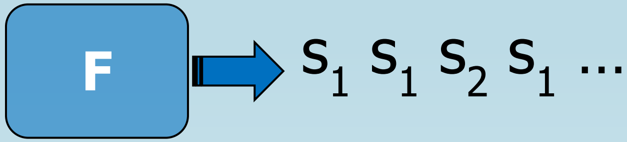
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Fuentes de Información (3)

INGENIERÍA DE SISTEMAS – 2022

Fuentes markovianas
¿qué se puede calcular en la aleatoriedad?



- La probabilidad de emitir cada símbolo s_i de la fuente *F*
  - en distintos instantes (V_t, t = 1, 2, ….)
  - en estado estacionario (V*)
  - en *t+n,* conocida la emisión en *t*
  - en *t+n por primera vez,* conocida la emisión en *t*

- El "tiempo medio de espera" entre sucesivas emisiones de s_i
- Indicadores de "acople" en la secuencia de símbolos de *F* o entre fuentes

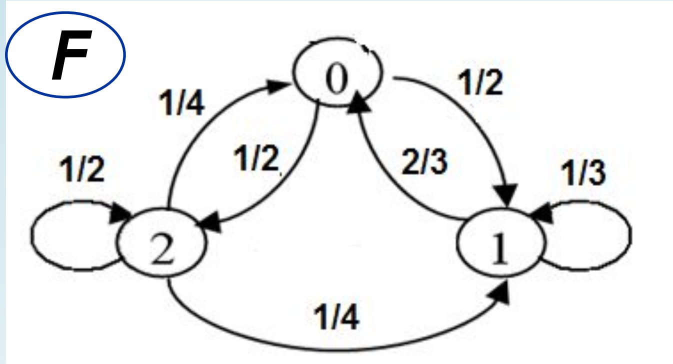
La emisión de símbolos de una fuente es un *proceso estocástico*
(hay aleatoriedad, no certezas) → se pueden obtener probabilidades y estimaciones

Probabilidad de Transición en *n* pasos

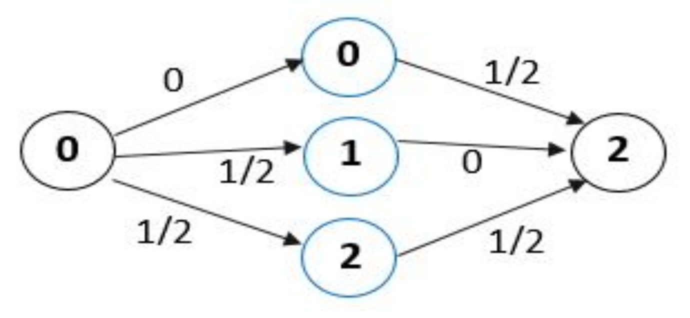
Para una fuente markoviana homogénea *F*, cuál es la probabilidad de emitir un símbolo s_j en $t+n$, conocida la emisión de s_i en t :

Ejemplo

Probabilidad de transición en 2 pasos al símbolo 2 a partir del símbolo 0



$$\mathbf{p_{2/0}}^{(2)} = p_{0/0} \cdot p_{2/0} + p_{1/0} \cdot p_{2/1} + p_{2/0} \cdot p_{2/2}$$
$$= 0 \ . \ 1/2 \ + \ 1/2 \ . \ 0 \ + \ 1/2 \ . \ 1/2 \ = \mathbf{1/4}$$

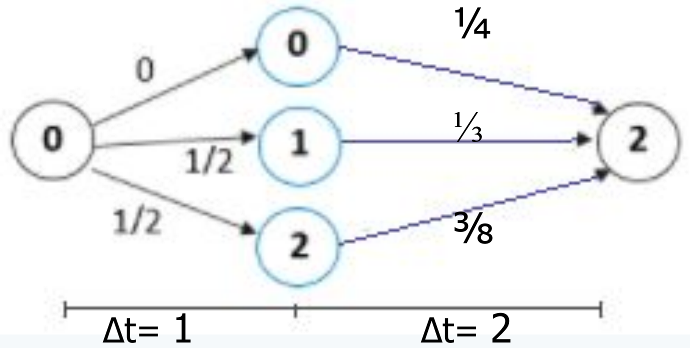


$$\mathbf{p_{2/1}}^{(2)} = p_{0/1} \cdot p_{2/0} + p_{1/1} \cdot p_{2/1} + p_{2/1} \cdot p_{2/2}$$
$$= 2/3 \ . \ 1/2 \ + 1/3 \ . \ 0 \ + \ 0 \ . \ 1/2 \ = \mathbf{1/3}$$

$$\mathbf{p_{2/2}}^{(2)} = p_{0/2} \cdot p_{2/0} + p_{1/2} \cdot p_{2/1} + p_{2/2} \cdot p_{2/2}$$
$$= 1/4 \ . \ 1/2 \ + 1/4 \ . \ 0 \ + 1/2 \ . \ 1/2 \ = \mathbf{3/8}$$

Probabilidad de transición en 3 pasos al símbolo 2 a partir del símbolo 0

$$\mathbf{p_{2/0}}^{(3)} = p_{0/0} \cdot p_{2/0}^{(2)} + p_{1/0} \cdot p_{2/1}^{(2)} + p_{2/0} \cdot p_{2/2}^{(2)}$$
$$= 0 \ . \ \mathbf{1/4} \ + \ 1/2 \ . \ \mathbf{1/3} \ + \ 1/2 \ . \ \mathbf{3/8} \approx \mathbf{0{,}354}$$



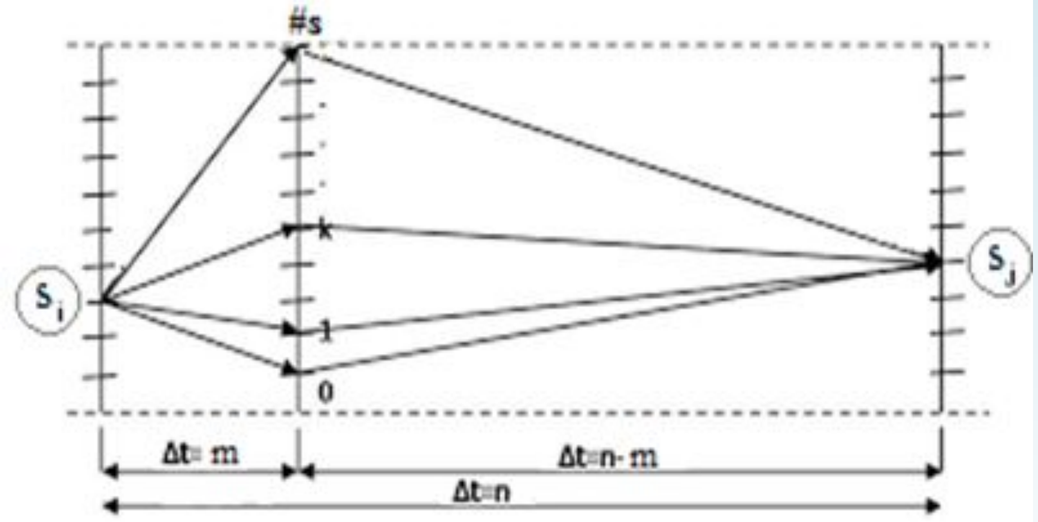
Probabilidad de Transición en *n* pasos

Para una fuente markoviana homogénea *F*, cuál es la probabilidad de emitir un símbolo s_j en *t+n*, conocida la emisión de s_i en *t* :

$$\boxed{p_{j/i}^{(n)} = \sum_k p_{k/i}^{(m)} \cdot p_{j/k}^{(n-m)} \quad \text{para } m<n}$$

$$M^{(n)} = M^{(m)} . M^{(n-m)}$$

1º ecuación de Chapman-Kolmogorov



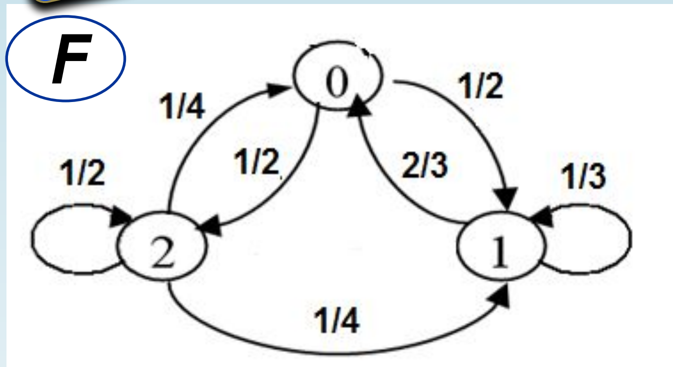
permite descomponer la probabilidad de transición de s_i a s_j en *n* pasos en la suma de probabilidades de las posibles trayectorias que van de s_i a s_j pasando por cada posible s_k en un tiempo intermedio *m*

Si $p_{j/i}^{(n)}$ >0 para algún *n* >0 se dice que s_j es accesible desde s_i

Probabilidad de 1° Transición en *n* pasos

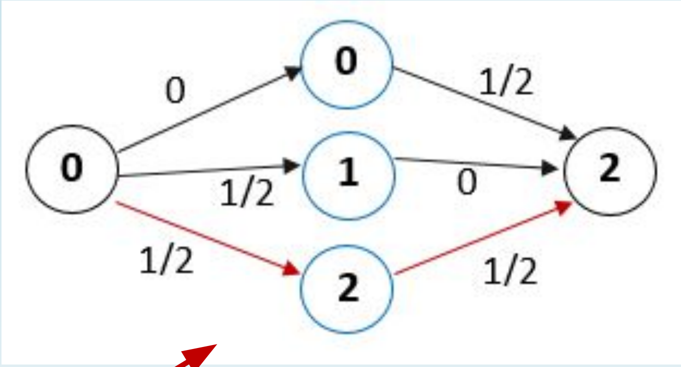
Para una fuente markoviana homogénea *F*, cuál es la probabilidad de emitir <u>por primera vez</u> un símbolo s_j en $t+n$, conocida la emisión de s_i en t :

Ejemplo **Probabilidad de transición <u>por 1° vez en *n* pasos</u> al símbolo 2 a partir del símbolo 0**



$$n=1: \quad f_{2/0}^{(1)} = p_{2/0} \quad = 1/2$$

$$n=2: \quad f_{2/0}^{(2)} = \underbrace{p_{0/0}\cdot p_{2/0} + p_{1/0}\cdot p_{2/1}}_{\text{posibilidades de llegar de 0 a 2 por 1° vez en 2 pasos (sin pasar antes por 2)}} = 0$$



o bien: $n=2: \quad f_{2/0}^{(2)} = p_{2/0}^{(2)} - f_{2/0}^{(1)} \cdot p_{2/2} = 1/4 - 1/2 \cdot 1/2 = 0$

probabilidad de emitir 2 a partir de 0 en 2 pasos

probabilidad de emitir 2 a partir de 0 *por primera vez* en 1 paso

Probabilidad de 1° Transición en *n* pasos

Para una fuente markoviana homogénea *F*, cuál es la probabilidad de emitir <u>por primera vez</u> un símbolo s_j en $t+n$, conocida la emisión de s_i en t :

n= 1: $p_{j/i}^{(1)} = \mathbf{f}_{j/i}^{(1)}$

n= 2: $p_{j/i}^{(2)} = \mathbf{f}_{j/i}^{(1)} \, . \, p_{j/j}^{(1)} + \mathbf{f}_{j/i}^{(2)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{f}_{j/i}^{(2)} = p_{j/i}^{\mathbf{(2)}} - \mathbf{f}_{j/i}^{(1)} \, . \, p_{j/j}^{(1)}$

n= 3: $p_{j/i}^{(3)} = \mathbf{f}_{j/i}^{(1)} \, . \, p_{j/j}^{(2)} + \mathbf{f}_{j/i}^{(2)} \, . \, p_{j/j}^{(1)} + \mathbf{f}_{j/i}^{(3)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{f}_{j/i}^{(3)} = p_{j/i}^{(3)} - \mathbf{f}_{j/i}^{(1)} \, . \, p_{j/j}^{(2)} - \mathbf{f}_{j/i}^{(2)} \, . \, p_{j/j}^{(1)}$

En general:

$$\boxed{f_{j/i}^{(n)} = p_{j/i}^{(n)} - \underbrace{\sum_{m=1}^{n-1} f_{j/i}^{(m)} \cdot p_{j/j}^{(n-m)}}_{\text{descartar las posibilidades de llegar por 1° vez a } s_j \text{ desde } s_i \text{ antes de los } n \text{ pasos}}}$$

2º ecuación de Chapman-Kolmogorov

Media de 1° Transición

- Probabilidad de 1° transición: $$\boxed{f_{j/i}^{(n)} = p_{j/i}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} f_{j/i}^{(m)} . p_{j/j}^{(n-m)}}$$

- **TRANSICIÓN EVENTUAL:** Probabilidad de que eventualmente se produzca la transición de s_i a s_j durante la emisión de símbolos de la fuente:

$$F_{j/i} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j/i}^{(n)}$$

$\mathbf{F_{j/i} = 1}$ → siempre se da la transición de s_i a s_j
$\mathbf{F_{j/i} < 1}$ → puede no darse la transición de s_i a s_j

- Si $\mathbf{F_{j/i} = 1}$ → las probabilidades $\{f_{j/i}^{(n)}\}$ conforman una distribución de probabilidades de la variable "número de instantes para pasar de s_i a s_j por primera vez" y se puede obtener la **MEDIA DE 1° TRANSICIÓN:**

$$\boxed{\mu_{j/i} = \sum_{n=1}^{\infty} n . f_{j/i}(n)}$$

tiempo medio de espera para pasar de s_i a s_j (o cantidad promedio de instantes para pasar de s_i a s_j por 1° vez)

1° Recurrencia en *n* pasos

Para una fuente markoviana homogénea F, cuál es la probabilidad de volver a emitir por primera vez un símbolo s_i en $t+n$, si se emitió el mismo s_i en t :

$$f_{i/i}^{(n)} = p_{i/i}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} f_{i/i}^{(m)} \cdot p_{i/i}^{(n-m)}$$

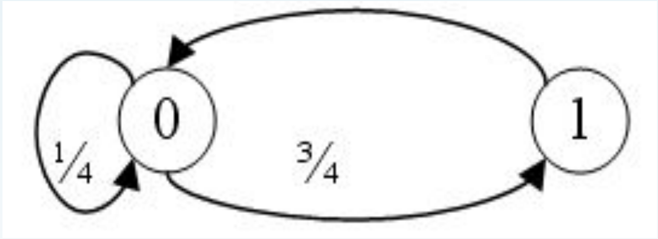
probabilidad de 1° recurrencia

Si $F_{i/i} = 1$ (retorno eventual a s_i)
→ **Media de Recurrencia:**

$$\mu_{i/i} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{i/i}^{(n)}$$

tiempo medio de espera para retornar a s_i

Ejemplo



*probabilidad de 1° recurrencia a **0***

n= 1: $\mathbf{f}_{0/0}^{(1)} = \mathbf{1/4}$

n= 2: $\mathbf{f}_{0/0}^{(2)} = 3/4 \,.\, 1 = \mathbf{3/4}$

n= 3: $\mathbf{f}_{0/0}^{(3)} = 0$

*media de 1° recurrencia para **0***

si: $F_{0/0} = 1/4 + 3/4 = 1$

→ $\boldsymbol{\mu}_{0/0} = 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 3/4 = 7/4$

Bibliografía

Abramson N., **Teoría de la Información y Codificación**, Ed. Paraninfo, 1981

Papoulis A., **Probability Random Variables and Stochastic Processes**, McGraw-Hill, 1991

Cover T., Thomas J., **Elements of Information Theory**, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2006

Shannon C., Weaver W., **Teoría Matemática de la Comunicación**, Ed.Forja, 1981