Apunte 1-1: INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Nos es natural plantear y resolver tanto ecuaciones como sistemas algebraicos. Muchas veces hemos planteado ecuaciones para resolver un problema y hemos trabajado con ecuaciones de una y varias variables. A las ecuaciones de una variable solemos expresarlas como:

$$F(x) = 0$$

donde x es la variable incógnica y F una función a valores reales. Mientras que a las ecuaciones de varias variables las expresamos como:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

donde $x_1, ..., x_n$ son las variables incógnitas y F nuevamente una función a valores reales.

En este curso trabajaremos en el planteo y resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones pero no algebraicas sino diferenciales.

Antes de introducir la definición de ecuación diferencial plantiemos la ecuación que describe la siguiente situación:

la cantidad de habitantes de una determina ciudad se duplica cada 5 años.

El enunciado nos dice que la población se duplica cada 5 años, es decir, la variación anual de esta población es 1/5 de su tamaño. Si llamamos $P(t)$ al tamaño de la población en el tiempo t (en años), entonces $\frac{dP}{dt}$ es la variación anual de la población, luego la ecuación que describe la situación es:

$$\tfrac{dP}{dt} = \tfrac{1}{5}P$$

Lo que hemos planteado es una ecuación diferencial.

Pero...¿Qué es una Ecuación Diferencial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que involucra derivadas (o diferenciales) de una función desconocida de una o más variables.

¿Cómo se Clasifican las Ecuaciones Diferenciales?

1. **Tipo**
   Si la función desconocida,y, depende sólo de una variable, x, la ecuación se llama **ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.)** y la forma de la ecuación es:

   $$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0 \tag{1}$$

   Mientras que si la función desconocida, y, depende de más de una variable, $x_1, ..., x_n$ la ecuación se denomina **ecuación en derivadas parciales**. A modo de ejemplo escribimos la forma de una ecuación E.D.P.:

   $$F(x_1, x_2, y(x_1, x_2), \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \frac{\partial y^2}{\partial x_1 \partial x_2}) = 0 \tag{2}$$

2. **Orden**
   El orden de una ecuación diferencial, es igual al de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación.
   Por ejemplo: la ecuación $y''' + 3y'' + 8y' + 3y - 8 = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 3 mientras que $\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 6y - 2x_1 = 0$ es una ecuación en derivadas parciales de orden 2.

3. **Grado**
   Es la potencia a la que esta elevada la derivada más alta, siempre y cuando la ecuación diferencial este dada en forma polinomial.
   Por ejemplo: la ecuación ecuación diferencial ordinaria de orden 3 $y''' + 3y'' + 8y' + 3y - 8 = 0$ tiene grado 1 (luego las llamaremos lineales) mientras que $(y''')^2 + 3y'' + 8y' + 3y - 8 = 0$ es de segundo grado.

Existe otra clasificación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias la cual se basa en si éstas son lineales o no lineales:

Definición 1. *Se dice que una ecuación diferencial ordinaria $F(x, y, y', y'', ..., y^n)$ es lineal de orden n si tiene la forma:*

$$a_0(x) + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + ... + a_n(x)y^n = g(x) \tag{3}$$

y se llama lineal homogénea si $g(x) = 0$. Dada una ecuación diferencial lineal, su correspondiente ecuación lineal homogénea se denomina lineal homogénea asociada. Una ecuación que no es lineal se dice no lineal.

Definición 2. *Decimos que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma implícita cuando tiene la forma $F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$, siendo $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ una función con Ω un subconjunto abierto. Y decimos que está expresada en forma explícita cuando tenemos $y^n = f(x, y, y', y'', ..., y^{n-1})$, con $f : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ con D un subconjunto (generalmente abierto).*

Los ejemplos anteriores se expresaron en forma implícita, su forma explícita sería:

$$(y''')^2 = -3y'' - 8y' - 3y + 8; \quad y''' = -3y'' - 8y' - 3y + 8; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial y}{\partial x_2} - 6y + 2x_1 = 0$$

Origen de las Ecuaciones Diferenciales (Modelos)

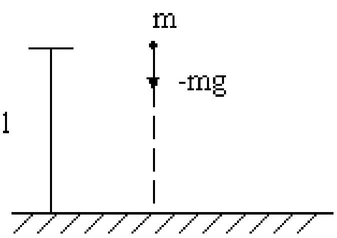
En el estudio de las ciencias e ingeniería, así como en otros campos tales como, la economía, medicina, psicología, investigación de operaciones entre otros, se desarrollan **modelos matemáticos** para ayudar a comprender la fenomenología o el origen de ciertos problemas físicos, biológicos, sociales, etc.

Muchas veces lo que se quiere estudiar es la forma en la que cambian los sistemas y estos modelos a menudo dan lugar a una **ecuación diferencial** dado que si $y = f(t)$ es una función que relaciona las variables t e y, entonces su derivada $y' = \frac{dy}{dt}$ nos indica la tasa de cambio o velocidad de cambio de la variable y con respecto de la variable t.

Para poder construir un modelo matemático es necesario determinar las variables causantes del cambio en el sistema y establecer hipótesis acerca del sistema. El enunciado de estas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas y constituyen el modelo matemático.

Ejemplo: Caída Libre de un Cuerpo

La segunda Ley de Newton establece que la masa del objeto multiplicada por su aceleración es igual a la fuerza total que actúa sobre él.



Esto nos conduce a la ecuación diferencial siguiente:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \tag{4}$$

donde m es la masa del objeto, la función incógnita o función desconocida y es su altura sobre el suelo, g la constante de gravedad, y $\breve{} mg$ la fuerza debida a la gravedad. Cancelando m en ambos miembros de (4), esta ecuación diferencial toma la forma, $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ o equivalentemente $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) = -g$.

En este caso, por integración inmediata es fácil despejar y, en la ecuación anterior, esto es:

$$d\int(\frac{dy}{dt}) = -g\int dt$$

recordar que es una integral indefinida, por lo tanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y) = v(t) = -gt + C_1, \tag{5}$$

que representa la velocidad del objeto en cualquier instante de tiempo t. Repitiendo el mismo procedimiento, en la ecuación (5), $\int d(y) = \int(-gt + C_1)dt$, se obtiene la solución de la ecuación (4)

$$y(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2, \tag{6}$$

las constantes de integración C_1 y C_2, se pueden determinar si se conoce su altura y la velocidad inicial del objeto. Así pues, se tiene por un lado, que la función dada en (6) representa una fórmula para determinar la altura del objeto en cualquier instante de tiempo t, y por otro, una solución a la ecuación diferencial (4), ya que al sustituir (6) y sus derivadas hasta segundo orden en (4), esta última se reduce a una identidad.

Conclusiones:

- La ecuación (4), representa una ecuación diferencial lineal de 2º orden con función desconocida .
- La ecuación diferencial (4), describe el movimiento de un cuerpo en caída libre, pues a partir de esta, podemos determinar su velocidad y altura en cualquier instante de tiempo t.
- La función obtenida en (6), satisface a la ecuación diferencial (4). La pregunta es ¿La solución es única?
- ¿Toda ecuación diferencial ordinaria tiene solución?