FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Probabilidades y Muestreo computacional (1)

INGENIERÍA DE SISTEMAS – 2022

¿Por qué probabilidades?

- En situaciones de aleatoriedad (azar), donde hay incertidumbre sobre el resultado del experimento

  $\rightarrow$ se puede asignar un valor (probabilidad) asociado al grado de certeza de que la variable aleatoria analizada tome un determinado valor

- En la generación y transmisión de información se utilizan modelos de probabilidades para realizar mediciones y estimaciones

Experimentos aleatorios

- En un **experimento aleatorio** el resultado depende del azar
- **Espacio muestral** E = conjunto de posibles resultados del experimento
- **Evento** o suceso → subconjunto de E

Ejemplo

1) Experimento: arrojar un dado

6 resultados posibles → $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

evento: "sale par" → $\{2, 4, 6\}$ 3 casos favorables (de los 6 posibles)

2) Experimento: arrojar dos dados

36 resultados posibles → $E = \{(1,1),(1,2),..,(2,1),(2,2),...,(6,6)\}$

evento: "suma 6" → $\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$ 5 casos favorables (de 36 posibles)

Probabilidad de un Evento
(Cálculo analítico)

Ejemplo

Se arrojan 2 monedas → E={CC, CS, SC, SS}
siendo las tiradas independientes

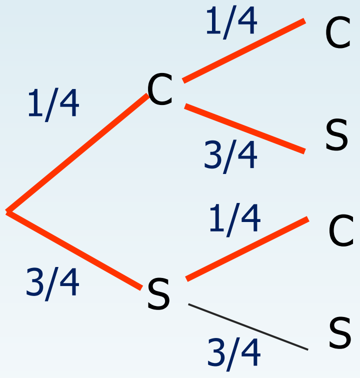
si hay equiprobabilidad:

$$P(A) = \frac{Nro.casos\ en\ que\ ocurre\ A}{Nro.total\ de\ casos}$$

1) Si son "normales": p(C)= p(S)=1/2

p(A= "al menos 1 cara")= 3 casos favorables = 0,75

2) Si están "pesadas", con p(C)=1/4 y p(S)=3/4



p(A= "al menos 1 cara") = p(CC) + p(CS) + p(SC)
= p(C).p(C) + p(C).p(S) + p(S).p(C)
= 1/4. 1/4 + 1/4. 3/4 + 3/4. 1/4 = 0,437

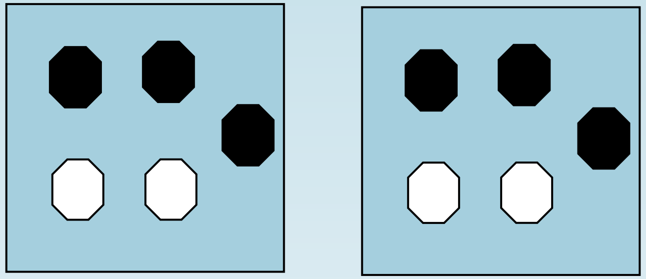
En este caso son independientes

Ejemplo

Se tienen 5 fichas: 3 negras (N) y 2 blancas (B)
Experimento: se saca una ficha, se devuelve y se extrae otra

"CON reposición"

E = {NN, NB, BN, BB}



1° extracción 2° extracción

$\Rightarrow$ **p(N)=3/5 y p(B)=2/5**

¿Cuál es la probabilidad de que salgan 2 fichas negras?

p(NN)= p(N). p(N) = 3/5 . 3/5 = 9/25

Son independientes
(*No importa qué resultado se dio antes porque se repone la ficha*)

Probabilidades Condicionales

- En algunos casos la información aportada por un acontecimiento cambia las probabilidades de ocurrencia de otros

SI

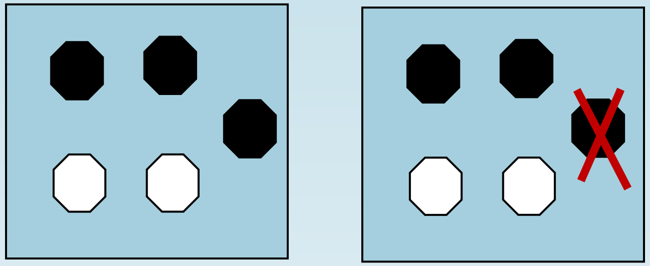
Es hombre? →

- En términos de probabilidades:
  - La probabilidad de ocurrencia de un evento A depende de la ocurrencia de otro evento B → probabilidad condicional P(A/B)

Ejemplo

Se tienen 5 fichas: 3 negras (N) y 2 blancas (B)
Experimento: Se sacan dos fichas a la vez

"SIN reposición"



1° extracción

p(N)=3/5   y   p(B)=2/5

2° extracción

Si en la 1° extracción salió N

p(N)=2/4   y   p(B)=2/4

¿Cuál es la probabilidad de que salgan 2 fichas negras?

$$p(NN)= p(N).\, p(N/N) = 3/5 \,.\, 1/2 = 3/10$$

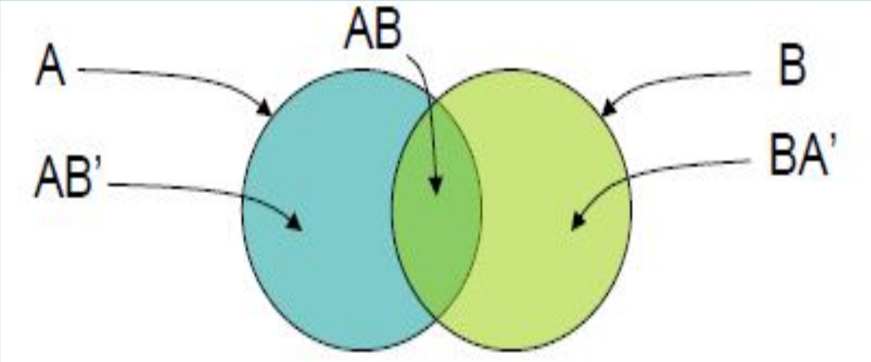
Son dependientes
(*el resultado de la 1° extracción condiciona el resultado de la 2°*)

Propiedades de la Probabilidad

$E_1=\{A_1, A_2, A_3,....,A_i,...,A_N\}$ $E_2=\{B_1, B_2, B_3,....,B_i,...,B_M\}$

$\mathbf{0 \le p(A_i) \le 1}$ *(ídem B)*

$\mathbf{\Sigma_i\, p(A_i) = 1}$ *(ídem B)*



$\mathbf{p(A \cup B)= p(A)+p(B) - p(AB)}$ *regla de la adición*

Si A y B son disjuntos o excluyentes $\rightarrow$ p(AB)= 0

y entonces: p(A U B)= p(A)+p(B)

Si A y B son independientes p(B/A) =P(B) $\rightarrow$ B no depende de A

Distribuciones de Probabilidad
Conjunta - Condicional - Marginal

Probabilidad condicional

Probabilidad Conjunta

$p(B/A)= p(AB)/p(A) \; ; p(A)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad p(AB)= p(A) . p(B/A)$

$p(A/B)= p(AB)/p(B) \; ; p(B)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad p(AB)= p(B) . p(A/B)$

Cuando A y B son independientes: $p(B/A)= p(B) \; ; \; p(A/B)= p(A) \rightarrow p(AB)= p(A).p(B)$

Si se cumplen estas expresiones: A y B son independientes

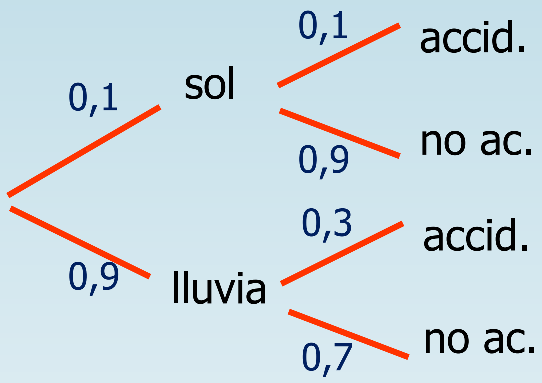
$$p(A/B)= \frac{p(A) . p(B/A)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$p(B)= \Sigma_k \, p(A_k).p(B/A_k)$ →**Probabilidad marginal**

Ejemplo

En una región el 90% de los días son lluviosos. Luego de cierto estudio se pude determinar que en un día lluvioso, la probabilidad de que se produzca un accidente automovilístico es de 0,3. En cambio, si el día es soleado dicha probabilidad se reduce a 0,1.



representación de árbol

Probabilidad condicional P(**A**ccidente/**C**lima)

P(A/C)	**sol**	**lluvia**
accid.	0,1	0,3
no ac.	0,9	0,7

representación matricial

Si se produjo un accidente ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en día de lluvia?

Se trata de una probabilidad “a posteriori”: $P(\text{lluvia/accid.}) = \dfrac{P(\text{lluvia})\ P(\text{accid./lluvia})}{P(\text{accid.})} \approx 0{,}9642\ldots$

Distribuciones de Probabilidad
Conjunta - Condicional - Marginal

Probabilidad Conjunta

P(AB)	A_1	...	A_i	...	A_n
B_1					
...					
B_j			$\mathbf{P(A_iB_j)}$		
...					
B_m					

Prob. marginal

P(B)
$\mathbf{P(B_j)=\Sigma_k\, p(A_kB_j)}$

P(A)			$\mathbf{P(A_i)=\Sigma_h\, p(A_iB_h)}$		

Probabilidad marginal

Propiedades

$\sum_k p(A_k)=1$

$\sum_h p(B_h)=1$

$\sum_{k,h} p(A_kB_h)=1$

$1 \le k \le n \,;\, 1 \le h \le m$

Distribuciones de Probabilidad
Conjunta - Condicional - Marginal

P(B/A)	A_1	…	A_i	…	A_n
B_1					
…					
B_j			**$P(A_iB_j)/P(A_i)$**		
…					
B_m					

$\sum_h p(B_h/A_i)=1$ para $1 \leq h \leq m$

$\sum_k p(A_k/B_j)=1$

para $1 \leq k \leq n$

Importante: tener en cuenta la dirección de las flechas para interpretar los valores de probabilidad

P(A/B)	A_1	…	A_i	…	A_n
B_1					
…					
B_j			**$P(A_iB_j)/P(B_j)$**		
…					
B_m					

Variable Aleatoria o Estocástica

- Algún valor numérico asociado al resultado de un experimento aleatorio

Ejemplo

Se tiran 2 dados

E= {(1,1), (1,2) …., (6,6)}

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

variable aleatoria:

S = suma de los valores de los 2 dados

P(S=2)= P(1,1) = 1/36

P(S=3)= P(1,2)+P(2,1)= 2/36

P(S=4)= P(1,3)+P(2,2)+P(3,1)= 3/36

…..

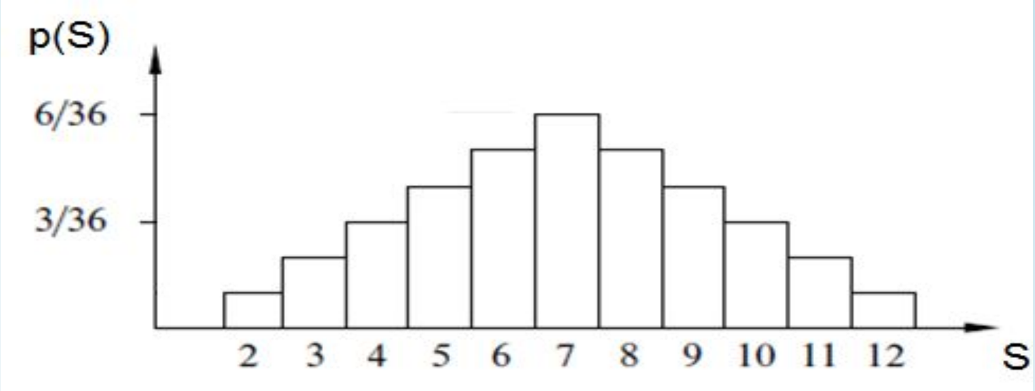
S	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(S)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

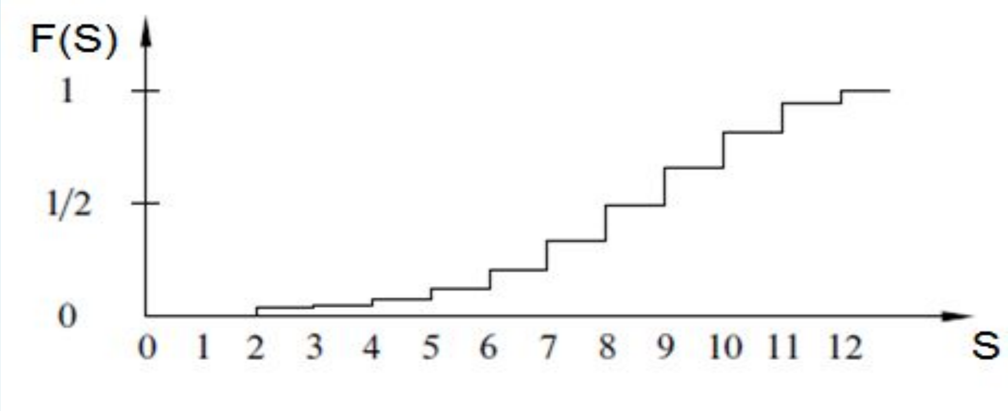
Variable Aleatoria o Estocástica

Ejemplo

S = suma de dos dados

S=	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(S)=	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36





Distribución de probabilidad (caso discreto)

$$\sum_x p(x) = 1$$

Función de densidad de probabilidad (continuo)

$$\int_x f(x)dx = 1$$

Función acumulada de probabilidades F(x)

$$F(x_2) - F(x_1) = \sum_{x=x_1}^{x_2} p(x)$$ (discreto)

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x=x_1}^{x_2} f(x)dx$$ (continuo)

Indicadores

- **Promedio o media**

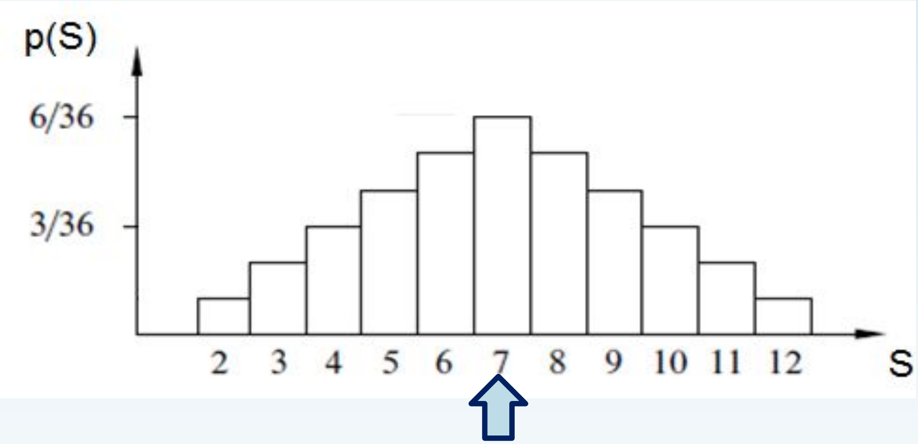
Caso discreto: $< X >= \sum_x x\, p(x)$

Caso continuo: $< X >= \int_x x\ f(x)dx$

Ejemplo

S = suma de dos dados

S=	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(S)=	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



<S>=2. 1/36 +3. 2/36+ 4. 3/36+…. +12. 1/36= 252/36= 7

Indicadores

- **Varianza**

$$\boxed{\sigma_x^2 = \sum_x (x - <X>)^2\, p(x)}$$

$$= \sum_x (x^2 - 2x<X> + <X>^2)\, p(x) =$$

$$= \sum_x x^2 p(x) - 2<X> \sum_x x\, p(x) + <X>^2 \sum_x p(x) =$$

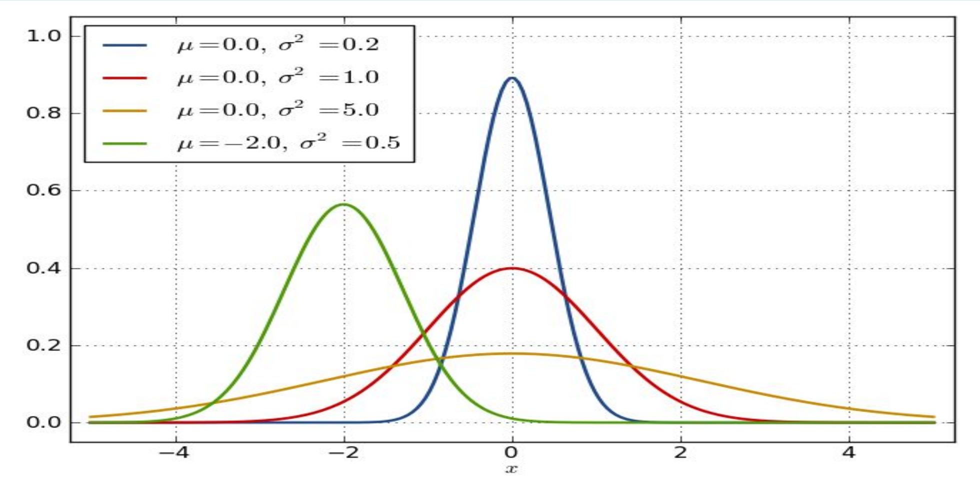
$$= <x^2> - 2<X>^2 + <X>^2$$

$$\boxed{\sigma_x^2 = <x^2> - <X>^2}$$

- **Desvío estándar**

$$\boxed{\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}}$$

→ mide la dispersión de los datos alrededor de la media



Ejemplo

S = suma de dos dados

S=	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(S)=	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

<S> = 7

$\sigma_S = \sqrt{5,833} \approx 2,415$

Bibliografía

MacKay D., **Information Theory, Inference, and Learning Algorithms**, Cambridge University Press, 2003

Papoulis A., **Probability Random Variables and Stochastic Processes**, McGraw-Hill, 1991

Spiegel M., Schiller J., Srinivasan R.A., **Probability and Statistics** (Schaum´s Outlines), 4° ed., McGraw-Hill Education, 2013

FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO
DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Probabilidades y Muestreo computacional (2)

INGENIERÍA DE SISTEMAS – 2022

Probabilidad de un Evento
por muestreo

Si un experimento se repite un gran número de veces
→ la probabilidad frecuencial del evento A se aproxima al valor teórico

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{\# A}{N}$$

Por ley de los grandes números

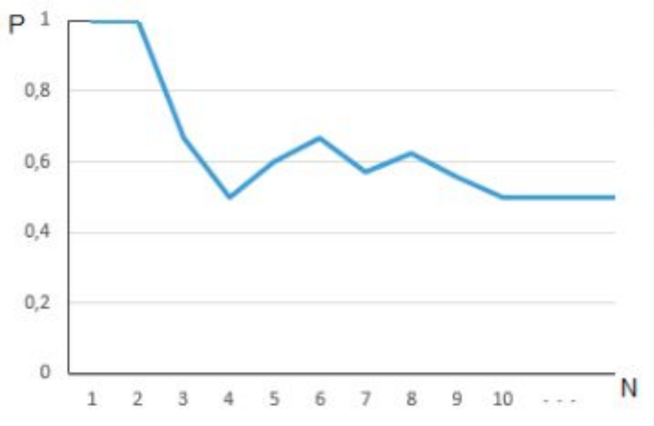
#A= Número de veces que ocurre A (caso favorable)

N= Número de veces que repito el experimento

Ejemplo

Arrojar un dado: E={1, 2, 3, 4, 5, 6} → Obtener P(número par)

dado		6	2	1	3	4	2	1	2	4	3	...
#muestras	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
#exitos	0	1	2	2	2	3	4	4	5	5	5	...
~P(par)		1	1	2/3	1/2	3/5	2/3	4/7	5/8	5/9	1/2	...



Muestreo Computacional
Motor de Montecarlo

- Método para **simular muestreos aleatorios** computacionales
- Esquema general del algoritmo:

Calcular por simulación valor/es

```
{  N=0;                          //nro de experimentos
   exitos=0;                     // nro de casos favorables
    .....
   REPETIR EXPERIMENTO ( ...... )  ———>  N→∞   ?
   {
            1. Generar una muestra al azar para el experimento
            2. Verificar si la muestra es un caso favorable → exitos++
            3. Incrementar la cantidad de experimentos → N++
            4. Calcular valor/es buscado/s (usando exitos y N)
   }
   retornar el/los valor/es buscado/s;
}
```

Muestreo Computacional
Generar muestra aleatoria

Ejemplo

"Arrojar un dado": E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

cada resultado tiene probabilidad 1/6

¿Cómo generar un "dado virtual"?

- Dividir el rango según la distribución de **probabilidades acumuladas** para cada valor del dado
- Generar "muestras" mediante un número aleatorio en el rango [0..1) - función *rand()*

1	2	3	4	5	6

0 1/6 2/6 3/6 4/6 5/6 1

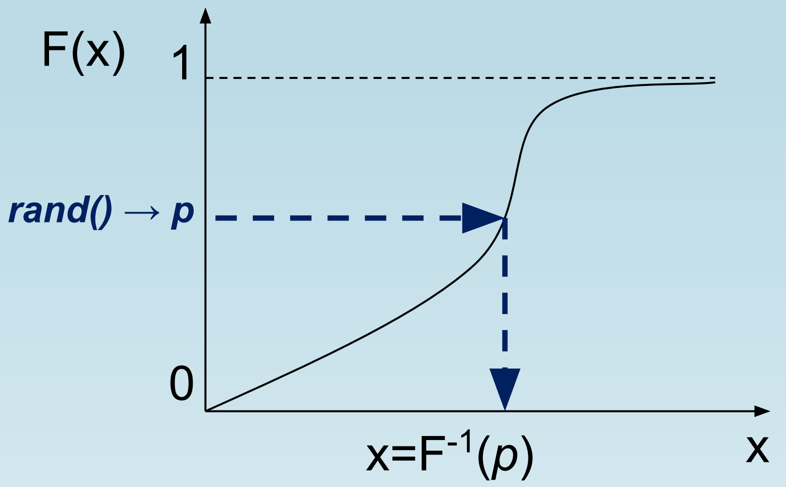
p= *rand()*

- p $\in$ [0.. 1/6) $\Rightarrow$ salió 1
- p $\in$ [1/6.. 2/6) $\Rightarrow$ salió 2
- ...

Muestreo Computacional
Generar muestra aleatoria

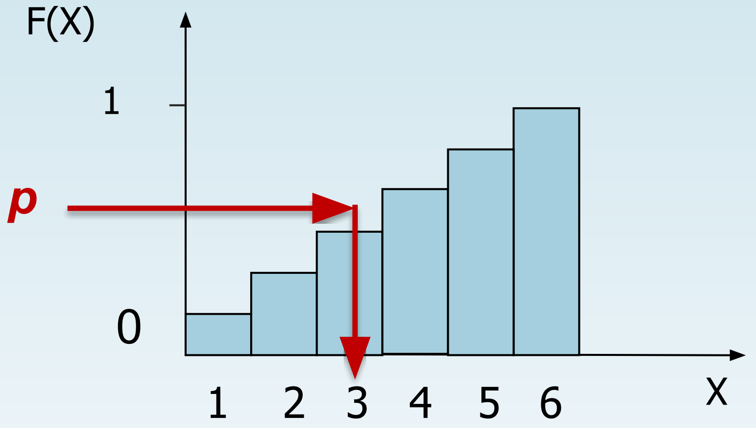
Simular la generación aleatoria

- obtener números aleatorios (*rand*)
- generar "muestras" según la distribución de probabilidades (usar la **función de probabilidad acumulada**)



Ejemplo

```
int Arrojar_dado ()
{  prob_acum={1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 1}
   p= rand ()
   for (i=1 to 6)
      if (p <prob_acum[ i ])
         return i      //valor del dado
}
```



- Se obtiene una muestra de valores independientes para X con la distribución buscada
- El generador debe ajustarse al problema considerado (según sus posibles salidas y probabilidades acumuladas)

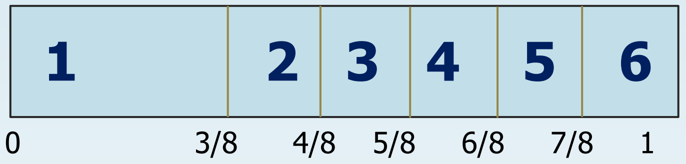
Muestreo Computacional
Generar muestra aleatoria

Simular la generación aleatoria

Un dado pesado tiene 2, 3, 4, 5, 6 con probabilidad 1/8

- ¿ Cuál es la probabilidad de salir el 1?
- ¿Cómo sería el motor de Montecarlo para este ejemplo?

Ejemplo




```
int Arrojar_dado_pesado ()
{  prob_acum={3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, 1}
    p= rand ()
    for (i=1 to 6)
        if (p <prob_acum[ i ])
            return i       //valor del dado
}
```

Muestreo Computacional
Motor de Montecarlo

Ejemplo

Calcular la probabilidad de "suma 6", si se arrojan dos dados

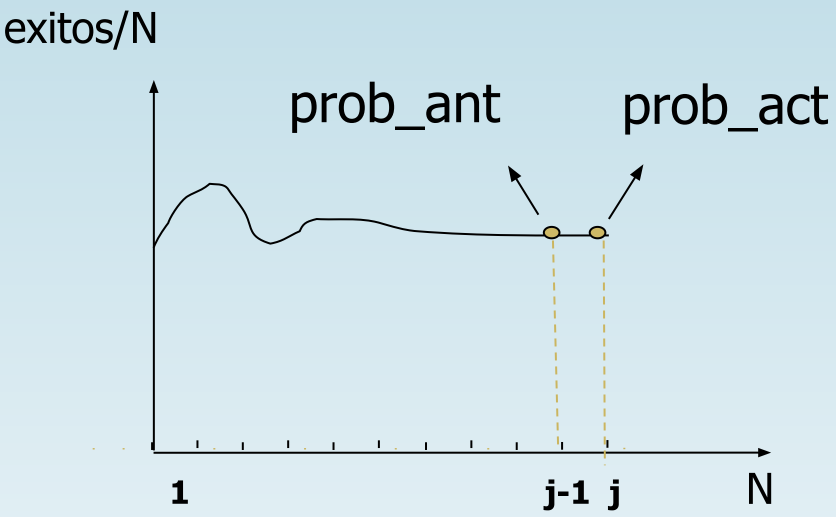
```
float Calcular_Prob_Suma6 ()
{ exitos=0;   N=0; …
  REPETIR EXPERIMENTO
  {  x= Arrojar_dado ()
     y= Arrojar_dado ()
     if (x+y==6)
          exitos++
     N++
     prob = exitos / N
  }
  return prob
}
```

¿hasta cuándo se debe repetir el experimento?

hasta asegurar la convergencia del valor prob

Muestreo Computacional
Convergencia

¿Hasta cuándo se debe repetir el experimento?



- En cada iteración del muestreo chequear la **condición de convergencia**:

  |prob_ant - prob_act| < ξ convergencia absoluta

  |prob_ant - prob_act| /prob_ant < ξ convergencia relativa

  ξ es el umbral de error (debe ser una constante pequeña)

- Detener el muestreo si la condición se verifica

Nota: Para evitar una posible "convergencia temprana" se puede fijar un número mínimo de muestras generadas antes de empezar a verificar la condición

Ejemplo

Obtener la probabilidad de un evento

Calcular la probabilidad de "suma 6", si se arrojan dos dados

```
float Calcular_Prob_Suma6 ()
{  exitos=0,  N=0
   prob_ant= -1,  prob_act= 0

   WHILE (not converge (prob_ant, prob_act ))(*)
  {   x= Arrojar_dado ()
      y= Arrojar_dado ()
      IF (x+y == 6)    //condición favorable
             exitos++     //casos favorables
      N++       //casos totales
      prob_ant = prob_act
      prob_act = exitos / N
  }
  return prob_act
}
```

```
int Arrojar_dado ()
{ probacum={1/6,2/6,3/6,4/6,5/6,1}
  p=rand ()
  for (i=1 to 6)
     if (p <probacum[ i ])
         return i
}
```

```
BOOL converge (ant, act)
{  if ( |ant - act| )< ξ )    // ξ →cte pequeña
       return true
   return false
}
```

(*) se puede agregar condición de mínimo de tiradas
OR (N < MIN_EXPERIMENTOS)

Ejemplo

Obtener una distribución de probabilidades

Se arrojan 2 dados → S es la suma de 2 dados, encontrar P(s)

```
[float] Calcular_ProbS ()
{  N=0;
   exitos [12]  inicializado en 0
   PS_ant [12]  inicializado en -1
   PS_act [12]  inicializado en 0
  WHILE (not converge (PS_ant, PS_act)) (*)
  { x1= Arrojar_dado () ,  x2= Arrojar_dado ()
     S= x1 + x2
     exitos [S]++
     N++
     for(j=2 to 12)
     {   pS_ant [j]= pS_act [j]
         pS_act [j]= exitos [j] / N
     }
  }
  return pS_act
}
```

```
int Arrojar_dado ()
{
   prob_acum={1/6,2/6,3/6,4/6,5/6,1}
   p= rand ()
   for (i=1 to 6)
      if (p <prob_acum[ i ])
         return i
}
```

```
BOOL converge (Pant, Pact)
{
   for (i=2 to 12)
       if ((|Pant [i] – Pact[i]| )> ξ )   ξ →cte. pequeña
           return false
    return true
}
```

verificar todo el vector (distribución de probabilidades completa)

(*) se puede agregar condición de mínimo de tiradas

Ejemplo

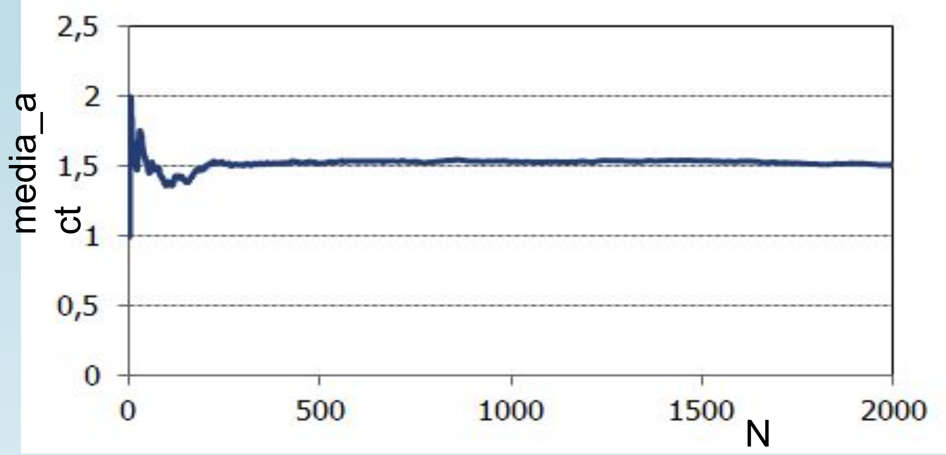
¿Cómo obtener la media de una distribución?

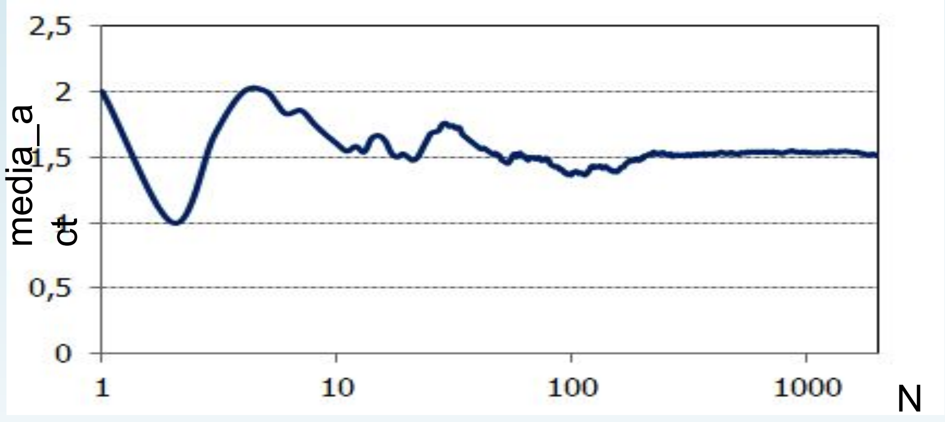
$$< X >= \frac{\sum_i x_i}{N}$$

N es el número de muestras

```
float CalcularMedia ()
{
    suma=0
    N=0
    media_ant=-1
    media_act= 0

   WHILE (not converge (media_ant, media_act)…)
   {
      x= generarX ()    // mediante función aleatoria
      suma=suma + x
      N++
      media_ant= media_act
      media_act= suma/ N
   }
   return media_act
}
```

Gráfico de convergencia





escala logarítmica

Indicadores: Muestreo Computacional

	Cálculo Analítico	Muestreo computacional
Media	$< X >= \begin{cases} \sum_x x\, p(x) \\ \int_x x\ f(x)dx \end{cases}$	$< X >= \dfrac{\sum_i x_i}{N}$
Varianza	$\sigma_x^2 = \sum_x (x - < X >)^2\ p(x)$ $\sigma_x^2 =< x^2 > - < X >^2$	$\sigma_x^2 = \dfrac{\sum_i (x_i - \sum_i \frac{x_i}{N})^2}{N}$
Desvío estándar	$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{< x^2 > - < X >^2}$	$\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum_i (x_i - \sum_i \frac{x_i}{N})^2}{N}}$

N es el número de muestras

Muestreo Computacional

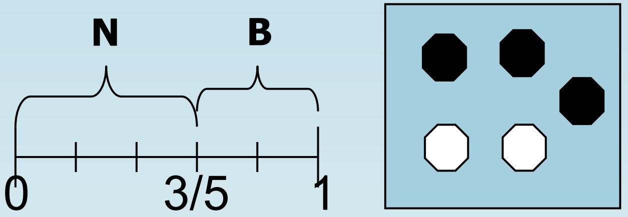
Motor de Montecarlo

¿Cómo simular eventos dependientes? (Probabilidades condicionales)

Ejemplo

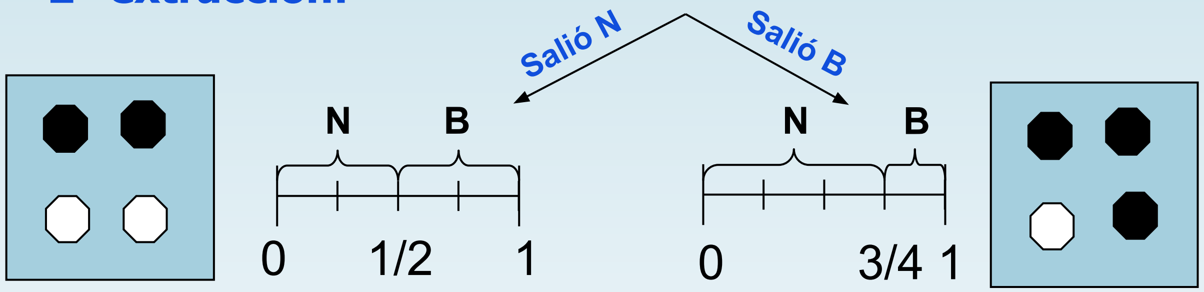
Se tienen 5 fichas: 3 negras (N) y 2 blancas (B)
Se sacan dos fichas a la vez

1° extracción:




```
int Primera_Extraccion ()
{ prob_acum= [3/5,1]
   x= rand ()
   for (i=0 to 1)
      if (x <prob_acum [i])
         return i   /*0 es negra 1 es blanca*/
}
```

2° extracción:




```
{ ...
    B1= Primera_Extraccion ();
    B2= Segunda_Extraccion ( B1 );
... }
```

```
int Segunda_Extraccion (int B1)
{  matriz_acum= [1/2, 3/4]
                [ 1 ,  1 ]
 /*columna 0 salió Negra, columna 1 salió Blanca*/
   x= rand ()
   for (i=0 to 1)
      if (x <matriz_acum[i][B1])
         return i
}
```

Ejemplo

¿Cómo simular eventos dependientes?

Se tienen 5 fichas: 3 negras y 2 blancas - Se sacan dos fichas a la vez
Obtener la probabilidad de que ambas sean Negras (se considera 0 negra, y 1 blanca)

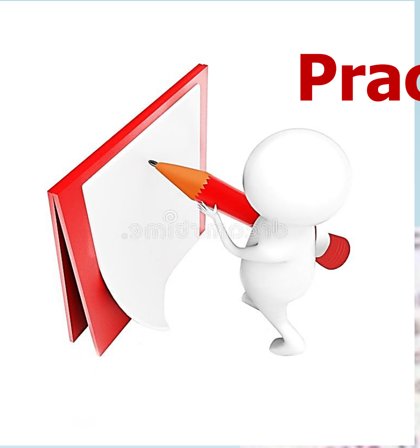
```
float Calcular_Prob_2N ()
{  exitos= 0; N= 0;
   prob_ant= -1; prob_act= 0;

 WHILE not converge (prob_ant, prob_act) (*)
 {
     f1= Primera_Extraccion ();
     f2= Segunda_Extraccion (f1);
     if (f1==0 and f2==0)
            exitos++;
     N++;
     prob_ant= prob_act;
     prob_act= exitos / N;
  }
  return prob_act;
}
```

(*) agregar condición: OR (N < MIN_EXPERIMENTOS)

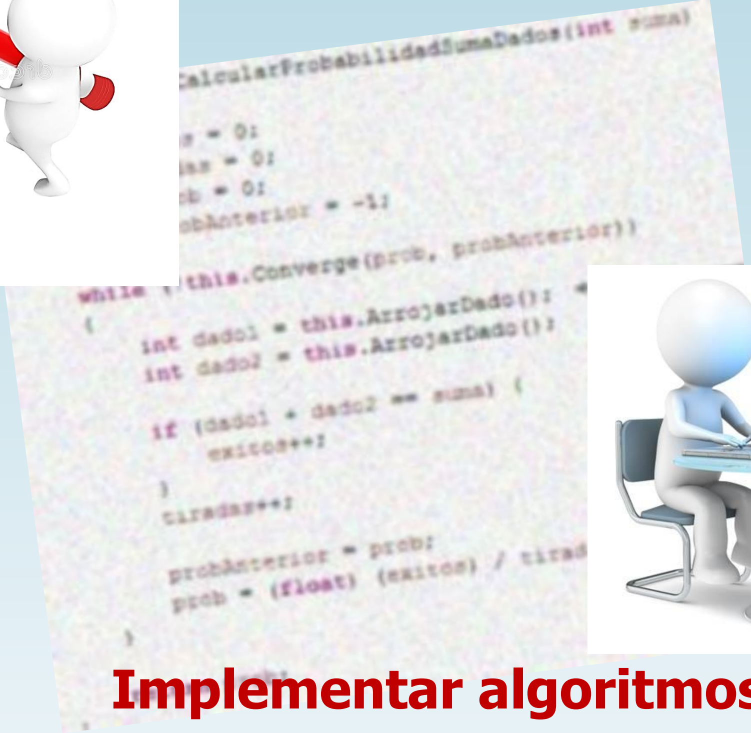
```
int Primera_Extraccion ()
{    prob_acum= [3/5,1]
      x=rand ();
     for (i=0 to 1)
        if (x <prob_acum [i])
               return i    //0 es Negra, 1 es Blanca
}
```

```
int Segunda_Extraccion (int f_ant)
{ matriz_acum= [1/2, 3/4 ]  //columna 0 salió Negra
                [  1  ,  1  ]  //columna 1 salió Blanca
     x= rand ();
     for (i=0 to 1)
         if (x <matriz_acum[i][f_ant])
               return i     //0 es Negra, 1 es Blanca
}
```

```
BOOL converge (ant, act)
{  if ( |ant - act| )< ξ )      // ξ →cte pequeña
       return true;
   return false;
}
```



Practicar ejercicios



Interpretar resultados

Implementar algoritmos

Evaluar convergencia

Consultar dudas!

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

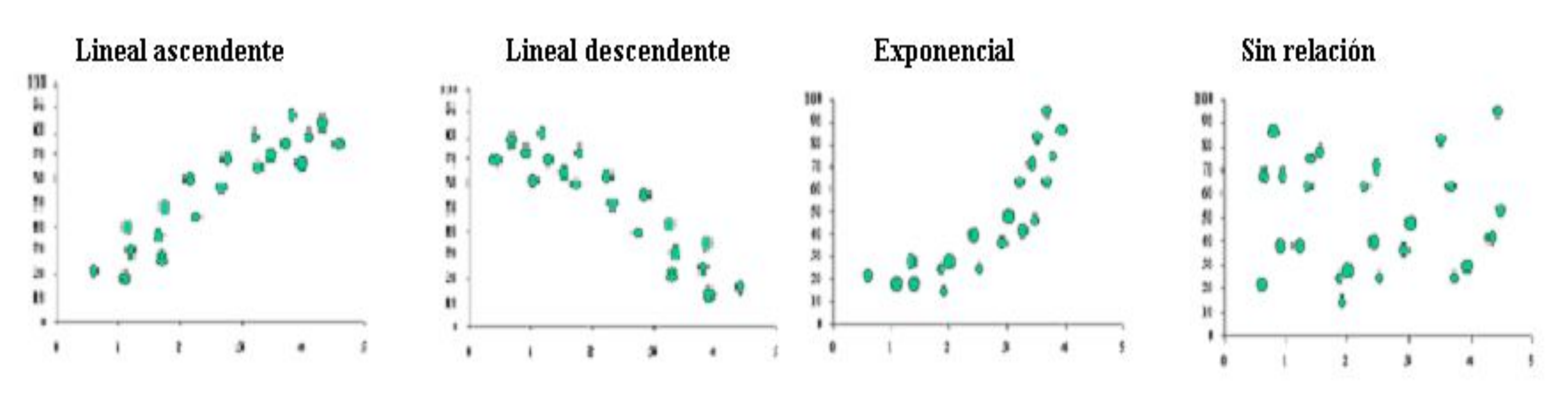
Probabilidades y Muestreo computacional (3)

INGENIERÍA DE SISTEMAS – 2022

Relación entre 2 variables aleatorias

¿Cómo evaluar el comportamiento o relación entre dos v.a. A y B?
(su grado de acople o aporte de información de una respecto de la otra)

- **Diagrama de dispersión:** gráfico de los pares (A,B) con P(A,B)>0, o de las observaciones (a_i,b_j), genera una **"nube de puntos"** que permite visualizar la relación existente entre A y B



- **Indicadores (correlación, covarianza, …):** valores indicativos de la relación, tendencia e intensidad de la relación entre las variables A y B

Relación entre 2 variables aleatorias
Covarianza y Correlación

La covarianza y la correlación cuantifican la relación (lineal) entre las variables

Covarianza

$$\boxed{CovAB = \sum_A \sum_B (A - < A >)(B - < B >)\ \ p(AB)}$$

<A> y <B>: valores medios de A y B respectivamente

$$= \sum_A \sum_B A\, B\, p(AB) - < B > \sum_A A \underbrace{\sum_B p(AB)}_{P(A)} - < A > \sum_B B \underbrace{\sum_A\ p(AB)}_{P(B)} + < A >< B > \underbrace{\sum_A \sum_B\ p(AB)}_{1}$$

$$= < AB > - < B >< A > - < A >< B > + < A >< B > = \boxed{< AB > - < A >< B >}$$

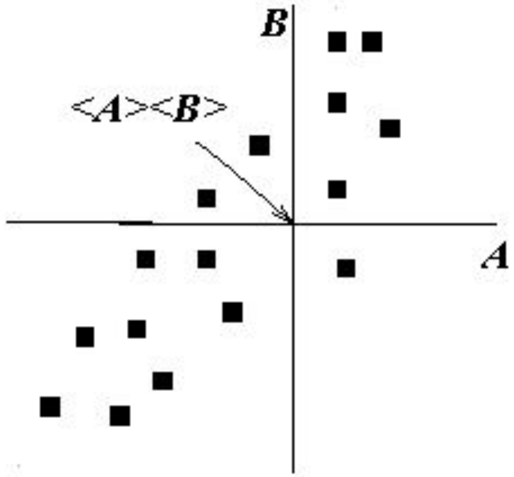
Correlación

$$\boxed{< AB >= \sum_A \sum_B A\, B\, p(AB)}$$

Desventaja: generan un valor no acotado y que depende de las unidades de las variables

Relación entre covarianza y nube de puntos

$$CovAB = \sum_{A}\sum_{B}(A - <A>)(B - <B>)\,p(AB) = <AB> - <A><B>$$

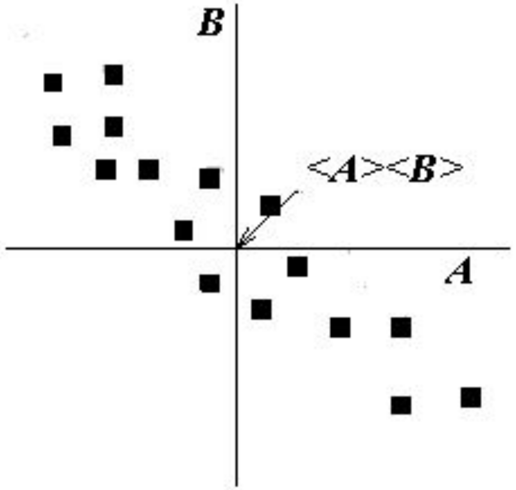


Cuando A crece, B crece

Las variables estan en fase

El valor de covAB es positivo

Hay Correlación lineal positiva

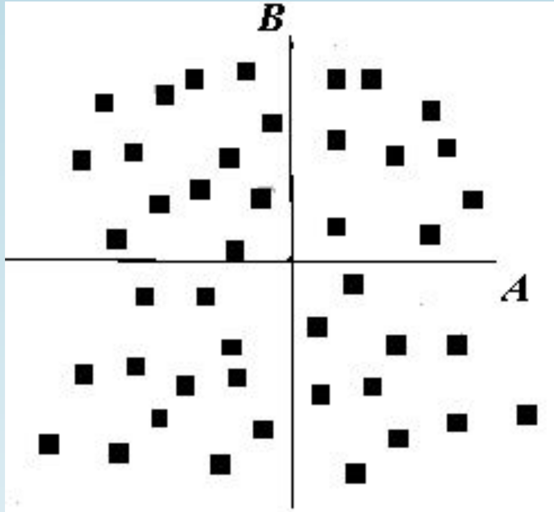


Cuando A crece B decrece

Las variables están en contrafase

El valor de CovAB es negativo

Hay Correlación lineal negativa



Si la CovAB=0 se cancelan los términos.
Puede haber relación entre ellas pero no lineal

Si son independientes A y B
<AB>=<A><B> siempre
CovAB=0

Relación entre 2 variables aleatorias
Coeficiente de correlación lineal

$$r_{AB} = \frac{Cov_{AB}}{\sigma_A \; \sigma_B} = \frac{<AB> - <A><B>}{\sqrt{<A^2> - <A>^2} * \sqrt{<B^2> - <B>^2}}$$

- Ventaja: r_{AB} tiene el mismo signo (positivo o negativo) que la Cov_{AB} , pero es adimensional

$$-1 \le r_{AB} \le 1 \begin{cases} r_{AB} = 1 & \text{A y B totalmente correlacionadas en forma positiva (lineal ascendente)} \\ r_{AB} = -1 & \text{A y B totalmente correlacionadas en forma negativa (lineal descendente)} \\ r_{AB} \sim 0 & \text{Las variables tienen poca o nula relación lineal} \end{cases}$$

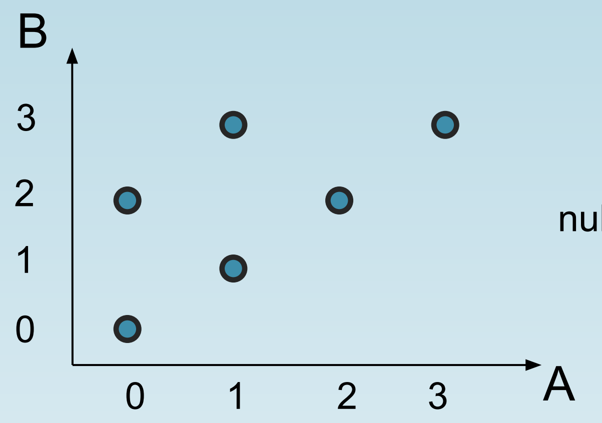
- Si A y B son independientes, entonces $Cov_{AB} = 0$ y también $r_{AB} = 0$

Ejemplo

Se tienen 2 v.a. A y B (distancias en *mm*) con distribución:

P(A,B)

AB	0	1	2	3	P(B) ↓
0	5/16	0	0	0	5/16
1	0	3/16	0	0	3/16
2	2/16	0	3/16	0	5/16
3	0	2/16	0	1/16	3/16
P(A)→	7/16	5/16	3/16	1/16	



nube de puntos

<A>= 0.875 mm

<B>=1.375 mm

$$\sigma_A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} = 0.927 \text{ mm}$$

$$\sigma_B = \sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2} = 1{,}111 \text{ mm}$$

$$\langle AB \rangle = 1.875 \text{ mm}^2$$

→ la tendencia es lineal ascendente (si A crece, B crece)

$$Cov_{AB} = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle = 0.671 \text{ mm}^2$$

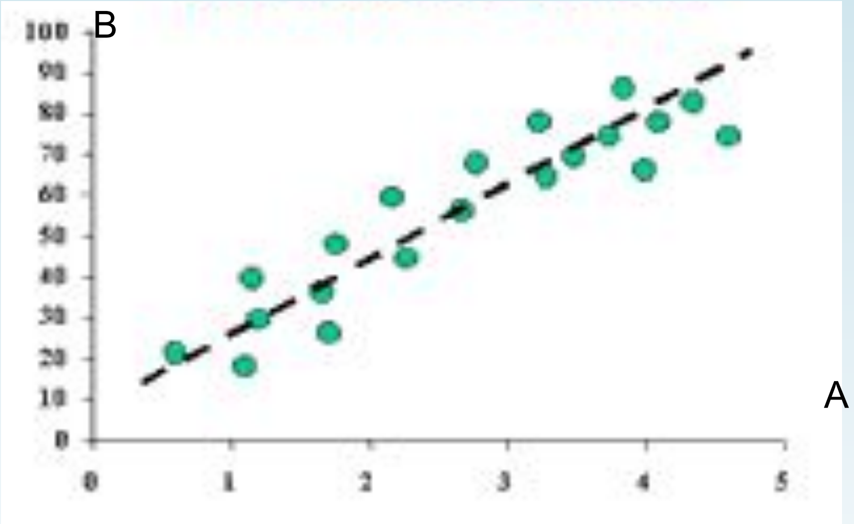
→ moderadamente correlacionados en forma positiva

$$r_{AB} = Cov_{AB} / \sigma_A \sigma_B = 0.65$$

→ conocer el resultado de una v.a. aporta información sobre la otra

Relación entre 2 variables aleatorias
Regresión lineal

Cuando una distribución sigue una tendencia lineal ascendente o descendente
→ se puede definir la ecuación de la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos
→ entonces dado un valor de A se puede estimar el valor B, usando la ecuación



Ec. Recta

$$\boxed{B' = c1\ A + c2}$$

variable independiente

variable dependiente

Relación entre 2 variables aleatorias
Regresión lineal

Medida del error (por aproximar):

$$E = \sum_A \sum_B (B' - B)^2 \, p(AB)$$

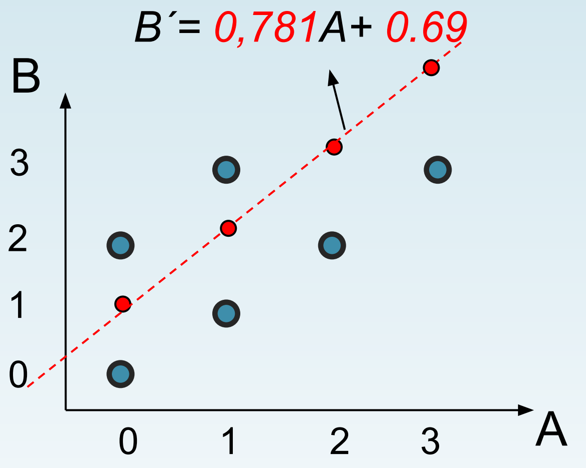
donde *B´= c1*A+c2* es el valor estimado de B

$$E = \sum_A \sum_B (c_1 * A + c_2 - B)^2 \, p(AB) = E(c_1, c_2)$$

Se busca minimizar la función de error E, resultando:

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= \frac{<AB> - <A><B>}{(<A^2> - <A>^2)} = \frac{Cov_{AB}}{\sigma_A^2} \\ c_2 &= <B> - c_1 <A> \end{aligned}}$$

$$c_1 = 0.781$$
$$c_2 = 0.69$$



los factores de la recta que mejor ajusta a la nube de puntos

Relación entre 2 variables aleatorias
Estimación probabilística

Se trata de estimar el valor de una v.a. B en función de otra A, a partir de la **distribución de probabilidades condicionales** asociada, buscando el menor error de estimación

estimación de B en función de A:

$$B'' = g(A) = \sum_{B} B\, p(B/A)$$

O la situación inversa para obtener estimación de A en función de B:

$$A'' = g(B) = \sum_{A} A\, p(A/B)$$

Ejemplo

Estimación probabilística

P(B/A) = P(A,B)/P(A)

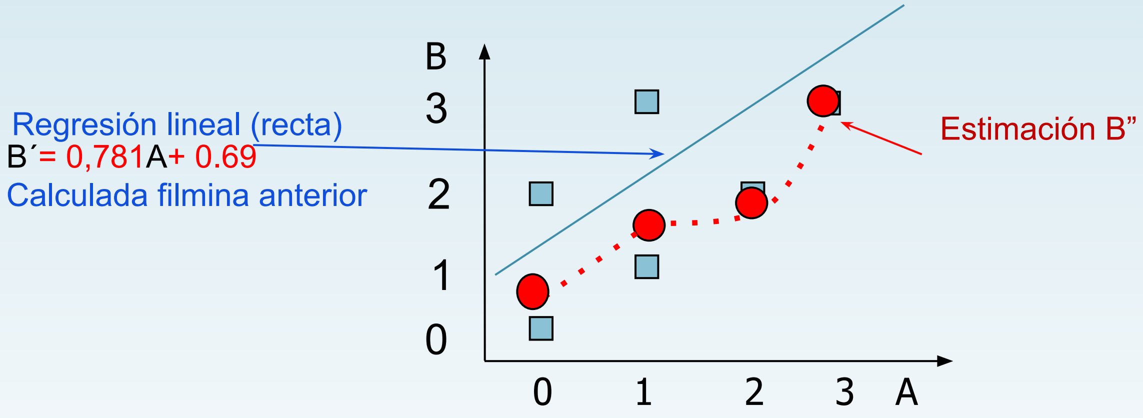
	P(AB)	A = 0	1	2	3
B	**0**	**5/16**	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**3/16**	**0**	**0**
	2	**2/16**	**0**	**3/16**	**0**
	3	**0**	**2/16**	**0**	**1/16**
	P(A) →	**7/16**	**5/16**	**3/16**	**1/16**

	P(B/A)	A = 0	1	2	3
B	**0**	**5/7**	**0**	**0**	**0**
	1	**0**	**3/5**	**0**	**0**
	2	**2/7**	**0**	**1**	**0**
	3	**0**	**2/5**	**0**	**1**

Estimación B″ a partir de A: →

Para A	0	1	2	3
B″	**4/7**	**9/5**	**2**	**3**

$$B'' = g(A) = \sum_{B} B\, p(B/A)$$



Tener en cuenta: se obtienen **"valores estimados"** para B (que pueden no coincidir con un valor posible de la variable)

Indicadores de 2 v.a.: Muestreo Computacional

	Cálculo Analítico	Muestreo computacional
Covarianza	$CovAB = < AB > - < A >< B >$	$CovAB = \frac{\sum a_i b_i}{N} - \frac{\sum a_i}{N} . \frac{\sum b_i}{N}$ *N* = número de experimentos a_i, b_i, valores en i-esimo experimento
Estimación	$B" = g(A) = \sum_B B\, p(B/A)$	$B" = g(A) = \frac{\sum b_i}{N_A}$ N_A = número de ocurrencias de A
Regresión Lineal	$B' = c_1 A + c_2$ $c_1 = \frac{Cov(A,B)}{\sigma_A^2}$; $c_2 = < B > - c_1 < A >$	Obtener c_1 y c_2 a partir de la covarianza, varianza y medias

Bibliografía

Papoulis A., **Probability Random Variables and Stochastic Processes**, McGraw-Hill, 1991

Spiegel M., Schiller J., Srinivasan R.A., **Probability and Statistics** (Schaum´s Outlines), 4° ed., McGraw-Hill Education, 2013

Cover T., Thomas J., **Elements of Information Theory**, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2006