# Apunte 1-2: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

Para analizar existencia y unicidad nos concentraremos en ecuaciones diferenciales de primer orden lineales de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

Un modelo matemático de una problemática puntual, constituye un problema a valores iniciales, que consiste en una ecuación de la forma (1) junto con una condición inicial $y(x_0) = y_0$. Resolver un problema a valores iniciales:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

implica encontrar una función $y(x)$ que satisfaga simultáneamente ambas condiciones del sistema (2). La función $f(x, y)$ es continua en sus dos variables y está definida en un cierto dominio $A$ del plano, entendiendo por tal, cualquier conjunto abierto y conexo. Una solución de (2) en un intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$ que contenga a $x_0$, es una función diferenciable, $y = y(x)$ definida en $I = (x_1, x_2)$,y satisface las condiciones:

I) $(x, y(x)) \in A \Rightarrow f(x, y(x))$ está definida.

II) $y'(x) = f(x, y(x))$ y además $y(x_0) = y_0$

Geométricamente, esto significa buscar la curva integral que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ del plano XY (en la región rectangular $A$), cuya tangente en dicho punto esta definida por $f(x_0, y_0)$.

Para poder responder las preguntas que nos hicimos en el modelo de caída libre, debemos establecer resultados de **existencia y unicidad de soluciones**:

**Definición 1.** - ***solución $\varepsilon$ aproximada***- *Sea $f(x, y)$ continua en cierto dominio $D$ y sea $I = (x_1, x_2)$, un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces la función $y(x)$ definida sobre $I$ es una solución de $y' = f(x, y)$ con error $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si:*

I) *$(x, y(x)) \in D \Rightarrow f(x, y(x))$ está definida.*

II) *$y(x)$ es continua en $I$*

III) *$y(x)$ tiene derivada continua a trozos en $I$ (con lo que sólo puede no estar definida solamente en un número finito de puntos, que denotamos por $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$)*

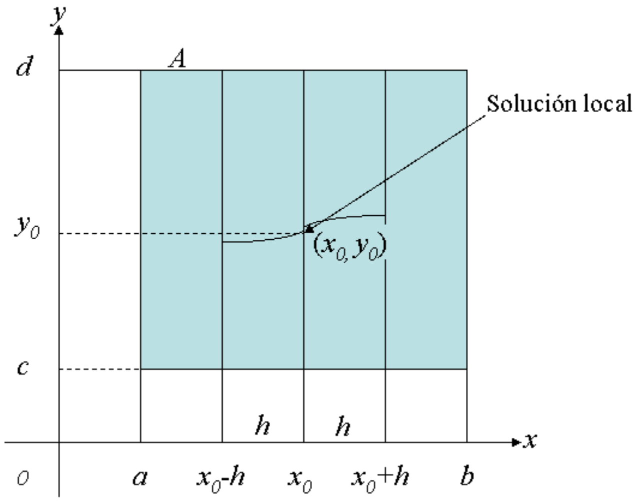
IV) *$|y'(x) - f(x, y(x))| < \varepsilon \forall t \in I, t \neq \alpha_i, i = 1, ..., n$*

La última definición representa un concepto de doble interés, pues resulta útil en la práctica porque permite obtener aproximaciones tan precisas como se quiera y porque será el eje central para demostrar la existencia y unicidad de soluciones.

Analizaremos la construcción a través de la siguiente proposición:

**Proposición 1.** *Sea $(x_0, y_0) \in S$, con $S$ alguna región tal que los puntos del rectángulo $A = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, \}$ pertenezcan a $S$.*

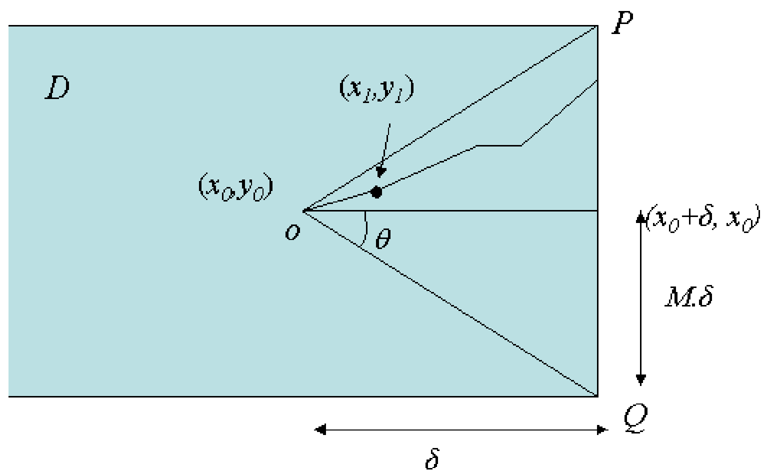
*Sea $|f(x, y)| \leq M$ para $(x, y) \in A$. Entonces si $\delta = min\{a, \frac{b}{M}\}$, se puede construir una solución aproximada $y' = f(x, y)$ en el intervalo $|x - x_0| \leq \delta$ tal que $y(x_0) = y_0$ y cuyo error $\varepsilon$ sea un número arbitrariamente pequeño.*




**Observación:** La elección de $\delta$, es natural en el sentido de que partimos de las desigualdades: $|x - x_0| \leq a; |y - y_0| \leq b$ y pedimos que $|x - x_0| \leq \delta$, entonces $\delta$ debe ser menor o a lo sumo igual a $a$. Por otra parte $|f(x,y)| \leq M$,eso es equivalente a decir $|y'| \leq M \Rightarrow |y(x) - y_0| \leq M\,|x - x_0|$ y no puede exceder a $b$. (Derrick, W.Grossman, Hartman, P.)

Dada la definición del rectángulo A, el rectángulo

$$D = \{(x,y) : |x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq M\delta, \} \subset A$$




Dado un $\varepsilon > 0$ real y puesto que $f$ es continua en D entonces $\alpha > 0$ tal que $|f(\hat{x},\hat{y}) - f(x,y)| \leq \epsilon$ para $(\hat{x},\hat{y}),(x,y) \in D$ y $|\hat{x} - x| \leq \alpha$ y $|\hat{y} - y| \leq \alpha$

Sean $\{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ cualquier conjunto de puntos tal que:

$$i) x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = x_0 + \delta$$
$$ii) x_i - x_{i-1} < min\{a, \frac{a}{M}\} \qquad i = 1, ..., n$$

con estos datos construiremos una solución aproximada en el intervalo $x_0 < x < x_0 + \delta$, **la solución aproximada será una poligonal** construida de la siguiente manera:

A partir de $(x_0, y_0)$ trazamos hacia la derecha un segmento con pendiente $f(x_0, y_0)$; ese segmento cortará a la recta $x = x_1$ en un punto $(x_1, y_1)$. A partir de ese punto trazamos hacia la derecha un segmento con pendiente $f(x_1, y_1)$ que cortará la recta $x = x_2$ en el punto $(x_2, y_2)$ y así sucesivamente.

El punto $(x_1, y_1)$ debe estar en el triangulo $OPQ$ de la figura, puesto que la $tg\theta = M$ y $|f(x,y)| \leq M$

Por la misma razón $(x_2, y_2)$ debe estar en el triangulo mencionado y así con el resto de los puntos. Este proceso permite continuar hasta $(x_0 + \delta)$ . Se desarrollará la prueba analítica de esta construcción en los teoremas siguientes.

**Teorema 1.** *Sea $f(x, y)$ continua para todos los valores $x$ e $y$. Entonces el problema de valor inicial (2) es equivalente a la ecuación integral:*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(t))dt \tag{3}$$

*en el sentido de que $y(x)$ es una solución de la ecuación (2) si y solo si $y(x)$ es solución de (3).*

**Teorema 2.** ***Teorema de Existencia- Picard Lindelöf*** **-** *Sea $f(x, y)$ continua Lipschitz en $y$ con una constante Lipschitz $k$, sobre una región $D$ de todos los puntos que satisfacen las desigualdades $|x - x_0| \leq a; |y - y_0| \leq b$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que el problema a valores iniciales tiene una solución $y(x)$ sobre el intervalo $|x - x_0| \leq \delta$.*