Apunte 1-3:
APROXIMACIÓN GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN

No siempre es posible determinar explícitamente la solución de una ecuación diferencial(en nuestro caso aún no hemos aprendido ha hacerlo) pero siempre será posible tener una noción de la solución desde un punto de vista geométrico.

Sea $y' = f(x, y)$ una ecuación diferencial de primer orden, donde el segundo miembro es una función continua en una región R del plano XY.

Si $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial que mencionamos en un intervalo I, para cada valor $x_0 \in I, y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$ es la pendiente de la curva solución en el punto x_0. Es decir, $y = y(x)$ es una solución de $y' = f(x, y)$ sii la recta pendiente $f(x_0, y(x_0))$ es tangente a la gráfica de $y(x)$ para todo $x_0 \in I$.

Supongamos que en cada (x_0, y_0) de R dibujamos un segmento rectilíneo con pendiente $f(x_0, y_0)$; el conjunto resultante de segmentos rectilíneo se llama **campo direccional**. De este modo las curvas solución de la ecuación pueden describirse como curvas diferenciales en R cuya dirección en cada punto coincide con la dirección del segmento rectilíneo. Cada curva solución se denomina **curva integral**. En otras palabras, las curvas solución son las trayectorias o líneas de flujo determinadas por el campo direccional de la ecuación, y las trayectorias forman el conjunto o familia de curvas integrales.

En resumen, dada la forma (no necesariamente lineal) de f, el problema consiste en encontrar una solución particular de una ecuación diferencial dada, cuya curva solución pase por el punto $(x_0, y_0) \in R$ (**problema del valor inicial**), para esto es necesario determinar de que manera podemos utilizar la información que nos entrega la ecuación diferencial sin tener que recurrir a los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, utilizando herramientas de cálculo básico para entender el comportamiento de la ecuación objetivo $y(x)$:

Ejemplo 1. *Analizar el comportamiento de la solución de la ecuación:*

$$y' = 2x$$

En este caso es muy simple resolver la ecuación diferencial ya que es simplemente integrando. AL hacerlo tenemos que $y = x^2 + c$. Luego, la curvas solución de $y' = f(x, y) = 2x$ forman una familia uniparamétrica de parábolas, es decir, que depende sólo de un parámetro (el parámetro x).

Pero...¿Qué información es posible obtener de $y' = 2x$?

Lo primero que podemos analizar son los puntos extremos de la función objetivo, que concuerdan exactamente con aquellos puntos donde $y' = f(x, y) = 0$, con lo cual se cuenta con un extremo en $x = 0$ (recordar que los puntos extremos pueden ser máximos locales, mínimos locales, o puntos de inflexión).

La derivada de una función también nos indica si una función crece o decrece en una vecindad del punto x_0, esto es posible verlo mediante el Teorema del valor medio de Lagrange que dice que si $y(x)$ (la función objetivo) es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y diferenciable (derivable en el caso de una función que depende sólo de x) en (a, b) entonces existe c tal que:

$$\frac{y(b) - y(a)}{b - a} = y'(c)$$

Si consideramos a y b cercanos entre sí y suponiendo que $a < b$ y la función es creciente, es decir, $y(a) < y(b)$ vemos que el signo de la derivada es positivo, por lo tanto, si la derivada crece, la función también lo hace. Por lo tanto, el signo de la derivada nos sirve para saber en qué regiones, la función objetivo,$y(x)$, crece y decrece.

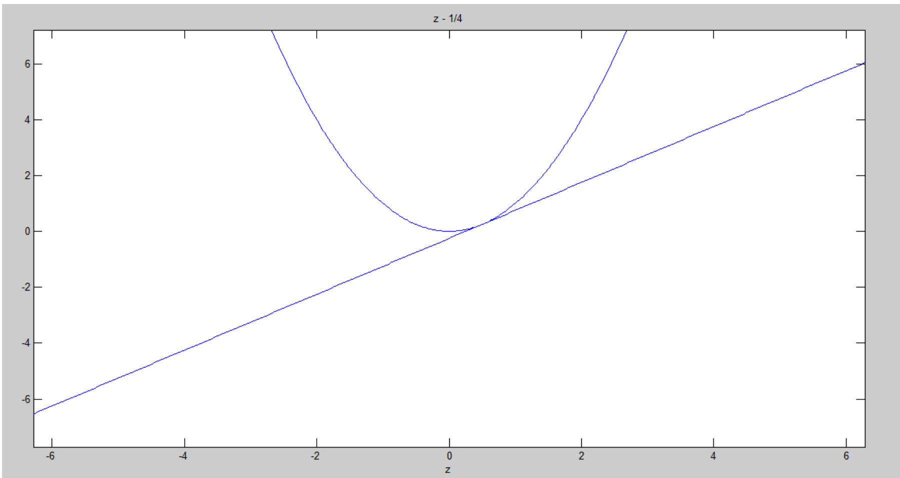
Continuando con el ejemplo, la función objetivo crece cuando $x > 0$ y decrece cuando $x < 0$, ($x = 0$ extremo).

Luego, también podemos determinar la existencia de simetrías a partir de la derivada, por ejemplo, sabemos que una función es par cuando $f(x) = f(-x)$ ó impar cuando $f(-x) = -f(x)$ y que son simétricas respecto al eje x en el caso de una función par, y al origen para las funciones impares. Sin embargo se puede probar que la derivada de una función par es impar, y viceversa, por lo tanto, podemos decir, sin temor a equivocarnos, que en nuestro ejemplo, la función objetivo es par.

Podemos obtener un poco más de información si derivamos la ecuación diferencial, pues ésta nos da información sobre la concavidad de la función objetivo.

¿Concavidad?

Supongamos que tenemos una función f, continua y diferenciable dos veces. Consideramos una porción muy pequeña de la curva, el signo de la derivada segunda indica si la curva pasa "por arriba" o "por debajo" de la recta tangente a ese punto. En la figura, vemos un ejemplo de concavidad hacia arriba, es decir, que la curva pasa "por arriba" de la recta tangente a ese punto. En nuestro ejemplo podemos ver que el signo de la derivada es siempre positivo, por lo tanto la concavidad es hacia arriba.



Por último, podemos determinar la presencia de singularidades, es decir, puntos no definidos en la derivada. En nuestro ejemplo no hay singularidades.

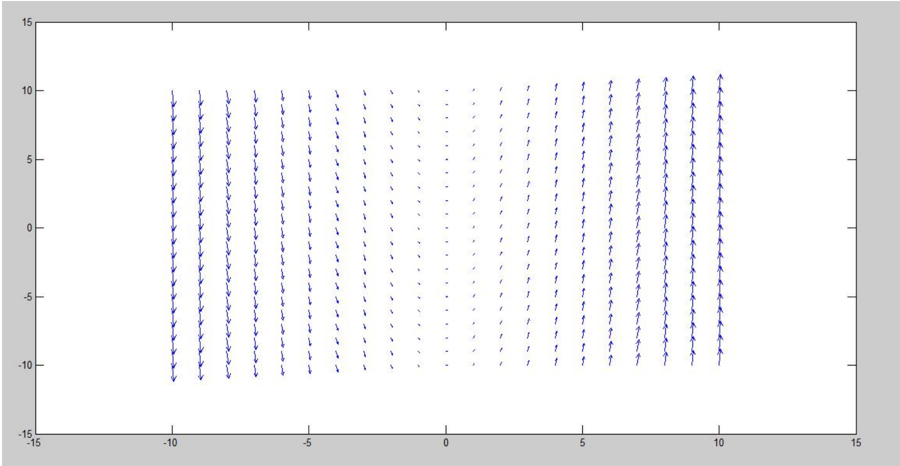
Si tenemos $y' = f(x, y) = \frac{1}{x}$, como f representa la pendiente de la recta tangente en x, deberíamos preguntarnos:¿qué ocurre con esta función en el punto $x = 0$?. Lo primero que nos sugiere es que la pendiente en ese punto es infinito, esto no nos dice mucho. Sin embargo, considerando el límite cuando x tiende a cero se puede ver que f crece sin límite, mostrando que la singularidad de f también es una singularidad de y. Con este mismo análisis podemos ver que el tipo de singularidad es una discontinuidad de primera especie.

Finalmente, queda el método de las isoclinas, que consiste en encontrar los puntos del plano por lo que pasa una solución con pendiente constante $f(x, y) = m$.

Definición 1. *Una isoclina correspondiente a una constante m de una ecuación diferencial, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ son los puntos que satisfacen $f(x, y) = m$*

Volviendo a nuestro ejemplo: $\frac{dy}{dx} = 2x = m$, entonces $x = \frac{m}{2}$, dado el punto x en el eje, el valor de tangente que obtenemos para todo valor de y es $2x$. Para ver que tangente tiene cada punto, en este caso podemos hacer una tablita para luego graficar las pendientes:

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
m	2*(-2)=-4	2*(-1)=-2	2*(-0.5)=-1	2*(0)=0	2*(0.5)=1	2*(1)=2	2*(2)=4



Veamos un ejemplo en el cuál las isoclinas dependen tanto de x como de y.

Ejemplo 2. *Determinar las isoclinasd de* $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

Para determinar las isoclinas debemos plantear: $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 = m$ luego para cada punto (x, y) podemos determinar las isoclinas, que son, de hecho, circunferencias de radio $\sqrt{m}$.

Es decir, a cada punto del plano x, y podemos asociarle un segmento de pendiente $f(x, y)$. De esta manera obtendremos un campo de direcciones en la región en la cuál esté definida f. Se denominan entonces, isoclinas a las curvas que unen los puntos en los que la pendiente es constante.

No siempre es sencillo dibujar las isoclinas y por tanto las soluciones. El siguiente ejemplo muestra cuales son los pasos más adecuados para llevarlo a cabo, aunque cada situación puede necesitar un estudio particular. Sea $y' = y - x$ una ecuación lineal. Las isoclinas son muy sencillas en este caso: $y - x = m$ son rectas de pendiente 1 y ordenada en el origen m, es decir la pendiente de las soluciones que pasan por ellas.