-f$ è convessa, f è strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa



Definizione 28: Asintoti

Sia f funzione reale di variabile reale:

- se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $+\infty$
- se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la retta $y = c$ è asintoto orizzontale a $-\infty$

Per $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di acc. per $\text{dom } f$

- se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure vale lo stesso per $x \rightarrow x_0^-$, allora la retta $x = x_0$ è asintoto verticale

Se esiste $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - m \cdot x = q$, allora la retta $y = m \cdot x + q$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow \pm\infty$

Esempio 33: Studio di funzione

$$f(x) = |\arctan(\log x)|$$

Dominio: $\log x \rightarrow x > 0$ quindi $]0, +\infty[$

Simmetrie e Periodicità: non è pari $f(-x) \neq f(x)$ e non è dispari $f(-x) \neq -f(x)$ per ogni $x \in \text{dom } f$, inoltre non è presente nessuna periodicità evidente

Limi agli estremi di $\text{dom } f$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |\arctan(\log x)| = |\arctan(-\infty)| = \left| -\frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |\arctan(\log x)| = |\arctan(+\infty)| = \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ a $\frac{\pi}{2}$ ma non abbiamo asintoto verticale

Segno: $|\arctan(\log x)| > 0$ verificata $\forall x \in \text{dom } f$

Continuità: f è composizione di funzioni continue, quindi è continua nel suo dominio.

Derivabilità: f è derivabile in $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ perché per $x = 1$ $f(x) = 0$

$$f^1(x) \text{ per } 0 < x < 1 = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f^1(x) \text{ per } 1 < x = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

Ora verifichiamo se è derivabile in $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{1+0} \cdot 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1+0} \cdot 1 = 1$$

Derivata destra e sinistra sono diverse quindi non è derivabile in $x = 1$, che è quindi punto angoloso

Segno derivata: $f^1(x) = -\frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = < 0 \cdot > 0 = < 0 \quad \forall x \in]0, 1[$ quindi in quell'intervallo f è strettamente decrescente

$$f^1(x) = \frac{1}{1+(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} = > 0 \cdot > 0 = > 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$$
 quindi in quell'intervallo f è strettamente crescente

$$\text{Derivata Seconda: } f^{11}(x) = -[(-1) \cdot (1+\log^2 x)^{-2} \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}] \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \forall x \in]0, 1[$$

$$f^{11}(x) = [(-1) \cdot (1+\log^2 x)^{-2} \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}] \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{-1}{x^2} \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

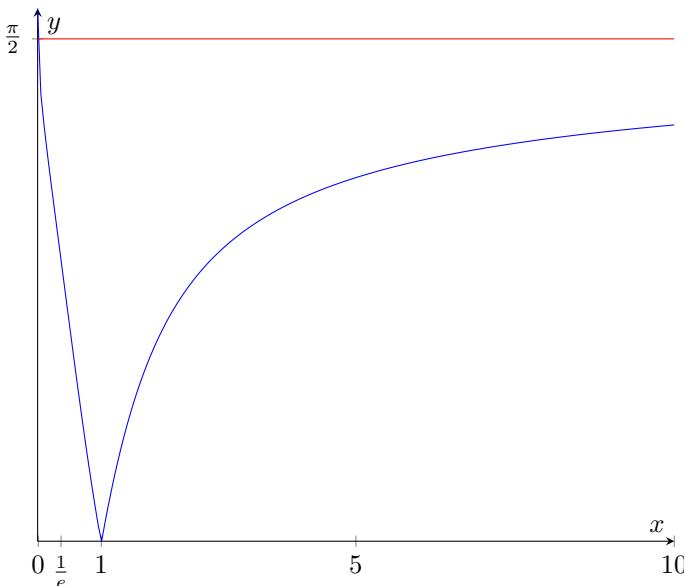
$$= \frac{-1}{(1+\log^2 x)^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot [2\log x + 1 + \log^2 x] = < 0 \cdot > 0 \cdot \geq 0 = < 0 \quad (\log x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \log x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \in]0, 1[$$

la deriva seconda in quell'intervallo è però ≥ 0

Quindi la derivata seconda di f si annulla per $x = \frac{1}{e}$ ed è maggiore di zero per ogni $x \in]0, 1[\setminus \{1/e\}$ quindi f è strettamente convessa in $]0, 1[\setminus \{\frac{1}{e}\}$, però $x = \frac{1}{e}$ non è punto di flesso

Invece nell'intervallo $]1, +\infty[$ $f^{11}(x) < 0$ è quindi strettamente concava nell'intervallo

Grafico:



Massimo e minimo: f non ha max locale nel suo dominio, ma ha un min locale e assoluto in $x = 1$. $x = 0$ è punto di max assoluto per l'estensione per continuità di f .

Definizione 29: Formula di Taylor

Suppongo:

$$f^1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f^1(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f^1(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{polinomio di grado 1}} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\text{ERRORE}} \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se f è derivabile $\Rightarrow f = \text{polinomio di grado 1} + \text{errore}$

Esempio: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} e^x &= e^0 + e^0 \cdot (x - 0) + o(x - 0) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\ &= e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Definizione 30: Polinomio di Taylor

Prendo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, x_0 punto interno ad I , f derivabile n volte in x_0 .
Chiamo polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 il polinomio:

$$P_{x_0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$f^{(0)} = f$$

Teorema 29: formula di Taylor con resto nella forma di Peano

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, x_0 punto interno ad I , f derivabili n volte in x_0 , allora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Osservazione: se $x_0 = 0$, si chiama polinomio e formula di McLaurin.

7.1 Sviluppi di McLaurin

$f(x)$	$P_0^n(x)$	$\sum_{k=0}^{n \rightarrow +\infty}$
e^x per $x \rightarrow 0$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\sum \frac{x^k}{k!} + o(x^k)$
$\log(1+x)$ per $x \rightarrow 0$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^k)$
$(1+x)^\alpha$ per $x \rightarrow 0$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \dots$	$\sum \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^k)$
$\cos x$ per $x \rightarrow 0$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$
$\cosh x$ per $x \rightarrow 0$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	
$\sin x$ per $x \rightarrow 0$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$
$\sinh x$ per $x \rightarrow 0$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	
$\arctan x$ per $x \rightarrow 0$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$	$\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$
$\tan x$ per $x \rightarrow 0$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$	

8 Serie Numeriche

Definizione 31

Data una successione a_n di numeri reali si dice serie a termine generale a_n la successione $\{S_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ definita da la somma di tutti i termini della successione:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \forall n$$

Dove S_n si dice somma parziale della serie.

Definizione 32: Carattere della serie

La serie di termine generale a_n

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Si dice:

- Convergente: se $\lim S_n = s \in \mathbb{R}$ per $n \rightarrow +\infty$, con s che si dice somma della serie e si scrive

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s$$

- Divergente: a $\pm\infty$ se $\lim S_n = \pm\infty$ per $n \rightarrow +\infty$

- Indeterminata: se $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ha limite per $n \rightarrow +\infty$

Osservazione: Studiare il carattere di una serie, significa determinare se è convergente/divergente/indeterminata.

Esempio 34: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^k \quad q = \frac{1}{2} \\ q \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^n q^k &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \textcircled{*} \\ q = 1 \quad \Rightarrow \quad = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots &= n + 1 \\ 0 < q < 1 \quad \Rightarrow \quad = \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Quindi a_n è convergente ed ha come somma parziale 1.

Dim: $\textcircled{*}$ La dimostrazione si fa con il principio di induzione

Caso base $n = 0$

$$S_0 = \sum_{k=0}^0 x^k = 1$$

Quindi, la formula $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1$ è confermata per il caso base ✓

Ora dimostriamo il passo induttivo. Suppongo la tesi sia vera per n , quindi $S_n = \sum x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

e dimostriamo che ciò implica che la tesi è vera per $n + 1$:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} = \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x) \cdot x^{n+1}}{1 - x} = \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato anche il passo induttivo.

Definizione 33: Serie Geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad r \in \mathbb{R}$$

Serie geometrica di ragione r che converge per $|r| < 1$ a $\frac{1}{1-r}$
 diverge a $+\infty$ per $r \geq 1$
 in determinata per $r \leq -1$

Definizione 34: Algebra delle serie

Date le serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$ se convergono entrambe o divergono entrambe a $\pm\infty$, allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Inoltre se $c \in \mathbb{R}$, vale

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Proposizione: Se $\sum a_k$ converge, allora:

1. il suo resto n -esimo (sommatoria da $k = n$ a $+\infty$) è infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$
2. il suo termine generale a_n è infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$

Dim: Osservo

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S$. Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k = S - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

$$a_n = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1} \quad n \rightarrow +\infty \quad S - S = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Quindi a_n è infinitesimo ✓

Teorema 30: Criterio di convergenza

$a_n \not\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum a_n$ non può convergere.

Osservazione: non vale però l'opposto, ossia:

$$a_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$

Teorema 31: Criterio di Cauchy

La serie a_k , da $k = 0$ a $+\infty$, converge se e solo se S_n p successione di Cauchy, ossia se e solo se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tale che $|S_n - S_m| < \epsilon \quad \forall m, n > N$

Esempio 35: Serie Armonica

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

Svolgimento: poichè non è di Cauchy diverge a $+\infty$

Definizione 35: Convergenza assoluta

Si dice che a_k converge assolutamente se $\sum |a_k|$ converge

Osservazione: Convergenza Assoluta \Rightarrow Convergenza Semplice

Esempio 36

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1^k}{2^k} \quad a_k = \frac{-1^k}{2^k}$$

Svolgimento:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-1^k}{2^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_k \text{ è infinitesimo}$$

Quindi a_k può convergere. Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{-1^k}{2^k} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

Poichè $|a_k|$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ allora è convergente e quindi anche a_k lo è.

Osservazione: non vale il contrario, ossia se si ha la convergenza semplice, non si ha sempre anche quella assoluta.

Definizione 36: Serie a termini positivi

Una serie a termini $a_n \geq 0 \quad \forall n$ o converge o diverge a $+\infty$

Dim: Basta osservare che

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

È successione monotona crescente e quindi esiste il limite per $n \rightarrow +\infty$ di S_n

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

Teorema 32: Criterio del Confronto

Date $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tali che $0 \leq a_k \leq b_k$ definitivamente per $k \rightarrow +\infty$

Allora:

1. Se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge
2. Se $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge

Osservazione: Si confrontano le serie "difficili" con serie più "facili" di cui si riesce a determinare la convergenza o meno.

Esempio 37: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$$

Svolgimento:

$\frac{1}{2k-1} > 0 \quad \forall k \geq 1$ (sarebbe per ogni $k > \frac{1}{2}$ ma la serie parte da $k = 1$)

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k-1} = 0 \Rightarrow$ il termine generale è infinitesimo

$\frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} > 0 \quad \forall k \geq 1$

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}}_{+\infty} = +\infty$$

Quindi per il secondo punto del criterio del confronto se $\frac{1}{2k}$ diverge allora anche $\frac{1}{2k-1}$ diverge.

Definizione 37: Serie Armonica Generalizzata

Data la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie è a termini positivi e come tale può essere divergente o convergente.

In particolare:

- converge se $\alpha > 1$
- diverge positivamente se $\alpha \leq 1$

Esempio 38: Studiare il carattere

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^n(n^2 + \sin(e^n))}{3^n}$$

Svolgimento: a_n è infinitesima ed è anche $\geq 0 \quad \forall n \geq 1$,

Vorrei confrontare a_n con $(\frac{2}{3})^n$ di cui so già che è convergente, però $0 \leq a_n \not\leq (\frac{2}{3})^n$

Se avessi $a_n = (\frac{2}{3})^n \cdot b_n$ con b_n tale che $(\frac{2}{3})^n b_n \leq c^n$ con $c \in]0, 1[$

Mi serve quindi un $b_n = \beta^n$ tale che $\lim \frac{\beta^n}{n^2 + \sin(e^n)} = +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$ e $(\frac{2}{3} \cdot \beta)^n \leq c^n$, quindi $\frac{2}{3}\beta \leq c$ quindi visto che $c \in]0, 1[$ allora $\beta \in]0, \frac{3}{2}[$, ma questo intervallo di β non renderebbe vero il limite, per far ciò devo prendere l'intervallo $]1, \frac{3}{2}[$

Quindi:

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot (n^2 + \sin(e^n)) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \beta^n = c^n \quad \forall \beta \in]1, \frac{3}{2}[$$

Di conseguenza ho che $a_n \leq c^n$ con $c \in]0, 1[$, quindi $\sum c^n$ è converge, di conseguenza lo è anche a_n

Teorema 33: Confronto asintotico

Siano $\{a_k\}, \{b_k\}$ successioni ≥ 0 def. per $k \rightarrow +\infty$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora:

1. Se $l \in]0, +\infty[$ allora a_k e b_k hanno lo stesso carattere
2. Se $l = 0$ e b_k converge anche a_k converge
3. Se $l = +\infty$ e b_k diverge anche a_k diverge

Teorema 34: Criterio del Rapporto

Sia $\{a_k\}$ una successione a termini positivi (oppure def ≥ 0 per $k \rightarrow \infty$).

Valgono le seguenti affermazioni:

1. Se esiste $0 \leq r < 1$ tale che:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \text{def per } k \rightarrow +\infty$$

Oppure

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = r \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$
Allora a_k converge
2. Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ def per $k \rightarrow +\infty$
Oppure

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$
Allora a_k diverge a $+\infty$
3. Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ o il suo limite è uguale a 1 allora non posso dire nulla

Dim: prendiamo il punto 1 nel caso $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$ e $r < 1$

$$\Rightarrow a_{k+1} \leq r \cdot a_k \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_{k_0+1} \leq r \cdot a_{k_0}$$

$$\frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \leq r \Rightarrow a_{k_0+2} \leq r \cdot a_{k_0+1} \leq r \cdot r \cdot a_{k_0} = r^2 \cdot a_{k_0}$$

$$\text{In generale} \quad a_{k_0+j} \leq r \cdot a_{k_0+(j-1)} \leq r \cdot r^{j-1} \cdot a_{k_0} = r^j \cdot a_{k_0}$$

$$\text{Si dimostra per induzione, ossia} \quad a_{k_0+j} \leq r^j \cdot a_{k_0} \quad \forall j \geq 0$$

$$k = k_0 + j \quad a_k \leq r^{k-k_0} \cdot a_{k_0} \quad \forall k \geq k_0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^{k-k_0} \cdot a_{k_0}$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^{k-k_0} = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + a_{k_0} \underbrace{\sum_{j=0}^{+\infty} r^j}_{\text{converge}} < +\infty$$

Quindi si ottiene che la sommatoria è convergente da k_0 a $+\infty$ e di conseguenza si può applicare lo stesso ragionamento, per induzione, a tutti i termini della serie da $k = 0$.

Osservazione: Per quanto riguarda la divergenza si può applicare lo stesso ragionamento, ma con $r \geq 1$ e quindi verrà sempre $\sum r^j$ che è divergente.

Oppure si può notare che $a_{k_0+1} \geq a_{k_0} > 0$ che generalizzato vuol dire $a_{k_0+j} \geq a_{k_0} > 0 \quad \forall j \geq 0$ e applicando il criterio di convergenza abbiamo che $a_{k_0+1} \not\rightarrow 0$ per $j \rightarrow +\infty$ e quindi la serie diverge.

Osservazione: se $\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ non posso dire niente. se prendo ad esempio $a_n = \frac{1}{n^2}$ il rapporto tende a 1 e la serie è convergente, se prendo $a_n = \frac{1}{n}$ il rapporto tende sempre a 1, ma la serie è divergente.

Esempio 39: Serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge?

Svolgimento:

Studio la convergenza assoluta di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Applico il criterio del rapporto $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$

Quindi, per il primo punto del criterio del rapporto,
la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) $\forall x \in \mathbb{R}$

Definizione 38: Serie di Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Generalizzata (non è sempre valida):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0)$$

Teorema 35: Criterio della radice

Sia $\{a_k\}$ successione con $a_k \geq 0 \quad \forall k$:

1. Se esiste $r < 1$ tale che $\lim \sqrt[k]{a_k} = r < 1$ per $k \rightarrow +\infty$, allora a_k converge
2. Se $\lim \sqrt[k]{a_k} > 1$ per $k \rightarrow +\infty$, allora a_k diverge
3. Altrimenti se $r = 1$ allora non si può dir nulla

Dim: consideriamo il caso 1

$$\sqrt[k]{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow a_k \leq r^k$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{+\infty} r^k}_{\text{convergente}} < +\infty$$

Quindi stesso ragionamento della dimostrazione del criterio del rapporto:

abbiamo dimostrato per la serie parziale da $k = k_0$ a $+\infty$ adesso vale lo stesso per tutta la serie

Osservazione: La dimostrazione del punto 2 e 3 sono analoghe a quella del punto 1, cambiando l'intervallo in cui esiste r .

Definizione 39: Serie Logaritmica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad x \in \mathbb{R}$$

Svolgimento: studio la convergenza assoluta tramite il criterio del rapporto

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x|^n}$$

Ed ottengo $|x| \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow |x|$ per $n \rightarrow +\infty$, è quindi convergente assolutamente se $|x| < 1$, se $|x| = 1$ non posso dire nulla, se $|x| > 1$ allora non è convergente assolutamente.

Provo a vedere com'è il carattere per $x > 1$ e ottengo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty \quad \forall x > 1$$

Quindi per il criterio di convergenza a_n con $|x| > 1$ non è convergente.

Se $x = -1$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} = -\infty$$

diverge quindi a $-\infty$

Per $x = 1$ ottengo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Che per determinarne il carattere ho bisogno di un nuovo criterio.

Teorema 36: Criterio di Leibniz

Sia $\{a_k\}$ successione tale che

1. $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
2. $\{a_k\}$ decrescente: $a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
3. $a_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$

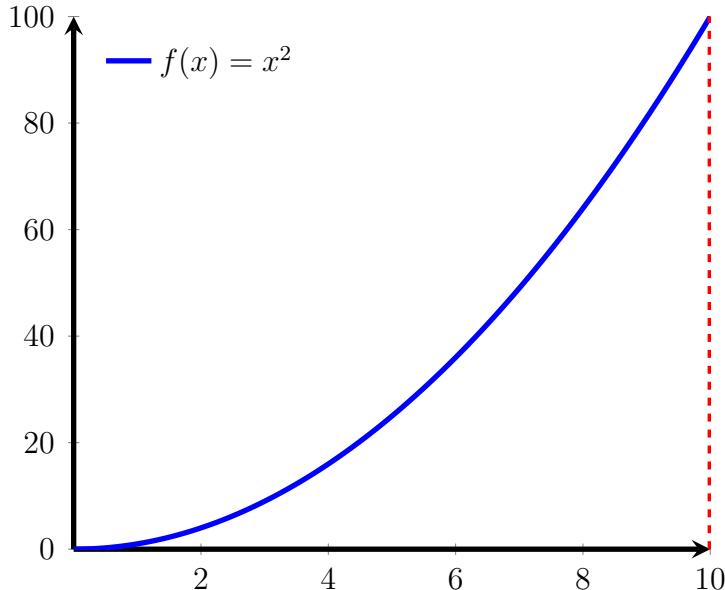
Allora

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

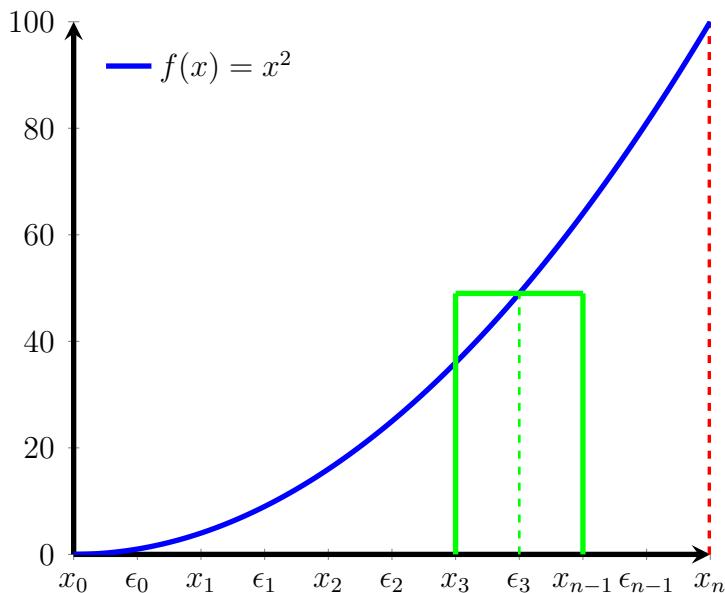
converge

Osservazione: il criterio di Leibniz vale solo per la convergenza semplice non assoluta.

9 Calcolo Integrale



Idea: suddivido $[0, 10]$ in tanti intervalli $[x_i, x_{i+1}]$ per $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ quindi in n intervalli con $x_0 = 0$ e $x_n = 10$. Abbiamo quindi: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 10$



Per ogni $i = 0, 1, \dots, n - 1$ prendo $\epsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$ e considero il rettangolo di base $[x_i, x_{i+1}]$ e altezza $f(\epsilon_i) = \epsilon_i^2$

Adesso generalizziamo questo ragionamento, unendo tutti i rettangoli, attraverso la sommatoria:

$$A_{\text{tot}} = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(\epsilon_i)$$

Per rappresentare questa sommatoria si usa l'integrale definito:

$$A_{\text{tot}} = \int_0^{10} f(x) \cdot dx = \int_0^{10} x^2 \cdot dx$$

Definizione 40: Integrale di Cauchy-Riemann

Si dice partizione o suddivisione di $[a, b]$ un insieme finito di punti $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ tale che

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Definizione 41: Partizione Puntata

Si dice partizione puntata di $[a, b]$ una coppia (\mathcal{P}, ϵ) dove $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ è partizione di $[a, b]$ e $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ con $\epsilon_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 1, \dots, n$

Esempio: $I = [0, 1] \quad \mathcal{P}_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\} \quad \mathcal{P}_4 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$
 $\epsilon = \{\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n}\}$ Quindi $(\mathcal{P}_n, \epsilon)$ è una partizione puntata di $[0, 1]$

Definizione 42: Integrale definito

Una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile alla Cauchy-Riemann in $[a, b]$ se esiste $I \in \mathbb{R}$ tale che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $\forall (\mathcal{P}, \epsilon)$ partizione puntata di $[a, b]$ con $|\mathcal{P}| < \delta$ si ha

$$|S(f, \mathcal{P}, \epsilon) - I| < \delta$$

Tale valore finito I viene detto integrale definito di f in $[a, b]$ e si indica:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

Osservazione: Per $S(f, \mathcal{P}, \epsilon)$ si intende la somma puntata di f rispetto alla partizione (\mathcal{P}, ϵ) di $[a, b]$ ossia:

$$S(f, \mathcal{P}, \epsilon) = \sum_{k=1}^n f(\epsilon_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Osservazione:

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$

Osservazione: Se f è non negativa e integrabile, allora il suo integrale è l'area del sottografico definito da

$$SG(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$$

Teorema 37

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e limitata, allora f è integrabile.

Inoltre f è continua a tratti se è continua tranne in un numero finito di punti, in cui ha limite destro e sinistro finiti, quindi discontinuità di prima specie.

Le funzioni continue a tratti sono comunque integrabili, poiché basta sommare gli integrali nei vari tratti.

Teorema 38: Proprietà dell'integrale

Sia $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili. Allora:

1. Linearità dell'integrale:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) \cdot dx + \beta \int_a^b g(x) \cdot dx$$

2. Adattabilità rispetto all'insieme di integrazione: se $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

3. Monotonia dell'integrale: se $f \leq g$ in $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx$$

4. Se f è integrabile in $[a, b]$, allora anche $|f|$ lo è, e si ha:

$$|\int_a^b f(x) \cdot dx| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

Teorema 39: Media integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e continua per Weistrass esiste $m = \inf f$, $M = \sup f$ allora:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M$$

Se f è continua in $[a, b]$ allora esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

Dim: sapendo che $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_a^b m \cdot dx \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b M \cdot dx \\ &\Rightarrow \int_a^b m \cdot dx = m \cdot \int_a^b 1 \cdot dx = m \cdot (b - a) \\ &\Rightarrow m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M \cdot (b - a) \\ &\Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx \leq M \end{aligned}$$

Se f è continua $f([a, b]) = [m, M]$ ed esiste $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx$$

Osservazione: se f non è continua, potrebbe non esistere $c \in [a, b]$ poiché il teorema di Weistrass non assicura massimo e minimo per funzioni non continue.

Definizione 43: Primitiva e famiglia di primitive

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice primitiva di f o funzione primitiva di f in A se F è derivabile in A e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

La famiglia di primitive è invece l'unione di tutte le $F(x)$ la cui derivata prima è uguale $f(x)$ con l'aggiunta di una costante c

Esempio: se f è derivabile, allora f è una primitiva di f'

$\int f(x) \cdot dx = F(x) + c$ quindi $F(x) + c$ è la famiglia di primitive di $f(x)$

Teorema 40: Teorema fondamentale del calcolo 1° parte

Se $f \in C[a, b]$ e definisco

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt \quad \forall x \in [a, b]$$

allora F è derivabile (e continua) in $[a, b]$ e si ha $F'(x) = f(x)$ quindi F è primitiva di f

Teorema 41: 2° parte calcolo fondamentale

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e sia $F(x)$ una sua qualsiasi primitiva in $[a, b]$. Allora:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Dim: Dalla prima parte del teorema sappiamo che la funzione integrale nel punto a è una primitiva della funzione stessa e quindi qualsiasi altra primitiva nell'intervallo $[a, b]$ è diversa dalle altre per un valore finito $c \in \mathbb{R}$. Quindi:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

Otteniamo quindi che:

$$F(b) - F(a) = \left(\int_a^b f(t) dt + c \right) - \left(\int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt$$

La variabile di integrazione è indifferente quindi possiamo sostituire t con x ed abbiamo verificato la nostra tesi.

Definizione 44: Integrale indefinito

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ l'integrale indefinito di f in A è l'insieme di tutte le sue primitive in A e si denota

$$\int f(x) dx = \{F : F \text{ è primitiva di } f \text{ in } A\}$$

Se A è un intervallo, allora

$$\int f(x) dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

Osservazione: l'integrale indefinito è lineare, ossia:

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

9.1 Metodi di integrazione

Definizione 45: Integrazione per parti

Siano f, g funzioni derivabili in $I = [a, b]$, allora:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Quindi, integrando:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$$

Definizione 46: Integrazione per sostituzione

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 e tale che $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, F primitiva di f in $[a, b]$. Allora:

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

9.2 Integrali indefiniti noti

$\int f(x) dx$	$F(x)$
$\int e^x dx$	$e^x + c$
$\int x^\alpha dx$	$\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + c$
$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + c$
$\int \alpha^x dx$	$\frac{1}{\ln \alpha} \cdot \alpha^x + c$
$\int \sin x dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x dx$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\tan x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\arctan x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\cot x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + c$

Esempio 40

$$\int (e^{3x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)}) dx$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int e^{3x} - \int \frac{1}{x^3} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \int \underbrace{3 \cdot e^{3x}}_{f'(x)} dx + \frac{1}{2x^2} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \\ &\Rightarrow \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \int \frac{1}{x \cdot (1 + (\ln x)^2)} \\ \text{Quindi: } &\int f'(x) \cdot f(x) \\ &\Rightarrow \frac{e^{3x}}{3} + \frac{1}{2x^2} + \arctan(\ln x) + c \end{aligned}$$

Definizione 47: Integrale di funzione razionale

Consideriamo l'integrale:

$$\int \frac{\mathcal{P}(x)}{\mathcal{Q}(x)} dx \quad \text{con } \mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q} \text{ polinomi}$$

L'idea è riscrivere l'integrale come la somma di due integrali di cui riusciamo a calcolare la primitiva e abbiamo tre casi:

1. $\Delta > 0$ e $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} dx = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{x - x_2}$$

2. $\Delta = 0$ e $(x - x_1)^2 = x^2 + cx + d$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} dx = \int \frac{A}{x - x_1} + \int \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

3. $\Delta < 0$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} dx = \frac{a}{2} \int \underbrace{\frac{2x + c}{x^2 + cx + d}}_{f(x)} + b \int \frac{1}{x^2 + cx + d}$$

Esempio 41: Caso 1

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Svolgimento: visto che $\Delta > 0$ allora posso applicare il primo caso:

$$\begin{aligned} x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 &= (x - 2) \cdot (x - 3) \\ \Rightarrow \quad \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \\ \left\{ \begin{array}{l} Ax + Bx = 3x \\ -3A - 2B = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che: $A = -8 \quad B = 11$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} dx &\Rightarrow \int \frac{-8}{x - 2} dx + \int \frac{11}{x - 3} dx \\ \Rightarrow \quad -8 \ln|x - 2| + 11 \ln|x - 3| + c \end{aligned}$$

Esempio 42: Caso 2

$$\int \frac{x + 2}{(x - 2)^2}$$

Svolgimento: visto che $\Delta = 0$ applichiamo il secondo caso:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} \\ \left\{ \begin{array}{l} Ax = x \\ -2A + B = 2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema otteniamo che: $A = 1 \quad B = 4$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 2}{(x - 2)^2} dx &\Rightarrow \int \frac{1}{x - 2} dx + \int \frac{4}{(x - 2)^2} dx \\ \Rightarrow \quad \ln|x - 2| - \frac{4}{x - 2} + c \end{aligned}$$

Esempio 43: Caso 3

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 + 4x + 5}$$

Svolgimento: visto che $\Delta < 0$ applichiamo il terzo caso:

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 3 \int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \\
 &\Rightarrow \frac{3}{2} \int \underbrace{\frac{2x+4-4}{x^2+4x+5}}_{f(x)} dx + 2 \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx \\
 &\Rightarrow \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4x + 5| - 4 \cdot \frac{3}{2} \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx + 2 \int \frac{1}{1+(x+2)^2} dx \\
 &\Rightarrow \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) - 4 \arctan(x+2) + c
 \end{aligned}$$

9.3 Integrale improprio

Definizione 48: Integrale generalizzato o improprio

Può capitare di avere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ con f o I o entrambi illimitati, ma vogliamo calcolare comunque un'area (o integrale).

Sia $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[c, d] \quad \forall c \in (a, b]$. Se esiste:

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) \cdot dx$$

Tale limite si chiama integrale improprio o generalizzato di f in $[a, b]$.

Se il limite esiste finito, si dice che f è integrabile in senso generalizzato e l'integrale si dice convergente, altrimenti si dice che l'integrale è divergente.

Osservazione: se $|f|$ è integrabile in senso improprio si dice che f è assolutamente integrabile in senso improprio e:

$$|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Esempio 44

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Svolgimento: ci accorgiamo che 0 non fa parte del dominio di f quindi dobbiamo fare:

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} 2 - \frac{\sqrt{x}}{2} = 2$$

Teorema 42: Teorema del Confronto

Siano $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \bar{\mathbb{R}}$ con f, g integrabili in $[c, b]$ $\forall c \in]a, b[$ tale che:

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b]$$

Allora:

- $\int g(x) dx < +\infty \Rightarrow \int f(x) dx < +\infty$
- $\int f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int g(x) dx = +\infty$

Teorema 43: Criterio asintotico del Confronto

$f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[c, b]$ $\forall c \in]a, b[$ tale che:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = l$$

1. se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora f è ass. integrabile in $(a, b]$ se e solo se lo è anche g nello stesso intervallo
2. se $l = 0$ allora se g è ass. integrabile in $(a, b]$, allora lo è anche f
3. se $l = +\infty$ allora se l'integrale da a a b di $|g(x)| = +\infty$ allora anche lo stesso integrale per $|f(X)| = +\infty$

Osservazione: è importante avere funzioni di cui conosciamo l'integrabilità.

Teorema 44: Criterio integrale per le serie

$f : [k_0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[,$ decrescente, $k_0 \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} f(x) < +\infty \Leftrightarrow \int_{k_0}^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

Esempio casi importanti:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Se $\alpha \geq 1$ allora $\Rightarrow +\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Se $\alpha \leq 1$ allora $\Rightarrow +\infty$

Osservazione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$