# Analisi Matematica

Marco Pittarello

## Contents

# 1 Principio di Induzione

**Definizione 1**

Il principio di induzione è un metodo per dimostrare predicati matematici.

come

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{1+2+3+\cdots+n \ = \ \frac{n\,(n+1)}{2}}_{\mathsf{P}(n)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad x>1 \quad (1+x)^n \geq nx+1}_{\mathsf{P}(n)}$$

**Teorema 1: 1° forma**

Sia P$(n)$ un predicato con parametro $n \in \mathbb{N}$ e tale che:

1. P$(0)$ è vero ( caso base )
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$ ( passo induttivo )

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

**Esempio 1**

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{2^n \geq n+1}_{\mathsf{P}(n)}$.

CASO BASE : P$(0)$ $\quad 2^0 \geq 1$ vero

PASSO INDUTTIVO : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ P$(n) \to$ P$(n+1)$

Suppongo che $2^n \geq n+1$ e dimostro che $2^{n+1} \geq n+2$

$2^n \geq n+1 \ \to \ 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot (n+1)$

$2^{n+1} \ \geq \ 2n+2 \geq n+2$

Dunque abbiamo dimostrato che P$(n) \to$ P$(n+1)$

Dunque per il principio di induzione è vero che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale P$(n)$

**Esempio 2**

Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

CASO BASE : P$(0)$ : "0 = 0" è vera

PASSO INDUTTIVO : Assumo che P$(n)$ è vera e dimostro che è vera anche P$(n+1)$

$$\text{ovvero} \qquad \sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \ = \ \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho dimostrato CASO BASE e PASSO INDUTTIVO, dunque per il principio di induzione segue che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$$

**Teorema 2: 2° forma**

Sia $\mathsf{P}(n)$, $n \in \mathbb{N}$ un predicato tale che:
1. $\mathsf{P}(0)$ è vera ( caso base )
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$ ( passo induttivo )

Se $\forall m \in \mathbb{N} \quad 0 \leq m \leq n \quad \mathsf{P}(n)$ è vera allora lo è anche $\mathsf{P}(m)$ ( ipotesi induttiva )
Allora $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathsf{P}(n)$ è vera

OSSERVAZIONE è una forma "più forte" della 1° forma, poichè per dimostrare $\mathsf{P}(n)$ si usa la condizione che $\mathsf{P}(m)$ vale per tutti gli $m < n$

OSSERVAZIONE in entrambe le forme del principio di induzione possiamo sostituire $0$ con qualunque $n_0 \in \mathbb{N}$. Ovvero, se per un predicato $\mathsf{P}(m)$ dimostriamo:

- il caso base per $n_o$
- il passo induttivo $\forall n \geq n_0$

Allora possiamo concludere che $\forall n \geq n_0 \mathsf{P}(n)$ è vera

**Esempio 3**

Dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2 \quad \underbrace{n \text{ si può scrivere come prodotto di numeri primi}}_{\mathsf{P}(n)}$

CASO BASE : $\mathsf{P}(2)$ è banalmente vera: 2 è un numero primo

PASSO INDUTTIVO : dimostriamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad (\forall \quad 1 \leq m < n \quad \mathsf{P}(m)) \to \mathsf{P}(n)$

Ovvero, assumendo che $\mathsf{P}(m)$ vale $\forall \quad 1 \leq m < n$, ovvero si può scrivere come prodotto di primi, dimostriamo che anche $n$ si scrive come prodotto di primi ci sono due casi.

Se $n$ è primo allore è chiaramente prodotto di primi

Se $n$ non è primo allora è divisibile per un numero $m_1$ con $m_1 \neq n$ e $m_1 \neq 1$,

in particolare $2 \leq m_1 < n$

Dunque $\exists m_2 \in \mathbb{N}$ tale che

$n = m_1 m_2$ con $m_1$,$m_2$ diversi da $m$ e da $1$

Inoltre $2 \leq m_2 < n$

perchè $m_1 < n \qquad m_1 > 1$

Per l'ipotesi induttiva $\mathsf{P}(m_1)$ e $\mathsf{P}(m_2)$ sono vere.

## 2 Coefficenti Binomiali

**Definizione 2**

Definiamo $\mathsf{C}_{n,k}$ = numero totale di modi possibile, e si chiama:
numero di combinazioni di $n$ elementi di classe $k$

Spesso $\mathsf{C}_{n,k}$ viene anche denotato con il simbolo $\binom{n}{k}$, chiamato
coefficiente binomiale $n$ su $k$

Quanto vale $\binom{n}{k}$?

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leq n \qquad \binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

## 2.1 Proprietà di $\binom{n}{k}$

**Teorema 3**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$ si ha:

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

OSSERVAZIONE: Abbiamo un altro metodo per calcolare $\binom{n}{k} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$
Utilizzando il teorema e $\binom{n}{0} = 1$ possiamo calcolare ogni valore di $\binom{n}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \leq n$, evitando di dover calcolare ogni volta i fattoriali.

**Esempio 4: Triangolo di Tartaglia**

Si costruisce elencando per righe i coefficienti binomiali, la riga $n$ è composta da $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{m}$

$$\binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1 \tag{2}$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{2} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1 \tag{3}$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{0} = 1 \tag{4}$$

**Definizione 3: Binomio di Newton**

$\forall n \in \mathbb{N}$ vale $\forall p, q \in \mathbb{R} \qquad (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

# 3 Limiti di funzioni

**Definizione 4: Definizione di intorno e limite**

Si dice intorno sferico di $r$ con $r \in \mathbb{R}$, un intervallo $]r-\epsilon, r+\epsilon[$ con $\epsilon > 0$ ; $\epsilon$ viene detta raggio dell'intorno

- Se $r = +\infty$, si dice intorno di $+\infty$ un intervallo del tipo $]M, +\infty[$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$
- Se $r = -\infty$, si dice intorno di $-\infty$ un intervallo del tipo $]-\infty, -M[$ con $M > 0$ $(M \in \mathbb{R})$

Dato $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ punto di accumulazione per $A$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se esiste il limite $f$ per $x \to x_0$ allora è unico. E si indica con:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Se $\forall\, V$ intorno di $l \quad \exists\, U$ intorno di $x_0$ tale che se $x \in U \cap$ dom$f$, $x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$
OSSERVAZIONE :

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che $f$ ha limite finito in $x_0$
- Se $l = +\infty$ o $l = -\infty$, allora $f$ si dice divergente per $x \to x_0$
- Se $l = 0$, allora si dice che $f$ è infinitesima in $x_0$

**Teorema 4: Unicità del limite**

Se $x_0, l_1, l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$

allora $l_1 = l_2$

Dim : Suppongo per assurdo che $l_1 \neq l_2$

$P_1$ la proposizione di separazione di $\mathbb{R}$

$\exists\ V_1$ intorno di $l_1$

$\exists\ V_2$ intorno di $l_2$

tale che $V_1 \ \cap \ V_2 = \varnothing$

D'altra parte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow$$

$\exists\ U_1$ intorno di $x_0$ tale che $x \in U_1 \ \cap$ dom$f, x \neq x_0$ allora $f(x) \in V_1$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \Rightarrow$$

$\exists\ U_2$ intorno di $x_0$ tale che $x \in U_2 \ \cap$ dom$f, x \neq x_0$ allora $f(x) \in V_2$

Pongo

$U = U_1 \ \cap \ U_2$ intorno di $x_0$

$\Rightarrow \exists\ \bar{x} \in \quad U \ \setminus \{x_0\}, \ \bar{x} \in$ dom$f$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \in V_1 \ \cap \ V_2 = \varnothing$ ASSURDO poichè $\bar{x} \in U_1$ e $\bar{x} \in U_2$

**Esempio 5: Verificare**

$$\lim_{x \to 2} 2\ |x-2|\ \cos[\ \ln|x-2| + e^{\sin x}] = 0$$

$x_0 = 2, \quad l = 0$

$$f(x) = 2\ |x-2|\ \cos[\ \ln|x-2| + e^{\sin x}]$$
dom$f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Devo verificare che $\forall \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta$ tale che se $\underbrace{|x-2| < \delta\ ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ x \neq 2}_{0<|x-2|<\delta}$ allora