Resumen calculo

Monotonia

$y' > 0 \rightarrow y(x)$ crece
$y' < 0 \rightarrow y(x)$ Decrece

Concavidad

$y''(p) > 0 \rightarrow y(x) \rightarrow$ concava hacia arriba $\cup$
$y''(p) < 0 \rightarrow y(x) \rightarrow$ concava hacia abajo $\cap$

Singularidad

Es si la función tiene ono saltos
Tiene saltos si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x,y) = x_0$$

Simetria

$f(x) = y = f(-x) \rightarrow$ simetrica respeto de y se dice Par
$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ " " respecto al origen se dice impar

si y' es par $\rightarrow$ y es impar
si y' es impar $\rightarrow$ y es par

$y'(x) = y'(-x) \rightarrow$ Par
$y'(-x) = -y'(x) \rightarrow$ impar

isoclina

Permite marcar el campo direccional mediante $f(x_0, y) = k$
fijando un x_0 obtengo k (pendiente de f) en el punto x_0
Si adesmas me dan un punto por el que pasa puedo obtener la solucion particular

Ecuaciones diferenciales 1º orden

Variables Separadas

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \rightarrow \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x) \rightarrow \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$$

Lineales de orden uno

$$y' = f(x,y) \rightarrow y' = -P(x)\,y + g(x) \rightarrow y' + P(x)\,y = g(x)$$

Puede darse $\quad y'P(x) + Q(x)\,y = G(x) \rightarrow y' + \frac{Q(x)}{P(x)}\,y = \frac{G(x)}{P(x)}$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\mu(x)\,y(x) = g(x)\,\mu(x) \rightarrow y(x) = \mu(x)^{-1}\int \mu(x)\,g(x)\,dx + C\,\mu(x)^{-1}$$

Posibles funciones

- Modelo de crecimiento de población

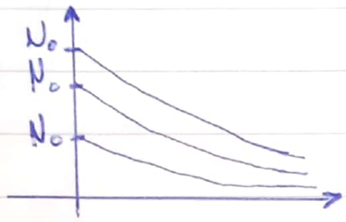
$$\frac{dP}{dt} = \underbrace{(m-n)}_{r}\,P \rightarrow \frac{dP}{dt} = rP \xrightarrow[\text{Separada}]{\text{Por}} P(x) = e^{rt}\cdot C$$

Escaneado con CamScanner

Modelos de decaimiento radioactivo

$$\frac{dN}{dt} = -rN$$

$-r$ = tasa de decaimiento
N = Atomos / gramos (materia = N)



$\frac{dN}{dt} > 0$ nunca! $\frac{dN}{dt} < 0$ decrece

$$\frac{d^2N}{dt^2} = -r\frac{dN}{dt} = r^2 \cdot N > 0 \quad \cup$$

$$\frac{dN}{dt} = -rN \xrightarrow{\text{separados}} \ln|N| = -rt + C \rightarrow N(t) = e^{-rt} \cdot C$$

$$N(0) = N_0$$

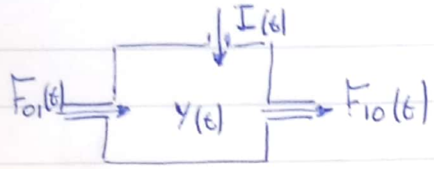
$$\boxed{N(t) = e^{-rt} \cdot N_0}$$

Vida media: Tiempo necesario para tener la mitad de la materia inicial

$$e^{-rt_{VM}} \cancel{N_0} = \frac{\cancel{N_0}}{2} \rightarrow e^{-rt_{VM}} = \frac{1}{2} \rightarrow -r\,t_{VM} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow \underbrace{t_{VM} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-r}}_{\text{Vida media}}$$

Modelo de un compartimento



- F_{ij} = tasa de flujo (liquido mezcla) del medio j $\left[\frac{vol}{t}\right]$ (Ej: $\frac{l}{seg}$)
- V = Volumen del tanque [vol] (Ej: l, cm³)
- $Y(t)$ = cantidad de trazador en el tanque [m] (Ej: gr, kg)
- $C(t) = \frac{Y(t)}{V}$ concentracion de trazador en el tanque $\left[\frac{m}{Vol}\right]$ (Ej: $\frac{gr}{cm^3}$, $\frac{kg}{l}$)
- $I(t)$: cantidad de trazador / unidad de t $\left[\frac{m}{t}\right]$ (Ej $\left[\frac{gr}{seg}\right]$)

$$\frac{dV}{dt} = F_{01}(t) - F_{10}(t)$$

↑ el vol varia

$$\frac{dV}{dt} = k$$ ← cant de varianza − o +

↳ $\boxed{V(t) = kt + C}$

$$\frac{dY}{dt} = + \underbrace{\quad}_{\text{aumento de trazador por ingreso de mezcla}} - \underbrace{\quad}_{\text{disminucion de trazador por salida de mezcla}} + \underbrace{\quad}_{\text{aumento directo de trazador (/u. de tiempo)}}$$

$$\frac{dY}{dt} = I(x) - \frac{F_{10} \cdot Y(t)}{V}$$

Variacion de Temperatura

$$\frac{dT}{dt} = \alpha (T - T_A)$$

- T = temp objeto
- T_A = temp ambiente

$$\frac{dT}{dt} - \alpha T = -\alpha T_A$$

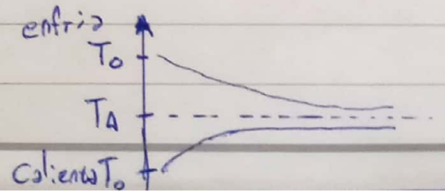
α → puede ser positivo si calienta
↳ Negativo si enfria

Factor Integrante $\mu(t) = e^{\int \alpha dt} = e^{\alpha t}$

$T(t) = T_A + C \cdot e^{\alpha t}$ → $T(0) = T_A + Ce^0 = T_0$ → $\boxed{C = T_0 - T_A}$

$T(0) = T_0$

$$T(t) = T_A + (T_0 - T_A)\, e^{\alpha t}$$



Tp 3 Calculo

1) P = Poblacion N(t) = Personas infectadas en (t)

$$\frac{dN}{dt} = k * N * (P - N) \qquad k = 0,2$$

$$\frac{dN}{dt} = 0,2 * N * (1000 - N)$$

$N(0) = 1$ $N(10) = ?$

Con

2) $\frac{dM}{dt} = k\, M(t)$ $k = 0,01\ ml/h$

$M(0) = 100\,ml$

3) $\frac{dP}{dt}$ $r \cdot P(t)$ $r = 0,047 / \text{año}$

$P(0) = 5000$

Preg?

$P(45) =$

4) $V = 10\,L$ $\quad F(t) = 1\,L/m$ $\quad I(t) = 10\,gr/m$

$$\frac{dy}{dt} = I(t) - \frac{F(t)\,y(t)}{V} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 10\,gr/m - \frac{1\,L/m\;y(t)}{10\,L}$$

$y(0) = 0$

6) a) $\dfrac{dL}{dt} = k\,(L_{max} - L)$ $\qquad \dfrac{d}{dt}\left[f(g(t))\right] = F'(g(t)) \cdot$

$$W = \alpha L^{\nu}$$

b) $\dfrac{dL}{dt} = \alpha\, L(t)^{\nu}$ $\qquad \dfrac{dW}{dt} \rightarrow \alpha \nu L^{\nu} \cdot (k\,(L_{max} - L))'$

?

c)

7) $\frac{dT}{dt} = \alpha\,(T - T_A)$

T = Temp objeto
T_A = Temp ambiente = 10°C

$$\frac{dT}{dt} \underbrace{-\alpha}_{P(x)} T = \underbrace{-\alpha T_A}_{g(x)}$$

$$N(t) = e^{\int \alpha\, dt} \rightarrow e^{\alpha t}$$

$$N(t)\, T(t) = \int N(t) \; -\alpha T_A \; dt$$

$$T(t) = e^{-\alpha t} \left(-\alpha T_A \int e^{\alpha t}\, dt\right)$$

$$T(t) = e^{-\alpha t} \left(-\cancel{\alpha} T_A \frac{e^{\alpha t}}{\cancel{\alpha}} + C\right)$$

$$T(t) = -T_A + \frac{C}{e^{\alpha t}}$$

$T(0) = 110\,°C$

$$T(0) = -10\,°C + \frac{C}{e^0} = 110\,°C \rightarrow \boxed{C = 120\,°C}$$

$T(30) = 60\,°C$

$$-10\,°C + \frac{120\,°C}{e^{\alpha 30}} = 60\,°C \rightarrow e^{-\alpha 30} = \frac{7\cancel{0}}{12\cancel{0}} \rightarrow e^{-\alpha 30} = \frac{7}{12}$$

$$-\alpha\, 30 = \ln\left(\frac{7}{12}\right) \rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{30} \cdot \ln\left(\frac{7}{12}\right)}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{30} \ln\left(\frac{7}{12}\right) \left(T(t) - 10\,°C\right)$$

8) $\frac{dN}{dt} = -r\,P$

r = tasa de decaimento $[t^{-1}]$
P = Atomos / gramos (materia = N)
t = Años

$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{5,27} \ln\left(\frac{1}{2}\right) P(t)$

Supondremos que 1 es el nivel habitable

$P(t) = e^{-rt} \cdot C$

$P(0) = 100 \rightarrow e^{0}\, C = 100 \rightarrow C = 100$
$P(5,27) = 50$
$\hookrightarrow P(5,27) = e^{-5,27\,r} \cdot 100 = 50 \rightarrow -5,27\, r = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$r = -\frac{1}{5,27} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

9) Preg

$\boxed{y = \frac{c}{x}}$
$c = yx$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2} = -\frac{yx}{x^2} = -\frac{y}{x}$

$f_{m_1} \perp g_{m_2}$
$m_1 \cdot m_2 = -1$
$m_2 = \frac{1}{m_1}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy_{To}}{dx} = -\frac{1}{\left(-\frac{y}{x}\right)} = \frac{x}{y}$

$\int y\,dy = \int x + C$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

$y^2 \cancel{+} x^2 = 2C$

10) $F_o(t) = 2\,lt/m$
$F_i(t) = 4\,lt/m$

$V(t) = F_i(t) - F_o(t)$

$V(t) = 2t + 20$

$I(t) = 8$ gramos/m

$8\,gr/m - \frac{y(t)}{2t+20}\, 2\,l/m$ Preg

11) $\frac{dP}{dt} = -r P$

$P(t) = e^{-rt} C$ 50%

$P(0) = 100\% \rightarrow C = 100\%$

$P(15) = 99,957\% \rightarrow e^{-r15}\, 100\% = 99,957\%$

$\rightarrow e^{-r15} = \frac{99,957 \cancel{\%}}{100 \cancel{\%}}$

$-r \cdot 15 = \ln(0,99957)$

$r = -15^{-1} \ln(0,99957)$

$P(t) = e^{-15^{-1}\ln(0,99957)\, t} = 1/2$

$-\frac{\ln(\ )}{15} = -15^{-1} \ln(0,99957)\, t = \ln(1/2)$

$-\frac{\ln(\ )}{15}$ $t = -15^{-1} \left[\ln(0,99957)\right] \ln(1/2)$

$t =$

d2 neg

$P(t_{vm}) = 50\%$

$e^{-rt}\, 100\% = 50\%$

12) $\frac{dN}{dt} = k\,N\,(P-N)$

P = % de alumnos total
N = % de alumnos que conocen el rumor

$N(0) = 2\%$
$N(2) = 5\%$

$\frac{dN}{dt} = kNP - kPN^2 \rightarrow \frac{dN}{dt} + kPN^2 = kNP$

?
$P(t) = \frac{P_0}{1000}$

$P = \#$
$P(5700) = \frac{P_0}{2}$
$\frac{dP}{dt} = -rP \rightarrow P(t) = P_0 e^{-rt}$
$\cancel{P_0}\, e^{-rt}$
$\frac{P_0}{2} = P(\cancel{0})$
$\ln\frac{1}{2} = -r \cdot 5700$
$=$

P = % de materia

13) $\frac{dP}{dt} = -r\,P$

$P(t) = e^{-rt}\,C$ $\qquad P(0) = 100\% \Rightarrow C = 100\%$

$P(5700) = 50\% \rightarrow e^{-r\,5700} = 1/2 \rightarrow -r\,5700 = \ln(1/2)$

$r = -\frac{1}{5700}\ln(1/2)$

$P(t) = 0{,}001\% \rightarrow e^{-rt}\,100\% = 0{,}001\%$

$-rt = \ln(0{,}00001) \rightarrow t = -\frac{\ln(0{,}00001)}{r}$

P(t)

14) $I(t) = 20\% \cdot 6$ $V = 200l$ $F_o = 8 \, l/min$ $F_i = 6 \, l/min$

$F(t) = F_i - F_o \rightarrow F(t) = -2 \, l/min$

$$\frac{dV(t)}{dt} = -2$$

$V(t) = -2t + C$.

$V(0) = C = 200$

$V(t) = -2t + 200$

$C_o = 0.5\%$

?

$$\frac{dy}{dt} = 0,2 \cdot 6 - \frac{y(t) \cdot 8 \, l/min}{200 \, l \, V(t)}$$

a)

b)

Escaneado con CamScanner