

Analisi Matematica

Marco Pittarello

Contents

1	Principio di Induzione	2
2	Coefficienti Binomiali	3
2.1	Proprietà di $\binom{n}{k}$	4
3	Limiti di funzioni	4
3.1	O-piccoli	12
4	Successioni	16

1 Principio di Induzione

Definizione 1

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{P(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 1 \quad (1+x)^n \geq nx + 1}_{P(n)}$$

Teorema 1: 1° forma

Sia $P(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. $P(0)$ è vero (**caso base**)
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$ (**passo induttivo**)

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio 1

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n + 1}_{P(n)}$.

CASO BASE : $P(0) : 2^0 \geq 1$ vero

PASSO INDUTTIVO : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \rightarrow P(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n + 1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n + 2$

$$2^n \geq n + 1 \rightarrow 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n + 1)$$

$$2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$$

Dunque abbiamo dimostrato che $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale $P(n)$

Esempio 2

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : $P(0) : "0 = 0"$ è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che $P(n)$ è vera e dimostro che è vera anche $P(n+1)$

$$\text{ovvero} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

Teorema 2: 2° forma

Sia $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:

1. $P(0)$ è vera (caso base)
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ (passo induttivo)

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad P(m)$ è vera allora lo è anche $P(n)$ (ipotesi induttiva)

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $P(n)$ si usa la condizione che $P(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire 0 con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$.
Ovvero, se per un predicato $P(m)$ dimostriamo:

- il caso base per n_0
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 P(n)$ è vera

Esempio 3

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{P(n)}$

CASO BASE : $P(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall 1 \leq m < n \quad P(m)) \rightarrow P(n)$

Ovvero, assumendo che $P(m)$ vale $\forall 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche n si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se n è primo allora è chiaramente prodotto di primi

Se n non è primo allora è divisibile per un numero m_1 con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con m_1, m_2 diversi da n e da 1

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \quad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $P(m_1)$ e $P(m_2)$ sono vere.

2 Coefficienti Binomiali

Definizione 2

Definiamo $C_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di n elementi di classe k

Spesso $C_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale n su k

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \quad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

Teorema 3

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$. Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

Esempio 4: Triangolo di Tartaglia

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga n è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \tag{4}$$

Definizione 3: Binomio di Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ vale } \forall p, q \in \mathbb{R} \quad (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

3 Limiti di funzioni

Definizione 4: Definizione di intorno e limite

Si dice intorno sferico di r con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$; ϵ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $] -\infty, -M[$ con $M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$)

Dato $f: \text{dom} f \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione a $\text{dom} f$, $l \in \mathbb{R}$

Si dice che f ha limite l per $x \rightarrow x_0$ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \quad \exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$

OSSERVAZIONE:

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che f ha limite finito in x_0
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora f si dice divergente per $x \rightarrow x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che f è infinitesima in x_0

Teorema 4: Unicità del limite

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim: Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

P_1 la proposizione di separazione di \mathbb{R}

$\exists V_1$ intorno di l_1

$\exists V_2$ intorno di l_2

tale che $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists U_1$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_1 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists U_2$ intorno di x_0 tale che
 $x \in U_2 \cap \text{dom} f, x \neq x_0$
allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in U \setminus \{x_0\}, \bar{x} \in \text{dom} f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ **ASSURDO** poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

Esempio 5: Verificare

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \neq 2}_{0 < |x-2| < \delta}$ allora $\underbrace{|f(x) - 0| < \epsilon}_{|f(x)| < \epsilon}$

ossia

$$|2|x-2| \cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \textcircled{*}$$

Parto da $\textcircled{*}$

$$2|x-2| \underbrace{|\cos[\ln|x-2| + e^{\sin x}]|}_{\leq 1} \leq 2|x-2| < \epsilon$$

Voglio $\delta > 0$ tale che se $|x-2| < \delta$ e $x \neq 2$ allora $2|x-2| < \epsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{2}$

Prendo $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ e ho verificato che vale il limite.

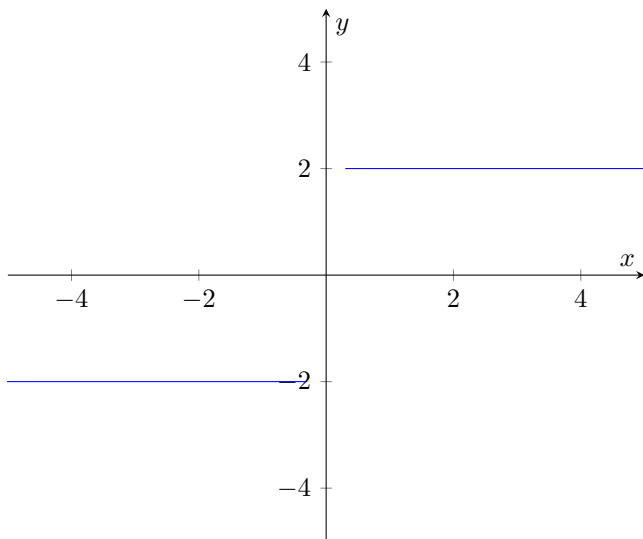
Esempio 6: Limite destro e sinistro

$\sin x =$

$$-1 \quad x < 0$$

$$0 \quad x = 0$$

$$1 \quad x > 0$$



Se $x \rightarrow 0^-$ $\text{sgn } x \rightarrow -1$

Se $x \rightarrow 0^+$ $\text{sgn } x \rightarrow 1$

Quindi $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$ perchè affinché esista, i limiti destro e sinistro devono essere uguali

Definizione 5: Punto di Accumulazione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice:

- punto di acc. destro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r, r + \epsilon[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r < a < r + \epsilon$)
- punto di acc. sinistro per A se $\forall \epsilon > 0 \quad A \cap]r - \epsilon, r[\neq \emptyset$ (cioè $\exists a \in A$ tale che $r - \epsilon < a < r$)

Esempio 7: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

Soluzione: devo mostrare $\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che se $0 < x < \underbrace{0 + \delta}_{\delta}$ allora $e^{1/x} > M$

$$e^{1/x} > M \Leftrightarrow \ln e^{1/x} > \ln M \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln M \Leftrightarrow x < \underbrace{\frac{1}{\ln M}}_{\delta}$$

Prendo $\delta = \frac{1}{\ln M}$

Definizione 6: Limiti e valore assoluto

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, x_0 di acc. per $\text{dom } f$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

Prop: Sia $x_0, l \in \bar{\mathbb{R}}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

Osservazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \not\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm l$$

Teorema 5: Permanenza del segno

Dato f reale di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, di acc. per $\text{dom} f$ e supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

Allora $\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$, allora

$$f(x) > 0$$

Dim: Considero il caso $l \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Poichè $l > 0 \Rightarrow \exists V$ intorno di l tale che:

$$V \subseteq]0, +\infty[$$

$\exists U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$ Poichè $V \subseteq]0, +\infty[$, ho

$$f(x) > 0$$

$\forall x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$

Oss: vale l'analogo con $l < 0$

Teorema 6: Teorema del Confronto

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, x_0 di acc. per $\text{dom} f \cap \text{dom} g$, tale che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

Se

$$l_f = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{e} \quad l_g = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

allora

$$l_f \leq l_g$$

Oss: se $f(x) < g(x)$ definitivamente per $\left\{ \begin{matrix} x \rightarrow x_0 \\ \exists l_f \text{ e } l_g \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow l_f < l_g$

Esempio 8

$$0 < e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 0$$

Teorema 7: Teorema dei due carabinieri

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. a X . Se

$$(*) \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \text{def. per } x \rightarrow x_0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

Dim: Suppongo per semplicità che $(*)$ valga $\forall x \in X$. Devo mostrare che $\forall V$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c. se $x \in (U \cap \underbrace{\text{dom} f}_X) \setminus \{x_0\}$, allora $h(x) \in V$ con V intorno di l

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists U_f$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_f \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \Rightarrow \exists U_g$ intorno di x_0 tale che se $x \in (U_g \cap X) \setminus \{x_0\}$ allora $g(x) \in V$

Prendo $U = U_f \cap U_g$ è intorno di x_0 se $x \in (U \cap X) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V, g(x) \in V$

Quindi $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \in V$ intervallo allora $h(x) \in V$

Esempio 9: Teorema due carabinieri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Svolgimento: Si sfrutta il fatto che:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad \text{def. per } x \rightarrow 0$$

Esempio 10: Dimostrare il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{1/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Definizione 7: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Teorema 8: Teorema della funzione composta o del cambio di variabile

Siano f, g funzioni reali di variabile reale, tale che g o f sia definita in un insieme X che abbia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ come punto di acc. supp.

1. $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$
3. $f(x) \neq y_0$ def. per $x \rightarrow x_0$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l \quad \text{con } y = f(x)$$

Esempio 11

$$\lim_{x \rightarrow 0} g\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) \text{ non esiste}$$

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Teorema 9: Operazioni sui limiti

$X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 punto di acc. per X , $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Supp.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g, \quad l_f, l_g \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (c f(x)) = c l_f$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_f \pm l_g$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_f \cdot l_g$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g} \quad \text{se } l_g \neq 0$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_f} \quad \text{se } l_f \neq 0$

Oss: il teorema rimane vero se faccio limite destro o sinistro

Esempio 12: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = (l_f)^{l_g}$$

con $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_f > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\ln((f(x))^{g(x)})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{t \rightarrow l_g \ln l_f} e^t = \\ &= e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln((l_f)^{l_g})} = \\ &= l_f^{l_g} \end{aligned}$$

Proposizione: Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X , f infinitesima in x_0 (cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$) e g sia limitata def. per $x \rightarrow x_0$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

("prodotto di f . infinitesima per g . limitata è infinitesimo")

Esempio 13

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{1}{2^x + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) + \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2^x + 1) \sin(\frac{1}{2^x + 1}) - \sin(\frac{1}{2^x + 1})] = \\ y = \frac{1}{2^x + 1} \quad y \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty & \\ = \lim_{y \rightarrow 0} [\frac{1}{y} \sin y - \sin y] = \lim_{y \rightarrow 0} [\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_1 - \sin y] &= \\ = 1 - 0 = 1 & \end{aligned}$$

Esempio 14: Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Svolgimento: Pongo $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}} = \\ \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \frac{\cos y}{\sin y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}}_1 \cdot \cos y = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Esempio 15: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \cos \frac{1}{x^2}$$

Soluzione: il limite vale 0 poichè $\sqrt{|x|}$ è infinitesima in $x = 0$ e $\cos \frac{1}{x^2}$ è limitata def. per $x \rightarrow 0$

Esempio 16: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

Soluzione: $x + \sin x \geq \underbrace{x - 1}_{+\infty} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi anche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$$

Definizione 8: Forme Indeterminate

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0$ punto di acc. per X

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$$

Non posso dire nulla se so che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \quad \text{F.I. } 0 \cdot \infty$$

Oppure

$$\text{F.I.} \quad +\infty - \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^0 \quad +\infty^0 \quad 1^{+\infty}$$

Esempio 17: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Soluzione:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y}_e^\alpha = e^\alpha \quad \checkmark$$

Esempio 18: Limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\underbrace{(1+x)^{1/x}}_e) = \ln e = 1 \quad \checkmark$$

Esempio 19: Verificare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Soluzione :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= & y = e^x - 1 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = & \text{uso il limite notevole verificato prima (esempio 18)} \\ &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Definizione 9: Limite notevole

Dall'esempio precedente (es. 19) si ricava:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

Esempio 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + |\sin x|}{x} \right)^x \quad \text{F.I. } 0^\infty$$

Svolgimento : Uso il teorema del confronto

Visto che $0 \leq |\sin x| \leq 1$ allora $1 \leq 1 + \sin x \leq 2$, quindi $\frac{1}{x} \leq \frac{1 + \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$.
 I due estremi tendono a 0 per $x \rightarrow +\infty$ quindi anche $\frac{1 + |\sin x|}{x}$ tende a 0.

Esempio 21

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 3 \sin e^x)^{\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}}$$

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(\cos e^{-x^2} + \frac{1}{\sin e^x}) \ln(1 + 3 \sin e^x)}$$

Ricordare il limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ per $y \rightarrow 0$ Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\cos e^{-x^2} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x) + \frac{3}{3 \sin e^x} \cdot \ln(1 + 3 \sin e^x)]$$

Adesso pongo $y = 3 \sin e^x$ che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ e ottengo:

$$\cos e^{-x^2} = 1 \quad \ln(1 + 3 \sin e^x) = 0 \quad 3 \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_1 = 3$$

Il risultato è quindi $1 \cdot 0 + 3 = 3$

3.1 O-piccoli

Definizione 10: O-Piccolo

Date f, g funzioni reali di variabile reale, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per $\text{dom} f \cap \text{dom} g$, $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$
Si dice che f è "o-piccolo" di g per $x \rightarrow x_0$ se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E si scrive: $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$ $f(x) \in o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Leftrightarrow f = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Esempio 22: o-piccolo

$1 - \cos x = o(x)$ per $x \rightarrow 0$?

Svolgimento :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad x = 0 \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Quindi $0 \cdot \frac{1}{2} = 0$ ✓ e $1 - \cos x$ è o-piccolo di x per $x \rightarrow 0$

Osservazione :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ f_2(x) &= o[g(x)] \text{ per } x \rightarrow x_0 \end{aligned} \quad \nRightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = lg(x) + o[g(x)] \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

cioè

$$f(x) - lg(x) = o[g(x)] \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Dim :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - lg(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_l - \underbrace{\frac{lg(x)}{g(x)}}_l \right) = l - l = 0 \quad \checkmark$$

Teorema 10: Principio di sostituzione degli infinitesimi

$X \subseteq \mathbb{R}$ $f, g, f_1, g_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ punto di acc. per X .

Se $g(x) \neq 0$ def. per $x \rightarrow x_0$ e:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \\ g(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) && \text{per } x \rightarrow x_0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Osservazione :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esempio 23: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x} \quad \text{F.I. } \frac{0}{0}$$

Svolgimento :

Conoscendo gli sviluppi in serie

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\text{NUM} = \sin x - \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + o(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} -\frac{x^3}{6} &= o\left(\frac{x^2}{2}\right) && o(x^3) = o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{DEN} = x \ln(1+x) - 2 \sin^2 x + 1 - \cos x \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &= x(x + o(x)) - 2(x + o(x))(x + o(x)) + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= x^2 + x o(x) - 2x^2 - 4x o(x) - 2(o(x))^2 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{x^2}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{NUM}}{\text{DEN}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{1}{2}x^2} = -1$$

Sviluppi asintotici di alcune funzioni

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

Esempio 24: Sviluppi asintotici

$$\sinh(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

Svolgimento: Voglio sfruttare

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

Quindi scrivo

$$\sinh e^x = e^x + \frac{(e^x)^3}{3!} + \frac{(e^x)^5}{5!} + o((e^x)^5)$$

Sapendo che y deve tendere a 0, abbiamo e^x che tende a 0 per $x \rightarrow -\infty$ quindi la sostituzione è valida

Definizione 11: Algebra degli o-piccoli

- $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) - o(g(x)) = o(g(x))$
- $o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$
- $g(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x)^2)$

Confrontare esponenziali, logaritmi e potenze

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow x^n = o(e^x) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \ln x = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Quindi:

$$e^x \gg x^n \gg \ln x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Esempio 25: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^x + \sin x}{3e^x + x^{15} \ln x} \quad \text{F.I. } \frac{\infty}{\infty}$$

Svolgimento:

NUM: $x^5 = o(e^x) \quad \frac{x \sin x}{e^x} = \frac{x}{e^x} \cdot \sin x = 0 \cdot f \text{ limitata} = 0$
 $= e^x + o(e^x)$

DEN: $\frac{x^{15} \ln x}{e^x} = \frac{x^{16}}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$ quindi è $o(e^x)$
 $= 3e^x + o(3e^x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + o(e^x)}{3e^x + o(3e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \frac{1}{3}$$

Definizione 12: Nomenclatura

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ di acc. per X

Se $\lim |f(x)| = +\infty, \lim |g(x)| = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow \begin{array}{ll} +\infty & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine superiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ sono } \underline{\text{infiniti dello stesso}} \\ & \underline{\text{ordine}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ 0 & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine inferiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \nexists & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ non sono } \underline{\text{confrontabili}} \end{array}$$

Se $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \Rightarrow \begin{array}{ll} +\infty & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine inferiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ sono } \underline{\text{infiniti dello stesso}} \\ & \underline{\text{ordine}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ 0 & \text{si dice che } f \text{ è un } \underline{\text{infinito di ordine superiore}} \\ & \text{a } g \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \nexists & \text{si dice che } f \text{ e } g \text{ non sono } \underline{\text{confrontabili}} \end{array}$$

Esempio 26: Verificare

$\sin x^2$ e x^2 sono infiniti dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$

Svolgimento:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \quad \checkmark \quad \text{Ricordando il limite notevole } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Esempio 27: Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 \sin(\sqrt{x}) + (1 - \cos x)^2}{\sqrt{x} \sinh(x^2) + (e^x - 1)^3}$$

Svolgimento: Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \quad \text{per } y \rightarrow 0$$

Allora NUM: $\sin(\sqrt{x}) = x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3!} + o(x^{3/2}) \quad (1 - \cos x)^2 = (1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 \quad x \rightarrow 0$

$$= 4x^{5/2} - \frac{4}{6}x^{7/2} + o(x^{7/2}) + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) =$$
$$= 4x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \text{perchè devo prendere ciò che tende a 0 più lentamente}$$

DEN: $\sqrt{x} \sinh(x^2) = x^{5/2} + \frac{1}{6}x^{9/2} + o(x^{9/2}) \quad (e^x - 1)^3 = (1 - 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 \quad x \rightarrow 0^+$

$$= x^{5/2} + o(x^{5/2}) + x^3 + o(x^3) = x^{5/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^{5/2} + o(x^{5/2})}{x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1} = 4$$

4 Successioni

Definizione 13: Successione

Una successione è una funzione il cui dominio è \mathbb{N} o un suo sottoinsieme infinito, per noi avranno valori in \mathbb{R} , ossia

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Le successioni si scrivono col simbolo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Si dice che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

Se $\forall V$ intorno di $l \exists N > 0$ tale che $a_n \in V \forall n > N$

Es: $\{\frac{1}{n}\}_{n \geq 1}, \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rightarrow ? \quad n \rightarrow +\infty$

Def: sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione:

1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente se $\exists \lim a_n \in \mathbb{R}$. Se $\lim a_n = 0$, la successione è infinitesima
2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è divergente se $\lim a_n = \pm\infty$
3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è regolare o determinata se $\exists \lim a_n$
4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è irregolare o indeterminata se $\nexists \lim a_n$

Esempio 28

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

Svolgimento :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

a_n è convergente.

Proposizione sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. convergente, allora è anche limitata, ossia $\exists M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

limitata \nRightarrow convergente

convergente \Rightarrow limitata

Teorema 11: Teorema della permanenza del segno

Se $\lim a_n = l > 0$, allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \rightarrow +\infty$

Teorema 12: Teorema del Confronto

$\{a_n\}, \{b_n\}$ siano due succ. tali che $a_n \leq b_n$ def. per $x \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_b$$

Allora $l_a \leq l_b$

Teorema 13: Teorema dei due carabinieri

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ succ. tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$ def. per $n \rightarrow +\infty$ Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

Gerarchia degli infiniti :

$$n^n \gg n! \gg e^n \gg n^k \gg \log_b n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad a, b > 1 \quad k > 0$$

Definizione 14: Successioni monotone

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. reale, si dice

- **Crescente:** se $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Strett. Crescente:** se $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- **Strett. Decrescente:** se $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Es:

$\{2^n\} = 1, 2, 4, \dots$ Strett. crescente

$\{1^n\}$ Costante

$\{\frac{1}{2^n}\}$ Strett. decrescente

$\{1 + \frac{1}{n}\}$ Strett. decrescente

Definizione 15: Successione di Cauchy

Una succ. reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice di Cauchy (o successione fondamentale) se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tale che

$$n, p > N \Rightarrow |a_n - a_p| < \epsilon$$

Es: $a_n = (-1)^n$ non è di Cauchy

$a_n = \frac{1}{1+n}$ è di Cauchy

Una successione reale a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.

Definizione 16: Sottosuccessioni

Data una succ. a_n si dice sottosuccessione di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che a_k sia una succ. strett. crescente di numeri naturali, cioè $n_{k+1} > n_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Es: $n_k = 2k, k \in \mathbb{N} \quad a_{n_k} = a_{2k}, k \in \mathbb{N}$ prendo solo gli elementi pari

Osservazione: per mostrare che una succ. non ha limite, mi basta mostrare che due sottosucc. hanno limite diverso o che una non abbia limite.

Teorema 14: Teorema di Bolzano-Weistrass

Sia a_n una succ. limitata. Allora \exists una sottosucc. di a_n convergente

Esempio 29: Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln((n+5)!) - \ln(n! + 5)}{\ln(n^\alpha + \cos(n\pi))}$$

al variare di $\alpha > 0$