Introducción al Cálculo Diferencial e Integral
Trabajo práctico N^o 1

1. Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales según sean ordinarias o parciales. Determinar orden y grado de las mismas, como así también la función desconocida y la variable independiente.

   a) $y' = x^2 + 5y$

   b) $y'' - 4y' - 5y = e^{3x}$

   c) $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial \mu}{\partial y}$

   d) $\frac{dr}{dq} = \sqrt{rq}$

   e) $\left(\frac{d^3\mu}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^3 = s - 3t$

   f) $\left(\frac{d^3\mu}{dt^3}\right)^2 + \frac{d\mu}{dt} = \mu + 5t^4$

2. En cada uno de los siguientes ítems, se describe una función $y = g(x)$ por medio de alguna propiedad de su gráfico. Escribir una ecuación de la forma $y' = f(x, y)$ que tenga a $g(x)$ como solución (o como una de sus soluciones).

   a) La pendiente del gráfico de g en el punto (x, y) es la suma de x e y.

   b) La tangente al gráfico de g en el punto (x, y) interseca al eje x en el punto $(x/2, 0)$.

   c) Toda línea recta perpendicular al gráfico de g pasa por el punto $(0, 1)$.

3. Escribir una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación descripta.

   a) La aceleración de un auto deportivo es proporcional a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad del auto.

   b) En una población fija de P habitantes, la razón de cambio del número N de personas que han escuchado cierto rumor es proporcional al número de personas que aún no lo han escuchado.

   c) En una población fija de P habitantes, la razón de cambio del número N de personas infectadas con una enfermedad es proporcional al número de personas infectadas y al número de personas no infectadas.

4. Los cambios en el número de individuos de una población dependen de un balance entre el número de nacimientos y muertes. Si b es una constante que representa el número de nacimientos por individuo y por unidad de tiempo y m es lo mismo, pero en términos de mortalidad, entonces $\frac{dP}{dt} = bP - mP$. Luego $\frac{dP}{dt} = (b - m)P$, donde $r = b - m$ es la tasa intrínseca de crecimiento. Este es el modelo de crecimiento exponencial de poblaciones.

   a) Analizar qué ocurre con la población cuando $b < m, b = m$ y $b > m$.

   b) Bosquejar el comportamiento de $P(t)$ a lo largo del tiempo, asumiendo $P(0) = P_0$, en los tres casos.

5. Los procesos de decaimiento de un material radiactivo o de eliminación de drogas en sangre pueden modelarse siguiendo el mismo proceso que el descripto en el crecimiento exponencial de poblaciones, pero considerando que no existe el término de natalidad, sino solo el término de mortandad negativo denominado, en estos casos, tasa específica de desintegración o de decaimiento, que indica una destrucción o de eliminación de materia en cada caso.

   a) Plantear la ecuación diferencial para estos casos indicando las unidades de la variable dependiente y del parámetro en la ecuación.

   b) Graficar el campo de direcciones y algunas soluciones para condiciones iniciales dadas.

6. La variación de la temperatura de un objeto, o tasa de cambio de la temperatura, es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto en cada tiempo y la del ambiente exterior al cual se lo somete. Ésta es la ley de enfriamiento de Newton,

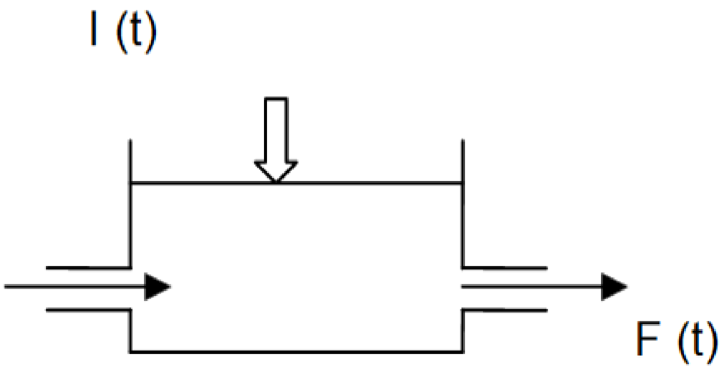

Figura 1: Diagrama ejercicio 7

a) Exprese la ecuación diferencial que modela el fenómeno.

b) Grafique el campo de direcciones considerando ambos casos, que la temperatura del ambiente es mayor que la temperatura del objeto en el momento inicial y vicerversa. Qué ocurre con el comportamiento de la temperatura del objeto en cada caso?

7. Dado un compartimento como el de la figura con un volumen V fijo [capacidad] conteniendo una sustancia que se renueva a través de una entrada y salida que permite un flujo de caudal expresado por F(t)[capacidad/tiempo]. Una nueva sustancia, en general denominada traza, y(t) [masa], es agregada y mezclada dentro del tanque a una tasa I(t) [masa/tiempo]. Plantee la ecuación diferencial que modela la variación de la cantidad de trazador dentro del compartimento si ésta es la diferencia de sustancia entrante y saliente del volumen considerado en cada instante de tiempo.

8. Usar los conceptos de monotonía, concavidad, simetría, singularidad, isoclinas y unicidad para dibujar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales. Notar que en estos casos la solución pasa por un punto dado.

a) $\frac{dy}{dx} = x^3, P(1,1)$

b) $\frac{dy}{dx} = x^4, P(1,1)$

c) $\frac{dy}{dx} = cosx, P(0,0)$

d) $\frac{dy}{dt} = sent, P(\pi,2)$

e) $\frac{dy}{dt} = e^{-t}, P(0,1)$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}, P(1,1)$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(x-1)}, P(2,1)$

h) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, P(1,\pi/4)$

i) $\frac{dy}{dt} = lnt, P(1,1)$

j) $\frac{dy}{dx} = x^2e^{-t}, P(0,1)$

IMPORTANTE: Para corroborar que los gráficos están bien hechos pueden utilizar el software Geogebra. La función: CampoDirecciones(<f(x,y)>), grafica el campo de direcciones para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Para más detalles recurrir al tutorial de Geogebra.