III ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Dada la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

no puede resolverse, en general, en el sentido que no existe una fórmula para obtener su solución en todos los casos.

1. Ecuaciones a Variables separables

El caso más simple es aquel en que las variables son separables:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

En este caso basta con reescribir la ecuación, o sea,

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$$

e integrar:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$$

2. Ecuaciones diferenciales lineales de orden uno

Sea $y' = f(x, y)$, donde f es una función dada en dos variables, suponemos ahora que la función f depende linealmente de la función desconocida o variable independiente y de su derivada (y e y') y que podría escribirse en la siguiente forma, $P(x)y' + Q(x)y = G(x)$, donde $G(x)$ puede ser o no cero.

La expresión es equivalente a $y' + p(x)y = g(x)$ con $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ y $q(x) = \frac{G(x)}{P(x)}$ ambas continuas e integrables en un intervalo I de $\mathbb{R}$, buscaremos entonces todas las posibles soluciones de la ecuación planteada.

En primer lugar comenzaremos por el caso más simple considerando la ecuación homogénea ($g(x) = 0$): $y' + p(x)y = 0$ de la cual podemos obtener una solución usando pasos directos de integración:

$$\int \frac{y'}{y} = \int -p(x)dx \text{ luego } lny(x) = \int -p(x)dx + C \text{ en } I \subseteq \mathbb{R}$$

o equivalentemente,

$$y(x) = e^{\int -p(x)dx+C}$$

El cálculo anterior fue sencillo porque fue posible separar variables en el proceso de integración.

Volviendo al caso general, ecuación diferencial lineal de orden uno inhomogénea, $y' + p(x)y = g(x)$, claramente en este caso no se pueden separar las variables.

Utilizaremos entonces una función auxiliar que denominaremos factor integrante $\mu(x)$ con el objetivo de lograr transformar el primer miembro de la ecuación en una derivada de una función, transformando de este modo la ecuación a un formato directamente integrable. Multiplicando miembro a miembro por $\mu(x)$,

$$\mu(x)y' + \mu(x)p(x)y = \mu(x)g(x)$$

Si sumamos y restamos el término $\mu'(x)y$ y pedimos que $\mu(x)$ satisfaga la ecuación $\mu(x)' - \mu(x)p(x) = 0$, se obtiene la siguiente igualdad $(\mu(x)y)' = \mu(x)g(x)$. Integrando miembro a miembro se obtiene la solución general $y(x) = \mu^{-1}(x)\int \mu(x)g(x)dx + C\mu^{-1}(x)$.

Luego, si se plantean condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ se obtendrá una solución particular de la ecuación.

Ejemplo 1. *Hallar todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial lineal de primer orden* $xy' + (1-x)y = e^{2x}$ *en* $I = (0,\infty)$.

`Resolución:`En primer lugar lo llevamos a la forma canónica $y' + p(x)y = g(x)$ con $p(x) = \frac{1-x}{x}$ y $g(x) = \frac{e^{2x}}{x}$; $p(x)$ y $g(x)$ tiene problemas sólo en el 0, pero el intervalo $I = (0,\infty)$ no lo contiene, entonces en I son continuas.

Luego el factor integrante está dado por

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1-x}{x}} = xe^{-x}$$

La solución general está dada por: $\frac{e^x}{x}\int xe^{-x}e^{2x}dx + C\frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x}+ce^x}{x}$.