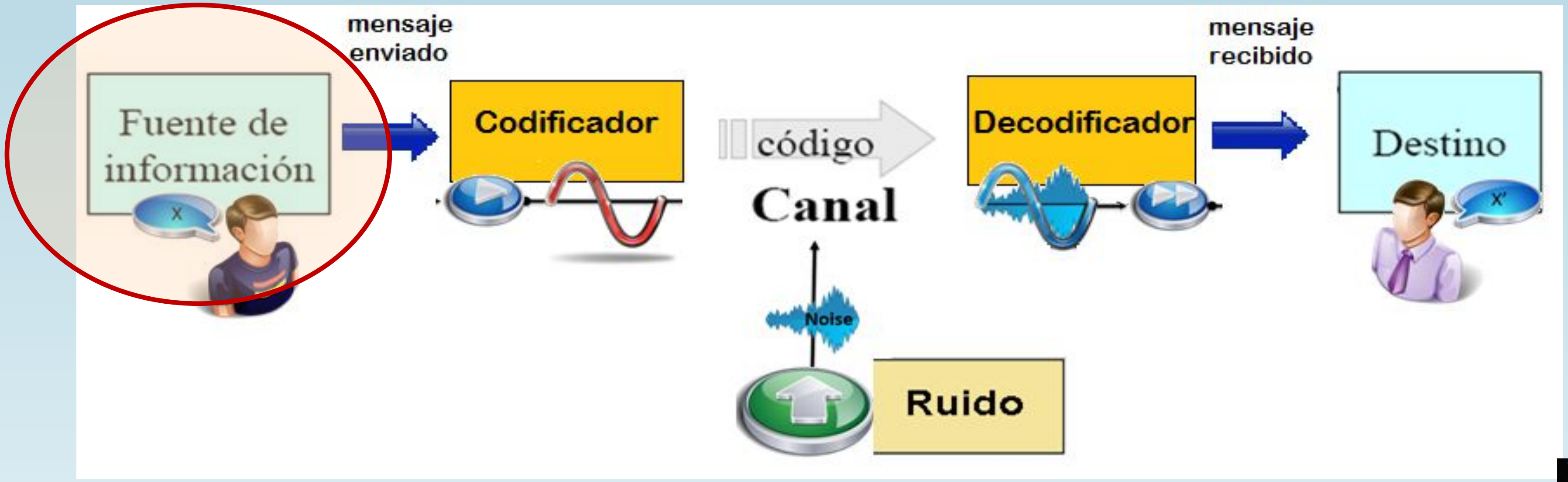
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Fuentes de Información (1)

INGENIERÍA DE SISTEMAS – 2022

Fuentes de información



Diversos fenómenos se pueden modelar y estudiar como **fuentes de información**: textos, imágenes, videos, sonido y otras señales (meteorológicas, sismológicas, biomédicas, satelitales, etc.)

No es relevante la semántica del mensaje sino las **probabilidades** de emisión

Tipos de Fuentes de Información

En cada instante t la fuente genera un símbolo $s_i(t)$ elegido del conjunto de todos los posibles símbolos, según sus probabilidades de emisión (modelo)

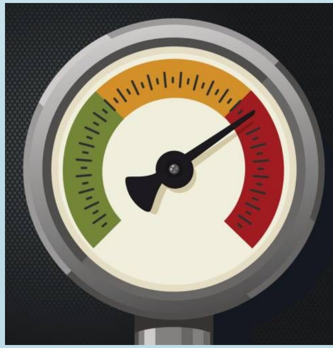
Fuente de información $\rightarrow$ $\mathbf{s_1\ s_1\ s_2\ s_1\ s_3\ s_2\ \ldots}$

Tipos de fuentes:

- Según el rango de valores que genera
  - F. continua
  - $\boxed{\text{F. discreta}}$
- Según la relación entre sus símbolos
  - F. sin memoria (o de memoria nula)
  - F. con memoria (de orden *k*) *k=1*

Ejemplo

Un dispositivo industrial genera valores correspondientes a los siguientes estados: **V** en funcionamiento normal, **A** en alerta y **R** en riesgo de falla



- Un observador A monitorea las sucesivas salidas del dispositivo por un largo tiempo y registra que:
  - el estado **V** se da con probabilidad 8/11 ≈0,728
  - el estado **A** aparece con probabilidad 2/11 ≈0,182
  - es estado **R** se da con probabilidad 1/11 ≈0,09

→ **Fuente sin memoria**

- Un observador B presta más atención a cómo se van dando las transiciones entre los sucesivos estados y luego de analizarlas durante un largo tiempo informa que:

  - luego que aparece **V**, en la emisión siguiente generalmente vuelve a aparecer **V**, un 25% de las veces se registra el estado **A** y nunca se da **R**
  - luego de registrarse **A**, a continuación se restablece el estado **V** un 75% de las veces, pero se pasa a **R** las ocasiones restantes
  - cuando se da **R**, para la salida siguiente el problema se soluciona la mitad de las veces y se vuelve a **V**, pero el resto se continúa en **R**.

→ **Fuente con memoria**

Fuentes sin memoria

- Los símbolos son estadísticamente **independientes** → no hay relación entre lo que emite la fuente en un instante y lo que emitió en el instante previo
- Se describe mediante:
  - el conjunto de símbolos posibles s_i
  - las probabilidades de ocurrencia $p(s_i)$ de cada s_i (constantes en el tiempo)

Ejemplo

Una fuente S emite símbolos a, b y c con probabilidades 0.3, 0.5, 0.2, respectivamente

S= {a, b, c}   p(S) = {0.3, 0.5, 0.2}

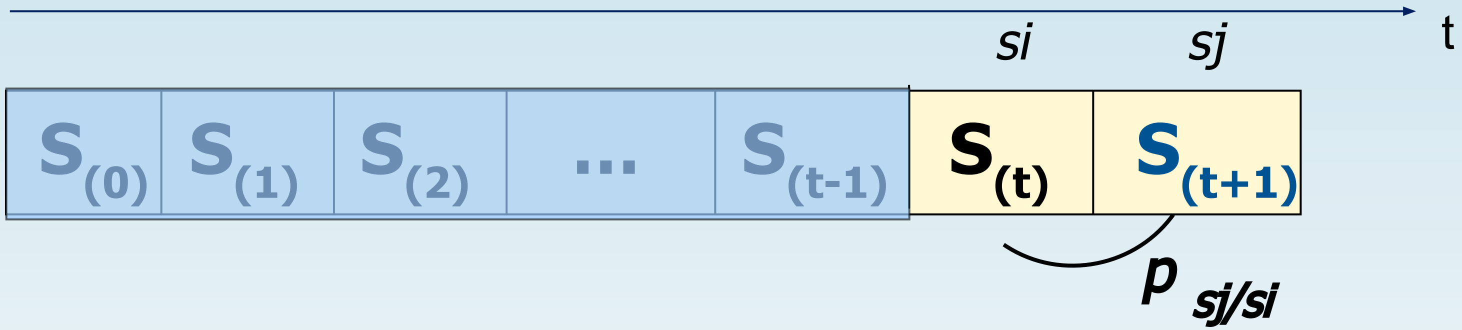
esas serán sus probabilidades de emisión a lo largo del tiempo

$$P\left[S(t+1)=j \,/\, S(0)=s_0, S(1)=s_1, \ldots, S(t)=i\right] = P\left[S(t+1)=j \,/\, S(t)=i\right] = p(s_j/s_i)$$

Fuentes con memoria

- **Proceso estocástico** → fenómeno aleatorio que evoluciona en el tiempo de manera impredecible desde el punto de vista del observador

- Los símbolos emitidos son estadísticamente **dependientes** → la probabilidad de emitir un símbolo en el instante t+1 depende de la ocurrencia de los símbolos emitidos anteriormente (en t, t-1, …)



- **Propiedad de Markov:** la probabilidad de emitir un símbolo depende sólo del símbolo emitido en el instante anterior → **fuente con memoria de orden 1** (fuente markoviana o **cadena de Markov**)

Fuentes con memoria (orden 1)

La fuente de memoria (de orden 1) o fuente markoviana se describe mediante:

- el conjunto de símbolos posibles s_i
- las <u>probabilidades condicionales</u> de transición entre símbolos p(s_j /s_i)

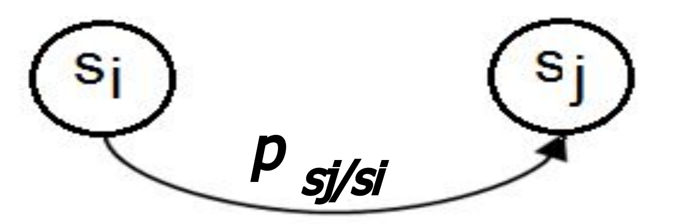
Nota: Se considera que las p(s_j /s_i) son constantes en el tiempo (fuente markoviana homogénea)

Matriz de pasaje

$$
M = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_j \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & & s_i & \cdots \end{array} \\
\begin{bmatrix} p_{1/1} & p_{1/2} & \cdots & p_{1/i} & \cdots \\ p_{2/1} & p_{2/2} & \cdots & p_{2/i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ p_{j/1} & p_{j/2} & \cdots & p_{j/i} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$\sum_j P(S(t+1)=s_j / S(t)=s_i) = \sum_j p(s_j / s_i) = 1$$

Grafo de transición

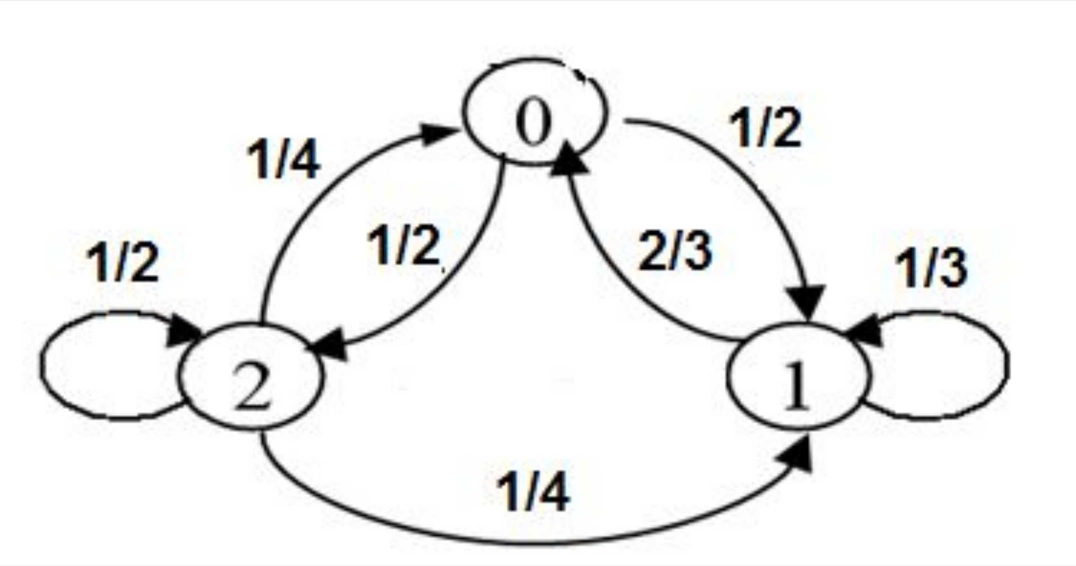


Nodos → símbolos

Arcos (dirigidos) → transiciones posibles entre símbolos

Fuentes con memoria (orden 1)

Una fuente markoviana emite 3 símbolos 0, 1, 2 con las siguientes probabilidades de transición:



$$M = \begin{array}{cccc} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & 0 & 2/3 & 1/4 \\ \mathbf{1} & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ \mathbf{2} & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Vectores de estado

Para una **fuente markoviana**:

- $\mathbf{V_t} \rightarrow$ Distribución de probabilidades de emisión $P(s_i,t) \rightarrow$ Vector de estado en el tiempo t
- conocido $\mathbf{V_t} \rightarrow$ se puede obtener $\boxed{\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_t}$ (M= matriz de pasaje de la Fuente)
- dada una condición inicial $\mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_0$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{M}.\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}.\ (\mathbf{M}.\mathbf{V}_0) = \mathbf{M}^2.\ \mathbf{V}_0$$

....

$$\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}.\ \mathbf{V}_t = \mathbf{M}^{t+1}\,.\mathbf{V}_0$$

Ejemplo

$$M = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

	$\mathbf{V_0}$	$\mathbf{V_1}$			
0	**1**				
1	**0**				
2	**0**				

Vectores de estado

Para una **fuente markoviana**:

- $\mathbf{V_t} \rightarrow$ Distribución de probabilidades de emisión $P(s_i,t) \rightarrow$ Vector de estado en el tiempo t
- conocido $\mathbf{V_t} \rightarrow$ se puede obtener $\boxed{\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_t}$ (M= matriz de pasaje de la Fuente)
- dada una condición inicial $\mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_0$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{M}.\,\mathbf{V}_1 = \mathbf{M}.\,(\mathbf{M}.\mathbf{V}_0) = \mathbf{M}^2.\,\mathbf{V}_0$$

....

$$\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}.\,\mathbf{V}_t = \mathbf{M}^{t+1}\,.\mathbf{V}_0$$

Ejemplo

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

	$\mathbf{V_0}$	$\mathbf{V_1}$			
0	**1**	**0**			
1	**0**	**1/2**			
2	**0**	**1/2**			

Vectores de estado

Para una **fuente markoviana**:

- $\mathbf{V_t} \rightarrow$ Distribución de probabilidades de emisión $P(s_i,t) \rightarrow$ Vector de estado en el tiempo t
- conocido $\mathbf{V_t} \rightarrow$ se puede obtener $\boxed{\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_t}$ (M= matriz de pasaje de la Fuente)
- dada una condición inicial $\mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_0$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{M}.\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}.\ (\mathbf{M}.\mathbf{V}_0) = \mathbf{M}^2.\ \mathbf{V}_0$$

....

$$\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}.\ \mathbf{V}_t = \mathbf{M}^{t+1}\,.\mathbf{V}_0$$

Ejemplo

$$M = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

	$\mathbf{V_0}$	$\mathbf{V_1}$	$\mathbf{V_2}$		
0	**1**	0	**11/24**		
1	**0**	1/2	**7/24**		
2	**0**	1/2	**1/4**		

Vectores de estado

Para una **fuente markoviana**:

- $\mathbf{V_t} \rightarrow$ Distribución de probabilidades de emisión $P(s_i,t) \rightarrow$ Vector de estado en el tiempo t
- conocido $\mathbf{V_t} \rightarrow$ se puede obtener $\boxed{\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_t}$ (M= matriz de pasaje de la Fuente)
- dada una condición inicial $\mathbf{V}_0 \rightarrow \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}\,.\mathbf{V}_0$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{M}.\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{M}.\ (\mathbf{M}.\mathbf{V}_0) = \mathbf{M}^2.\ \mathbf{V}_0$$

....

$$\mathbf{V}_{t+1} = \mathbf{M}.\ \mathbf{V}_t = \mathbf{M}^{t+1}\,.\mathbf{V}_0$$

Ejemplo

$$M = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

	V_0	V_1	V_2	V_3	
0	**1**	0	11/24	**0,257**	...
1	**0**	1/2	7/24	**0,389**	...
2	**0**	1/2	1/4	**0,354**	...

Estado Estacionario

Los vectores de estado van variando a medida que evoluciona la emisión de símbolos de la fuente hasta estabilizarse o estacionarse → **estado estacionario (V*)**

- El estado estacionario es <u>independiente</u> de las condiciones iniciales (V_0)
- El instante en que se estaciona sí puede variar según V_0

Ejemplo

$$M = \begin{array}{c} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

	V_0	V_1	V_2	V_3		**V***
0	1	0	11/24	0,257	...	**8/25**
1	0	1/2	7/24	0,389	...	**9/25**
2	0	1/2	1/4	0,354	...	**8/25**

Comprobación: V* = M.V*

Estado Estacionario

¿Cómo obtener V* analíticamente?

Sistema de ecuaciones

$$V^* = M \cdot V^* \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} (M - I)\, V^* = 0 \\ \sum v_i^* = 1 \end{array}}$$

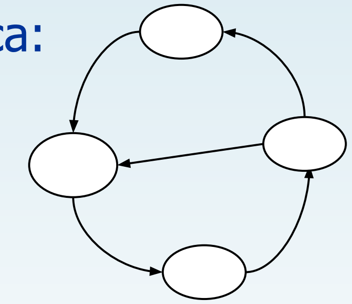
$(M - I)\, V^* = 0$ → eliminar una de las ecuaciones

$\sum v_i^* = 1$ → incorporar necesariamente

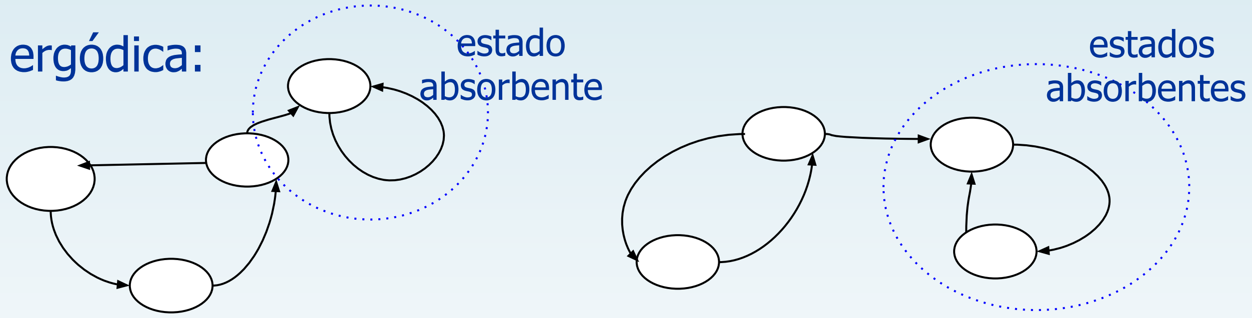
Condiciones de existencia de V*:

- Conjunto finito de estados (Fuente discreta)
- Fuente ergódica (todos los estados alcanzables desde otro estado → sin estados o clases absorbentes)

F. ergódica:



F. no ergódica:



Estado Estacionario

Ejemplo

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (M - I)\, V^* = 0 \\ y \quad \sum v_i^* = 1 \end{array}}$$

$$M - I = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & 1/4 \\ 1/2 & -2/3 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (1) \\ \\ (2) \end{array}$$

Resolver el sistema de ecuaciones:

(1) $-v0 + 2/3\, v1 + 1/4\, v2 = 0 \quad \rightarrow \quad v0 = 2/3\, v1 + 1/4\, v2$

(2) $1/2\, v0 - 1/2\, v2 = 0 \quad \rightarrow \quad 1/2\, v0 = 1/2\, v2 \quad \rightarrow \quad v0 = v2$

(3) $v0 + v1 + v2 = 1$

en (1): $v0 = 2/3\, v1 + 1/4\, v0 \quad \rightarrow \quad 3/4\, v0 = 2/3\, v1 \quad \rightarrow \quad v0 = 8/9\, v1$

en (3): $8/9\, v1 + v1 + 8/9\, v1 = 1 \quad \rightarrow \quad 25/9\, v1 = 1 \quad \rightarrow$ $\mathbf{v1 = 9/25}$

ents: $\mathbf{v0 = v2 = 8/25}$

estado estacionario:

$$V^* = \begin{bmatrix} 8/25 \\ 9/25 \\ 8/25 \end{bmatrix}$$

Bibliografía

Abramson N., **Teoría de la Información y Codificación**, Ed. Paraninfo, 1981

Papoulis A., **Probability Random Variables and Stochastic Processes**, McGraw-Hill, 1991

Cover T., Thomas J., **Elements of Information Theory**, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2006

Shannon C., Weaver W., **Teoría Matemática de la Comunicación**, Ed.Forja, 1981