Київський національний університет

імені Тараса Шевченка

А.В. Кузьмін

С.В. Денисов

Комп'ютерна алгебра
Курс лекцій та лабораторній практикум

Навчальний посібник

2016

Зміст

Вступ

В останні роки показником інтелектуальних можливостей комп'ютерів стали новітні програмні системи символьної математики або комп'ютерної алгебри. Створені для проведення символьних перетворень та аналітичних обчислень математичних виразів, ці системи були доведені до рівня, що дозволяє значно полегшити, а часом і замінити, працю математиків, причому як теоретиків, так і математиків, що працюють в прикладній галузі. Вже з'явилися математичні відкриття, зроблені за допомогою таких програм. Навряд чи сьогодні є хоча б один серйозний науковий проект, пов'язаний з математичними дослідженнями, де б не використовувались системи символьної математики.

Системи символьної математики довгий час були орієнтовані на великі комп'ютери. З появою персональних комп'ютерів та зростанням їх можливостей ці системи були адаптовані для персональних комп’ютерів і доведені до рівня масового комерційного продукту. Зараз на ринку систем символьної математики (чи комп'ютерної алгебри) пропонується різноманітний асортимент «продукції» — від розрахованої «на всіх» системи Mathcad [29-49], і до великих комп'ютерних програм, до яких можна віднести «велику трійку»: Mathematica [23-28], MATLAB [16-22] і Maple [1-15], що мають тисячі вбудованих функцій і гарні можливості графічної візуалізації обчислень.

Усі ці системи масово використовуються на персональних комп'ютерах, оснащених популярними операційними системами Windows, MacOs та Linux (Unix). , при цьому вони також знайомі користувачам великих комп'ютерів і навіть суперкомп'ютерів.

До середнього рівня таких систем відноситься система, що інтенсивно розвивається, Mathcad, яка має (на додаток до прекрасних засобів числових обчислень) придбане по ліцензії у фірми Waterloo Maple Inc. ядро символьних обчислень. Ядро системи Maple використовується і в іншій системі — MATLAB, додаючи їй незвичайні для неї риси символьної математики.

Система Maple була створена групою вчених під керівництвом Кейта Геддеса (Keith Geddes) і Гастона Гонэ (Gaston Gonnet) у 1980 році в університеті Waterloo, Канада. Спочатку вона була реалізована на великих комп'ютерах і пройшла довгий шлях апробації, увібравши в себе велику частину математичних функцій і правил їхніх перетворень, вироблених математикою за сторіччя розвитку. Є реалізації цієї програми на платформах ПК Macintosh, Unix, Sun.

Maple — система *комп'ютерної математики*, розрахована на широке коло користувачів. Донедавна її називали системою комп'ютерної алгебри, що вказувало на особливу роль символьних обчислень і перетворень, що здатна здійснювати ця система. Але така назва звужує сферу застосування системи. Насправді, по-перше, вона здатна виконувати швидко й ефективно чисельні розрахунки, причому з необмеженою точністю, а по-друге, її можливості виходять далеко за рамки алгебри і вже покривають, наприклад, велику частину математичного аналізу.

Система Maple має широку сферу застосування від моделювання складних фізичних об'єктів, систем і пристроїв, і до створення художньої графіки (наприклад, фракталів). Заслуженою популярністю система Maple користається у вузах — понад 300 самих великих університетів світу взяли її на озброєння. А число тільки зареєстрованих користувачів системи вже давно перевищило мільйон .

Maple — одна із самих могутніх інтегрованих систем символьної математики. Лідерство ця система завоювала в гострій конкурентній боротьбі з іншою системою комп’ютерної математики — Mathematica. Кожна з цих двох систем має свої особливості, але в цілому вони практично рівноцінні. Однак треба відзначити, що поява нових версій Maple від 15 до 2016 означає черговий виток у змаганні цих систем за місце лідера світового ринку. Причому ривок цього разу зробила система Maple.

Maple 2016	Березень 2016	Mathematica 10.4	Березень 2016
Maple 2015	Березень 2015	Mathematica 10.3	Жовтень 2015

Maple 18	Березень 2014	Mathematica 10	Січень 2015
Maple 17	13 Березня 2013	Mathematica 9	29 Листопада 2012
Maple 15	13 Квітня 2011	Mathematica 8.0.1	23 Жовтня 2011
Maple 14	29 Квітня 2010	Mathematica 8.0	15 Листопада 2010
Maple 13	24 Квітня 2009	Mathematica 7.0.1	5 Березня 2009
Maple 12	13 Травня 2008	Mathematica 7.0	18 Листопада 2008

В курсі Комп'ютерна алгебра будуть вивчатися базові можливості системи Maple і прийоми її використання для розв'язання різноманітних прикладних задач.

Система Maple — типова інтегрована система. Вона має наступні характеристики:

- вбудоване ядро для перетворення математичних виразів;
- потужну довідкову систему з великою кількістю прикладів;
- чисельний і символьний процесори;
- візуалізацію обчислень, наукову та інженерну графіку;
- бібліотеку вбудованих функцій і додаткових пакетів;
- вбудовану мову програмування.

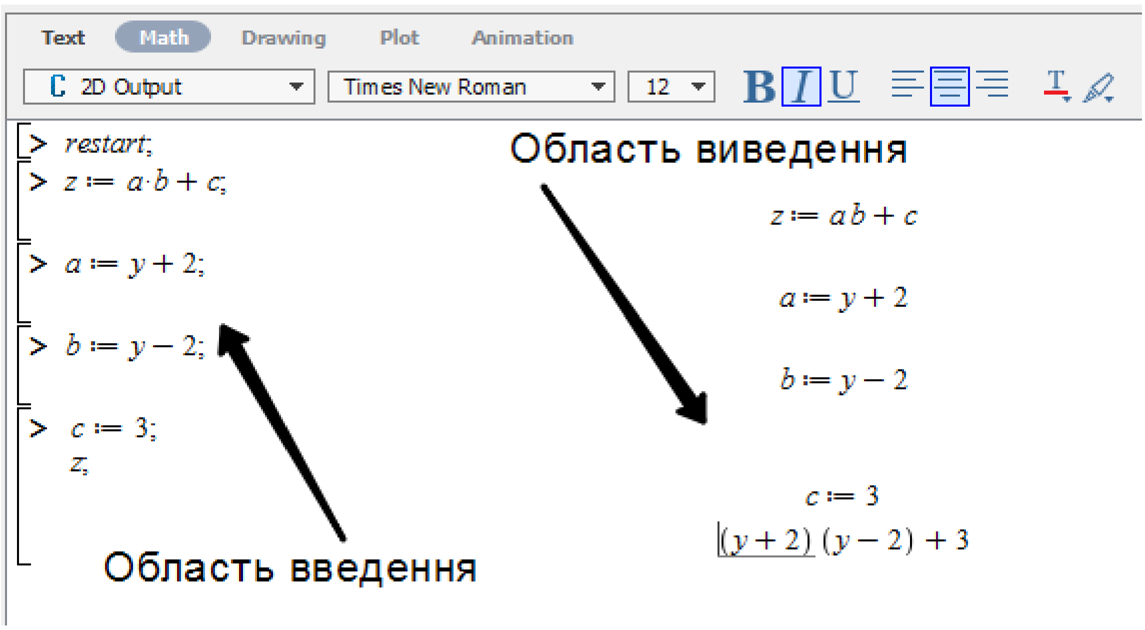
Тому Maple може застосовуватися як для проведення класичних, так і прикладних математичних досліджень майже в усіх галузях науки, які використовують математичні моделі, включаючи економіку, фізику, екологією, біологію, соціологію, інженерні обчислення. Іншими словами, система Maple – це ефективний інструмент для *математичного моделювання*.

Лекція 1

Структура робочого листа Maple – програми

Робота в системі Maple являє собою інтерактивний сеанс, в якому користувач вводить на робочому листі команди і, після натискання клавіші <Enter>, передає їх на виконання ядру системи Maple. Усі введені команди та відображені результати їх роботи є вмістом робочого листа. В кінці сеансу роботи робочий лист можна зберегти на жорсткому диску у вигляді файлу в одному з запропонованих форматів. При черговому сеансі роботи знову відкрити файл, і повторно виконати відповідні команди, або внести в команди деякі корективи.

Оскільки самі команди і результати їх роботи виводяться на одному робочому листі, а саме, після кожної команди безпосередньо відображається результат її роботи, прийнято поділяти робочий лист на області введення та області виведення команд. В перших користувач вводить свої команди, у других – отримує результати їхньої роботи. Вміст областей введення та виведення команд утворює ***групу обчислень***, яка на робочому листі зліва відмічається квадратною дужкою. Група обчислень може містити декілька команд, при цьому основною властивістю групи є те, що усі її команди та оператори виконуються за одне звернення до ядра системи Maple після натискання клавіші <Enter>.



Для додавання нової групи обчислень необхідно встановити курсор в потрібне місце робочого листа та виконати команду ***Insert> Execution Group*** та обрати одну з двох можливостей додати групу вище або нижче положення курсору (клавіатурні комбінації *Ctrl-K* та *Ctrl-J*). Після існуючої групи обчислень наступна група обчислень утворюється автоматично по натисканню клавіші <Enter> .

Для запису декількох команд в одній області введення необхідно після введення чергової команди натискати комбінацію клавіш <Shift> + <Enter>. В цьому разі область введення буде містити декілька команд, що слідують одна за одною, а після них буде йти область виведення послідовності команд.

Знак запрошення передує тільки першій команді.

> c:=1+sin(x);	$c := 1 + \sin(x)$
d:=9;	$d := 9$
c+d;	$10 + \sin(x)$

В одному рядку можуть знаходитись декілька команд, що розділяються між собою ";" або ":". Довгі за розміром команди автоматично переносяться системою Maple на наступний рядок – при цьому команда буде виконуватись, як звичайна команда, що міститься в одному рядку.

Команди можна вводити та відображати у формі синтаксису мови Maple (текстовій формі) командою ***Insert> Maple Input*** або ***Insert> 2-D Math*** – при цьому команда може відображатися на лістингу у формі, що підлягає виконанню, тобто активній, або у формі, що є пасивною, тобто такою, що не виконується. Ознакою активної форми команди є знак запрошення у вигляді символу >, або похилого праворуч курсору, що пульсує /. Для введення активної команди в стандартній формі синтаксису Maple, яка встановлена в системі за замовчанням, необхідно ввести текст команди відразу після символу запрошення >.

Команду, записану у текстовому вигляді, можна перетворити у математичну форму запису. Для цього її треба виділити та виконати команду ***Format> Convert To>2-D Math Input*** . Також можна перевести команду з активної 2-D Math Input форми в пасивну форму виділивши її та застосувавши команду ***Format> Convert To>Inert Form.*** Для виконання цих самих дій можна скористатися також контекстним меню.

> int(sin(x),x);	$-\cos(x)$	*Maple Input*
> $int(\ln(x^3), x)$;	$\ln(x^3)\,x - 3\,x$	*2-D Math*
> $\int \sin(x)\,dx$	$-\cos(x)$	2-D Math Input

$> \frac{d}{dx}\ln(\cos(x))$ $\qquad \frac{d}{dx}\ln(\cos(x))$ $\qquad$ 2-D Math Input пасивна форма

Робочий лист може містити текстові коментарі, які дозволяють створювати пояснення до математичних обчислень. Для введення в робочий лист текстового коментаря необхідно виконати команду ***Insert >Text***, для додавання в коментар математичної формули необхідно записати команду в ***2-D Math Input*** формі та перевести її в пасивну форму**.** Приклад відповідного текстового коментаря з математичними формулами наведений нижче.

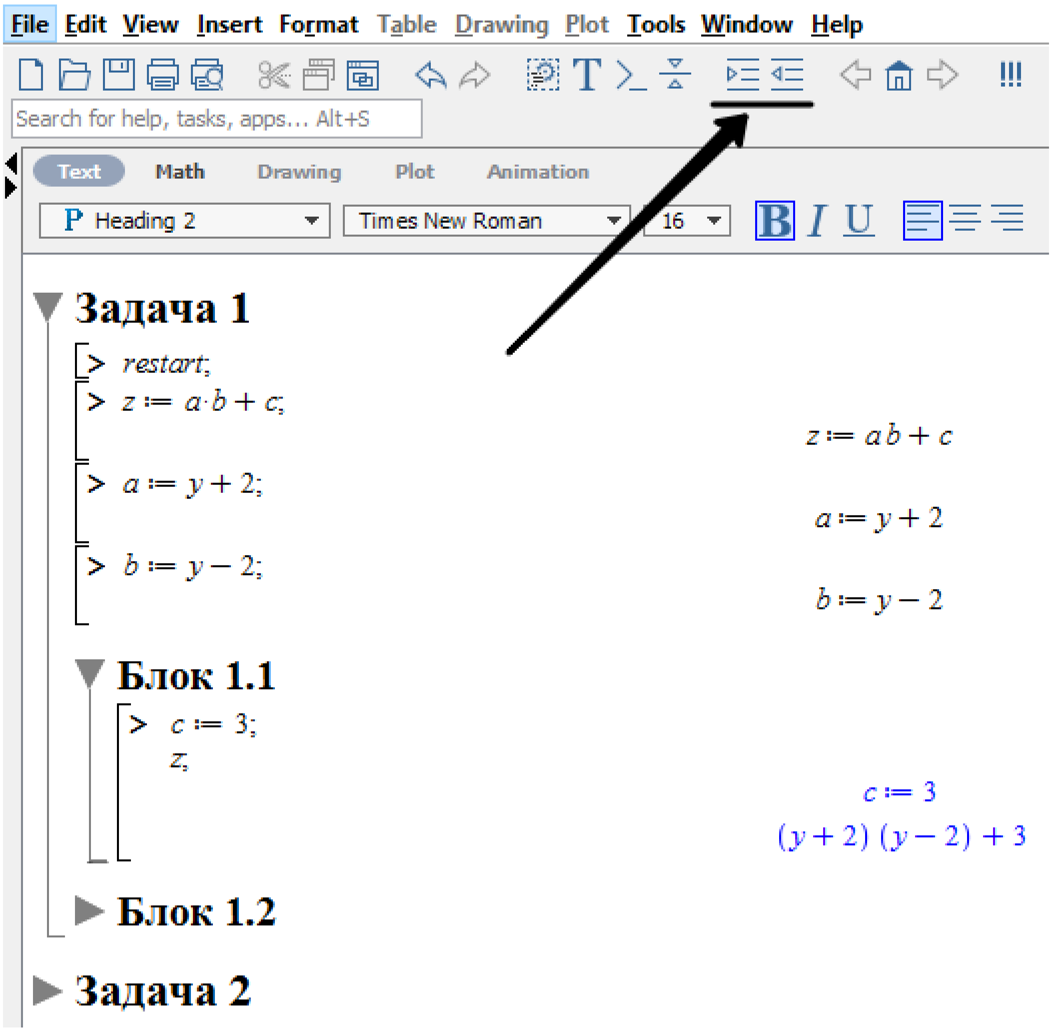
Значення другої похідної від $\sin(x)$ дорівнює $\frac{d^2}{dx^2}\sin(x) = -\cos(x)$.

Записати команду у математичній формі можна безпосередньо використовуючи палітру інструментів ***Calculus***. За допомогою панелі ***Greek*** є можливість використовувати літери грецького алфавіту при записі будь-яких математичних виразів (при введені виразів і команд за допомогою клавіатури кожна грецька літера з панелі ***Greek*** має еквівалентне написання латинським алфавітом, наприклад грецька літера ***α*** записується у вигляді ***alpha).*** Відповідність літер грецького алфавіту та їх латинського напису можна дізнатися навівши курсор миші на відповідний символ на панелі ***Greek.***

Палітра ***Constants and symbols*** містить велику кількість стандартних позначень різних множин: зокрема натуральних, раціональних, дійсних, комплексних чисел.

Створення секцій та робота з ними

Структурування робочого листа в системі Maple здійснюється за рахунок утворення в середині листа ієрархічної деревовидної структури, аналогічної структурі директорій файлової системи, що складається з секцій, в середині яких можуть міститися інші секції (підсекції). Глибина вкладання секцій не обмежується. Початок кожної секції позначається іконкою-трикутником, натискання на який згортає-розгортає відповідну секцію. Для додавання секції необхідно встановити курсор в потрібне місце робочого листа та виконати команду ***Insert > Section***, для додавання підсекції всередині секції необхідно встановити курсор вводу правіше кнопки секції та виконати команду ***Insert*** > ***Subsection.***



Кожна секція (підсекція) може мати назву, яка може бути введена безпосередньо після кнопки секції.

Для об'єднання існуючих груп обчислень, текстових коментарів в секцію необхідно виділити їх за допомогою миші та виконати команду ***Format*** > ***Indent*** Для вилучення груп обчислень та текстових коментарів з секції (ліквідація секції, але не її вмісту) необхідно виконати команду ***Format*** > ***Outdent.*** Також створення та зміну рівня секції можна виконати відповідними командами з верхньої панелі (див. скріншот вище).

Таким чином, концепція секцій та підсекцій надають користувачеві додаткову свободу управління документом. Вони дозволяють створювати електронні документи, зручні для перегляду на комп'ютері.

Типи даних та перетворення над ними.

Система MAPLE може виконувати операції з об’єктами різної математичної природи, зокрема числами, константами, строками, змінними, невідомими величинами, виразами, функціями, списками, множинами, масивами, матрицями, векторами.

Задання чисел та виконання дій з ними.

У системі MAPLE можна задавати цілі числа, звичайні дроби, радикали, числа з плаваючою крапкою, комплексні числа. Над числами перших трьох з перелічених типів можна виконувати точні обчислення (не використовуючи заокруглення).

Числа з плаваючою крапкою є наближеними, число їх значущих цифр є обмеженим – вони використовуються для апроксимації точних чисел, зокрема дійсних.

Комплексні числа можуть бути як точними, так і наближеними – в залежності від того, точними або наближеними є їх дійсна і уявна частина.

Цілі числа

Цілі числа задаються у вигляді послідовностей цифр від 0 до 9. Від’ємні числа задаються зі знаком (-) перед числом. Максимальне ціле число, яке можна задати у системі MAPLE, обмежується лише пам’яттю комп’ютера. Обчислення з цілими числами обмежуються арифметичними діями: додавання +, віднімання **-** , множення *, ділення /. та обчислення факторіалу **!.**

> 17-23;	-6
> 24/6;	4
> 4*7;	28
> 15!;	1307674368000

Окрім звичайних арифметичних операцій, над цілими числами можна виконувати деякі команди:

розвинення цілих чисел на прості множники: ***ifactor()*** та ***ifactors();***

обчислення частки двох чисел ***iquo(m,n);***

обчислення залишку ділення двох чисел ***irem(m,n);***

перевірка, чи є ціле число простим ***isprime(m)***

```
> ifactor(34276);
```
$$(2)^2\ (11)\ (19)\ (41).$$

```
> iquo(49,8);
```
$$6$$

```
.> irem(49,8);
```
$$1$$

```
> isprime(34277);
```
false

```
> isprime(347);
```
true

Звичайні дроби

Звичайні дроби задаються за допомогою операції ділення двох цілих чисел m/n. У випадку, коли дріб скорочується, система MAPLE проводить це скорочення і записує результат. Якщо запис результату у вигляді звичайного дробу не дуже зручний, то його можна перетворити у десятковий дріб за допомогою оператора ***evalf(m/n,r),*** де параметр r задає кількість десяткових знаків мантиси. За замовченням ця кількість дорівнює 10 знакам.

```
> 65/7+2/3;
```
$$\frac{209}{21}$$

```
> evalf(%,3);
```
$$9.95$$

У останньому прикладі символ % у першому аргументі функції ***evalf*** вказує на результати попереднього обчислення.

Радикали

Радикали задаються як результат піднесення у дробову степінь цілих або дробових чисел, а також обчислення з них квадратного кореня.

```
> 1/4*3**(2/3)*4**(2/5);
```
$$\frac{3^{(2/3)}\,4^{(2/5)}}{4}$$

Система MAPLE прагне до виконання дій над радикалами точно – це можна побачити у наступному прикладі:

```
> sqrt(3+2*sqrt(2))-sqrt(3-2*sqrt(2));
```
$$2$$

Дійсні числа с плаваючою крапкою.

Дійсні числа з плаваючою крапкою задаються у вигляді цілої і дробової частини, що розділені між собою десятковою крапкою 24.3456 і перед якими може знаходитись знак + або -.

Часто числа з плаваючою крапкою задаються у експоненціальному вигляді, наприклад: 24.347 e-4 або 5.357*e*5. Частина числа, що знаходиться перед знаком *e* називається мантисою числа, яка множиться на 10 у степені значення якої розташоване за знаком *e*.

Комплексні числа

Комплексні числа задаються в системі MAPLE у вигляді суми дійсної та уявної частин (уявна частина містить спеціальну константу ***I)***, наприклад:

```
> (2/3+3*I);
```
$$\frac{2}{3}+3\,I$$

Над ними можна виконувати арифметичні операції: +, -, *, /

```
> (2/3+2*I)+(1/3-I);
```
$$1+I$$
```
> (2/3+2*I)-(1/3-I);
```
$$\frac{1}{3}+3\,I$$
```
> (2/3+2*I)*(1/3+I);
```
$$\frac{-16}{9}+\frac{4}{3}I$$
```
> (2/3+2*I)/(1/3-I);
```
$$\frac{-8}{5}+\frac{6}{5}I$$

Для отримання з комплексного числа його дійсної та уявної частини, можна використовувати функції ***Re()*** та ***Im().*** Комплексно спряжене число можна отримати за допомогою функції ***conjugate().*** Модуль і аргумент комплексного числа можна отримати за допомогою функцій ***abs()*** та ***argument()***

```
> conjugate(-8/5+6/5*I);
```
$$\frac{-8}{5}-\frac{6}{5}I$$
```
> abs(-8/5+6/5*I);
```
$$2$$
```
> argument(-8/5+6/5*I);
```
$$-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)+\pi$$
```
> Re(-8/5+6/5*I); Im(9-8/5+6/5*I);
```
$$\frac{-8}{5}\quad\frac{6}{5}$$

Для обчислення над комплексними числами може бути корисною функція ***evalc()***, яка намагається розділяти дійсну та уявну частину.

```
> evalc(argument(((1/2)^(1/2)-
   I*(1/2)^(1/2))^(1/4)))
```
$$-\frac{\pi}{16}$$

Задання констант

Система MAPLE використовує набір загально прийнятих констант, таких як:

false	"істина";
true	"хиба";
gamma	константа Ейлера;
Pi	число π;
I	уявна одиниця ;
infinity	нескінченість ∞.

Константи ***Pi*** та ***gamma*** можна обчислювати з певною точністю, використовуючи функцію ***evalf()***

```
> evalf(Pi,7);
> evalf(gamma,12);
```

3.141593

0.577215664902

Задання рядків

Система MAPLE дозволяє працювати з рядками – довільним набором символів, який записується у подвійні лапках. Кожний символ в рядку представляє самого себе. Довжину рядка можна обчислити за допомогою функції ***length()***.Максимальна кількість символів в рядку практично не обмежена, і може досягати близько 268 мільйонів. MAPLE трактує рядок як масив символів, тому є можливість звернутися як до окремого символу, так і до частини рядка.

```
> S:="FRAZA";
```

S := "FRAZA"

```
> length(S);
```

5

```
> S[3];
>"FRAZA"[2..4];
```

"A"

"RAZ"

Для об'єднання двох рядків в один використовується операція ***конкатенації*** || або функція ***cat().***

```
> "FRAZA"||"235";
>  cat("FRAZA","235");
```

"FRAZA235"

"FRAZA235"

Змінні, функції та вирази

Змінні в системі MAPLE мають своє ім’я, яке починається з літери. Великі і малі літери в імені змінної відрізняються між собою. Імена змінних не повинні містити пробілів (їх можна заміняти знаком підкреслення). Для іменування змінних не можна використовувати зарезервовані слова MAPLE та назви констант – при використанні цих слів для іменування змінних система MAPLE повідомляє про помилку. Для того, щоб дізнатися про список зарезервованих слів, можна звернутися до довідки системи MAPLE за допомогою оператора ***?protect.*** Для іменування змінних можна використовувати літери латинського та грецького алфавіту. Традиційно символи кирилиці не використовуються, хоча це і дозволено в останніх версіях системи.

Вирази у MAPLE представляють собою комбінацію імен змінних, чисел, функцій, що з’єднуються між собою знаками допустимих арифметичних операцій.

Якщо вираз використовує змінну, якій не присвоєно ні якого числового значення, то така змінна вважається невідомою величиною, а такий вираз називається символьним виразом. Саме для таких виразів і розроблялася система MAPLE. Важливою операцією в MAPLE є операція присвоювання, яка має наступний синтаксис змінна := вираз, наприклад:

$f1 := \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$, $f2 := \alpha \cdot \beta \cdot \gamma^3 - 3 \cdot \tan(x);$

За замовченням кожна змінна MAPLE має тип *symbol*, представляє символьну змінну, а її значенням є її ім’я. При записі виразів система MAPLE дозволяє використовувати дуже багатий набір функцій. Елементарні функції: експоненціальна, логарифмічна, квадратний корінь, модуль, знак числа, факторіал, тригонометричні функції, гіперболічні функції, обернені тригонометричні функції. Та спеціальні функції: функції Бесселя, еліптичних інтегралів, Дірака, гамма та інші. Для знаходження необхідної функції можна звернутись до довідникової системи MAPLE за допомогою команди ***?inifunction;***

Для задання функції користувача та її багаторазового використання можна використовувати функціональний оператор у вигляді ***vars->result***.

$ff := x \to (\sin(x) + \cos(x))/x\hat{}2;$ $$ff := x \to \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x^2}$$

$evalf(ff(2));$ $$0.1232876476$$

$ff1 := (x,y) \to \sin(x)*\sin(y)/(\sin(x)+\sin(y))$ $$ff1 := (x,y) \to \frac{\sin(x)\sin(y)}{\sin(x)+\sin(y)}$$

$evalf(ff(2,3))$ $$0.1232876476$$

Для створення кусково-аналітичних виразів та функцій у системі MAPLE використовується спеціальний оператор ***piecewise****(cond_1, f_1, cond_2, f_2, ...cond_n, f_n),* де cond_1,cond_2,…cond_n – логічні вирази, *f_1,f_2,…f_n,f_other* – вирази, що задають функціональні залежності.

$piecewise(-infinity < x \textbf{ and } x \le 0, x\hat{}2, 0 < x, x);$ $$\begin{cases} x^2 & -\infty < x < 0 \textbf{ and } x \le 0 \\ x & 0 < x \end{cases}$$

$piecewise(x\hat{}2 + y\hat{}2 \le 1, x\hat{}2 + y\hat{}2, 1/sqrt(x\hat{}2 + y\hat{}2));$ $$\begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & otherwise \end{cases}$$

Для створення функції можна використовувати оператор unapply з наступним синтаксисом: ім’я функції := ***unapply***(вираз, який містить змінні, аргументи функції з множини змінних).

$f3 := unapply\left(\frac{\sin(x)\cdot\cos(z)}{1+z^2}, x, y, z\right);$ $$f3 := (x,y,z) \to \frac{\sin(x)\cos(z)}{z^2+1}$$

Maple дає можливість використовувати операцію «карінга» (currying), тобто отримувати з функцій нові функції, фіксуючи частину аргументів.

Наприклад, введемо функцію двох аргументів: $f := (x,y) \to \left(x + \frac{1}{y}\right)^y$

і виконаємо карінг $g := curry(f, 1):$ $g(t);$

отримаємо відповідну функцію одного аргументу $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$

Складні типи виразів системи MAPLE.

Крім перелічених вище простих типів даних, система MAPLE ефективно працює з складними типами даних, до яких відносяться :

- Послідовності виразів;
- Списки виразів;
- Множини виразів;
- Масиви;
- Матриці.

Складні типи даних утворюються з простих типів даних за допомогою спеціальних синтаксичних конструкцій.

Послідовності виразів

Послідовність виразів є самостійним базовим об'єктом MAPLE, за допомогою якого будуються інші складні об’єкти. Послідовність виразів, або просто послідовність – це група виразів, що розділена комами. Базовою властивістю послідовності є збереження порядку слідування виразів. Послідовність може містити вирази, що повторюються, які розташовані у довільному порядку. На послідовність можна дивитися як на сукупність виразів, перенумерованих натуральними числами починаючи з одиниці.

Для послідовності її тип має ім’я ***exprseq.*** Для задання послідовності використовується оператор присвоювання, у правій частині якого використовується послідовність виразів, або в лівій частині використовується послідовність змінних.

Є можливість звертатися як до послідовності в цілому, так і до окремих її елементів, вказуючи у квадратних дужках поруч з іменем змінної номер або діапазон номерів елементів послідовності, у вигляді ***[n..m]***.

В той же час, присвоїти нове значення елементу послідовності, використовуючи індексну форму звернення до елемента послідовності зліва від оператору присвоєння, неможливо.

Для задання довгих послідовностей використовується оператор ***seq*** з наступним синтаксисом:

seq(f, i= n..m); ***seq(f, i= s)***, де f - вираз, що залежить від змінної;

i **-** змінна, що визначає порядковий номер елемента послідовності;

n,m **–** числа, що задають діапазон зміни величини і з кроком 1;

s – може бути списком, множиною, послідовністю, рядком.

```
> s1:=1,x,x^2,x^3;
```
$$s1 := 1, x, x^2, x^3$$

```
> whattype(s1);
```
$$exprseq$$

```
> s1[2..4];
```
$$x, x^2, x^3$$

```
> s1[2]:=y;
```
```
invalid assignment (1, x, x^2, x^3)[2]:= y;
cannot assign to an expression sequence
```

```
> a,b,c,d:=s1;
```
$$a, b, c, d := 1, x, x^2, x^3$$

```
> a;b;c;d;
```
$$1 \quad x \quad x^2 \quad x^3$$

```
>   s2:=seq(1/(j^(3/2)), j=1..10);
```
s2 := 1, 1/4*2^(1/2), 1/9*3^(1/2), 1/16*4^(1/2), 1/25*5^(1/2), 1/36*6^(1/2), 1/49*7^(1/2), 1/64*8^(1/2), 1/81*9^(1/2), 1/100*10^(1/2)

```
> s3:=seq(1/i,i=s1);
```
$$s3 := 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$$

Списки та множини

Списком будемо називати впорядковану послідовність виразів, що записується у квадратних дужках. Множиною будемо називати не впорядковану послідовність елементів, записану у фігурних дужках. Якщо в послідовності присутні елементи, що повторюються, то кожен з них є окремим елементом списку, і одним і тим самим елементом у множині. Порядок слідування елементів списку є важливим, і список зберігає цей порядок. За допомогою індексної форми звернення можна отримати доступ до будь-якого елемента списку, та присвоїти йому нове значення.

При задаванні множини елементів, порядок елементів не є важливим, і може змінюватися системою MAPLE самостійно. Для вибору елемента множини також можна використати індексну форму звернення, але присвоїти елементу множини нове значення таким способом неможливо.

Для вибору декількох елементів списку або множини за допомогою індексної форми можна використовувати діапазон, при цьому додатне значення індексу відповідає відліку елементів зліва направо, а від'ємне значення індексу – з права наліво. При цьому індекс –1 відповідає останньому елементу, а індекс –2 – передостанньому елементу списку або множини. Так, для отримання усіх елементів списку S можна записати індексний вираз S[1..-1].

```
> sp1:=[1,x,x^2,x^3,x^4];
```
$$sp1 := [1, x, x^2, x^3, x^4]$$
```
> sp1[2];
```
$$x$$
```
> sp1[3..-1];
```
$$[x^2, x^3, x^4]$$
```
> sp1[3]:=y^2;
```
$$sp1_3 := y^2$$
```
> sp1:=sp1;
```
$$sp1 := [1, x, y^2, x^3, x^4]$$
```
> Mn1:={a,b,c,a,b,c,d,f,a};
```
$$Mn1 := \{a, b, c, d, f\}$$
```
> Mn1[2..4];
```
$$\{b, c, d\}$$
```
> Mn1[4];
```
$$d$$
```
> Mn1[4]:=dd;                    cannot reassign the entries in a set
```

Над множинами можна виконувати теоретико-множинні операції, а саме операції об'єднання множин – ***union***, різниці множин – ***minus***, перетину множин – ***intersect***.

```
> Mn2:=Mn1 union {e,g};
```
$$Mn2 := \{a, b, c, d, f, e, g\}$$
```
> Mn3:= Mn2 minus {b};
```
$$Mn3 := \{a, c, d, f, e, g\}$$
```
> Mn4:=Mn2 intersect Mn3;
```
$$Mn4 := \{a, c, d, f, e, g\}$$

Спеціальні засоби для роботи із множинними типами

Для роботи із множинними типами даних Maple надає досить потужні механізми, використання яких часто дозволяє значно швидше і лаконічніше занотувати та розв'язати математичну задачу. Серед них можна виділити команди

map, map2, select, remove та ***applyop***. Розглянемо базові варіанти використання цих команд:

map – дозволяє перетворити список або множину, застосувавши функцію до кожного з елементів. Наприклад:

$$map\left(x \to \frac{1}{x}, [1, 2, 3, 4, 5]\right) \quad \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right]$$

Також її можна застосовувати до виразів – в такому варіанті операцію буде виконано для кожного з аргументів:

$$map\left(x \to \frac{1}{x}, u + v + w\right) \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$$

Команда ***map2*** працює аналогічно, але дозволяє використовувати функцію двох аргументів:

$$map2((x, y) \to x \cdot y, 2, [1, 2, 3, 4]) \quad [2, 4, 6, 8]$$

Як правило, Maple дозволяє виконати потрібну дію кількома способами. Ось ще варіанти отримати той самий результат (помножити на два кожен елемент списку):

$$map2(\grave{}*\grave{}, 2, [1, 2, 3, 4])$$

$$map(curry((x, y) \to x \cdot y, 2), [1, 2, 3, 4])$$

$$map(curry(\grave{}*\grave{}, 2), [1, 2, 3, 4])$$

Команди ***select*** та ***remove*** дозволяють вибирати із списків, множин та виразів елементи, які задовольняють потрібним умовам. При цьому, ***select*** утворює новий об’єкт з тих елементів, які задовольняють умову (предикат), а ***remove*** – навпаки, утворює новий об’єкт, відкинувши ті елементи, які задовольняють задану умову. Наприклад, вибрати парні числа із списку можна так: $select(x \to irem(x, 2) = 0, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])$, або ж ось так: $remove(x \to irem(x, 2) \neq 0, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7])$.

Обидва варіанти дадуть вірний результат: $[2, 4, 6]$.

Іноді зручно користуватись комбінацією цих команд – ***selectremove*** – котра дозволяє розділити ті елементи, які задовольняють предикат, від тих, які не задовольняють. В якості прикладу, згенеруємо послідовність з N випадкових чисел від нуля до 100, і отримаємо з неї два списки – парних і непарних чисел відповідно:

$$numbers := seq(irem(rand(\,),100), i = 1..N);$$
$$evenNums, oddNums := selectremove(x \rightarrow irem(x, 2) = 0, [numbers])$$

$$22, 99, 73, 44, 2 \qquad\qquad [22, 44, 2], [99, 73]$$

Варто зауважити, що на результат виконання команди часто впливає тип аргументів. Так, в даному випадку, довелося перетворити послідовність чисел, яка була присвоєна змінній numbers, у список – взявши її до квадратних дужок – [numbers].

Масиви

Для створення масиву у системі MAPLE необхідно використати оператор ***array(границі, список)***, де перший параметр задає діапазон або діапазони зміни індексу (індексів) масиву.

Для багатовимірних масивів відповідні діапазони повинні задаватися підряд, через кому. Параметр ***список*** призначений для задання елементів масиву у вигляді вкладених списків з глибиною вкладання, що дорівнює розмірності масиву.

Перший і другий параметри функції ***array*** не є обов’язковими, однак хоча б один з них повинен бути заданий. Якщо значення елементу масиву не задані функцією ***array,*** то ці значення можна присвоїти використовуючи індексну форму елементів масиву в лівій частині оператора присвоювання. При введенні імені масиву MAPLE лише повторює його ім’я, але не зображає його елементи.

Для отримання елементів масиву необхідно використати оператор ***print(ім’я_масиву),*** який приведе до зображення на лістингу MAPLE елементів масиву. Для двовимірних масивів з індексами, що починаються з одиниці, відображення здійснюється у вигляді матриць.

```
> MM:=array(1..4,1..4,[[1,2,3,4],
[2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,7]]);
```

$$MM := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> MM1:=array(1..4,1..4,[seq([seq(
i+j,i=1..4)],j=1..4)]);
```

$$MM1 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> MM[2,1];MM;
```

$$2 \quad MM$$

```
> MM[3,3]:=100;
```

$$MM_{3,3} := 100$$

```
> print(MM);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 100 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

```
MM2:=array(1..2,1..2,1..2,[[[a,b],
[c,d]],[[a1,b1],[c1,d1]]]);
```

MM2 := ARRAY([1 .. 2, 1 .. 2, 1 .. 2], [(1, 1, 1) = a, (1, 1, 2) = b, (1, 2, 1) = c, (1, 2, 2) = d, (2, 1, 1) = a1, (2, 1, 2) = b1, (2, 2, 1) = c1, (2, 2, 2) = d1])

```
> SM:=[seq([seq(m[i,j],j=1..3)], i=1..3)];
```

$$SM := [[m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}], [m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}], [m_{3,1}, m_{3,2}, m_{3,3}]]$$

```
> MMM:=array(SM);
```

$$MMM := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

Матриці і вектори

При використанні функцій пакету LinearAlgebra для розв'язання задач лінійної алгебри використовуються об'єкти системи Maple ***Matrix*** та ***Vector***. Спосіб створення цих об'єктів не відрізняється від способу створення об'єктів типу ***array*** для двовимірного та одновимірного випадків відповідно.

Додаткові можливості для формування матриць та векторів спеціальної структури будуть розглянуті в наступних розділах при вивченні пакету LinearAlgebra**.**

$M := [seq([seq(m[i,j], j = 1..3)], i = 1..3)];$

$SM := [[m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}], [m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}], [m_{3,1}, m_{3,2}, m_{3,3}]]$

$MM := Matrix(SM);$

$$MM := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

Лекція 2

Структура виразів та робота з ними

Часто для виконання певних дій з виразами з’являється необхідність виділити з виразу його частину та провести з нею певні перетворення, або замінити її на деякий інший вираз. В таких випадках треба знати структуру виразу і вміти з нею працювати шляхом звернення до будь-якої частини. Будь-який вираз у системі MAPLE представляється у вигляді ієрархічної структури, в якій кожний об’єкт розділяється на підоб’єкти першого рівня, які, у свою чергу, складаються з підоб’єктів другого рівня, і так далі. Процес виділення підоб’єктів продовжується до тих пір, поки не будуть виділені базові прості елементи MAPLE, такі як цілі числа, дійсні числа, дроби, змінні величини символьного типу, функції, списки, послідовності, множини, масиви та інші.

Для роботи з виразами корисним будуть функції:

lhs(egn)	виділяє ліву частину рівності **egn;**
rhs(egn)	виділяє праву частину рівності **egn**;
numer(exp)	виділяє чисельник дробу **exp**;
denom(exp)	виділяє знаменник дробу **exp**.

```
>eq1:=(a*x^2+b*x+c)/tan(x)=x*sin(x);
```

$$eq1 := \frac{a\,x^2 + b\,x + c}{\tan(x)} = x\sin(x)$$

```
> rhs(eq1);
```

$$\frac{a\,x^2 + b\,x + c}{\tan(x)}$$

```
> lhs(eq1);
```

$$x\sin(x)$$

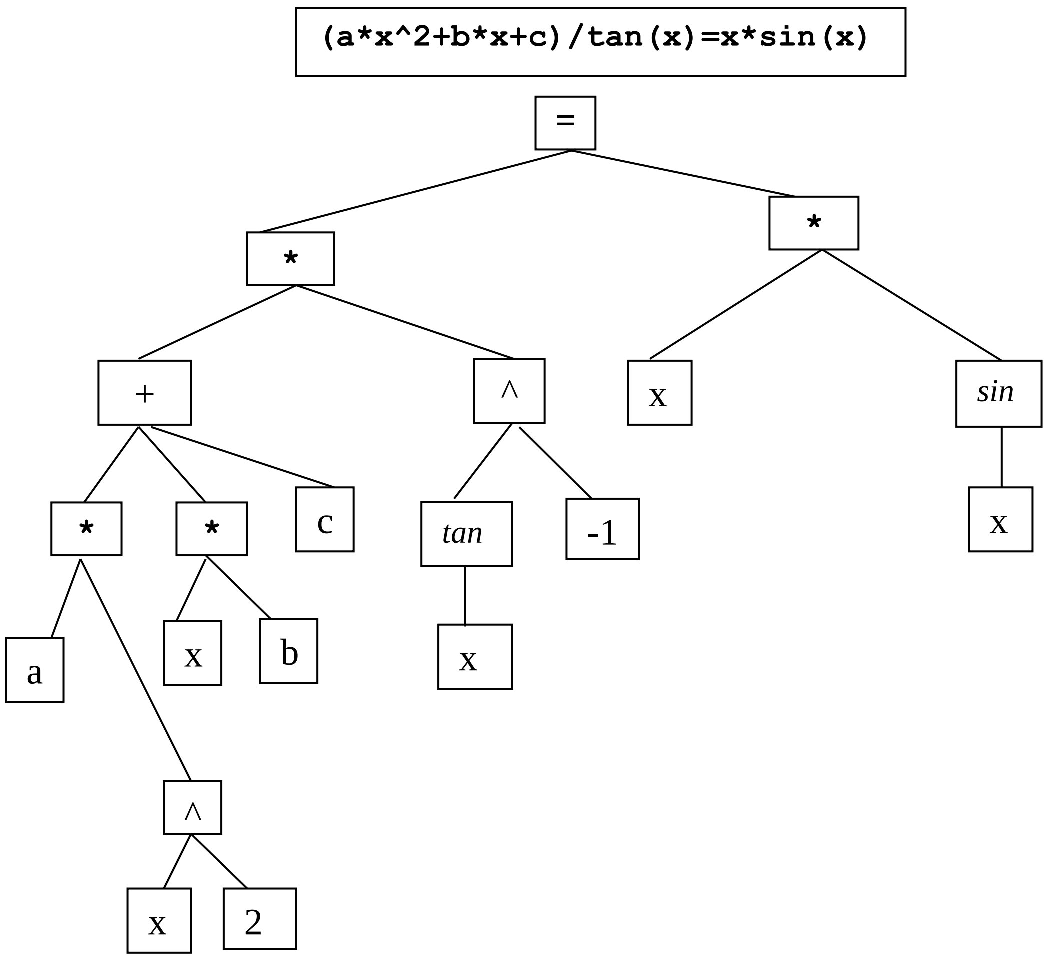
```
> numer(rhs(eq1));
```

$$a\,x^2 + b\,x + c$$

```
> denom(rhs(eq1));
```

$$\tan(x)$$

Структуру будь-якого виразу можна представити у вигляді дерева, для якого кінцеві вершини містять змінні, або числові дані різних типів, а проміжні вершини дерева вказують на відповідні операції або функції. На наступному малюнку представлена деревовидна структура виразу типу рівності.



Для детального вивчення структури будь-якого виразу використовуються наступні функції MAPLE:

whattype(exp) повертає тип виразу ***exp***;

op(exp) повертає список об’єктів першого рівня виразу ***exp***;

op(k..n,exp) повертає список від к –го до n –го об’єктів першого рівня виразу ***exp***;

(op(k,exp)) повертає k –й об’єкт першого рівня виразу exp, при к =0 повертається тип виразу ***exp***;

nops(exp) повертає число об’єктів першого рівня в виразі ***exp***.

```
> op(0..nops(eq1),eq1);
```

$$=, x\sin(x), \frac{a\,x^2+b\,x+c}{\tan(x)}$$

```
> eq11:=op(1,eq1);
```

$$eq11 := x\sin(x)$$

```
> eq12:=op(2,eq1);
```

$$eq12 := \frac{a\,x^2+b\,x+c}{\tan(x)}$$

```
> op(0..nops(eq11),eq11);
```

$$*, x, \sin(x)$$

```
> op(0..nops(eq12),eq12);
```

$$*, a\,x^2+b\,x+c, \frac{1}{\tan(x)}$$

```
> eq121:=op(1,eq12);
```

$$eq121 := a\,x^2+b\,x+c$$

```
> op(0..nops(eq121),eq121);
```

$$+, a\,x^2, b\,x, c$$

```
> op(1,eq121);
```

$$a\,x^2$$

```
> op(2,eq12);
```

$$\frac{1}{\tan(x)}$$

```
> op(op(2,eq12));
```

$$\tan(x), -1$$

```
> op(1,op(2,eq12));
```

$$\tan(x)$$

В останніх прикладах можна звернути увагу на те, що при потребі «добратися» до підвиразів достатньо глибокого рівня, використання функції ***op*** в базовому вигляді стає громіздким – важко читати конструкції вигляду ***op(3,op(1,op(2,op(1,f))))***. Для використання в таких ситуаціях, ***op*** дозволяє альтернативний синтаксис: ***op([k,l,m,n…],f)*** – тут першим аргументом є список (і обов'язково саме список, послідовність не є допустимою), кожен елемент якого вказує індекс об'єкту відповідного рівня структури виразу, який аналізується. Тобто, конструкція ***op(3,op(1,op(2,op(1,f))))*** перетвориться на op([1,2,1,3],f). Наприклад, якщо ми хочемо отримати коефіцієнт при ***x*** наступному виразі:

$$test := \frac{y}{x\cos(2x)}$$

то можна міркувати наступним чином:

	$y, \frac{1}{x}, \frac{1}{\cos(2x)}$
$op(test);$	$\frac{1}{\cos(2x)}$
$op(3, test);$	$\cos(2x)$
$op(1, op(3, test));$	$2x$
$op(1, op(1, op(3, test)));$	2
$op(1, op(1, op(1, op(3, test))));$	

Після цього можна записати достатньо лаконічну команду, котра буде давати потрібний нам результат: ***op([3, 1, 1, 1], test)***. Якщо ж на останньому рівні ми хочемо отримати не один операнд, а декілька – то можна записати їх номери як діапазон: ***op([3, 1, 1, 1..2], test)*** для того ж прикладу поверне нам послідовність ***2,x***.

Також корисні можливості для роботи з структурою виразів надають вже розглянуті раніше функції ***select***, ***remove*** та ***selectremove***, якщо скомбінувати їх з функцією ***has***.

Сама по собі, функція ***has*** дозволяє перевірити, чи міститься один вираз в іншому. Наприклад:

$f := \exp(x^2 + 2xy + y^2);$	$e^{x^2+y^2+2xy}$
$has(f, xy);$	$true$
$has(f, \exp(x^2));$	$false$

Варто звернути увагу, що ніяких перетворень над виразом не виконується – дерево виразу сканується в такому вигляді, як воно є. Покажемо, яким чином можна виділити з відносно складного добутку ті множники, які залежать від ***x***, і ті, які не залежать:

$$g := \exp(x^2)\cdot\ln(1+x)\cdot\sin(y);$$
$$select(has, g, x);$$
$$xPart, yPart := selectremove(has, g, x):$$
$$yPart;$$

$$e^{x^2}\ln(1+x)\sin(y)$$
$$e^{x^2}\ln(1+x)$$
$$\sin(y)$$

Для більш складних виразів результат використання аналогічних конструкцій може бути менш очевидним:

$$u := \frac{x^2+y^2}{1+y^2}\cdot\frac{\mathrm{sqrt}(x+y)}{\mathrm{sqrt}(x^2+y^2+1)} + \sin(x)\sin(y);$$

$$u1 := select(has, u, x^2+y^2);$$

$$select(has, u1, x)$$

$$\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x+y}}{(y^2+1)\sqrt{x^2+y^2+1}} + \sin(x)\sin(y)$$

$$\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x+y}}{(y^2+1)\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

$$\frac{(x^2+y^2)\sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$
,

Якщо проаналізувати структуру виразу, використавши функцію ***op***, подивившись на вираз ***u1*** з цього прикладу (команда ***op(u1)***), ми побачимо:

$$x^2+y^2, \frac{1}{y^2+1}, \sqrt{x+y}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$
– тобто не містить ***x*** тут лише один підвираз, який і було відкинуто функцією ***select***.

Обмеження на змінні величини.

Для проведення різноманітних математичних обчислень і перетворень дуже часто необхідно накладати на відповідні змінні певні обмеження, робити відносно невідомих певні припущення про область їх значень. У системі MAPLE існує декілька команд, які дозволяють вводити і перевіряти обмеження, накладені на змінні або цілі вирази.

Команда ***assume(x,властивість)*** накладає на ***x*** відповідну ***властивість***. Тут ***x*** є змінною або виразом, який включає потрібну змінну. ***Властивість*** може приймати такі найбільш широковживані значення:

Властивість	**Опис властивості**
negative	від'ємні дійсні числа
nonnegative	невід'ємні дійсні числа
positive	додатні дійсні числа
natural	натуральні числа (0,1,2,3…)
posint	цілі, строго більше 0
odd	непарні числа
even	парні числа
complex	комплексні числа
real	дійсні числа
rational	раціональні числа
integer	цілі числа

Пару параметрів ***(x,властивість)*** можна замінити математичним відношенням, наприклад: ***assume(x>0)***; ***assume (x>=0)***. Якщо на змінну накладені обмеження, то у результатах перетворень з цією змінною вона виводиться за замовченням зі знаком (~).

Команда ***assume*** може отримувати декілька пар ***(x,властивість)*** або математичних відношень, наприклад **assume(x>1, x<=2).**

Нове обмеження на змінну, що накладається новою командою ***assume()***, відміняє усі попередні обмеження.

Для послідовного додавання додаткових обмежень по ходу розв'язання задач можна використовувати команду ***additionally( )*** з параметрами аналогічними параметрам команди ***assume***, наприклад ***assume (x>=0), additionally(x<=100).***

Таким чином обмеження, накладені двома останніми операторами, накладають на змінну *x* обмеження ***0 <=x<=100.***

Перевіряти властивості можна, використовуючи функцію ***is( ),*** яка повертає ***true*** або ***false*** в залежності від того, має вираз відповідну властивість або ні.

```
> assume(x>5,y<-10);
> is(x*y<50);
```

true

```
>assume(x>y ,y>0); is(x<0);
```

false

```
>assume((2*i+2)/2,integer); is(i,integer);
```

true

Команда ***coulditbe(змінна, властивість)*** перевіряє, чи є можливим виконання властивості (умови) для відповідної змінної.

$> assume(0 \leq x, y > 40);$

$> coulditbe\left(\frac{x}{y} > 0\right);$ *true*

$> coulditbe\left(\frac{x}{y} > 1\right);$ *FAIL*

$> coulditbe(x + y < 0);$ *false*

Команди перетворення виразів

Головна превага системи MAPLE полягає в можливості здійснювати не тільки обчислення над числовими виразами та функціями, але й проводити символьні обчислення над виразами, які містять змінні величини та функції. Команди перетворення виразів мають наступний синтаксис: **команда(пар_1, пар_2, ….пар_n);** або **команда(пар_1, пар_2, ….пар_n):**. У першому варіанті, коли команда закінчується крапкою з комою, команда виконується і в області виводу відображається результат. У другому варіанті, коли команда закінчується двокрапкою, команда виконується, але результат не відображається.

*Команда спрощення виразів **simplify***

Ця команда призначена для здійснення операції спрощення виразів, які включають в себе раціональні функції, тригонометричні функції, обернені тригонометричні функції, логарифмічні та експоненціальні функції.

Команда має декілька форм використання. Базовий варіант – ***simplify(вираз);*** – у дужках задається вираз, який потрібно спростити. Для спрощення окремих типів виразів раціонально використовувати додаткові параметри команди ***simplify (вираз, n1,n2,…).*** Тут ***n1, n2*** – імена процедур спрощення виразів, а саме:

exp - для спрощення функцій з експоненціальними виразами;

ln - для спрощення виразів з логарифмами;

sqrt - для спрощення виразів з квадратними коренями;

trig - для спрощення тригонометричних виразів;

radical - для спрощення виразів з дробовими степенями;

power - для спрощення виразів з степенями, експонентами, логарифмами.

Крім того, в якості параметра процедури ***simplify*** можна використовувати вираз вигляду ***assume=властивість***, де параметр властивість може приймати одне з наступних значень:

complex - комплексна область;

real - дійсна область;

positive - додатні дійсні числа;

integer - цілі числа;

RealRange(a,b) - інтервал (a,b) дійсних чисел.

Команда спрощення дозволяє задавати додаткові правила, які користувач пропонує використати при виконанні спрощення відповідного виразу. Ці правила задаються у команді ***simplify()*** другим параметром і мають вигляд { рівність 1, рівність 2,…}.

Розглянемо приклади використання оператору спрощення виразів:

$q1 := ((x-a)^2 + x*(x-a) + x^2)/((x-a)^2-x*(x-a) + x^2) - 19/7;$

$$q1 := \frac{(x-a)^2 + x\,(x-a) + x^2}{(x-a)^2 - x\,(x-a) + x^2}$$

$simplify(q1);$

$$-\frac{2}{7}\,\frac{-x^2 + x\,a + 6\,a^2}{x^2 - x\,a + a^2}$$

$q2 := ((x-a)*\mathrm{sqrt}(x-a) + (x-b)*\mathrm{sqrt}(x-b))/(\mathrm{sqrt}(x-a) + \mathrm{sqrt}(x-b)) + a + b;$

$$q2 := \frac{(x-a)^{3/2} + (x-b)^{3/2}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} + a$$

$simplify(q2);$

$$2\,x - \sqrt{x-b}\,\sqrt{x-a}$$

$q3 := \log[a](\mathrm{sqrt}(a^2-1))*(\log[1/a](\mathrm{sqrt}(a^2-1)))^2/(\log[a^2](a^2-1)*\log[a^(1/3)]((a^2-1)^(1/6)));$

$$q3 := \frac{1}{4}\,\frac{\ln(a^2-1)\,\ln(a^2)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$assume(a > 0);$

$simplify(q3);$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\ln(a\sim + 1) + \ln(a\sim - 1)}{\ln(a\sim)}$$

$q4 := (1-2*(\cos(v))^2)/(\sin(v)*\cos(v)) + 2*\tan(2*v) + \cot(4*v)-3;$

$$q4 := \frac{1-2\cos(v)^2}{\sin(v)\,\cos(v)} + 2\tan(2\,v) + \cot($$

$q5 := simplify(q4);$

$$q5 := -\frac{3}{4}\,\Big(8\,cos(v)^4 + 8\,sin(v)\,cos(v)^3 - 4\,sin(v)\,cos(v) + 1\Big)\Big/\Big(\big(2\,cos(v)$$

$$- 1\big)\,sin(v)\,cos(v)\Big)$$

$combine(q5);$

$$\frac{-3\cos(4\,v) - 3\sin(4\,v)}{\sin(4\,v)}$$

$q6 := \sin(x) + \cos(x)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right);$

$$q6 := \sin(x) + \cos(x)\,\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right)\,\cos\Big($$

$simplify(q6);$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right)\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right)\left(2\cos\left(\frac{1}{2}\,x\right)^2\right.$$

$simplify\left(q6, \left\{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x)\right\}\right);$

$$\frac{1}{2}\sin(x)\,(2 + \cos(x))$$

Команда assuming та пакет Real Domain

При спрощенні складних виразів, вигляд результату перетворення значною мірою залежить від області значень та області визначення виразів та функцій, що входять в цей вираз. В зв'язку з цим, MAPLE дозволяє будь-які перетворення здійснювати в припущенні виконання деяких властивостей відносно змінних величин, при цьому самим величинам ці властивості не приписуючи.

Перетворення такого типу виконують з використанням функції ***assuming***, яка має вигляд ***вираз або змінна assuming властивість.*** В результаті, перетворення виразу відбудеться в припущенні відповідної властивості.

$e2 := \ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right) - \ln(y) + \ln(x);$ $\qquad \ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right) - \ln(y) + \ln(x)$

$simplify(e2);$ $\qquad \ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right) - \ln(y) + \ln(x)$

$simplify(e2)$ assuming$x :: positive, y$ $\qquad 2\ln(y) - \ln(x)$

$restart;$

$e3 := \left(-8\,a^3\right)^{\frac{1}{3}};$ $\qquad e3 := \left(-8\,a^3\right)^{1/3}$

$simplify(e3);$ $\qquad 2\left(-a^3\right)^{1/3}$

$simplify(e3)$ assuming$a > 0;$ $\qquad a\left(1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)$

$with(RealDomain);$ $\qquad [\Im, \Re, \text{`\^{}`}, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, \mathit{eval}, exp, \mathit{expand}, \mathit{limit}, ln, log, sec, sech, signum, \mathit{simplify}, sin, sinh, \mathit{solve}, sqrt, surd, tan, tanh]$

$\left(-8\cdot a^3\right)^{\frac{1}{3}}$ assuming$a > 0;$ $\qquad -2\,a$

$is(a > 0);$ $\qquad false$

Команди розкриття дужок у виразах expand()

Команда ***expand()*** виконує розкриття дужок і перетворює добутки у суми у алгебраїчних виразах. Ця команда виконується для будь-яких поліномів та для частки двох поліномів. У випадку частки двох поліномів, ця команда розкриває дужки у чисельнику і ділить кожний член отриманого виразу на знаменник, який вона не змінює. Крім того, команда ***expand()*** вміє розкривати дужки для більшості математичних функцій: ***sin(x), cos(x), tg(x), ln(x), exp(x), sh(x), ch(x)*** та інших.

$\boldsymbol{f1 := \sin(x + y) * \sin(y + z);}$ $\qquad \boldsymbol{f1 := \sin(x + y)\,\sin(y + z)}$

$expand(f1);$

$$\sin(x)\cos(y)\sin(y)\cos(z)+\sin(x)\cos\ldots$$
$$+\cos(x)\sin(y)^2\cos(z)$$
$$+\cos(x)\sin(y)\cos(y)\sin(z)$$

$f2 := (a*x\hat{}2+b*x\hat{}3)*(b*x\hat{}3+3*a*x*2);$

$$f2 := \left(a\,x^2+b\,x^3\right)\left(b\,x^3+6\,a\,x\right)$$

$expand(f2);$

$$a\,x^5\,b+6\,a^2\,x^3+b^2\,x^6+6\,b\,x^4\,a$$

$f3 := \ln(3*a\hat{}2*b);$

$$f3 := \ln\left(3\,a^2\,b\right)$$

$expand(f3);$

$$\ln(3)+\ln\left(a^2\,b\right)$$

$assume(a>0,b>0);$

$expand(f3);$

$$\ln(3)+2\ln(a\sim)+\ln(b\sim)$$

Команда ***expand(eq, p1,p2,…pn)*** може містити параметри, які вказують на виключення, які необхідно зробити при розкритті дужок у виразі ***eq.*** В якості параметра може виступати як назва функції, так і деякий підвираз виразу ***eq.***

$f4 := \ln(a\hat{}3*b\hat{}5*3)+\sin(x-y)*\cos(x+y);$

$$f4 := \ln\left(3\,a\sim^3\,b\sim^5\right)+\sin(x-y)\cos(x+y)$$

$expand(f4, \cos);$

$$\ln(3)+3\ln(a\sim)+5\ln(b\sim)+\cos(x$$
$$+y)\sin(x)\cos(y)-\cos(x+y)\cos(x)\sin(y)$$

Команда приведення декількох членів виразу до одного, combine

Команда ***combine()*** приводить декілька членів, представлених сумою, добутком, або степенями, до одного члена, використовуючи різноманітні правила, які є фактично оберненими правилам перетворення команди ***expand().*** Розглянемо приклади використання команди ***expand.***

$$> g1 := \sin(x)*\cos(y)+\cos(x)*\sin(y)+\sin^2(x)-\frac{3}{2};$$

$$g1 := \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)+\sin(x)^2-\frac{3}{2}$$

$> combine(g1);$

$\sin(x+y) - 1 - \frac{1}{2}\cos(2x)$

> *assume*$(x > 0, y > 0)$;

> $g2 := 2 * \ln(x) + 3 * \ln(y)$;

$g2 := 2\ln(x\sim) + 3\ln(y\sim)$

> *combine*$(g2)$;

$\ln\left(x\sim^2 y\sim^3\right)$

> $g3 := \exp(2 * x) * \exp(y) / \exp(z) + 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$;

$$g3 := \frac{e^{2x} e^y}{e^z} + 2\sin(x)\cos(x)$$

> *combine*$(g3)$;

$e^{2x+y-z} + \sin(2x)$

> $g4 := 2 * \sin(x)\,\hat{}\,11 + 3 * \cos(x)\,\hat{}\,3 + 15 * \sin(x)$;

$g4 := 2\sin(x)^{11} + 3\cos(x)^3 + 15\sin(x)$

> *combine*$(g4)$;

$$-\frac{1}{512}\sin(11x) + \frac{11}{512}\sin(9x) - \frac{55}{512}\sin(7x) + \frac{165}{512}\sin(5x) - \frac{165}{256}\sin(3x) + \frac{4071}{256}\sin(x) + \frac{3}{4}\cos(3x) + \frac{9}{4}\cos(x)$$

Розвинення поліноміальних виразів на прості множники, функція factor()

Призначення функції ***factor()*** - провести розвинення на множники поліному від декількох змінних. Під поліномом у системі MAPLE розуміють вирази, у яких кожен член має вигляд добутку цілих невід'ємних степенів невідомих величин з числовими або алгебраїчними коефіцієнтами. Тобто коефіцієнт може бути цілим, дробовим, числом з плаваючою крапкою, комплексним числом, або представляти собою алгебраїчний вираз з іншими змінними. Невідома величина у поліномі може бути представлена викликом деякої функції, аргумент якої є невідома величина.

Команда розвинення поліному має вигляд ***factor(exp,K)*** де ***exp*** – вираз, що підлягає розвиненню на множники, а ***K*** – необов'язковий параметр, який уточнює, над яким полем числових коефіцієнтів здійснюється розвинення на множники. Цей параметр може приймати значення real, complex, мати значення одного радикалу, або списку радикалів.

$h1 := x^3 - 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 - y^3;$

$$h1 := x^3 - 3\,x^2\,y + 3\,x\,y^2 - y^3$$

$factor(h1);$

$$(x-y)^3$$

$h2 := x\hat{}3 + 3;$

$$h2 := x^3 + 3$$

$factor\left(h2, 3^{\frac{1}{3}}\right);$

$$\left(x^2 - x\,3^{1/3} + 3^{2/3}\right)\left(x + 3^{1/3}\right)$$

$factor(h2, real);$

$$(x + 1.442249570)\,(x^2 - 1.442249570\,x + 2.080083822)$$

$factor(h2, complex);$

$$(x + 1.442249570)\,(x - 0.7211247852 + 1.249024766\,\mathrm{I})\,(x - 0.7211247852 - 1.249024766\,\mathrm{I})$$

$h3 := (x\hat{}3 - y\hat{}3);$

$$h3 := x^3 - y^3$$

$factor(h3);$

$$(x-y)\,(x^2 + x\,y + y^2)$$

$factor\left(h3, (-3)^{\frac{1}{2}}\right);$

$$-\frac{1}{4}\,(-2\,x - y + y\sqrt{-3})\,(2\,x + y + y\sqrt{-3} - y)$$

$h4 := x\hat{}2 + 3\hat{}(1/3)\cdot x + 3\hat{}(2/3)$

$$h4 := x^2 + x\,3^{1/3} + 3^{2/3}$$

$factor\left(h4, \left\{(-3)^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}\right\}\right);$

$$-\frac{1}{4}\,\left(2\,x + 3^{1/3} + 3^{1/3}\sqrt{-3}\right)\left(-3^{1/3} + 3^{1/3}\sqrt{-3} - 2\,x\right)$$

$h5 := evalf(h4);$

$$h5 := x^2 + 1.442249570\,x + 2.080083823$$

$factor(h5, complex);$

$$(x + 0.7211247850 + 1.249024767\,\mathrm{I})\,(x + 0.7211247850 - 1.249024767\,\mathrm{I})$$

Команда приведення подібних членів collect()

Команда ***collect()*** працює з узагальненими поліномами декількох змінних – поліномами, в яких в якості невідомих можуть виступати функції з аргументами, що є невідомими величинами в MAPLE. Синтаксис цієї команди має три форми:

collect(exp, x) ; ***collect(exp, x, form, func) ;*** ***collect(exp, x ,func)***

exp - вираз, у якому необхідно провести комплектування виразу по степеням невідомих;

x - ім'я невідомої величини, список, множина невідомих величин у випадку поліному декількох змінних, або ім'я функції з аргументом – невідомим.

form - має два значення ***recursive*** або ***distributed***, використовується для многочленів декількох змінних, і впливає на алгоритм приведення подібних членів відносно обраного списку змінних.

func - параметр, що визначає ім'я команди, яка використовується по відношенню до отриманих коефіцієнтів, зазвичай ***simplify()*** або ***factor().***

> s1 := 2*x^3*a^2*y^2 + 3*x^3*y^2*b + 2*x^2*y^3*a^2 + 4*a*x^2*y^3;

$$s1 := 2x^3a^2y^2 + 3x^3y^2b + 2x^2y^3a^2 + 4ax^2y^3$$

> collect(s1, [y, x]);

$$(2a^2 + 4a)x^2y^3 + (2a^2 + 3b)x^3y^2$$

> collect(s1, [y, x], factor);

$$(2a^2 + 3b)x^3y^2 + 2a(a + 2)y^3x^2$$

> s2 := 2*a*(sin(x))^2 + 3*b^2*(sin(x))^2*x^2 + 15*x^2*sin(x) + 2*c*sin(x);

$$s2 := 2a\sin(x)^2 + 3b^2\sin(x)^2x^2 + 15x^2\sin(x) + 2c\sin(x)$$

> collect(s2, sin);

$$(2a + 3b^2x^2)\sin(x)^2 + (15x^2 + 2c)\sin(x)$$

Скорочення алгебраїчного дробу – команда normal().

Призначення команди ***normal()*** полягає у приведенні виразів, що містять алгебраїчні дроби, до спільного знаменника, і спрощення отриманого алгебраїчного дробу шляхом скорочення чисельника і знаменника. Команда застосовується у вигляді ***normal(f, expanded)***. Тут ***f*** – алгебраїчний дріб, а необов’язковий параметр ***expanded*** вказує на те, що після скорочення дробу у чисельнику і знаменнику розкриваються дужки.

```
gg1 := 1/(x+1)^2 + 3/(x-1)^2 + 4/((x-1)*(x
    +1));
```

$$gg1 := \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)\,(x+1)}$$

```
normal(gg1);
```

$$\frac{4\,x\,(2\,x+1)}{(x+1)^2\,(x-1)^2}$$

```
normal(gg1, expanded);
```

$$\frac{8\,x^2+4\,x}{x^4-2\,x^2+1}$$

$$gg2 := \frac{\ln(x)}{\sin(x)^2} + \frac{x}{\sin(x)} + \frac{\exp(x)}{\sin(x)^3};$$

$$gg2 := \frac{\ln(x)}{\sin(x)^2} + \frac{x}{\sin(x)} + \frac{e^x}{\sin(x)^3}$$

$normal(gg2);$

$$\frac{x\sin(x)^2 + \ln(x)\,\sin(x) + e^x}{\sin(x)^3}$$

Перетворення виразів за допомогою підстановок

Для аналітичного перетворення виразів і, зокрема, для їх спрощення, в математиці використовуються операції підстановок, де замість одних змінних та виразів здійснюється підстановка інших змінних та виразів. В системі MAPLE існують декілька команд, які виконують відповідні функції. До цих команд відносяться:

subs(x = a, exp) – у виразі ***exp*** заміняє ***x*** на ***a***.

subs(s_1,s_2…s_n, exp) – у виразі ***exp*** заміняє одні підвирази на інші, обираючи їх з послідовності, списку або множини $s_1,s_2\ldots s_n$, де кожен елемент списку має вигляд ***x=a***. Підстановки виконуються послідовно для випадку, коли $s_1,s_2\ldots s_n$ – послідовність, або одночасно для випадку, коли $s_1,s_2\ldots s_n$ – список або множина.

subsop(N_1=a_1,…,N_k =a_k, exp) – у виразі ***exp*** заміняє підвираз зі структурним номером N_m на підвираз a_m для $m=1..k$, де структурний номер підвиразу має вигляд $N_K=[n_{k1},n_{k2},\ldots]$ та визначається за допомогою аналізу структури оператором ***op(n, exp).*** Усі підстановки виконуються послідовно.

algsubs(x=a,exp) **-** у виразі exp заміняє підвираз ***x*** на підвираз ***a***.

Між командами ***subs*** *і* ***algsubs***, незважаючи на їх схожість, є суттєва різниця. Процедура ***subs*** здійснює заміну підвиразу ***x*** на підвираз ***a*** лише у випадку, коли підвираз ***x*** входить, як елемент структури виразу ***exp*** довільного рівня. Процедура ***algsubs*** здійснює заміну підвиразу ***x*** на підвираз ***a*** у випадку, коли підвираз ***x*** входить як алгебраїчний підвираз виразу ***exp***.

Розглянемо приклади застосування різних підстановок:

restart;

$q1 := 2*x^3*y + 3*x^2*z + \mathrm{sqrt}(x);$ $\qquad q1 := 2\,x^3\,y + 3\,x^2\,z + \sqrt{x}$

$algsubs\left(x^2 = y, q1\right);$ $\qquad 2\,y^2\,x + 3\,z\,y + \sqrt{x}$

$subs\left(x^2 = y, q1\right);$ $\qquad 2\,x^3\,y + 3\,z\,y + \sqrt{x}$

$q2 := \dfrac{3\cdot u^3}{2\cdot v} + \dfrac{u}{v};$ $\qquad q2 := \dfrac{3}{2}\,\dfrac{u^3}{v} + \dfrac{u}{v}$

$subs\left(\dfrac{u}{v} = z, q2\right);$ $\qquad \dfrac{3}{2}\,\dfrac{u^3}{v} + z$

$algsubs\left(\dfrac{u}{v} = z, q2\right);$ $\qquad \dfrac{3}{2}\,z\,u^2 + z$

$collect(\%, z);$ $\qquad \left(\dfrac{3}{2}\,u^2 + 1\right) z$

subsop(2 = *z*, q2);

$$\frac{3}{2}\,\frac{u^3}{v}+z$$

subsop(1 = *x*, 2 = *z*, *q2*);

$$x+z$$

subsop([1, 2] = z, q2);

$$\frac{3}{2}\,\frac{z}{v}+\frac{u}{v}$$

q3 := *op*(*q2*) [1];

$$q3:=\frac{3}{2}\,\frac{u^3}{v}$$

op(*q3*) [2];

$$u^3$$

> *q4* := 2 * (sin(*x*)) ^ (1 / 2) * cos(*x*) + cos(*x*) / sin(*x*);

$$q4:=2\,\sqrt{\sin(x)}\,\cos(x)+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

> *subs*(sin(*x*) = sqrt(1 − (cos(*x*)) ^2), *q4*);

$$2\,\left(1-\cos(x)^2\right)^{1/4}\cos(x)+\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}$$

> *algsubs*(sin(*x*) = sqrt(1 − (cos(*x*)) ^2), *q4*);

$$2\,\left(1-\cos(x)^2\right)^{1/4}\cos(x)+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

> *algsubs*(1 / sin(*x*) = 1 / sqrt(1 − (cos(*x*)) ^2) , *q4*);

$$\frac{\cos(x)\,\left(2\,\sqrt{\sin(x)}\,\sqrt{1-\cos(x)^2}+1\right)}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}$$

> *exp1* := ln(sin(*x* / *y*)) + exp(*x* + *z*) = *x* ^ 3 * *y*
+ cos(*y*);

$$exp1:=\ln\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)+\mathrm{e}^{x+z}=x^3\,y+\cos(y)$$

> *exp11* := *subs*(*x* / *y* = *x* + *y*, *exp1*);

$$exp11:=\ln(\sin(x+y))+\mathrm{e}^{x+z}=x^3\,y+\cos(y)$$

> *exp12* := *op*(1, *op*(1, *op*(1, *exp11*)));

$$exp12:=\sin(x+y)$$

> *op*(2, *op*(2, *exp1*));

$$\cos(y)$$

> *subsop*([1, 1, 1] = *expand*(*exp12*), [2, 2]
= *convert*(*op*(2, *op*(2, *exp1*)), tan), *exp1*);

$$\ln(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y))+e^{x+z}=x^3 y + \frac{1-\tan\left(\frac{1}{2}y\right)^2}{1+\tan\left(\frac{1}{2}y\right)^2}$$

Перетворення виразів в еквівалентні форми запису, функція convert

В системі MAPLE є потужна функція ***convert(exp, form)***, яка здійснює складні перетворення виразів в інші еквівалентні форми запису. Тут ***exp*** – вираз, ***form*** - параметр, який вказує на спосіб перетворення. В останніх версіях системи MAPLE нараховується більше 100 різних параметрів, з описом яких можна познайомитись в довідниковій системі. Далі наведені лише найпростіші варіанти використання команди ***convert.***

> $q1 := solve(x^4+3*x^3+4=0, x);$

$$q1 := RootOf(\_Z^4+3\_Z^3+4, index=1), RootOf(\_Z^4+3\_Z^3+4, index=2), RootOf(\_Z^4+3\_Z^3+4, index=3), RootOf(\_Z^4+3\_Z^3+4, index=4)$$

> $convert(q1[2], radical);$

Результат роботи цього оператора не наведений у зв’язку з дуже громіздким виразом кореня у вигляді радикалів – пропонуємо читачу виконати команду і отримати результат самостійно. Більш прості приклади:

$convert(\sin(x), \tan);$ $$\frac{2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)}{1+\tan\left(\frac{1}{2}x\right)^2}$$

$convert(\sin(x), \exp);$ $$-\frac{1}{2}I\left(e^{Ix}-e^{-Ix}\right)$$

$convert(\sinh(x), \exp);$ $$\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}$$

$convert\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), radical\right);$ $$\frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$f := \frac{\left(2\cdot x^4-3\cdot x^3+1\right)}{x^2+2\cdot x-5};$

$$f := \frac{2\,x^4-3\,x^3+1}{x^2+2\,x-5}$$

$convert(f, parfrac);$

$$2\,x^2-7\,x+24+\frac{121-83\,x}{x^2+2\,x-5}$$

$convert(3+5*I, \mathbf{polar});$

$$\mathrm{polar}\left(\sqrt{34}, \arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right)$$

Лекція 3

Обчислення виразів

У програмі символьних обчислень MAPLE користувач зустрічається з поняттям обчислення символьних імен. Подібна функція відсутня для систем чисельного моделювання. Здебільшого, система MAPLE використовує алгоритм повного обчислення символьної змінної. Тобто у випадку, коли необхідно обчислити значення символьної змінної, перевіряється, чи присвоювались цій змінній які-небудь значення, і якщо так, то вони підставляються замість імені змінної і перевіряється, чи містять підставлені значення невідомі змінні. Якщо містять, то перевіряється, чи були присвоювання цим змінним певних значень, і якщо були, то вони підставляються замість значень змінних. Цей процес продовжується рекурсивно, доки замість усіх імен не будуть підставлені присвоєні їм значення, або, якщо деяким змінним нічого не присвоювалось, то такі змінні залишаться в виразі як невідомі величини.

Для повного обчислення значення будь-якої змінної, можна просто вказати її ім’я, і в результаті система MAPLE виконає повне обчислення значення цієї змінної, або можна використати команду ***eval(x)***, де ***x*** – ім’я відповідної змінної, яку необхідно обчислити.

Правило повного обчислення значення змінних при задаванні імені змінної діє для змінних усіх типів, за винятком змінних, які містять масиви, матриці таблиці та процедури. Для цих змінних діє правило обчислення до значення останнього присвоєного символьного імені. Для виконання повного обчислення такої змінної необхідно явно ініціювати команду ***eval(Y).***

У випадку, коли необхідно просто обчислити ім’я змінної, не використовуючи алгоритм повного обчислення значення цієї змінної, можна використати оператор ***evaln(x);.*** Той самий результат можна отримати за допомогою запису імені відповідної змінної у одинарних лапках – ***‘x’***. Вказаний оператор можна використовувати для того, щоб анулювати усі попередні присвоювання, здійснені по відношенню до цієї змінної, що дозволить використовувати її просто як невідому величину зі значенням, що дорівнює імені змінної.

Наступні приклади демонструють правила обчислення символьних змінних.

```
> x:=a*c; c:=b^2+2; a:=(d+e)^3;
> x; > eval(x);
> y:=d+e;
> x*y;
> eval(x*y);
> x/y;
> evaln(x);
> evaln(y);
> x:=evaln(x);
> x;
> y:='y';
> y;
```

$$x := a\,c\,c := b^2 + 2\,a := (d+e)^3$$

$$(d+e)^3\,(b^2+2)\,(d+e)^3\,(b^2+2)$$

$$y := d + e$$

$$(d+e)^4\,(b^2+2)$$

$$(d+e)^4\,(b^2+2)$$

$$(d+e)^2\,(b^2+2)$$

$$x$$

$$y$$

$$x := x$$

$$x$$

$$y := y$$

$$y$$

На практиці в математичних дослідженнях дуже часто виникає задача обчислення значення математичного виразу або функції при конкретному значені змінних величин, що входять до відповідного виразу. Для того, щоб зберегти сам вираз і в той же час обчислити його значення при вказаних значення параметрів можна скористатися оператором ***eval(expr, [eq1,eq2,…eqn]);*** Де ***expr*** – математичний вираз, що містить змінні величини, а параметри ***eq1,eq2,…eqn*** –

рівності, що задають значення змінним величинам, при яких цей вираз повинен бути обчисленим.

```
> g:=2*x^3*y+3*x*y^3+5*x*y;
```

$$g := 2\,x^3\,y + 3\,x\,y^3 + 5\,x\,y$$

```
> gg:=eval(g,x=1);
```

$$gg := 7\,y + 3\,y^3$$

```
> gg1:=eval(gg,y=1);
```

$$gg1 := 10$$

```
> eval(g,[x=1,y=1]);
```

$$10$$

Система MAPLE прагне провести обчислення будь-якої величини точно, і використовує арифметику дробових чисел та радикалів там, де це можливо. Якщо при проведені обчислень результат можна отримати лише у вигляді ірраціонального числа, або більш доцільно отримувати числа у вигляді звичайних десяткових дробів з заданою кількістю знаків після коми, то для обчислення значення виразу можна використовувати оператор ***evalf(f,n)***, де ***f*** – вираз, що необхідно обчислити, а ***n*** – число значущих цифр, які використовуються при обчисленнях (за замовчанням ***n=10***).

Зверніть увагу на різницю між значеннями однакових виразів, що обчислені за допомогою операторів ***eval*** та ***evalf***

```
> f:=x->sin(x)/x;
```

$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$$

```
> eval(f(Pi/4));
```

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

```
> evalf(f(Pi/4),20);
```

$$0.90031631615710606954$$

```
> evalf(1/3*x^2+sin(Pi/4)*x+sqrt(3),6);
```

$$0.333333\,x^2 + 0.707105\,x + 1.73205$$

```
> eval(1/3*x^2+ sin(Pi/4)*x+sqrt(3));
```

$$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}$$

Система MAPLE використовує ще цілий ряд функцій призначених для проведення обчислень виразів:

evalc для обчислення виразів, що приймають комплексні значення;

evalb для обчислення виразів, що приймають булеві значення;

evalm для обчислення матричних виразів;

evalr для обчислення інтервальних виразів.

З цими функціями можна ознайомитись за допомогою довідникової служби системи MAPLE.

Розв'язування задач математичного аналізу за допомогою системи MAPLE

Система аналітичних обчислень MAPLE має багатий набір вбудованих функцій, призначених для розв'язування класичних задач математичного аналізу, а саме:

обчислення границь послідовностей;

обчислення границь функцій однієї змінної та декількох змінних;

обчислення похідних функцій однієї змінної та багатьох змінних;

розвинення функцій за формулою Тейлора та за формулою Лорана, знаходження розкладів у узагальнені степеневі ряди;

знаходження невизначених інтегралів;

обчислення визначених інтегралів;

обчислення сум та добутків;

виконання заміни змінних в диференціальних та інтегральних виразах;

обчислення багатовимірних інтегралів;

обчислення криволінійних інтегралів;

обчислення поверхневих інтегралів та інші

Обчислення границь послідовностей та функцій

Для обчислення границь функцій використовується стандартна функція ***limit*** або **Limit**, друга функція представляє собою пасивну форму функції. Загальна форма функції ***limit*** або ***Limit*** має вигляд: ***limit(f(x),x=a,dir), Limit(f(x),x=a), Limit(f(x),x=a,dir),*** де ***f(x)*** – алгебраїчний вираз, або функція, що залежить від змінної ***x***, ***a*** – точка, в якій обчислюється значення границі, ***dir*** – параметр, який вказує на напрямок пошуку границі (***left*** – пошук односторонньої границі зліва, ***right*** – пошук односторонньої границі справа***, real*** – пошук границі в дійсній області, ***complex*** – пошук границі в комплексній області). Обчислення границі послідовностей здійснюється за допомогою функції ***limit(f(n),n=infinity),*** для змінної ***n*** можна використати функцію ***assume(n, integer).***

```
> assume(n,integer);
>limit((1/n-sin(1/n))*(n^3),n=infinity);
```

$$\frac{1}{6}$$

```
> limit((1+1/n)^(7*n),n=infinity);
```

$$e^{7}$$

```
> Limit((1+1/n)^(7*n),n=infinity);
```

$$\lim_{n\sim \to \infty} \left(1+\frac{1}{n\sim}\right)^{(7\,n\sim)}$$

```
> limit(tan(x),x=Pi/2,left);
```

$$\infty$$

```
> Limit(tan(x),x=Pi/2,right);
```

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi+} \tan(x)$$

```
> value(%);
```

$$-\infty$$

```
> limit(((5-x)/(6-x))^(x+2),x=infinity);
```

$$e$$

Обчислення похідних функцій.

Для диференціювання функцій в системі MAPLE використовуються стандартні функції ***diff(f,x1,x2…xn), Diff(f,x1,x2…xn)***, де ***f*** – алгебраїчний вираз або функція, які диференціюються, зокрема функція змінних ***x1,x2,….xn.*** Другий варіант – ***Diff –*** являє собою пасивну форму функції. Для обчислення похідних старших порядків при використанні функцій ***diff(f,x1,x2…xn), Diff(f,x1,x2…xn)*** можна використовувати однакові значення аргументів, або використовувати конструкцію ***x$k,*** де ***x*** – змінна по якій проводиться диференціювання, ***k*** – порядок похідної по змінній **x, *$*** - спеціальний символ повтору елементу ***x k*** разів. Слід зауважити, що при використанні функції ***diff*** або ***Diff*** результатом виконання є алгебраїчний вираз, який безпосередньо не може бути обчислений для фіксованих значень аргументів.

Другий спосіб обчислення похідних функцій пов'язаний з використанням диференціального оператора ***D,*** який має наступний вигляд: ***D(f)*** або ***D[i](f),*** де ***f*** – функція, ***i*** - додатне ціле число, вираз, який має ціле значення, або послідовність цілих чисел, яка вказує номери аргументів, по яким здійснюється диференціювання функції. На відміну від функції ***diff(f,x1,x2…xn)*** оператор ***D[i](f)*** після обчислення результату диференціювання зразу продукує функцію відповідної кількості аргументів, що дозволяє провести безпосереднє обчислення відповідної похідної для будь-якого значення аргументів. З іншого боку, для перетворення довільного виразу, що залежить від декількох змінних, у функцію тих самих змінних, слугує функція ***unapply(exp,[s]),*** де ***exp*** – вираз, ***[s]*** – список змінних нової функції.

```
>Diff(sin(x)/x,x)=diff(sin(x)/x,x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\frac{\cos(x)}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}$$

```
> diff(sin(x)/x,x$3);
```

$$-\frac{\cos(x)}{x}+\frac{3\sin(x)}{x^2}+\frac{6\cos(x)}{x^3}-\frac{6\sin(x)}{x^4}$$

```
> diff(sin(x)/x,x,x,x);
```

$$-\frac{\cos(x)}{x}+\frac{3\sin(x)}{x^2}+\frac{6\cos(x)}{x^3}-\frac{6\sin(x)}{x^4}$$

```
> g:=sin(x)/x+tan(x);
```

$$g:=\frac{\sin(x)}{x}+\tan(x)$$

```
> diff(g,x);
```

$$-\frac{\sin(x)}{x}-\frac{2\cos(x)}{x^2}+\frac{2\sin(x)}{x^3}+2\tan(x)\,(1+\tan(x)^2)$$

```
>v:=simplify(diff(x*y/sqrt(1+x^2+y^2),x,x)+diff(x*y/sqrt(1+x^2+y^2),y,y));
```

$$v:=-\frac{3\,y\,x\,(2+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{(5/2)}}$$

```
> vv:=unapply(v,x,y);
```

$$vv:=(x,y)\rightarrow-\frac{3\,y\,x\,(2+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^{(5/2)}}$$

```
> vv(1,1);
```

$$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

```
>f:=(x,y,z)->sin(x*y*z);
```

$$f:=(x,y,z)\rightarrow\sin(x\,y\,z)$$

```
>g1:=D[1,2,2](f);
```

$$g1:=(x,y,z)\rightarrow-\cos(x\,y\,z)\,y\,z^3\,x^2-2\sin(x\,y\,z)\,x\,z^2$$

```
> g1(1,1,Pi);
```

$$\pi^3$$

```
> D(D(D(arctan)));
```

$$x \to \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

Обчислення похідних для функцій заданих параметрично або неявно.

Нехай функція однієї змінної задана параметрично у вигляді $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де змінна t є параметром. Сама похідна функції, заданої параметрично, також задається параметрично і визначається з системи рівнянь: $\begin{cases} y'_x = y'_t(t)/x'_t(t) \\ x = x(t) \end{cases}$

Для знаходження першої похідної параметрично заданої функції зручно створити процедуру користувача ***Pdiff.***

```
Pdiff:=proc(y,x) local t; t->
diff(y(t),t)/diff(x(t),t) end
proc;
```

Pdiff := proc (y, x) local t; proc (t) options operator, arrow; diff(y(t), t)/diff(x(t), t) end proc end proc

Описати параметрично задану функцію

```
> x:=t->2*t-t^2;
```

$$x := t \to 2t - t^2$$

```
> y:=t->3*t-t^3;
```

$$y := t \to 3t - t^3$$

Застосувати процедуру ***Pdiff*** для обчислення першої похідної

```
> f:=Pdiff(y,x)(t);
```

$$f := \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t}$$

Для обчислення похідної більш високого порядку застосувати функцію декілька разів.

```
> simplify(Pdiff(Pdiff(y,x),x)(t));
```

$$-\frac{3}{4(-1+t)}$$

```
> simplify(Pdiff(unapply(f,t),x)(t));
```

$$-\frac{3}{4(-1+t)}$$

Обчислення похідних від неявно заданих функцій.

Дуже часто виникає необхідність обчислювати похідні від неявно заданих функцій, тобто таких функцій, які задаються у вигляді одного або декількох рівнянь, що містять як незалежні змінні, так і саму функцію. При задаванні неявної функції слід обов'язково визначити, які змінні є незалежними, а які є функціями. Для обчислення похідних від неявно заданих функцій використовується функція ***implicitdiff( )***, яка може мати один з наступних форматів виклику:

implicitdiff(f, y, x);

implicitdiff(f, y, x1,...,xk);

implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn}, u, x);

implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn}, u, x1,...,xk);

implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn}, {u1,...,ur}, x);

implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn}, {u1,...,ur}, x1,...,xk);

Де ***f, f1,...,fm*** – алгебраїчні рівняння (одне рівняння), що задають неявну функцію, або систему неявних функцій;

y, y1,...,yn - імена залежної змінної, або змінних;

u,u1,...,ur - імена залежних змінних, похідні від яких будуть знайдені;

x,x1,...,xk . – імена змінної, або змінних, по яким відбуватиметься обчислення похідної. При цьому порядок частинної похідної визначається кількістю та іменами змінних.

Наступний приклад демонструє обчислення першої та другої похідної від неявно заданої функції однієї змінної.

```
> f:=sin(x+y)-x*y=0;
```

$$f := \sin(x+y) - x\,y = 0$$

```
>implicitdiff(f,y,x);
```

$$-\frac{-\cos(x+y)+y}{-\cos(x+y)+x}$$

```
>implicitdiff(f,y,x,x);
```

$$-\frac{1}{-\cos(x+y)^3+3\cos(x+y)^2\,x-3\cos(x+y)\,x^2+x^3}(\sin(x+y)\,x^2$$

$$-2\sin(x+y)\,x\,y+\sin(x+y)\,y^2-2\cos(x+y)^2+2\cos(x+y)\,x$$
$$+2\,y\cos(x+y)-2\,x\,y)$$

Обчислення частинних похідних першого та другого порядку від неявної функції двох змінних:

```
>g:=z^3+3*x^2*z=2*x*y;
```

$$g:=z^3+3\,x^2\,z=2\,x\,y$$

```
> implicitdiff(g,z,x);
```

$$-\frac{2\,(3\,x\,z-y)}{3\,(z^2+x^2)}$$

```
>implicitdiff(g,z,y);
```

$$\frac{2\,x}{3\,(z^2+x^2)}$$

```
>implicitdiff(g,z,y,y);
```

$$-\frac{8\,z\,x^2}{9\,(z^6+3\,z^4\,x^2+3\,z^2\,x^4+x^6)}$$

```
>implicitdiff(g,z,x,x);
```

$$\frac{2\,(-18\,z^3\,x^2+12\,x\,z^2\,y-4\,z\,y^2-9\,z^5+27\,z\,x^4-12\,y\,x^3)}{9\,(z^6+3\,z^4\,x^2+3\,z^2\,x^4+x^6)}$$

```
>implicitdiff(g,z,x,y);
```

$$-\frac{2\,(-12\,z^2\,x^2+4\,x\,z\,y-3\,z^4+3\,x^4)}{9\,(z^6+3\,z^4\,x^2+3\,z^2\,x^4+x^6)}$$

Знаходження частинних похідних першого та другого порядку від двох неявних функцій двох незалежних змінних *u=u(x,y), v=v(x,y)*, які задані системою рівностей:

```
> fu:=x*u-y*v=0;
> fv:=y*u+x*v=1;
```

$$fu:=x\,u-y\,v=0$$
$$fv:=y\,u+x\,v=1$$

Далі обчислюються частинні похідні першого порядку від функцій *u=u(x,y), v=v(x,y)*:

```
>implicitdiff({fu,fv},
{u,v},{u,v},x,notation=Di
ff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}v\right)_y=-\frac{x\,v-y\,u}{x^2+y^2},\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right)_y=-\frac{x\,u+y\,v}{x^2+y^2}\right\}$$

```
>implicitdiff({fu,fv},
{u,v},{u,v},y,notation=Diff);
```

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}u\right)_x=\frac{x\nu-y u}{x^2+y^2},\left(\frac{\partial}{\partial y}\nu\right)_x=-\frac{x u+y\nu}{x^2+y^2}\right\}$$

В наступному прикладі провадиться обчислення другої змішаної похідної від функцій *u=u(x,y), v=v(x,y).*

```
>implicitdiff({fu,fv},{u,v},{u},x,
y,notation=Diff);
```

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}u=-\frac{2(\nu x^2-2yux-\nu y^2)}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right\}$$

```
>implicitdiff({fu,fv},{u,v},{v},x,
y,notation=Diff);
```

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\nu=\frac{2(x^2u+2xy\nu-y^2u)}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right\}$$

Обчислення сум послідовностей функціональних та числових рядів.

Для обчислення сум послідовностей в системі MAPLE існує стандартна функція ***sum*** та її інертна форма функція ***Sum***. Функції мають наступну форму:

sum(f,k), ***sum(f,k=m..n),*** ***sum(f,k=alpfa),***

Sum(f,k), ***Sum(f,k=m..n),*** ***Sum(f,k=alpfa).***

Тут ***f*** – функція, що залежить від ***k*** і задає члени послідовності, ***k*** – індекс сумування, ***m*** та ***n*** – цілочисельні границі зміни індексу сумування, ***alpfa*** – вираз типу ***RootOf(z***). В цьому випадку індекс ***k*** приймає значення з множини коренів рівняння ***z=0***.

Перша форма суми ***sum(f,k)*** еквівалентна формі ***sum(f,k=1..k-1).***

```
>sum('k'^3,'k');
```

$$\frac{1}{4}k^4-\frac{1}{2}k^3+\frac{1}{4}k^2$$

```
>sum('k'^3,'k'=1..'k-1');
```

$$\frac{1}{4}k^4-\frac{1}{2}k^3+\frac{1}{4}k^2$$

```
>Sum(-(-1)^'k'/'k','k'=1..infinity)=
sum(-(-1)^'k'/'k','k'=1..infinity);
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{(-1)^k}{k}\right)=\ln(2)$$

```
> Sum(1/('n'*('n'+1)),'n'=1..infinity)=
sum(1/('n'*('n'+1)),'n'=1..infinity);
```

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$$

```
>Sum(sin('k'*x)/(2^'k'),'k'=1..infinity)
=simplify(sum(sin('k'*x)/(2^'k'),'k'=1..
infinity));
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(k\,x)}{2^k}\right)=-\frac{2\sin(x)}{4\cos(x)-5}$$

```
>Sum(1/'k','k'='m'..'n')=sum(1/'k','k'=
'm'..'n');
```

$$\sum_{k=m}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)=\Psi(n+1)-\Psi(m)$$

Слід зауважити, що при обчисленні сум послідовностей необхідно строго додержуватися прямого (зростаючого) порядку значення індексної змінної суми.

Обчислення добутків членів послідовностей.

Для обчислення добутків членів послідовності в системі MAPLE використовуються стандартні функції

product(f,k) ***product(f,k=m..n),*** ***product(f,k=alpfa)***

Product(f,k) ***Product(f,k=m..n),*** ***Product(f,k=alpfa)***

Параметри функцій ***product*** мають зміст, аналогічний параметрам функції ***sum.***

```
>Product(('n'^2-4)/('n'^2-1),
n=3..infinity)=product(('n'^2-4)/('n'^2-
1), n=3..infinity);
```

$$\prod_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n^2-4}{n^2-1}\right)=\frac{1}{4}$$

```
Product((1-x^2/('n'^2*Pi^2)),
'n'=1..infinity)= product((1-x^2/
('n'^2*Pi^2)),'n'=1..infinity);
```

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\frac{\sin(x)}{x}$$

```
>Product(1-1/'n'^2,'n'=2..'k')=
product(1-1/'n'^2,'n'=2..'k');
```

$$\prod_{n=2}^{k}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\Gamma(k)\,\Gamma(k+2)}{2\,\Gamma(k+1)^2}$$

```
>Product(1-1/'n'^2,'n'=2..infinity)=
product(1-1/'n'^2,'n'=2..infinity);
```

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

Так само, як і для сум, при обчисленні добутків послідовностей необхідно строго додержуватися прямого (зростаючого) порядку значення індексної змінної.

Розвинення функцій в ряди.

Для розвинення аналітичних функцій в ряд Тейлора або ряд Маклорена в заданій точці в системі MAPLE використовуються стандартні функції ***taylor(), mtaylor().*** Перша функція використовується для функцій однієї змінної, а друга – для функцій багатьох змінних.

Функція ***taylor()*** має формат ***taylor(exp, x=a, n)***, де ***exp*** – вираз, що залежить від ***x***, або функція, ***x=a*** – задає точку, для якої здійснюється розвинення в ряд, ***n*** – необов'язковий параметр, що задає кількість членів розвинення. За замовчанням кількість членів розвинення дорівнює 6.

Функція ***mtaylor()*** має вигляд ***mtaylor(f,v,n)*** де ***f*** – вираз або функція, що залежить від декількох змінних. ***v*** – список рівностей виду ***[x=a,y=b,…z=c]***, або просто список змінних ***[x,y,…z]***, ***n*** – необов'язковий параметр, який вказує на максимальну сумарну ступінь в розвиненні, на якій обривається розвинення.

```
>taylor(ln(cos(x)),x,8);
```

$$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+O(x^8)$$

```
>taylor((sin(x^3))^(1/3),x,20);
```

$$x-\frac{1}{18}x^7-\frac{1}{3240}x^{13}+O(x^{19})$$

```
> taylor(x^x-1,x=1);
```

$$(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\frac{1}{3}(x-1)^4+\frac{1}{12}(x-1)^5+O((x-1$$

```
>taylor(sqrt(1+x^2)-x,
x=infinity);
```

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+\frac{1}{16x^5}+O\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

Розкласти в ряд Маклорена функцію $\ln(1+x+y)$ с точністю до множників, що містять похідні п'ятого порядку:

```
> mtaylor(ln(1+x+y),[x,y]);
```

$$x+y-\frac{1}{2}x^2-y\,x-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}x^3+y\,x^2+y^2\,x+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}x^4-y\,x^3-\frac{3}{2}y^2\,x^2-y^3\,x-\frac{1}{4}y^4$$
$$+\frac{1}{5}x^5+y\,x^4+2y^2\,x^3+2y^3\,x^2+y^4\,x+\frac{1}{5}y^5$$

Розкласти в ряд Тейлора зі збереженням членів до п’ятого порядку включно функцію x^y в околі точки $x=1,\ y=1$:

```
>mtaylor(x^y,[x=1,
y=1],4);
```

$$x+(y-1)(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)(x-1)^2-\frac{1}{6}(y-1)(x-1)^3+\frac{1}{2}(y-1)^2(x-1)^2$$
$$+\frac{1}{12}(y-1)(x-1)^4$$

Розкласти в ряд Маклорена функцію $\sqrt{(1-x^2-y^2)}$ с точністю до множників, що містять похідні шостого порядку:

```
>mtaylor((1-x^2-
y^2)^(1/2),[x,y],7);
```

$$1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}y^2\,x^2-\frac{1}{8}y^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{3}{16}y^2\,x^4-\frac{3}{16}y^4\,x^2-\frac{1}{16}y^6$$

У випадку, коли є необхідність знайти лише деякі коефіцієнти у розвинені функції в ряд Тейлора або Маклорена у системі MAPLE використовується стандартна функція ***coeftayl(exp,var,k)***, де ***exp*** – функція декількох змінних, ***var*** – рівність вигляду ***[x,y…z]=[a,b,…c]***, якій задає точку розвинення функції в ряд, ***k*** – список, елементами якого є цілі числа ***[l1,l2,…ls]***, який фіксує коефіцієнт розвинення.

Наступні приклади обчислюють коефіцієнт при x^2y^4 для функції $\sqrt{(1-x^2-y^2)}$ та коефіцієнт при $(y-1)(x-1)^4$ для функції .x^y .

```
>coeftayl( (1-x^2-y^2)^(1/2),[x,y]=[0,0],[2,4]);
```

$$\frac{-3}{16}$$

```
>coeftayl(x^y,[x,y]=[1,1],[4,1]);
```

$$\frac{1}{12}$$

Для розвинення в ряди функцій в особливих точках, в яких не існують похідні функції, замість рядів Тейлора та Маклорена застосовується більш загальне розвинення в узагальнений степеневий ряд, який може містити не тільки цілі додатні степені, а й дробові від'ємні степені та логарифми. Це розвинення може бути отримане за допомогою функції ***series(expr,egn,n),*** де ***expr*** – вираз, що розкладається в ряд, ***egn*** – умова виду ***x=a***, або ***x***, яка вказує точку для якої відбувається розвинення, ***n*** – необов'язковий параметр, який вказує на кількість членів ряду.

```
>series(x*(tan(x))^3, x=Pi/2,5);
```

$$-\frac{\frac{1}{2}\pi}{\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^3}-\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^{(-2)}+\frac{\frac{1}{2}\pi}{x-\frac{1}{2}\pi}+1-\frac{2}{15}\pi\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)-\frac{4}{15}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^2+O\left(\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^3\right)$$

```
>series(exp(x)/(sin(x)^(1/3)),x=0);
```

$$\frac{1}{x^{(1/3)}}+x^{(2/3)}+\frac{5}{9}x^{(5/3)}+\frac{2}{9}x^{(8/3)}+\frac{59}{810}x^{(11/3)}+\frac{17}{810}x^{(14/3)}+O\left(x^{(17/3)}\right)$$

```
>series(x^x, x=0, 5);
```

$$1+\ln(x)\,x+\frac{1}{2}\ln(x)^2\,x^2+\frac{1}{6}\ln(x)^3\,x^3+\frac{1}{24}\ln(x)^4\,x^4+O(x^5)$$

```
>taylor(x^x, x=0, 5);
```

does not have a taylor expansion, try series()

```
>series((sin(x))^(1/7)/x^(1/2), x=0, 7);
```

$$s:=\frac{1}{x^{(5/14)}}-\frac{1}{42}x^{(23/14)}-\frac{1}{1960}x^{(51/14)}+O\left(x^{(79/14)}\right)$$

Лекція 4

Заміна змінних у диференціальних та інтегральних виразах

В системі MAPLE існує можливість проводити заміну змінних в диференціальних та інтегральних виразах однієї та багатьох незалежних змінних. Для цього можна використовувати функцію ***dchange()*** пакету ***PDEtools***, яка має наступний вигляд ***dchange(tr, expr),*** де ***tr*** – множина алгебраїчних рівностей, які містять в лівій частині старі незалежні змінні, а в правій частині вирази від нових незалежних змінних, ***expr*** – диференціальний, інтегральний або інтегро-диференціальний вираз, в якому здійснюється заміна змінних. Вказані параметри є обов'язковими, при цьому функція ***dchange()*** допускає також розширений перелік параметрів. Зокрема у випадку, коли заміна змінних містить крім незалежних змінних ще й параметри, необхідно третім параметром вказати список нових незалежних змінних.

В наступному прикладі для звичайного диференціального рівняння третього порядку введена заміна змінних $z=e^t$

```
>with(PDEtools):
>assume(z>0);
>g:=diff(y(z),z$3)=6*y/z^2;
```

$$g := \frac{d^3}{dz\sim^3} y(z\sim) = \frac{6\,y}{z\sim^2}$$

```
>simplify(dchange(z=exp(t),g)*
exp(3*t));
```

$$2\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) - 3\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) + \left(\frac{d^3}{dt^3}y(t)\right) = 6\,\mathbf{e}^t\,y$$

В наступному прикладі для лінійного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними введена заміна змінних $\xi = x + y,\ \eta = x - y$

```
dd:=y*diff(z(x,y),x,x)-
x*diff(z(x,y),y,y)=0;
```

$$dd := y\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}z(x,y)\right) - x\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}z(x,y)\right) = 0$$

```
collect(dchange({x=(xi+eta
)/2,y=(xi-
eta)/2},dd),diff);
```

$$-\eta\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}z(\eta,\xi)\right) + 2\,\xi\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}z(\eta,\xi)\right) - \eta\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}z(\eta,\xi)\right) = 0$$

Перехід до полярної системи координат в операторі Лапласа:

```
> qq:=diff(u(x,y),x,x)+diff(u(x,y),y,y);
```

$$qq := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right)$$

```
> qq1:=simplify(dchange({x=r*cos(s),y=r*sin(s)},qq));
```

$$qq1 := \frac{\left(\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{u}(r,s)\right)r + \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\mathrm{u}(r,s)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\mathrm{u}(r,s)\right)r^2}{r^2}$$

Заміна змінних в інтегральному виразі

```
> assume(t^2<1);
> int1:=int(ln(sin(x^2)),x=0..Pi/2);
```

$$int1 := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x^2))\, dx$$

```
> simplify(dchange({x=arcsin(t)},int1));
```

$$\int_0^1 \frac{\ln(\sin(\arcsin(t\sim)^2))}{\sqrt{1-t\sim^2}}\, dt\sim$$

Функція ***dchange()*** виконує заміну лише незалежних змінних в диференціальних виразах. В той же час іноді виникає необхідність провести заміну змінних в більш складному випадку.

Розглянемо задачу:

Ввівши нові змінні, перетворити наступне звичайне диференціальне рівняння: $y''' - x^2 y'' + xy' - y = 0,\ \text{якщо}\ x = \frac{1}{t},\ y = \frac{u}{t}, u = u(t).$

Для розв’язання цієї задачі запишемо диференціальне рівняння, нові змінні, незалежну змінну *t*, залежну змінну *u(t),* та виконаємо потрібні обчислення.

```
> with(PDEtools):
```

> $eq := diff(z(x), x\$3) - x^2 * diff(z(x), x\$2) + x * diff(z(x), x) - z(x) = 0;$

$$\frac{d^3}{dx^3} z(x) - x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} z(x)\right) + x\left(\frac{d}{dx} z(x)\right) - z(x) = 0$$

$q1 := collect\left(dchange\left(\left\{x = \frac{1}{t}\right\}, eq\right), diff\right);$

$$-t^6\left(\frac{d^3}{dt^3} z(t)\right) + \left(-6t^5 - t^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} z(t)\right) + \left(-6t^4 - 3t\right)\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) - z(t) = 0$$

$z := t \to \frac{u(t)}{t};$ $$z := t \to \frac{\mathrm{u}(t)}{t}$$

$> eq2 := -collect(normal(eq1), diff);$

$$\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(t)\right) - (-3\,t^4 - t^2)\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t)\right) + t^5\left(\frac{d^3}{dt^3}\mathrm{u}(t)\right) = 0$$

Інтегрування функцій

Обчислення невизначених інтегралів

Невизначені інтеграли в MAPLE обчислюються за допомогою стандартної процедури ***int(exp,x)***, яка має також інертну форму ***Int(exp,x)***, де ***exp*** – підінтегральна функція, ***x*** – змінна інтегрування. Інертна форма процедури інтегрування використовується для символьного запису невизначеного інтегралу.

Розглянемо приклади застосування процедур знаходження невизначеного інтегралу.

```
>Int(1/(x^2+1)^(3/2),x)=
int(1/(x^2+1)^(3/2),x);
```

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{(3/2)}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

```
> f:=x->
(x^2+5*x+4)/(x^4+5*x^2+4);
```

$$f := x \to \frac{x^2+5\,x+4}{x^4+5\,x^2+4}$$

```
> Int(f(x),x)=int(f(x),x);
```

$$\int \frac{x^2+5\,x+4}{x^4+5\,x^2+4}\,dx = \frac{5}{6}\ln(x^2+1) + \arctan(x) - \frac{5}{6}\ln(x^2+4)$$

Наступний приклад демонструє можливість обчислення невизначеного інтегралу від функцій, що задані у вигляді “фігурної дужки”.

```
> g:=x->
piecewise(x<=0,sin(x),x>0
and x <=1,x^2,x^3);
```

$$g := x \to piecewise(x \le 0, \sin(x), 0 < x \textbf{ and } x \le 1, x^2, x^3)$$

```
> g(x);
```

$$\begin{cases} \sin(x) & x \le 0 \\ x^2 & -x < 0 \textbf{ and } x - 1 \le 0 \\ x^3 & otherwise \end{cases}$$

```
> gg:=x->int(g(x),x);
```

$$gg := x \to \int g(x)\,dx$$

```
> gg(x);
```

$$\begin{cases} -\cos(x) & x \le 0 \\ \frac{1}{3}x^3 - 1 & x \le 1 \\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{12} & 1 < x \end{cases}$$

Приклад демонструє можливість обчислення невизначеного інтегралу від функції, що залежить від параметрів.

```
>Int(exp(alpha*x)*cos(b*x)
,x)=
combine(int(exp(alpha*x)*
cos(b*x),x));
```

$$\int e^{(\alpha x)} \cos(b\,x)\,dx = \frac{\alpha\,e^{(\alpha x)}\cos(b\,x) + b\,e^{(\alpha x)}\sin(b\,x)}{\alpha^2 + b^2}$$

```
> collect(%,exp);
```

$$\int e^{(\alpha x)} \cos(b\,x)\,dx = \frac{e^{(\alpha x)}(\alpha\cos(b\,x) + b\sin(b\,x))}{\alpha^2 + b^2}$$

Обчислення визначених інтегралів

Для обчислення визначених інтегралів в системі MAPLE використовується процедура ***int()*** та її пасивна форма ***Int()*** з синтаксисом виклику ***int(exp, x=a..b),*** де ***exp*** – підінтегральна функція, ***x*** – змінна інтегрування, ***a,b*** – відповідно верхня та нижня межі інтегрування.

Розглянемо приклади обчислення визначених інтегралів.

```
> Int(1/(sin(x)^4+cos(x)^4),x=0..
2*Pi)=int(1/(sin(x)^4+cos(x)^4),
x=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin(x)^4 + \cos(x)^4}\,dx = 2\sqrt{2}\,\pi$$

```
>assume(a>=0);
```

```
> Int(x^2*sqrt(a^2-x^2),x=0..a)=
int(x^2*sqrt(a^2-x^2),x=0..a);
```

$$\int_0^{a\sim} x^2\sqrt{a\sim^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{16}a\sim^4\,\pi$$

```
> assume(b<1 and b>0);
```

```
> Int(x*abs(x-b),x=0..1)=
int(x*abs(x-b),x=0..1);
```

$$\int_0^1 x\,|x-b\sim|\,dx=-\frac{1}{2}b\sim+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b\sim^3$$

Дуже часто виникає потреба в обчисленні невласних інтегралів першого або другого роду. Нагадаємо, що невласними інтегралами першого роду називають визначені інтеграли, в яких хоча б одна межа інтегрування є нескінченою. Невласними інтегралами другого роду називається визначені інтеграли, в яких підінтегральна функція принаймні в одній точці інтервалу інтегрування перетворюється в нескінченість.

Розглянемо приклади обчислення невласних інтегралів першого роду.

```
>Int(1/(x^2+x+1)^2,x=-infinity..
infinity)=int(1/(x^2+x+1)^2,x=-
infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}$$

```
>int(ln(1+x)/x^n,x=0..infinity);
```

$$-\frac{\pi\csc(\pi n)}{-1+n}$$

```
>Int(x^2*cos(exp(x)),x=0..infin
ity)=int(x^2*cos(exp(x)),x=0..infini
ty);
```

$$\int_0^{\infty} x^2\cos\left(e^x\right)dx=\int_0^{\infty} x^2\cos\left(e^x\right)dx$$

Останній приклад демонструє, що система MAPLE не в змозі провести аналітичне обчислення інтегралу і тому лише повторює символічну форму запису останнього.

Розглянемо приклади обчислення невласних інтегралів другого роду.

```
> int(ln(sin(x)),x=0..Pi/2);
```

$$-\frac{1}{2}\pi\ln(2)$$

У цьому прикладі підінтегральна функція є необмеженою в точці $x=0$

```
> int(1/(1-cos(2*x)),x=0..Pi/4);
```

$$\infty$$

Цей приклад демонструє, що інтеграл є розбіжним за рахунок сильного зростання підінтегральної функції в точці $x = 0$

```
>Int(1/(3-x)^(1/2),x=1..3)=
int(1/(3-x)^(1/2),x=1..3);
```

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = 2\sqrt{2}$$

Підінтегральна функція необмежено зростає в точці $x = 3$, проте інтеграл приймає скінчене значення.

Головне значення за Коші для невласних інтегралів

Іноді невласний інтеграл від необмеженої функції не існує, але він може існувати в дещо послабленому розумінні, а саме може існувати його головне значення за Коші. Це значення невласного інтегралу можна позначити та записати у вигляді.

$$v.p.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx]$$

Для невласних інтегралів на необмеженому інтервалі теж можна розглядати певне послаблення невласного інтегралу, а саме його головне значення за Коші, яке можна позначити та записати у вигляді: $v.p.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$

Для обчислення головного значення за Коші невласного інтеграла першого або другого роду використовується функція *int*(*exp*,*x*=*a*..*b*, CauchyPrincipalValue), де параметр 'CauchyPrincipalValue’ вказує на необхідність розглядати відповідний невласний інтеграл за його головним значення за Коші.

```
>int(cos(x)/x^3, x=-
Pi/2..Pi/2,CauchyPrincipalValue);
```

$$0$$

```
>int(cos(x)/x^3, x=-Pi/2..Pi/2);
```

undefined

Попередній приклад демонструє, що головне значення інтегралу за Коші, дорівнює нулю, але в звичайному розумінні невласний інтеграл не існує.

```
> int(1/(x^2-3*x+2),x=0..infinity,
'CauchyPrincipalValue');
```

$$-\ln(2)$$

Цей приклад демонструє наявність головного значення за Коші невласного інтегралу другого та першого роду одночасно. Як інтеграл другого роду, підінтегральна функція має необмежене зростання в точках $x=1,\ x=2$. В звичайному розумінні невласний інтеграл не існує, про що свідчить наступне обчислення в системі MAPLE.

```
>int(1/(x^2-3*x+2),x=0..infinity);
```

$$undefined$$

Обчислення подвійних інтегралів.

Для обчислення подвійних інтегралів в системі MAPLE не існує спеціальної окремої процедури, тому обчислення усіх подвійних інтегралів у випадку, коли область інтегрування є простою, тобто обмежена контуром першого або другого роду, згідно до загальної теорії зводиться до обчислення повторних інтегралів зі змінними верхніми границями. У випадку, коли область інтегрування є більш складною, то вона представляється у вигляді декількох простих областей.

Розглянемо декілька прикладів обчислення подвійних інтегралів шляхом їх зведення до повторних.

Обчислити подвійних інтеграл $\iint\limits_E (x^2+y^2)dxdy$ по множині ***E***, обмеженій прямими: $y=0,\ x=y,\ x=1$. Такий інтеграл зводиться до повторного інтегралу

$$\int_0^1 (\int_0^x (x^2+y^2)dy)dx = \int_0^1 (\int_0^y (x^2+y^2)dx)dy$$

одним з двох способів .

```
Int(Int((x^2+y^2),y=0..x),x=0..1)=
int(int(x^2+y^2 ,y=0..x),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^x x^2+y^2\, dy\, dx = \frac{1}{3}$$

```
>Int(Int(x^2+y^2 ,x=0..y),y=0..1)=
int(int(x^2+y^2 ,x=0..y),y=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^y x^2+y^2\, dx\, dy = \frac{1}{3}$$

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_E xydxdy$ по множині ***E***, обмеженій кривими: $x+y=2,\ x^2+y^2=2y,\ x>0$. Такий інтеграл зводиться до повторного одним з двох способів $\int\limits_0^1 (\int\limits_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} (x\ y\ )dy)dx = \int\limits_1^2 (\int\limits_{2-y}^{\sqrt{-y^2+2y}} (x\ y\ )dx)dy$

```
>int(int(x*y,y=2-x..1+sqrt(1-x^2)),x=0..1);
```

$$\frac{1}{4}$$

```
>int(int(x*y,x=2-y..sqrt(-y^2+2*y)),y=1..2);
```

$$\frac{1}{4}$$

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_E y^2\sqrt{R^2-x^2}dxdy$, де E - коло радіусу R з центром на початку координат. Цей інтеграл може бути зведений до повторного інтегралу: $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\ \sqrt{R^2-x^2}dy$, який можна обчислити за допомогою подвійного інтегрування в системі MAPLE.

```
>int(int(y^2*sqrt(R^2-x^2),y=-sqrt(R^2-
x^2)..sqrt(R^2-x^2)),x=-R..R);
```

$$\frac{32}{45}R^5$$

Хоча в системі MAPLE немає спеціалізованої функції обчислення подвійних інтегралів, але в пакеті ***student*** існує функція ***Doubleint***, яка має лише нейтральну (пасивну) форму і призначена для запису подвійного інтегралу.

Розглянемо використання цієї функції для обчислення подвійного інтегралу з попереднього прикладу.

```
>with(student):
>D1:=Doubleint(y^2*sqrt(R^2-x^2),y =-
sqrt(R^2-x^2)..sqrt(R^2-x^2),x=-R..R);
```

$$D1 := \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\sqrt{R^2-x^2}\,dy\,dx$$

Слід зауважити, що порядок слідування змінних в межах інтегрування, а саме ***y***, а потім ***x***, є дуже важливим для коректного обчислення цього інтегралу шляхом зведення до повторного за допомогою функції ***value(exp)***, де в якості змінної ***exp*** беремо подвійний інтеграл ***D1.***

```
> value(D1);
```

$$\frac{32}{45}R^5$$

Бачимо, що обчислення значення інтегралу за допомогою функцій ***Doubleint*** та ***value*** повністю збігається з попереднім способом обчислення.

```
>Doubleint(x^3+y^3,x,y,Omega);
```

$$\int\int_{\Omega} x^3+y^3\,dx\,dy$$

Цей приклад демонструє можливості функції ***Doubleint*** лише для символічного запису подвійного інтегралу по деякій області ***Ω.***

Другим досить ефективнім методом обчислення подвійних інтегралів є метод заміни змінних інтегрування, який можна виконати за допомогою функції ***changevar***. Розглянемо декілька прикладів обчислення подвійного інтегралу з використанням методу заміни змінних.

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy,\ \Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le 2ax\}.$

Враховуючи вигляд області інтегрування, яка є колом радіусу ***a*** з центром в точці ***(a,0),*** найбільш зручно ввести полярну систему координат $x=a+r\cos\phi,\ y=r\sin\phi$, з подальшим зведенням до повторного інтегралу.

На першому кроці використовуємо функцію ***Doubleint*** для символічного запису подвійного інтегралу.

```
>A:=Doubleint((x^2+y^2),x,y,Omega);
```

$$A:=\int\int_{\Omega} x^2+y^2\,dx\,dy$$

На другому кроці за допомогою функції ***changevar*** або відомої раніше функції ***dhange*** проводимо заміну змінних у підінтегральному виразі .

```
>assume(r>=0);
```

```
>AA:=changevar({x=a+r*cos(phi),y
=r*sin(phi)},A,[r,phi]);
```

$$AA := \int\int_{\Omega} r\sim a^2 + 2\,a\,r\sim^2 \cos(\phi) + r\sim^3\, dr\sim d\phi$$

```
AA1:=simplify(dchange({x=a+r*cos
(phi),y=r*sin(phi)},A,[r,phi]));
```

$$AA1 := \int_{\_\alpha}^{\_\beta}\int_{\_l_{r\sim}(\phi)}^{\_u_{r\sim}(\phi)} r\sim(a^2+2\,a\,r\sim\cos(\phi)+r\sim^2)\,dr\sim d\phi$$

На третьому кроці проведемо обчислення подвійного інтегралу шляхом зведення до повторного, наведені два еквівалентних способи обчислення.

```
>value(eval(AA1,[_alpha=0,_beta=2*Pi,_u[r](phi)=a,_l[r](phi)=0]));
```

$$\frac{3\,\pi\,a^4}{2}$$

```
>value(Doubleint(r*(a^2+2*a*r*cos(phi)+r^2),r=0..
a,phi=0..2*Pi));
```

$$\frac{3}{2}a^4\pi$$

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\Omega} x\sqrt{(x^2+y^2)}dxdy$, де область $\boldsymbol{\Omega}$ обмежена правою пелюсткою лемніскати $\{(x,y):(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\},x\ge 0$

Враховуючи вигляд області інтегрування, найбільш зручно ввести полярну систему координат $x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi$, з подальшим зведенням до повторного інтегралу. Результати обчислення інтегралу двома способами наведені нижче.

```
>B:=Doubleint(x*sqrt(x^2+y^2),x,y,Omega);
```

$$B := \int\int_{\Omega} x\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

```
>BB:=changevar({x=r*cos(phi),y=r*sin(phi)}
,B,[r,phi]);
```

$$BB := \int\int_{\Omega} r\sim^3\cos(\phi)\,dr\sim d\phi$$

```
>BB1:=simplify(dchange({x=r*cos(phi),y=r*s
in(phi)},B,[r,phi]));
```

$$BB1 := \int_{\_\alpha}^{\_\beta} \cos(\phi)\int_{\_l_{r\sim}(\phi)}^{\_u_{r\sim}(\phi)} r\sim^3\,dr\sim d\phi$$

```
>Omega:=(x^2+y^2)^2=a^2*(x^2-y^2);
```

$$\Omega := (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

```
> s1:={x=r*cos(phi),y=r*sin(phi)};
```

$$s1 := \{x = r\sim \cos(\phi), y = r\sim \sin(\phi)\}$$

```
> simplify(subs(s1,Omega))/r^2;
```

$$r\sim^2 = a^2 (2\cos(\phi)^2 - 1)$$

```
> simplify(dchange(s1,Omega)/r^2);
```

$$r\sim^2 = a^2 (2\cos(\phi)^2 - 1)$$

```
>int(int('r'^3*cos(phi),'r'=0..a*sqrt(2*co
s(phi)^2-1)),phi=-Pi/4..Pi/4);
```

$$\frac{2\sqrt{2}\,a^4}{15}$$

```
>value(eval(BB1,[_alpha=-
Pi/4,_beta=Pi/4,_l[r](phi)=0,_u[r](phi)=a*
sqrt(2*cos(phi)^2-1)]));
```

$$\frac{2\sqrt{2}\,a^4}{15}$$

Обчислення потрійних інтегралів

Для обчислення потрійних інтегралі в системі MAPLE, так само як і для подвійних інтегралів, використовується метод зведення до повторних інтегралів зі змінними межами інтегрування. Крім того, у пакеті ***Student[MultivariateCalculus]*** існує нейтральна функція ***Multiint,*** яка використовується для символічного запису тривимірного та двовимірних інтегралів, або в сукупності з функцією ***value*** для їх обчислення шляхом зведення до повторного.

Розглянемо декілька прикладів обчислення потрійних інтегралів

Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}dxdydz$, де $\boldsymbol{V}$ область, обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0, x+y+z=1$.

Обчислення цього інтегралу зводиться до трьохкратного повторного інтегрування $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$, що і демонструють наступні обчислення.

```
>Multiint(1/(1+x+y+z)^3,z=0..1-x-
y,y=0..1-
x,z=0..1)=int(int((int(1/(1+x+y+z)
^3,z=0..1-x-y)),y=0..1-x),x=0..1);
```

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,dz\,dy\,dz = -\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\ln(2)$$

Обчислити тривимірний інтеграл $\iiint\limits_V zdxdydz$, де $V=\{(x,y,z): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ z\ge 0\}$.

Неважко зрозуміти, що цей інтеграл зводиться до повторного інтегралу $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} zdz$, що і реалізовано в наступних обчисленнях операторів MAPLE:

```
> assume(a>=0);
> value(Multiint (z,z=0..c*sqrt(1-x^2/a^2-y^2/b^2),y=-b/a*sqrt(a^2-
x^2)..b/a*sqrt(a^2-x^2),x=-a..a));
```

$$\frac{1}{4}c^2\, b\, a{\sim}\, \pi$$

Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V \frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$, де V тіло, що обмежене зверху поверхнею $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$, а знизу площиною $z=0$.

Для обчислення інтегралу введемо сферичні координати та проведемо обчислення рівняння поверхні

```
> V:= (x^2+y^2+z^2)^2=a^2*x*y;
```

$$V := (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2\, x\, y$$

```
>sfer:={x=r*cos(phi)*sin(theta),y=r*sin(phi)*sin(theta),
z=r*cos(theta)};
```

$$sfer := \{x = r{\sim}\cos(\phi)\sin(\theta),\ y = r{\sim}\sin(\phi)\sin(\theta),\ z = r{\sim}\cos(\theta)\}$$

```
> subs(sfer,V);
```

$$(r{\sim}^2\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2 + r{\sim}^2\sin(\phi)^2\sin(\theta)^2 + r{\sim}^2\cos(\theta)^2)^2 = a^2\, r{\sim}^2\cos(\phi)\sin(\theta)^2\sin(\phi)$$

```
> V1:=collect(%,r^4)*(1/r^2);
```

$$V1 := r{\sim}^2\,(\cos(\phi)^2\sin(\theta)^2 + \sin(\phi)^2\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2)^2 = a^2\cos(\phi)\sin(\theta)^2\sin(\phi)$$

```
>V2:=simplify(lhs(V1),{cos(phi)^2+sin(phi)^2=1,cos(theta)^2+sin(theta)^2=1})=rhs(V1);
```

$$V2 := r\sim^2 = a^2 \cos(\phi) \sin(\theta)^2 \sin(\phi)$$

```
> VS:=simplify(V2,{cos(phi)*sin(phi)=sin(2*phi)/2});
```

$$VS := r\sim^2 = \frac{1}{2} a^2 \sin(\theta)^2 \sin(2\,\phi)$$

```
with(Student[MultivariateCalculus]):
> I12:=Multiint(x*y*z/(x^2+y^2),x,y,z,AA);
```

$$I12 := \int\int\int_{AA} \frac{x\,y\,z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

```
> Isfer:=changevar(sfer,I12,[r,phi,theta]);
```

$$Isfer := \int\int\int_{AA} r\sim^3 \cos(\phi) \sin(\phi) \cos(\theta)\,|\sin(\theta)|\,dr\sim\,d\phi\,d\theta$$

```
> Isfer1:=dchange(sfer,I12,[r,phi,theta],simplify);
```

$$Isfer1 := \int_{\_\alpha}^{\_\beta} \cos(\theta)\,|\sin(\theta)| \int_{\_l_{\phi}(\theta)}^{\_u_{\phi}(\theta)} \cos(\phi) \sin(\phi) \int_{\_l_{r\sim}(\phi,\theta)}^{\_u_{r\sim}(\phi,\theta)} r\sim^3\,dr\sim\,d\phi\,d\theta$$

```
> eval(Isfer1,{_alpha=0,_beta=Pi/2,_l[phi](theta)=0,
_u[phi](theta)=Pi/2,_l[r](phi,theta)=0,_u[r](phi,theta)=a*sqrt(1/2*sin(theta)^2*sin(2*phi))});
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\,|\sin(\theta)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi) \sin(\phi) \int_0^{1/2\,a\,\sqrt{2}\,\sqrt{\sin(\theta)^2 \sin(2\,\phi)}} r\sim^3\,dr\sim\,d\phi\,d\theta$$

```
> value(%);
```

$$\frac{a^4}{288}$$

```
>I1:=value(Tripleint(r^3*cos(phi)*sin(phi)*cos(theta)*abs(sin(theta)),r=0..sqrt(1/2*a^2*sin(theta)^2*sin(2*phi)),phi=0..Pi/2,theta=0..Pi/2));
```

$$I1 := \frac{a^4}{288}$$

Аналогічно обчислюється інтеграл для інтервалу `phi=Pi..3*Pi/2`.

Лекція 5

Обчислення криволінійних інтегралів.

Обчислення криволінійних інтегралів в системі MAPLE здійснюється шляхом зведення їх до звичайних визначених інтегралів. Спосіб зведення залежить від типу криволінійного інтегралу (криволінійний інтеграл першого чи другого роду), та способу задання контуру інтегрування.

Таке зведення можна зробити безпосередньо, використовуючи відповідну формулу математичного аналізу, або застосувавши функцію ***Lineint()*** пакету ***student***. Ця функція має декілька форматів використання в залежності від способу задання контуру інтегрування, а саме: ***Lineint(f(x,y), x, y), Lineint(f(x,y), x=x(t), y=y(t)), Lineint(f(x,y), x, y =a..b), Lineint(f(x,y), x=x(t), y=y(t), t=a..b);Lineint(f(x,y,z), x, y, z). f(x,y), f(x,y,z)*** – підінтегральна функція***, x, y, z*** – аргументи функції, ***a,b*** – нижня та верхня межі інтегрування.

Розглянемо декілька прикладів, з яких буде зрозумілим, як проводити обчислення криволінійних інтегралів за допомогою функції ***Lineint()***.

Приклад: обчислити $\int\limits_C (x^2 + y^2)ds$, де C – крива $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

Наведений інтеграл є криволінійним інтегралом першого роду при параметричному способі задання контуру інтегрування.

```
>assume(a>0);
```

```
>x:=t->a*(cos(t)+t*sin(t));
```

$$x := t \to a\,(\cos(t) + t\sin(t))$$

```
>y:=t->a*(sin(t)-t*cos(t));
```

$$y := t \to a\,(\sin(t) - t\cos(t))$$

```
>Lineint(x(t)^2+y(t)^2,x,
y,t=0..2*Pi);
```

$$\int_0^{2\pi} (a\sim^2 (\cos(t) + t\sin(t))^2 + a\sim^2 (\sin(t) - t\cos(t))^2)$$

```
>factor(value(%));
```

$$2\, a\sim^3 \pi^2 (1 + 2\pi^2)$$

Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_\Gamma x^2 ydl$, де Γ – чверть еліпсу $x^2 + 4y^2 = 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$. Для обчислення інтегралу використовуємо зведення до визначеного інтегралу:

```
> y:=x->(sqrt(4-x^2))/2;
```

$$y := x \to \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

```
>Int(x^2*y(x)*sqrt(1+(diff(y(x),x))^2),x=0..2)=int(x^2*y(x)*sqr
t(1+(diff(y(x),x))^2),x=0..2);
```

$$\int_0^2 \frac{x^2\sqrt{4-x^2}\sqrt{4+\dfrac{x^2}{4-x^2}}}{4}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{27}$$

Обчислимо цей інтеграл з використанням функції ***Lineint.***

$y := x \to (\mathrm{sqrt}(4 - x\verb|^|2))/2;$ $\qquad y := x \to \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$

$z := x \to x;$ $\qquad z := x \to x$

$value\big(Lineint\big(z(x)^2 \cdot y(x), y, z, x = 0\,..2\big)\big);$ $\qquad \frac{8}{27}\sqrt{3}\,\pi + \frac{1}{3}$

Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_\Gamma \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2},\ \ \Gamma = \{(x, y) : y = x, 1 \le x \le 2\};$

```
> x:=y->y;
```

$x := y \to y$

```
> y:=x->x;
```

$y := x \to x$

```
I1:=Int(y(x)/(x^2+y(x)^2),x=1..2)+Int(x(y)/(x(y)^2+y^2),y=1..2)
;
```

$$I1 := \int_1^2 \frac{1}{2x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2y}\,dy$$

```
> value(I1);
```

$\ln(2)$

Знайти криволінійний інтеграл другого роду для контуру заданого параметрично $\int\limits_{\Gamma} xdy - ydx,\ \Gamma = \{(x, y) : x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t\}.$

Враховуючи, що контур інтегрування задано в параметричному вигляді обчислимо інтеграл за допомогою функції ***int().***

```
> x:=t->a*(cos(t))^3;
```

$$x := t \to a\cos(t)^3$$

```
> y:=t->a*(sin(t))^3;
```

$$y := t \to a\sin(t)^3$$

```
> I2:=Int(x(t)*diff(y(t),t),t=0..2*Pi)-
Int(y(t)*diff(x(t),t),t=0..2*Pi);
```

$$I2 := \int_0^{2\pi} 3\,a\sim^2 \cos(t)^4 \sin(t)^2\,dt - \int_0^{2\pi} -3\,a\sim^2 \sin(t)^4 \cos(t)^2\,dt$$

```
> value(I2);
```

$$\frac{3\pi a\sim^2}{4}$$

Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{\Gamma} \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}$ вздовж правої пелюстки лемніскати $\rho^2 = a^2\cos(2\theta)$.

```
> rho:=phi->a*sqrt(cos(2*phi));
```

$$\rho := \phi \to a\sqrt{\cos(2\phi)}$$

```
> x:=phi->rho(phi)*cos(phi); y:=phi->rho(phi)*sin(phi);
```

$$x := \phi \to \rho(\phi)\cos(\phi)$$

$$y := \phi \to \rho(\phi)\sin(\phi)$$

```
>I3:=simplify(Int(x(phi)*(y(phi))^2/((x(phi))^2+(y(phi))^2)*
diff(x(phi),phi),phi=-Pi/4..Pi/4)-Int((x(phi))^2*y(phi)/
((x(phi))^2+(y(phi))^2)*diff(y(phi),phi),phi=-Pi/4..Pi/4));
```

$$I3 :=$$

$$-a\sim^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi)^3 \cos(\phi)\,(4\cos(\phi)^2 - 1)\,d\phi + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (4\cos(\phi)^2 - 3)\cos(\phi)^3 \sin(\phi)\,d\phi \right)$$

```
> value(I3);
```

$$0$$

Поверхневі інтеграли першого та другого роду.

Обчислення поверхневих інтегралів першого та другого роду в системі MAPLE зводиться фактично до подвійного інтегралу згідно відповідних формул математичного аналізу. В свою чергу, подвійні інтеграли зводяться до повторних інтегралів.

Розглянемо приклади обчислення поверхневих інтегралів.

Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S (y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)dS$, де S – частина поверхні конусу $z^2=k^2\left(x^2+y^2\right)$, для якої $z\geq 0,\ x^2+y^2\leq 2ax$;

Враховуючи спосіб задання поверхні інтегрування, відповідний поверхневий інтеграл зводиться до подвійного за формулою: $\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)}dxdy$

Розглянемо спосіб обчислення інтегралу засобами системи MAPLE.

Запишемо рівняння поверхні.

> z:=(x,y)->k*sqrt(x^2+y^2);

$z := (x,y) \to k\sqrt{y^2+x^2}$

> with(student):

Запишемо підінтегральну функцію

> f:=(x,y)->
simplify((z(x,y)^2*y^2+z(x,y)^2*x^2+x^2*y^2)*sqrt(1+(diff(z(x,y),x))^2+(diff(z(x,y),y))^2)):

> f(x,y); $(2\,k^2y^2x^2+k^2y^4+k^2x^4+x^2y^2)\sqrt{1+k^2}$

Запишемо подвійний інтеграл по колу радіусу ***a*** з центром в точці ***(a,0)***

>I4:=value(Doubleint(f(x,y),y=-sqrt(2*a*x-x^2)..sqrt(2*a*x-x^2),x=0..2*a));

$$I4 := \frac{10\,k^2\sqrt{1+k^2}\,a\text{\textasciitilde}^6\,\pi}{3}+\frac{7\sqrt{1+k^2}\,a\text{\textasciitilde}^6\,\pi}{24}$$

> factor(I4); $\frac{\sqrt{1+k^2}\,a\text{\textasciitilde}^6\,\pi\,(7+80\,k^2)}{24}$

Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S ydxdz$, де S – зовнішня поверхня частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 2$

Обчислення відповідного інтегралу зводиться до $\iint\limits_D y(x,z)dxdy$, де D – проекція параболоїда на площину (x,z), яка представляє собою область обмежену параболою $z = x^2$ та прямою $z=2$.

```
> g:=(x,z)->sqrt(z-x^2);
```

$$g := (x, z) \to \sqrt{z - x^2}$$

```
> value(2*Doubleint(g(x,z),z=x^2..2,x=-sqrt(2)..sqrt(2)));
```

$$2\pi$$

Розв'язання рівнянь та нерівностей в системі MAPLE

Основна функція solve().

Для знаходження розв'язку системи алгебраїчних рівнянь можна використовувати стандартну потужну функцію MAPLE ***solve***, яка може бути застосована не тільки до лінійних систем рівнянь, а і до окремих нелінійних рівнянь та систем нелінійних рівнянь. Функція ***solve*** має наступний формат виклику: ***solve(eqn,var)*** або ***solve({eqn1,eqn2,…},{var1,var2…}),*** де ***eqn*** **–** рівняння, яке містить змінні***, var, (eqn1,eqn2,… }*** **–** система рівнянь ***,{var1,var2…}***- множина змінних відносно яких цю систему буде розв'язано.

Характер розв'язків можна змінювати за допомогою глобальних системних змінних: ***_EnvExplicit*** – при значенні ***true*** видає розв'язок без використання конструкції ***RootOf.***

_EnvAllSolutions **–** при значенні ***true*** видає усі розв'язки.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь невисокого порядку можна використовувати функцію ***solve.***

Розглянемо декілька прикладів її використання.

```
>eq1:=2*x+b*y+2*z=3;
```

$$eq1 := 2\,x + b\,y + 2\,z = 3$$

```
>eq2:=c*x+d*y+4*z=2;
```

$$eq2 := c\,x + d\,y + 4\,z = 2$$

```
>eq3:=x+2*y+2*z=1;
```

$$eq3 := x + 2\,y + 2\,z = 1$$

```
>simplify(solve({eq1,eq2,eq3},{x,y,z}));
```

$$\{y = \frac{2(-2+c)}{-2c-d+8-2b+bc}, z = \frac{8-6c-2b+bc+d}{2(-2c-d+8-2b+bc)}, x = -\frac{2(-4+d)}{-2c-d+8-2b+bc}\}$$

Наступний приклад демонструє можливість знаходження розв’язків неповної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглядається система трьох рівнянь з чотирма невідомими:

```
>eqn:={4*x1+7*x2-x3+3*x4=11,-2*x1+2*x2-6*x3+x4=4,x1-3*x1-5*x2-7*x3+5*x4=8};
```

$$eqn := \{-2\,x1 + 2\,x2 - 6\,x3 + x4 = 4,\ 4\,x1 + 7\,x2 - x3 + 3\,x4 = 11,\ -2\,x1 - 5\,x2 - 7\,x3 + 5\,x4 = 8\}$$

```
>solve(eqn,{x1,x2,x3,x4});
```

$$\{x1 = -\frac{27}{158} - \frac{139x3}{79}, x2 = \frac{56}{79} + \frac{47x3}{79}, x4 = \frac{177}{79} + \frac{102x3}{79}, x3 = x3\}$$

Для розв’язання задач лінійної алгебри взагалі, та систем лінійних алгебраїчних рівнянь зокрема, в системі MAPLE існує спеціальний пакет ***LinearAlgebra***, в якому серед набору функцій є функція ***LinearSolve(A,b,method=’name_method’)***;

Тут A – матриця системи рівнянь, b – вектор-стовпець правої частини, ’name_method’– один з методів знаходження розв’язку систем рівнянь:

Метод LU – декомпозиції `(mehtod='LU');`

Метод QR –декомпозиції `(mehtod='QR');`

Метод декомпозиції Холецького `(mehtod='Cholesky');`

Метод оберненої підстановки `(mehtod='subs').`

Якщо метод при виклику функції ***LinearSolve*** не вказаний, то використовується метод обернення матриці $x = A^{-1}b$.

Продемонструємо застосування функції ***LinearSolve*** для знаходження розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь з квадратною матрицею.

```
>A:=Matrix(4,4,[[1,2,1,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,10]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> b:=Vector(4,[1,2,3,Pi]);
```

$$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \pi \end{bmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> LinearSolve(A,b);
```

$$x := \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}+\frac{2\,\pi}{3} \\ 4-\pi \\ 0 \\ -\frac{4}{3}+\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

```
> x1:=LinearSolve(A,b,method='QR');
```

$$x1 := \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}+\frac{2\,\pi}{3} \\ 4-\pi \\ 0 \\ -\frac{4}{3}+\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

Перевірку розв’язку можна виконати шляхом обчислення нев’язки розв’язку:

```
> rx:=A.x-b;
```

$$rx := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> rx1:=A.x1-b;
```

$$rx1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Як бачимо, нев’язка в обох випадках дорівнює нуль-вектору, що свідчить про точне обчислення розв’язку.

Функція ***LinearSolve*** здатна обчислювати розв’язки неповних систем рівнянь, у яких кількість рівнянь менша за кількість невідомих. Ця можливість демонструється наступним прикладом. При цьому розв’язок системи рівнянь виражається через вільні системні змінні, кількість яких залежить від рангу матриці.

```
>A1:=Matrix(3,4,[[1,2,1,4],[2,3,4,5],
[3,4,5,6]]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> b1:=Vector(3,[1,2,3]);
```

$$b1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> x2:=LinearSolve(A1,b1);
```

$$x2 := \begin{bmatrix} 1 + 2\_t0_4 \\ -3\_t0_4 \\ 0 \\ \_t0_4 \end{bmatrix}$$

Аналогічним чином функція ***LinearSolve*** може бути використана для знаходження розв'язку системи лінійних однорідних систем рівнянь з матрицею, визначник якої дорівнює нулю, що демонструє наступний приклад:

```
>A2:=Matrix(4,4,[[1,2,1,4],[2,3,4,5]
,[3,4,5,6],[1,1,3,1]]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> b2:=Vector(4,[0,0,0,0]);
```

$$b2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> x2:=LinearSolve(A2,b2,free='s');
```

$$x2 := \begin{bmatrix} 2\,s_4 \\ -3\,s_4 \\ 0 \\ s_4 \end{bmatrix}$$

Знаходження коренів многочленів

При використання процедури ***solve*** для знаходження коренів многочленів, вона знаходить усі корені многочлена – як дійсні, так і комплексні, які можна записати через радикали.

```
>P1:=x->x^4+2*x^3+2*x^2+x+5=0;
```

$$P1 := x \to x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + x + 5 = 0$$

```
> solve(P1(x),x);
```

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1 + 2\,I\,\sqrt{19}}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1 + 2\,I\,\sqrt{19}}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1 - 2\,I\,\sqrt{19}}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1 - 2\,I\,\sqrt{19}}}{2}$$

У випадку, коли система MAPLE не в змозі провести обчислення коренів многочлена в радикалах, або коли таке представлення не можливе, вона використовує для запису розв'язків функцію **RootOf**.

Наступний приклад демонструє використання функцій ***solve, RootOf*** та ***evalf*** для наближеного обчислення коренів многочлена

```
>P2:=x->
x^5+3*x^3+32=0;
```

$$P2 := x \to x^5 + 3\,x^3 + 32 = 0$$

```
>solve(P2(x),x);
```

$$\mathrm{RootOf}(\_Z^5 + 3\,\_Z^3 + 32, index = 1), \mathrm{RootOf}(\_Z^5 + 3\,\_Z^3 + 32, index = 2), \mathrm{RootOf}(\_Z^5 + 3\,\_Z^3 + 32, index = 3), \mathrm{RootOf}(\_Z^5 + 3\,\_Z^3 + 32, index = 4), \mathrm{RootOf}(\_Z^5 + 3\,\_Z^3 + 32, index = 5)$$

```
>evalf(%);
```

$$1.362408512 + 1.307370837I, -0.4907275853 + 2.215266865I, -1.743361853, -0.4907275853 - 2.215266865I, 1.362408512 - 1.307370837I$$

Розв'язання систем алгебраїчних рівнянь.

Функція ***solve*** може використовуватись для розв'язування не тільки окремих нелінійних рівнянь, а і систем цих рівнянь. Розглянемо наступні системи рівнянь та способи їх розв'язку в системі MAPLE.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3 y^3 = -8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - x = 5 \\ \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

```
> exp1:=x^3+y^3=7;
```

$$\exp1 := x^3 + y^3 = 7$$

```
> exp2:=x^3*y^3=-8;
```

$$\exp2 := x^3\,y^3 = -8$$

```
> S:=solve({exp1,exp2},{x,y}):
```

$$S := \{x = -1, y = 2\}, \{x = 2, y = -1\}, \{x = -1 + \sqrt{3}\,I, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\},$$
$$\{x = -1 - \sqrt{3}\,I, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 + \sqrt{3}\,I\},$$
$$\{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 - \sqrt{3}\,I\}, \{x = 2, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \{x = 2, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\},$$
$$\{x = -1, y = -1 + \sqrt{3}\,I\}, \{x = -1, y = -1 - \sqrt{3}\,I\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = 2\},$$
$$\{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = 2\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 - \sqrt{3}\,I\},$$
$$\{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 + \sqrt{3}\,I\}, \{x = -1 + \sqrt{3}\,I, y = -1\}, \{x = -1 - \sqrt{3}\,I, y = -1\},$$
$$\{x = -1 + \sqrt{3}\,I, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \{x = -1 - \sqrt{3}\,I, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}$$

Користувач може виділити будь-який розв'язок, зокрема дійсні розв'язки системи.

```
> S[1];S[2];
```
$\{x = -1, y = 2\}\ \{x = 2, y = -1\}$

Знайдемо розв’язок системи рівнянь:

```
> exp3:=y^2-x=5;
```
$$exp3 := y^2 - x = 5$$

```
> exp4:=1/(y-1)-1/(y+1)=1/x;
```
$$exp4 := \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}$$

```
>S1:=solve({exp3,exp4},{x,y});
```
$$\{x = 4, y = 3\}, \{x = 4, y = -3\}$$

Для перевірки правильності розв’язку можна виконати його перевірку шляхом підстановки за допомогою функції ***eva**l*.

```
> eval({exp3,exp4},S1[1]);
```
$$\{5 = 5, \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\}$$

```
> eval({exp3,exp4},S1[2]);
```
$$\{5 = 5, \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\}$$

Розв’язування тригонометричних рівнянь

Розв’язування тригонометричних рівнянь здійснюється за допомогою звичайної процедури solve з урахуванням тієї особливості, що як правило тригонометричні рівняння мають злічену кількість періодичних розв’язків, а процедура solve видає лише один корінь рівняння, який лежить на проміжку $[0, 2\pi]$. Для знаходження усіх розв’язків тригонометричного рівняння необхідно задавати значення глобальної змінної *_EnvAllSolutions := true*.

```
>solve(sin(x)=sqrt(3)/2,x);
```
$$\frac{\pi}{3}$$

```
>_EnvAllSolutions:=true:
>solve( sin(x)=sqrt(3)/2, x );
```
$$\frac{1}{3}\pi\_B1\sim + \frac{1}{3}\pi + 2\pi\_Z1\sim$$

```
>eq1:=sin(Pi/12+x)+sin(Pi/4-x)=1;
```
$$eq1 := \sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$$

```
> simplify(solve(eq1,x));
```
$$\frac{1}{12}\pi + 2\pi\_Z7\sim$$

В попередніх прикладах *_B1* – булева змінна, що приймає значення 0 та 1, а *_Z1* та *_Z7*– змінні, що приймають будь-які цілі значення.

Наступний приклад демонструє обчислення усіх коренів поліноміального тригонометричного рівняння, серед яких є як множина дійсних коренів, так і множина уявних коренів.

```
>eq2:=2*tan(x)^3-2*tan(x)^2+3*tan(x)-3=0;
```

$$2\tan(x)^3 - 2\tan(x)^2 + 3\tan(x) - 3 = 0$$

```
>a:=solve(eq2,x);
```

$$\frac{1}{4}\pi + \pi\_Z1\sim,\ \mathrm{I}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) + \pi\_Z2\sim,\ -\mathrm{I}\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) + \pi\_Z3\sim$$

Після обчислення усіх коренів рівняння, є можливість вибрати лише дійсні корені.

```
>a[1];
```

$$\frac{1}{4}\pi + \pi\_Z25\sim$$

Розв'язування рекурентних рівнянь.

Для розв'язання рекурентних співвідношень, в системі MAPLE існує спеціальна функція ***rsolve***, яка дозволяє обчислити як загальний так і частинний розв'язок рекурентного співвідношення. Параметрами функції ***rsolve*** є множина, яка містить одне рекурентне рівняння, або систему рівнянь, та можливо початкові дані.

Розглянемо приклади знаходження загального члену послідовності чисел Фібоначі, які задаються наступними співвідношеннями: ***f(n+1)=f(n)+f(n-1), f(0)=1, f(1)=1*** та рекурентного співвідношення ***g(n+1)=2g(n)-3g(n-1), g(0)=1, g(1)=2***.

Знаходження розв'язків наведених рекурентних співвідношень в системі MAPLE можна отримати наступними обчисленнями:

```
> ff:=unapply(rsolve({f(n+1)=f(n)+f(n-1),f(0)=1,f(1)=1},f(n)),n);
```

$$ff := n \to \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n$$

```
>simplify(ff(10));
```

$$89$$

```
>simplify(ff(20));
```

$$10946$$

```
>rec1:={g(n+1)=2*g(n)-3*g(n-1),g(0)=1,g(1)=2};
```

$$rec1 := \{g(1)=2,\ g(0)=1,\ g(n+1)=2\,g(n)-3\,g(n-1)\}$$

```
>b:=unapply(rsolve(rec1,g),n);
```

$$b := n \to -\frac{3}{4}I\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}I\right)(1-\sqrt{2}\,I)^n + \frac{3}{4}I\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}I\right)(1+\sqrt{2}\,I)^n$$

```
> simplify(b(100));
```

$$690040186407724018900309$$

В наступному прикладі розглядається чотирьохчленне рекурентне співвідношення з постійними коефіцієнтами.

```
> REC2:={g(n+1)=2*g(n-2)-g(n),g(0)=1,g(1)=2,g(2)=0};
```

$$REC2 := \{g(0) = 1, g(1) = 2, g(2) = 0, g(n+1) = 2\,g(n-2) - g(n)\}$$

```
>rsolve(REC2,g);
```

$$-\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} I\right)(-1+I)^n - \left(\frac{1}{10} - \frac{3}{10} I\right)(-1-I)^n + \frac{6}{5}$$

Наступний приклад демонструє можливість знаходження розв'язку неоднорідного двочленного рекурентного співвідношення зі змінними коефіцієнтами.

```
> REC3:={g(n+1)=(n+1)*g(n)+1/(n+1),g(1)=1};
```

$$REC3 := \{\mathrm{g}(1) = 1, \mathrm{g}(n+1) = (n+1)\,\mathrm{g}(n) + \frac{1}{n+1}\}$$

```
> C:=unapply(rsolve(REC3,g(n)),n);
```

$$C := n \to \Gamma(n+1)\left(\left(\sum_{n1=1}^{n-1} \frac{1}{(n1+1)\,\Gamma(n1+2)}\right) + 1\right)$$

```
> evalf(C(12));
```

$$0.6312772392\,10^9$$

Розглянемо знаходження розв'язку для системи двох рекурентних співвідношень:

```
> REC4:={r(n+1)=2*s(n-1),s(n+1)=2*r(n-
1),s(0)=1,r(0)=2,s(1)=1,r(1)=2};
```

$$REC4 := \{\mathrm{r}(0) = 2, \mathrm{r}(1) = 2, \mathrm{r}(n+1) = 2\,\mathrm{s}(n-1), \mathrm{s}(0) = 1, \mathrm{s}(1) = 1, \mathrm{s}(n+1) = 2\,\mathrm{r}(n-1)\}$$

```
> ss:=unapply(rsolve(REC4,{r,s})[1],n);
```

$$ss := n \to \mathrm{r}(n) = \frac{3}{4}(\sqrt{2})^n + \frac{3}{8}(\sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{3}{4}(-\sqrt{2})^n - \frac{3}{8}(-\sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{2}\,I)^n - \frac{1}{8} I (\sqrt{2}\,I)^n \sqrt{2} + \frac{1}{4}(-I\sqrt{2})^n + \frac{1}{8} I (-I\sqrt{2})^n \sqrt{2}$$

```
> rr:=unapply(rsolve(REC4,{r,s})[2],n);
```

$$rr := n \to \mathrm{s}(n) = \frac{3}{4}(\sqrt{2})^n + \frac{3}{8}(\sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{3}{4}(-\sqrt{2})^n - \frac{3}{8}(-\sqrt{2})^n \sqrt{2} - \frac{1}{4}(\sqrt{2}\,I)^n + \frac{1}{8} I (\sqrt{2}\,I)^n \sqrt{2} - \frac{1}{4}(-I\sqrt{2})^n - \frac{1}{8} I (-I\sqrt{2})^n \sqrt{2}$$

```
> ss(10);
```

$$\mathrm{r}(10) = 32$$

```
> rr(10);
```

$$\mathrm{s}(10) = 64$$

Для цього призначена процедура ***solve(ineq,exp),*** в якій параметр ***ineq*** використовується для запису нерівності або системи нерівностей, а параметр exp використовується для запису однієї або декількох змінних, відносно яких розв'язується відповідна система нерівностей.

Розглянемо приклади розв'язування нерівностей.

```
> e:=(x^2-5*x+6)/(x-4)<0;
```

$$e := \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 0$$

```
> solve(e,x);
```

$$\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(2)), \text{RealRange}(\text{Open}(3), \text{Open}(4))$$

В цьому прикладі конструкція ***RealRange (a,b)*** еквівалентна заданню відрізку [a,b], Конструкція ***RealRange(Open(a),b)***, або ***RealRange(a,Open(b))*** , рівнозначно заданню відрізку (a, b] або [a, b) відповідно.

```
>ee:=log[x](x^2-4)<1;
```

$$ee := \frac{\ln(x^2 - 4)}{\ln(x)} < 1$$

```
>solve(ee,x);
```

$$\text{RealRange}\left(\text{Open}(2), \text{Open}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)\right)$$

```
>ee1:=abs(x-1)+abs(x+1)<1;
```

$$ee1 := |x - 1| + |x + 1| < 1$$

```
>solve(abs(y-
1)+abs(2*y+1)>3/2,y);
```

$$RealRange\left(Open\left(-\frac{1}{2}\right), \infty\right), RealRange\left(-\infty, Open\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Розглянемо приклад розв'язання системи нерівностей відносно однієї змінної:

```
ee2:={x^2-5*x+6>=0,abs(x-4)>2};
```

$$ee2 := \{2 < |x - 4|, 0 \le x^2 - 5x + 6\}$$

```
solve(ee2,x);
```

$$\{6 < x\}, \{x < 2\}$$

Розв'язок системи нерівностей дається у вигляді послідовності множин, яку треба розглядати як об'єднання множин $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь та їх систем

Система MAPLE має досить ефективні засоби знаходження загального розв'язку звичайних диференціальних рівнянь. Слід зауважити, що вона знає практично усі відомі методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та систем звичайних диференціальних рівнянь. Крім загального розв'язку, MAPLE ефективно може знаходити також частинні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь, зокрема задач Коші та граничних задач.

Для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь MAPLE використовує функцію ***dsolve ({equ, cond}, var).*** Тут ***equ*** – звичайне диференціальне рівняння (система звичайних диференціальних рівнянь), ***cond*** – початкові або граничні умови (якщо вони є), ***var*** – функція або набір функцій, відносно якої здійснюється знаходження розв'язку рівняння.

Розглянемо декілька прикладів застосування функції ***dsolve*** для знаходження загальних та частинних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.

Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння Лагранжа $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

```
>eq1:=x*(diff(y(x),x))^2-
2*y(x)*diff(y(x),x)+4*x=0;
```

$$eq1 := x\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2 - 2\,\mathrm{y}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + 4\,x = 0$$

```
>dsolve(eq1,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = 2\,x,\ \mathrm{y}(x) = -2\,x,\ \mathrm{y}(x) = \left(\frac{x^2}{2\,\_C1^2} + 2\right)\_C1$$

Слід зазначити, що MAPLE цілком коректно знайшла розв'язок цього нелінійного рівняння і видала його загальний розв'язок, що залежить від системної змінної *_C1*, яка може набувати довільних значень відмінних від нуля. Також додатково знайдені ще два розв'язки, що не входять до загального розв'язку.

Розглянемо знаходження загального розв'язку рівняння Клеро $\mathrm{y}(x) = x\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^3$

```
>eq2:=y(x)=x*diff(y(x)
,x)+(diff(y(x),x))^3;
```

$$eq2 := \mathrm{y}(x) = x\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^3$$

```
> dsolve(eq2);
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{2\sqrt{-3\,x}\,x}{9},\ \mathrm{y}(x) = \frac{2\sqrt{-3\,x}\,x}{9},\ \mathrm{y}(x) = x\,\_C1 + \_C1^3$$

Система знайшла загальний розв'язок рівняння Клеро і два його особливих розв'язки, які не входять до загального.

Для останнього рівняння знайдемо тепер розв'язки задачі Коші, що задовольняють також початковій умові *y(2)=12*:

>cond:=y(2)=12 $cond := \mathrm{y}(2) = 12$

>dsolve([eq2,cond]) $y(x) = 2x + 8, y(x) = x(-1 + \sqrt{5}\,I) + (-1 + \sqrt{5}\,I)^3, y(x) = x(-1 - \sqrt{5}\,I) + (-1 - \sqrt{5}\,I)^3$

Розв'язок задачі Коші рівняння Клєро неєдиний і містить три розв'язки, один з яких є пряма з дійсними коефіцієнтами, а два інших є прямими з комплексними коефіцієнтами.

Розглянемо приклади знаходження розв'язку рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 2ay' + y = x^3 \quad 0 < x < 1 \\ h_1 y'(0) - h_2 y(0) = 0 \\ H_1 y'(1) + H_2 y(1) = 0 \end{cases}$$

>eq:=diff(y(x),x$2)+2*a*diff(y(x) ,x)+y(x)=x^3;

$$eq := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2a \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + y(x) = x^3$$

>ly:=h1*D(y)(0)-h2*y(0)=0,H1*D(y)(1)+H2*y(1)=0;

$$ly := h1\,\mathrm{D}(y)(0) - h2\,y(0) = 0, H1\,\mathrm{D}(y)(1) + H2\,y(1) = 0$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння другого порядку.

>dsolve(eq,y(x));

$$y(x) = e^{\left(-a + \sqrt{a^2 - 1}\right)x} \_C2 + e^{\left(-a - \sqrt{a^2 - 1}\right)x} \_C1 - 48a^3 + 24a^2 x + \left(-6x^2 + 24\right)a + x^3 - 6x$$

> assign(dsolve(eq,y(x)));

> y(x);

$$e^{((-a + \sqrt{a^2 - 1})x)} \_C2 + e^{((-a - \sqrt{a^2 - 1})x)} \_C1 - 48a^3 + 24xa^2 + (24 - 6x^2)a + x^3 - 6x$$

> eval(y(x),{x=1,_C1=1,a=1,_C2=1});

$$2e^{(-1)} - 11$$

Знайдемо розв'язок граничної задачі при **a=5,h1=0,h2:=1, H1=0, H2=1.**

> eq1:=[eq,ly];

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}\,y(x) + 2\,a\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = x^3, h1\,\mathrm{D}(y)(0) - h2\,y(0) = 0, H1\,\mathrm{D}(y)(1) + H2\,y(1) = 0\right]$$

```
> eval(eq1,{a=5,h1=0,h2=1,H1=0,H2=1});
```

$$y(x) = \frac{5\,e^{((-5+2\sqrt{6})x)}\,(1063\,(e^{(\sqrt{6})})^2\,e^5 - 1176)}{(e^{(\sqrt{6})})^4 - 1} - \frac{5\,e^{(-(5+2\sqrt{6})x)}\,(e^{(\sqrt{6})})^2\,(-1176\,(e^{(\sqrt{6})})^2 + 1063\,e^5)}{(e^{(\sqrt{6})})^4 - 1} - 5880 + 594\,x - 30\,x^2 + x^3$$

Розглянемо приклад знаходження розв’язку задачі Коші для системи шести лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = a_1 y_1\,, \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' = a_3 y_1 + a_1 y_2\,, \quad y_2(0) = 1 \\ y_3' = a_2 y_3\ , \ y_3(0) = 0.5 \\ y_4' = a_4 y_3 + a_2 y_4\,, \quad y_4(0) = 0.5 \\ y_5' = a_5 y_4 + a_2 y_5\ , y_5(0) = 0.5 \\ y_6' = a_6 y_5 + a_2 y_6\ , \ y_6(0) = 0.5 \end{cases}$$

Введемо списки функцій та параметрів:

```
>[seq(y[i],i=1..6)];
```

$$[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$$

```
>[seq(a[i],i=1..6)];
```

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$$

Запишемо систему диференціальних рівнянь у вигляді послідовності диференціальних рівнянь:

```
eq:=diff(y[1](x),x)=a[1]*y[1](x),diff(y[2](x),x)=
a[3]*y[1](x)+a[1]*y[2](x),diff(y[3](x),x)=
a[2]*y[3](x),diff(y[4](x),x)=a[4]*y[3](x)+a[2]*y[4](x),
diff(y[5](x),x)=a[5]*y[4](x)+a[2]*y[5](x),diff(y[6](x),x)=
a[6]*y[5](x)+a[2]*y[6](x);
```

$$\frac{d}{dx}\,y_1(x) = a_1\,y_1(x),\ \frac{d}{dx}\,y_2(x) = a_3\,y_1(x) + a_1\,y_2(x),\ \frac{d}{dx}\,y_3(x) = a_2\,y_3(x),$$

$$\frac{d}{dx}y_4(x) = a_4 y_3(x) + a_2 y_4(x),\ \frac{d}{dx}y_5(x) = a_5 y_4(x) + a_2 y_5(x),\ \frac{d}{dx}y_6(x) = a_6 y_5(x) + a_2 y_6(x)$$

Задамо початкові умови:

```
>NU:=y[1](0)=1,y[2](0)=1,y[3](0)=0.5,y[4](0)=0.5,y[5](0)=0.5,y[6](0)
=0.5;
```

$$NU := y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0.5, y_4(0) = 0.5, y_5(0) = 0.5, y_6(0) = 0.5$$

Обчислимо розв'язок задачі Коші:

```
>asol:=dsolve([eq,NU]);
```

$$asol := \{y_1(x) = e^{(a_1 x)}, y_2(x) = (a_3 x + 1)\, e^{(a_1 x)}, y_3(x) = \frac{1}{2} e^{(a_2 x)}, y_4(x) = \left(\frac{1}{2} a_4 x + \frac{1}{2}\right) e^{(a_2 x)},$$

$$y_5(x) = \frac{1}{2}\left(x\, a_5 + \frac{1}{2} x^2 a_5 a_4 + 1\right) e^{(a_2 x)},$$

$$y_6(x) = \frac{1}{6}\left(3\, x\, a_6 + \frac{3}{2} x^2 a_6 a_5 + \frac{1}{2} x^3 a_6 a_5 a_4 + 3\right) e^{(a_2 x)}\}$$

Знаходження розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтера

MAPLE містить функцію ***intsolve(inteq, var, method=, order=)***, де ***inteq*** – інтегральне рівняння, ***var*** – невідома функція а ***method*** – назва методу знаходження розв'язку, зокрема ***Neumann, Laplace, differentialequation, eigenfunction***, order – ціле число для методу послідовних наближень Neumann.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду $\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(xy + x^2 y^2\right) \varphi(y) dy + x^2$ та знайдемо його розв'язок засобами MAPLE.

```
> eq:=z(x)=a*int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=-1..1)+x^2;
> intsolve(eq,z(x));
```

$$z(x) = x^2 - \frac{2\, a\, x^2}{2\, a - 5}$$

Розглянемо однорідне рівняння Фредгольма 2 роду при значенні параметра $\lambda = \frac{5}{2}$, яке співпадає з характеристичним числом інтегрального оператора.

```
> eq2:=z(x)=5/2*int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=-1..1);
```

$$eq2 := z(x) = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} (x\, y + x^2 y^2)\, z(y)\, dy$$

> **intsolve**(eq2,z(x)); $z(x)=\_C1\,x^2$

Знайдена функція є власною функцією інтегрального оператора, що відповідає числу $\lambda=\dfrac{5}{2}$.

Знайдемо розв'язок рівняння Вольтера $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{x}\left(xy+x^2y^2\right)\varphi(y)dy+x^3$

```
> eq2:=z(x)=a*int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=-1..x)+x^3;
```

$$eq1 := z(x)=a\int_{-1}^{x}(x\,y+x^2y^2)\,z(y)\,dy+x^3$$

```
> intsolve(eq1,z(x));
```

$$z(x)=x^3+\frac{2\,(x^{10}a-25\,a\,x^6-48\,a\,x^5-25\,a\,x^4+a+120\,x^5+120)\,a\,x}{5\,(a^2x^8+16\,a^2x^5-48\,a\,x^5+16\,a^2x^3+a^2-128\,a-80\,a\,x^3+240+30\,a^2x^4)}$$
$$-\frac{4\,a\,(a\,x^9+10\,a\,x^6-30\,x^6-10\,a\,x^3-a+30-9\,a\,x^4+9\,a\,x^5)\,x^2}{3\,(a^2x^8+16\,a^2x^5-48\,a\,x^5+16\,a^2x^3+a^2-128\,a-80\,a\,x^3+240+30\,a^2x^4)}$$

Наступне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду не має розв'язку, і при спробі його розв'язати MAPLE виводить порожній рядок.

```
> eq3:=int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=0..1)=sin(x);
```

Розглянемо неоднорідне рівняння Фредгольма 2 роду з довільним вільним членом $f(x)$: $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\left(xy^2+x^2y+x^2y^2\right)\varphi(y)dy+f(x)$

> $eq4 := f(x)+b*Int\left(\left(x*y^2+x^2*y+x^2\cdot y^2\right)*f(y),y=0..1\right)=d(x);$

$$eq4 := f(x)+b\left(\int_0^1\left(x\,y^2+x^2\,y+x^2\,y^2\right)f(y)\,dy\right)=d(x)$$

> $intsolve(eq4,f(x));$

$$f(x)=\int_0^1\left(\frac{20\,x^2\left(12\,b\,y\,(1+y)+3\,b^2\,y\,(1+y)-7\,b^2y^2\right)}{b^2-168\,b-240}-\frac{12\,x\left(4\,b^2\,y\,(1+y)-20\,b\,y^2-9\,b^2y^2\right)}{b^2-168\,b-240}\right)d(y)\,dy+d(x)$$

> $solve\left(b^2-168\,b-240,b\right);$

$84+8\sqrt{114},\ 84-8\sqrt{114}$

Лекція 6

Візуалізація обчислень. Побудова двовимірних та тривимірних поверхонь

Система MAPLE має у своєму складі функції для побудови графічних об'єктів. Це, в першу чергу, функція для побудови двовимірних графіків ***plot*** та функція для побудови тривимірних графіків ***plot3d***. Для візуалізації більш складних математичних об'єктів, в системі MAPLE існують спеціальні математичні пакети, які містять додаткові графічні функції.

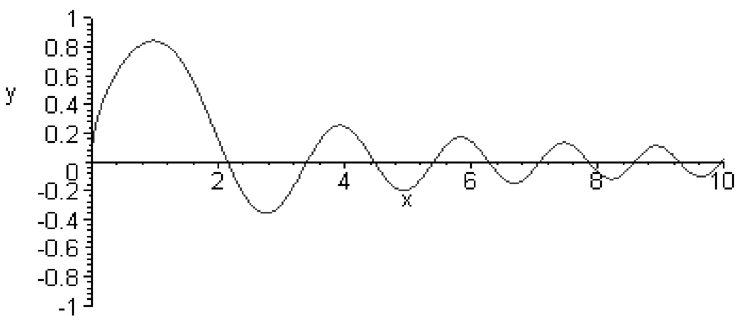
Побудова двовимірних графіків, функція plot()

Для побудови двовимірних графіків в системі MAPLE використовується функція ***plot(f, h, v), plot(f, h, v, o)***, де ***f*** – функція, яку потрібно візуалізувати (або список функцій), ***h*** – рівність, що задає змінну та інтервал її зміни, ***v*** – необов'язковий параметр з заданням області зміни функції, ***o*** – параметр або набір параметрів, що задає стиль побудови графіків (товщину та колір лінії, тип лінії, мітки та інше).

Побудова графіку однієї функції

При побудові графіку однієї функції за допомогою функції ***plot(),*** вона задається в вигляді виразу на місці параметру ***f***, а також задається область зміни незалежної змінної та можливо залежної змінної.

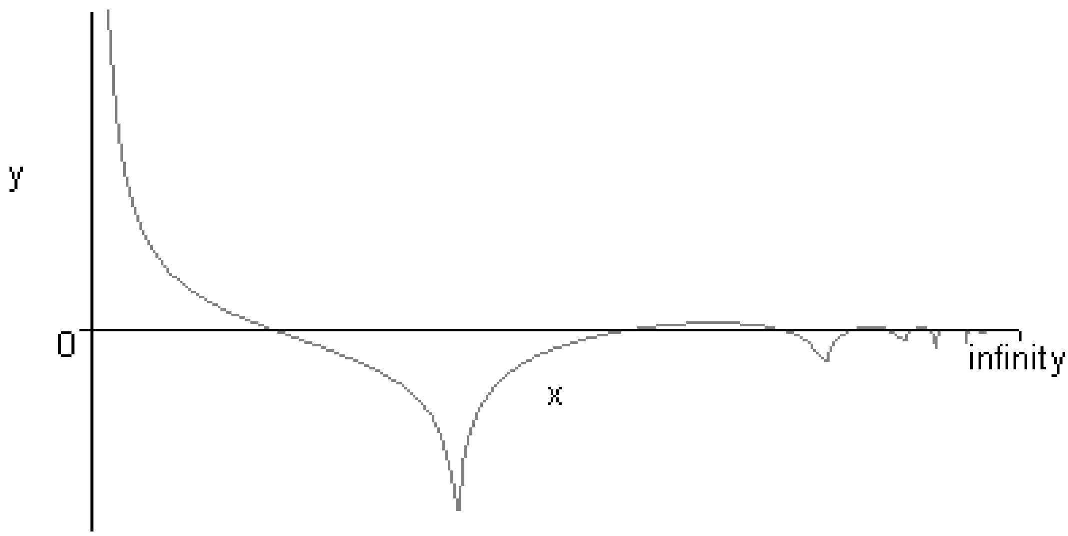
Розглянемо приклад: `> plot(sin(x^(3/2))/x,x=0..10,y=-1..1);`



Для управління діапазоном задання незалежної та залежної змінних застосовуються параметри h та v, які задаються у вигляді ***var= expr1..expr2***, де var – ім'я змінної, а expr1 та expr2 верхня та нижня межі їх зміни. У розглянутому прикладі діапазон має вигляд `x=0..10, y=-1..1.`

При побудові графіку функції на нескінченому проміжку в діапазоні змінної може з'явитися константа ***infinity* та *-infinity*.**

Розглянемо приклад: **> plot(ln(1+cos(x))/x,x=0..infinity,y=-3..5);**

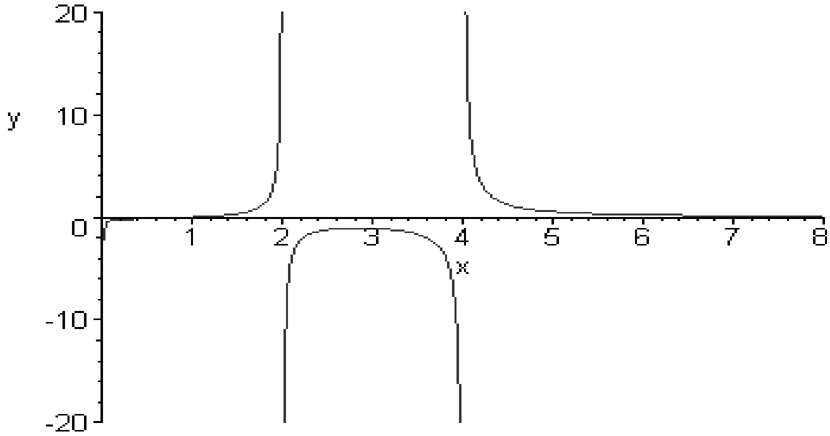


Графіки функцій з розривами

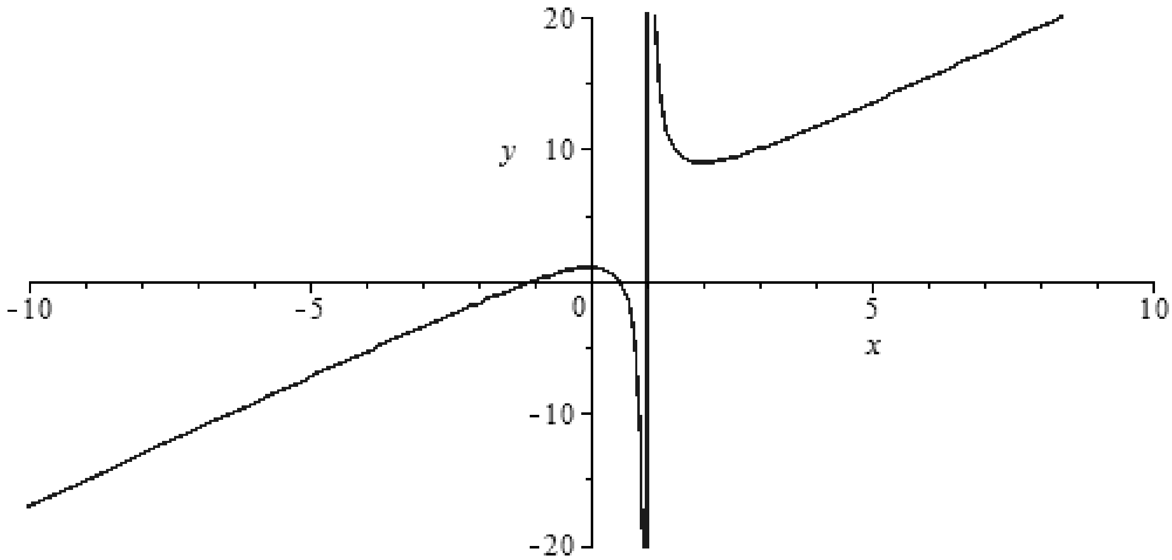
При побудові графіків функцій з розривами другого роду, коли значення функції прямує до нескінченості при підході до точки розриву, система MAPLE здійснює побудову графіку такої функції зазвичай з зображенням вертикальних асимптот – похилі асимптоти при цьому не зображуються. Для відміни зображення вертикальних асимптот на графіку таких функцій використовується додатковий параметр ***discont* = *true.***

Розглянемо приклади побудови графіка функції з точками розриву другого роду.

> plot(ln(x)/(x-2)/(x-4),x=0..8,y=-20..20,discont=true);



$$plot\left(2\cdot x+3+\frac{2}{x-1}, x=-10..10, y=-20..20\right);$$



Управління стилем і кольором ліній двовимірних графіків.

Графік в системі MAPLE можна задавати за допомогою лінії або точок. Для цього використовується параметр ***style***, який може приймати значення ***point*** або ***line*** *(*використовується за замовчанням*)*, що відповідає стилю виведення графіку у вигляді суцільної лінії або окремих точок. При виведені графіку у вигляді окремих точок, для задання типу точки використовується параметр ***symbol***, який може приймати такі значення:

CROSS – хрест;

POINT – крапка;

DIAMOND – ромб;

CIRCLE – коло;

BOX – квадрат;

Для задання кольору ліній або символів використовується параметр ***color***, який може приймати, наприклад, такі значення:

red	– червоний	***green***	– зелений
blue	– блакитний	**black**	– чорний
white	– білий	**khaki**	– хакі
gold	– золотистий	***orange***	– помаранчевий
violet	– фіолетовий	**yellov**	– жовтий

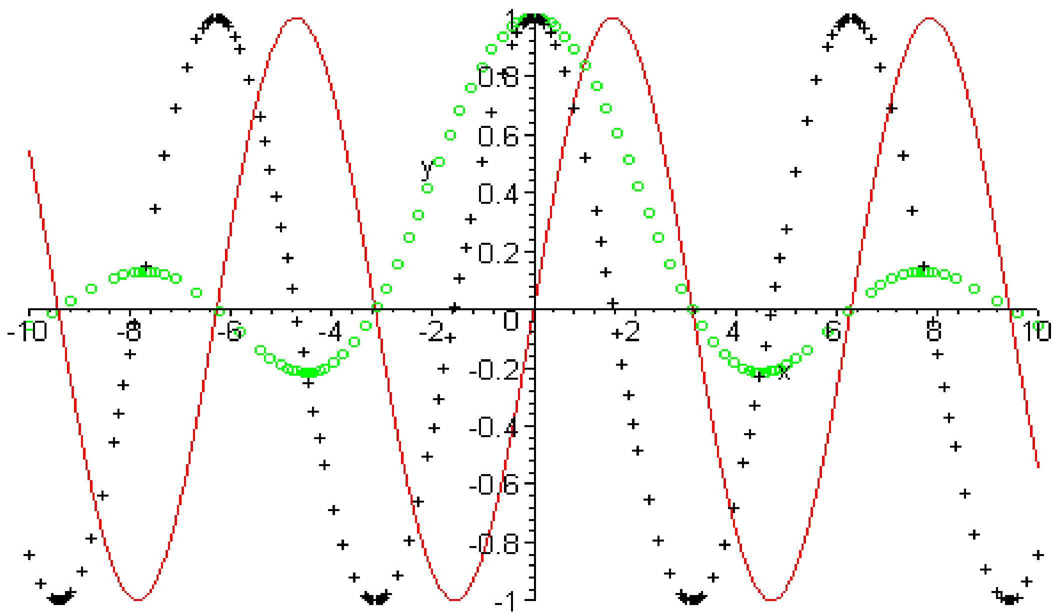
Для визначення розміру символів відображення графіку використовується параметр ***symbolsize=n***. Цей параметр не впливає на розмір символів, якщо значення параметру ***symbol = POINT*** .

Для управління виглядом лінії зображення графіків можна використовувати параметр ***thickness=n***, що задає товщину, де ***n*** – ціле число, та параметр ***linestyle =L, L*** приймає одне з можливих значень *solid, dot, dash, dashdot, longdash, spacedash, spacedot* або цифрові значення від 1 до 7.

Побудова графіків декількох функцій на одному малюнку.

При побудові графіків декількох функцій на одному зображенні необхідно першим параметром функції ***plot*** задати список функцій (виразів) та встановити для них спільні інтервали зміни залежної та незалежної змінних. Для кращого розпізнавання окремих графіків при їх зображенні можна використати різні стилі символів та різні кольори. Розглянемо приклад побудови трьох графіків на одному малюнку, для зображення яких використаємо стилі лінії для першого та точки для другого та третього графіків. Для зображення точками другого та третього графіків використаємо символи хрест та коло. Кожен графік відобразимо окремим кольором: червоним, чорним, зеленим відповідно.

```
>plot([sin(x),cos(x),sin(x)/x],x=-10..10,y=-1..1,color=
[red,black,green],style=[line,point,point],symbol=[CROSS,CIRCLE]);
```



Побудова графіка функції заданої сукупністю точок

Досить часто виникає потреба побудова графіка функції, що задана в табличній формі, тобто задана у вигляді сукупності окремих точок. Така сукупність точок може бути задана списком координат незалежної змінної та значень функції в цих точках. При побудові графіка відповідної функції, список значень аргументу та значень функції передається в якості першого параметру функції ***plot***.

Розглянемо приклад побудови графіку функції, заданої набором значень.

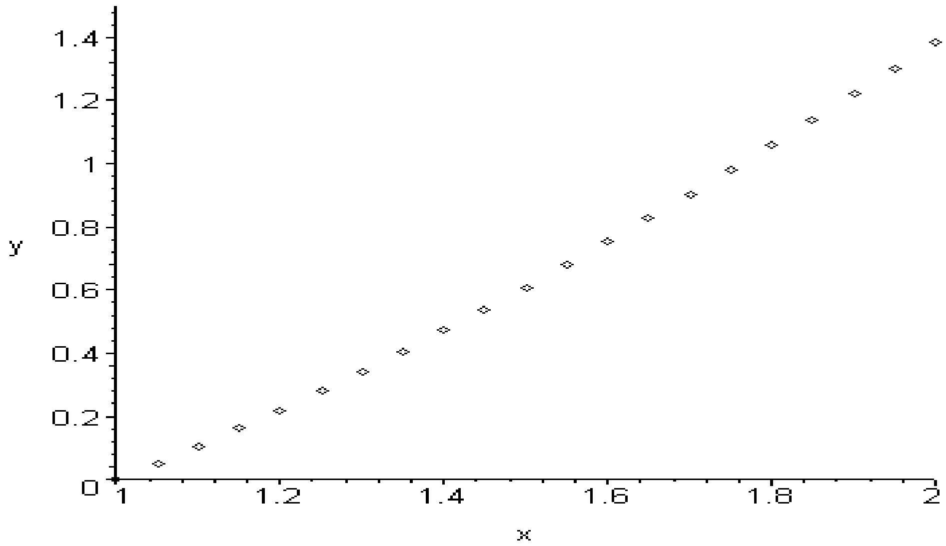
Сформуємо відповідний список значень для функції $x \ln x$ на проміжку від 1 до 2 з кроком 0.05.

```
>FF:=[seq([1+i*0.05,(1+i*0.05)*ln(1+i*0.05)],i=0..20)];
```

FF := [[1., 0.], [1.05, 0.05122967238], [1.10, 0.1048411978], [1.15, 0.1607262338], [1.20, 0.2187858682], [1.25, 0.2789294391], [1.30, 0.3410735438], [1.35, 0.4051411999], [1.40, 0.4710611312], [1.45, 0.5387671568], [1.50, 0.6081976622], [1.55, 0.6792951429], [1.60, 0.7520058067], [1.65, 0.8262792250], [1.70, 0.9020680269], [1.75, 0.9793276288], [1.80, 1.058015997], [1.85, 1.138093432], [1.90, 1.219522384], [1.95, 1.302267277], [2.00, 1.386294361]]

Зобразимо графік функції, використовуючи стиль виведення – точка і блакитний колір зображення.

```
> plot(FF,x=1..2,y=0..1.5,style=point,color=blue);
```



Побудова полігонів

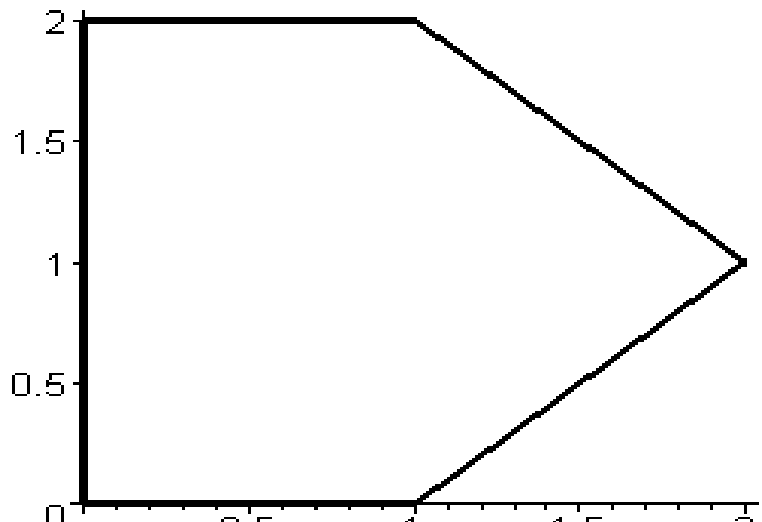
Функцію ***plot*** можна використовувати для побудови не тільки графіків функцій, а і різноманітних полігонів, заданих сукупністю окремих точок. Розглянемо приклад побудови п'ятикутника за координатами його вершин.

Задамо координати вершин п'ятикутника, та прямі, що з'єднують відповідні вершини:

```
> A1:=[0,0]: B1:=[1,0]: C1:=[2,1]: D1:=[1,2]: E1:=[0,2]:
>ab:=[A1,B1]:bc:=[B1,C1]:cd:=[C1,D1]:e:=[D1,E1]:ea:=[E1,A1]:
```

Зобразимо п'ятикутник у вигляді полігону, виберемо параметр товщини лінії, що дорівнює 3.

```
> plot([ab,bc,cd,de,ea],color=black,thickness=3);
```



Побудова графіків функцій, заданих параметрично, та функцій в полярній системі координат

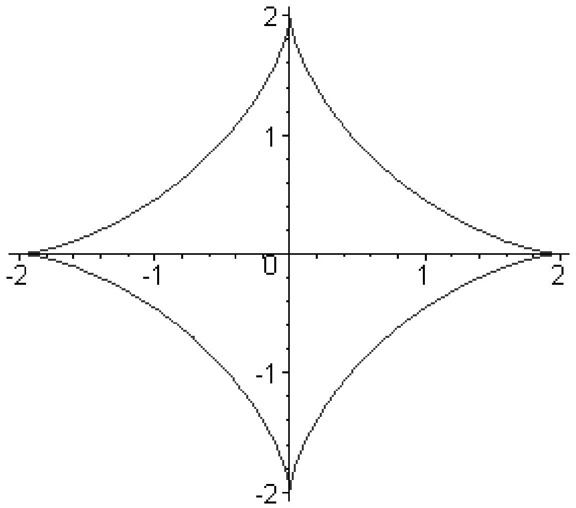
Часто функцію може бути задано в параметричному вигляді, а саме у вигляді $x = f_1(t),\ y = f_2(t)$. При цьому повинен бути заданий інтервал зміни значень параметру t – $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо приклади побудови графіків для функцій, заданих параметрично:

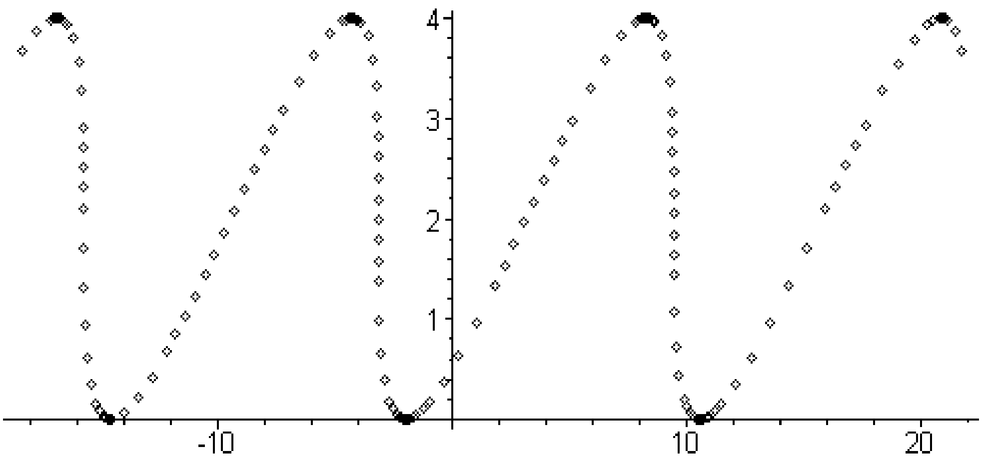
```
> a:=2;
```

$$a := 2$$

```
> plot([a*cos(t)^3,a*sin(t)^3,t=-Pi..Pi]);
```



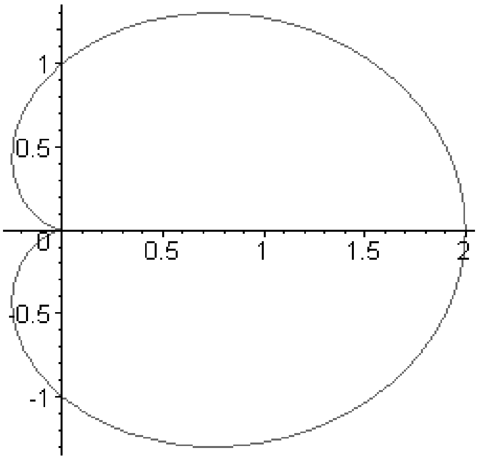
```
>plot([a*(t-cos(t)),a*(1-cos(t)),t=-10..10],style=point, color=black);
```



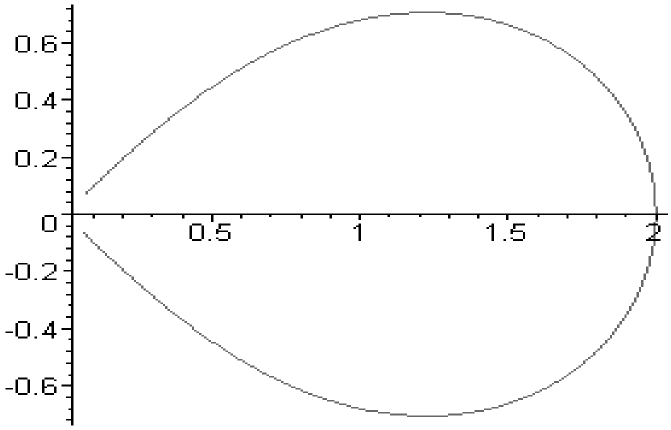
Для побудови графіків функцій в полярній системі координат використовується функція ***plot*** з додатковим параметром ***coords=polar***. Розглянемо приклади побудови графіків функцій в полярній системі координат.

Побудуємо на першому графіку кардіоїду, праву пелюстку лемніскати на другому графіку та спіраль Архімеда на третьому графіку:

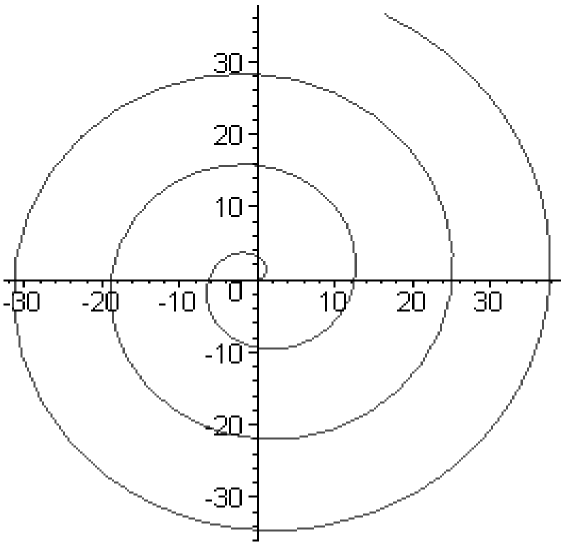
```
> plot([(1+cos(Phi)),Phi,Phi=0..2*Pi],coords=polar);
```




```
> plot([a*sqrt(cos(2*Phi)),Phi,Phi=-Pi/4..Pi/4],coords=polar);
```




```
> plot([a*Phi,Phi,Phi=0..20],coords=polar);
```



Побудова тривимірних графіків, особливості застосування функції plot3d

Тривимірними графіками називають графіки поверхонь, які можна задавати у одному з виглядів: $z = z(x, y),\ y = y(x, z),\ x = x(y, z)$ – цей спосіб називається явним, або у параметричний спосіб, коли визначаються три функції (координати в одній з доступних систем координат в тривимірному просторі) $x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$ від двох параметрів *u, v*. Крім того, для задання поверхні можна використовувати криволінійні ортогональні системи координат: циліндричні, сферичні, параболічні, еліптичні та інші.

Для побудови графіків тривимірних поверхонь в системі MAPLE існує вбудована функція ***plot3d***, яка може бути використана в одному з форматів.

plot3d(expr1, x=a..b,y=c..d,p)

plot3d([exprf,exprg,exprh],u=a..b,v=c..d,p)

Тут ***epr1*** – вираз, що задає поверхню від змінних ***x, y*** в явному вигляді***. eprf, eprg, eprh*** - вирази, що задають рівняння поверхні в параметричній формі від змінних ***u, v. a, b, c, d*** – верхня та нижня межі зміни незалежних змінних, ***p*** – набір управляючих параметрів.

Побудова поверхонь різними стилями

При побудові поверхонь MAPLE пропонує користувачу цілу низку можливостей для надання графіку потрібних властивостей. Для цього користувач може безпосередньо задавати такі параметри як ***style, color, axes,*** надаючи цім параметрам відповідних значень. В той же час, при активізації відповідного графічного об'єкту за допомогою миші, у вікні лістингу MAPLE користувач має можливість за допомогою пунктів головного меню **STYLE, COLOR** та **AXES** обирати потрібні йому значення відповідних параметрів.

Побудова поверхонь в різних системах координат

Система MAPLE дозволяє будувати поверхні, які задані в найбільш поширених відомих криволінійних системах координат, наприклад: циліндричній, сферичній, еліпсоїдальній, тороїдальній та багатьох інших. Для задання відповідної системи координат, користувачу необхідно присвоїти параметру ***coords*** відповідне значення :

spherical - сферичні;

cylindrical - циліндричні;

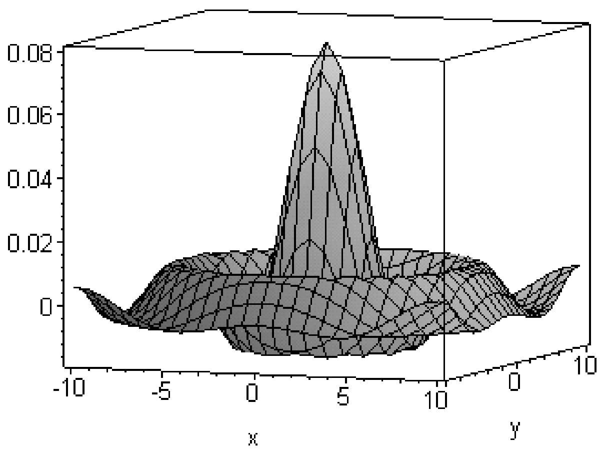
toroidal - тороїдальні;

ellipsoidal - еліпсоїдальні

або будь-які інші доступні значення параметру ***coords.***

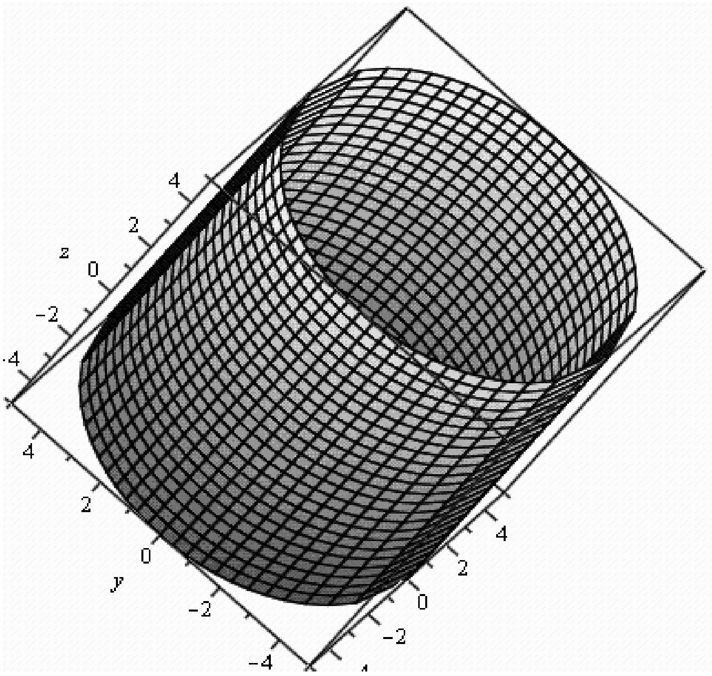
Розглянемо приклади побудови поверхонь. за допомогою функції ***plot3d***. Перший приклад демонструє побудову поверхні в прямокутній системі координат, рівняння поверхні задається у явному вигляді співвідношенням $z = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}}$.

```
>plot3d(sin(sqrt(x^2+y^2))/(4*Pi*sqrt(x^2+y^2)),x=-10..10,y=-10..10);
```



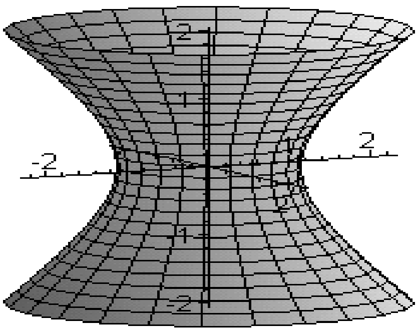
Рівняння циліндра в прямокутних координатах у вигляді: $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}, y = -R, R; z = 0, H$

> $plot3d(\{\mathrm{sqrt}(25 - y^2), -\mathrm{sqrt}(25 - y^2)\}, y = -5..5, z = -5..5);$



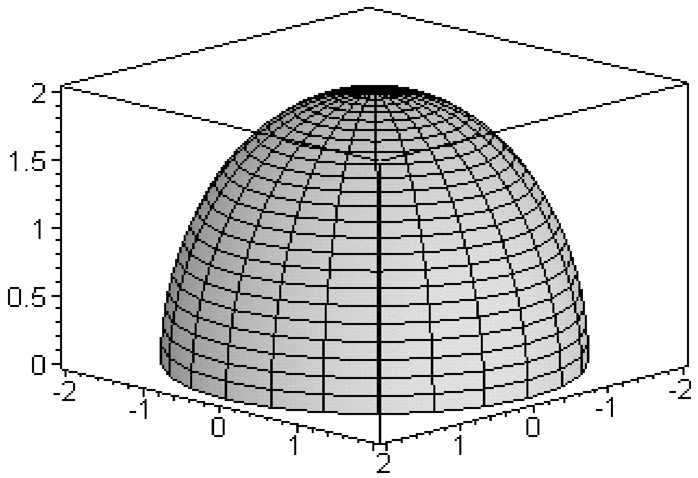
Наступний приклад демонструє можливість побудови поверхні в циліндричній системі координат, яка задається рівнянням $r = r(\varphi, z)$. Рівняння поверхні задається співвідношенням $r = \sqrt{1+z^2},\ -2 \le z \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

```
>plot3d(sqrt(1+z^2),Phi=0..2*Pi,z=-2..2,coords=cylindrical);
```

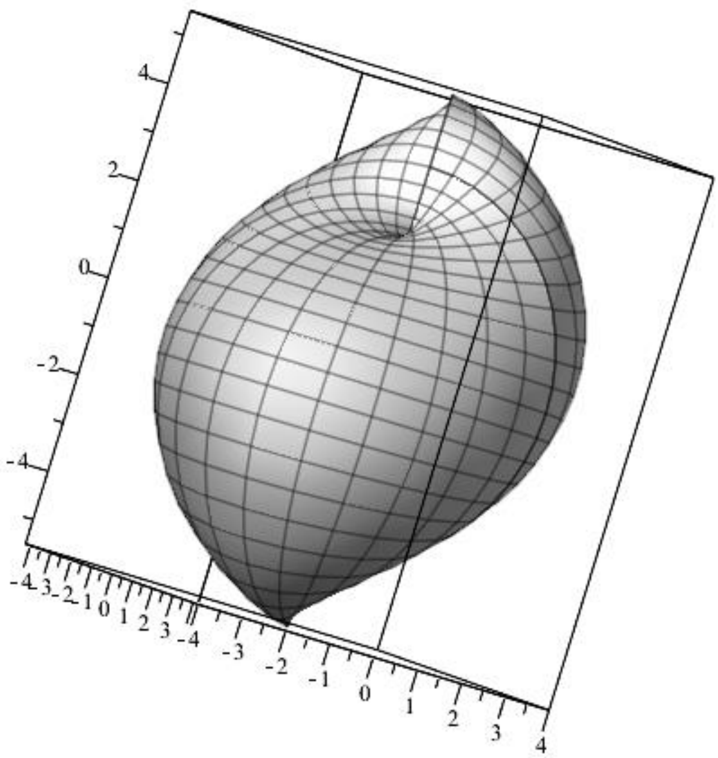


Наступний приклад демонструє можливість використання сферичної системи координат для побудови верхньої півсфери радіусу 2 та поверхні мушлі в сферичних координатах.

```
> plot3d(2,t=0..2*Pi,f=0..Pi/2,coords=spherical);
```

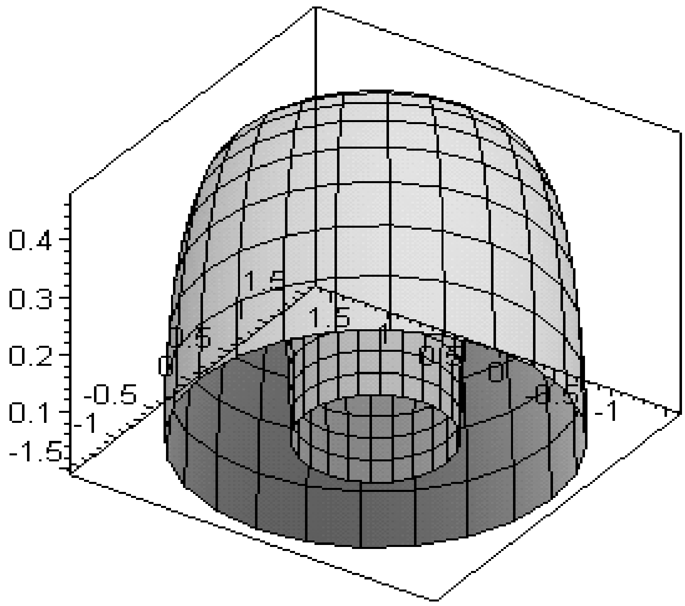


> $plot3d(4 + 1.5\cdot \sin(t)\cdot\cos(f), t = 0..2*\mathrm{Pi}, f = 0..\mathrm{Pi}, coords = spherical);$



Наступний приклад демонструє можливості використання тороїдальної системи координат для зображення верхньої частини тору.

```
> plot3d(1.5,t=0..Pi,z=0..2*Pi,coords=toroidal);
```



Тороїдальні кординати

Числа σ, τ и φ пов'язані з декартовими координатами x, y та z співвідношеннями:

$$x = \frac{a\, sh\tau}{ch\tau - \cos\sigma}\cos\varphi,$$

$$y = \frac{a\, sh\tau}{ch\tau - \cos\sigma}\sin\varphi,$$

$$z = \frac{a\sin\sigma}{ch\tau - \cos\sigma},$$

де $-\pi \le \sigma \le \pi, 0 \le \tau < \infty, 0 \le \varphi < 2\pi$

Координатні поверхні: $\sigma = const$ – сфери з центром (0, 0, $a\, ctg\,\sigma$) радіусу $\frac{a}{|\sin\sigma|}$; $\tau = const$ – тору з вісевим колом в площині *Oxy,* центром в початку координат, радіусом $a\, ctg\,\tau$ і колом поперечного перерізу радіусу $\frac{a}{sh\tau}$; $\varphi = const$ – півплощина $\frac{y}{x} = tg\,\varphi$.

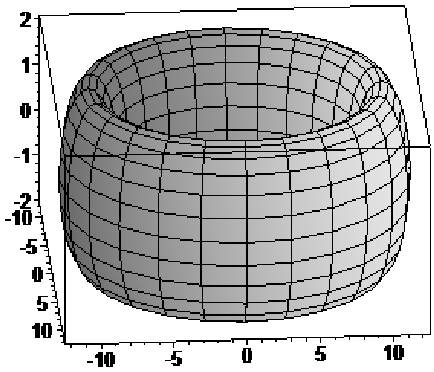
При використані криволінійних координат слід враховувати, що MAPLE завжди буде зображати стандартну поверхню, інтерпретуючи змінні згідно їх розташування в операторі ***plot3d.*** Наприклад, в сферичних координатах стандартна поверхня має вигляд $\rho = f(\varphi,\theta)$, циліндричних – $\rho = f(\varphi,z)$, тороїдальних – $\tau = f(\varphi,\sigma)$. Саме таку послідовність інтервалів зміни незалежних змінних слід зберігати в операторі ***plot3d.***

Поверхня тору в параметричній системі координат має вигляд:

$$x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi, \quad \varphi = 0..2\pi$$
$$y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi, \quad \psi = 0..2\pi$$
$$z = r\sin\varphi$$

R – радіус осі обертання, r – радіус утворюючого кола

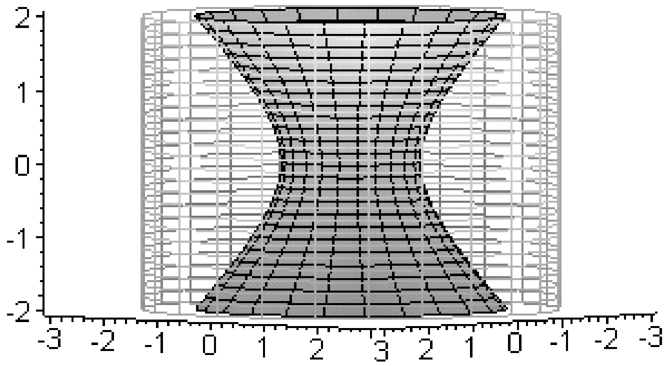
```
>plot3d([(2+cos(a))*cos(b),(2+cos(a))*sin(b),sin(a)],a=0..2*Pi,b=0..
2*Pi);
```



В декартових координатах рівняння поверхні тору має вигляд: $\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 - 4R^2\left(x^2 + y^2\right) = 0$.

Аналогічно функції двомірної графіки, функція ***plot3d*** має можливості зображати на одному графіку декілька поверхонь з використанням різних стилів їх зображення. Наступний приклад демонструє зображення в циліндричній системі координат двох поверхонь: $r = \sqrt{1 + z^2}$, $r = 3$, $-2 \le z \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$, при цьому для зображення поверхонь використовуються різні стилі – зокрема ***line, patch.***

```
>plot3d([sqrt(1+z^2),3],Phi=0..2*Pi,z=-2..2,coords=cylindrical,style=
[patch,line]);
```



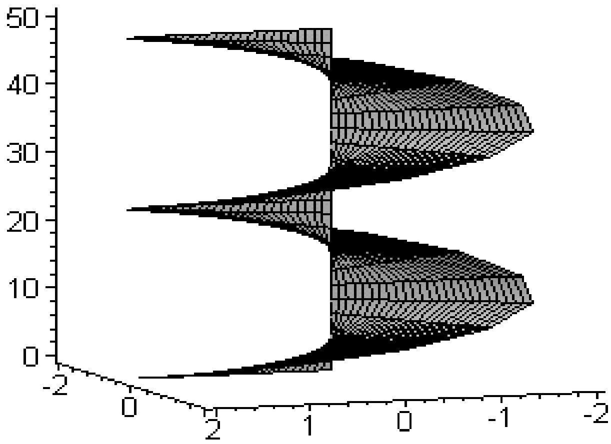
Зображення поверхонь, заданих в параметричній формі.

Для зображення поверхонь, заданих в параметричній формі, в системі MAPLE використовується наступна форма виклику функції: ***plot3d([exprf, exprg,exprh],u=a..b,v=c..d, p).*** Для цієї форми необхідно задати функціональні залежності ***exprf, exprg, exprh***, як функції параметрів ***u, v***.

Розглянемо приклади зображення поверхонь в параметричній формі.

В першому прикладі зобразимо поверхню гелікоїда, який задається за допомогою співвідношень: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = 4\varphi,\ 0 < r < 2,\ 0 < \varphi < 4\pi$

```
> plot3d([r*cos(phi),r*sin(phi),4*phi],r = 0..2,phi=0..4*Pi);
```

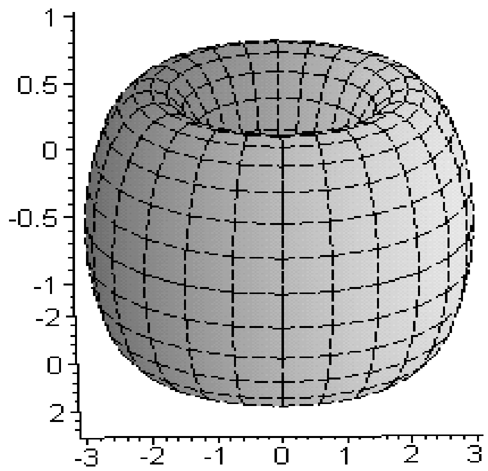


Другий приклад демонструє зображення тору, параметрична форма задання якого має вигляд:

$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\ z=a\sin\psi,\ 0<\varphi<2\pi,\ 0<\psi<2\pi$

Параметри *a=1, b=2.*

> $plot3d\left(\{[\mathrm{sqrt}(25-u^2),u,v],[-\mathrm{sqrt}(25-u^2),u,v]\},u=-5..5,v=-10..10\right);$



При побудові графіків поверхонь в криволінійних системах координат, іноді, крім існуючого набору систем координат, які можна з'ясувати за допомогою команди ***?coords,*** є необхідність використовувати власну систему координат. Для цього можна скористатися командою ***>addcoords(namecoords,[u,v,w],[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)])***, де

`Namecoords` – назва системи координат;

`u,v,w` - назви координат;

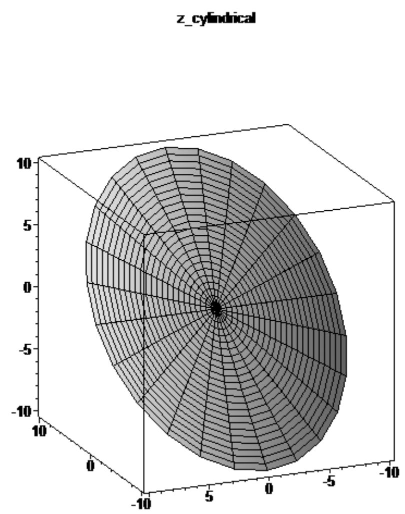
`x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)`- зв'язок з декартовими координатами.

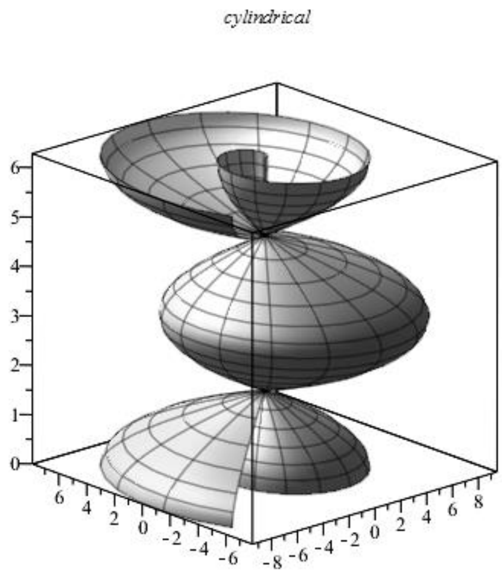
Розглянемо нову систему координат (модифікація циліндричної системи), яка дозволить будувати стандартну поверхню задану співвідношенням $z = f(r,\theta)$ на що вказує послідовність змінних у другому параметрі функції ***`addcoords`***.

```
>addcoords(z_cylindrical,[z,r,theta],[r*cos(theta),r*sin(theta),z]);
```

Побудуємо поверхні задані співвідношенням *`r*cos(theta)`* в двох різних системах координат ***`z_cylindrical`*** **та** ***`cylindrical`***.

```
>plot3d(r*cos(theta),r=0..10,theta=0..2*Pi,coords=z_cylindrical,
title=`z_cylindrical`,orientation=[-132,71],axes=BOXED);
>plot3d(r*cos(theta),r=0..10,theta=0..2*Pi,coords=cylindrical,
orientation=[100,71], axes=NONE);
```

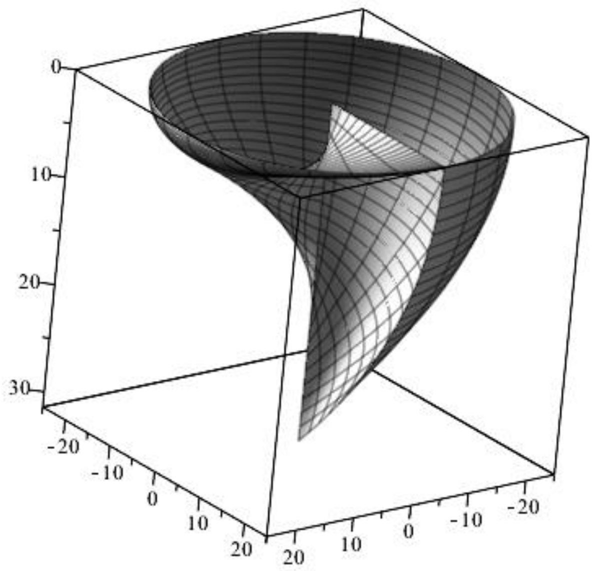




Очевидно, що графік поверхні, зображеної праворуч, насправді зображує поверхню $r = f(\varphi, z)$ незважаючи на невідповідні позначення в першому параметрі функції **`plot3d`** – так, параметр r має зміст кута φ циліндричної системи координат, а змінна θ має зміст циліндричної координати z .

Наступний приклад демонструє можливість параметричного задання поверхні з використанням криволінійних (тут циліндричних) координат. Перший параметр наступної функції є списком виразів, які задають залежність циліндричних координат r, φ, z від параметрів x, y

$$plot3d\left(\left[25 - y^2, x, y \cdot x\right], x = 0\,..2 \cdot \mathrm{Pi}, y = 0\,..5, coords = cylindrical\right)$$



Лекція 7

Параметри функції plot3d

Для управління виглядом поверхні функція ***plot3d*** може містити додаткові необов'язкові параметри:

grid=[m,n] - визначає щільність прямокутної рівномірної сітки значень незалежних змінних відображуваної функції, на якій обчислюються її значення для побудови поверхні. Тут m, n – цілі числа, за замовчанням m=n=25;

style= – визначає, як буде зображена поверхня. Допустимі значення:

POINT – точками;

HIDDEN – каркасна модель з видаленням невидимих ліній;

PATCH – зафарбована поверхня з лініями сітки;

LINE – каркасна модель без видалення невидимих ліній;

axes= – визначає тип відображуваних вісей (NORMAL, BOXED, FRAME, NONE).

Shading= – Визначає схему зафарбовування при відображенні поверхні, допустимі значення (XYZ, XY, Z, ZGRAYSCALE);

title=’   ’ – визначає заголовок;

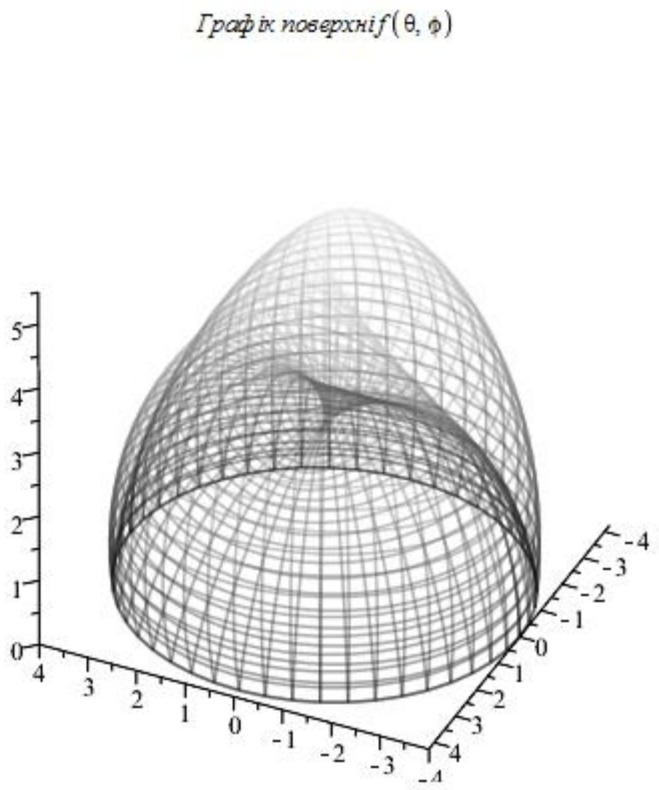
orientation=[a,b]– задає кути в сферичній системі координат напряму, з якого користувач дивиться на поверхню;

scaling= – задає масштаб, в якому відображається поверхня. Приймає значення (CONSTRAINED, UNCONSTRAINED).

З повним переліком параметрів можна ознайомитись за допомогою довідникової системи MAPLE.

Розглянемо приклад використання параметрів для управління зовнішнім виглядом поверхні.

$$plot3d\Big(4 + 1.5\cdot \sin(t)\cdot\cos(f),\ t = 0\,..2*\mathrm{Pi}, f = -\frac{\mathrm{Pi}}{2}\,..\mathrm{Pi}/2, coords = spherical, title = Графік\ поверхні\ f(\mathrm{theta}, \mathrm{phi}), style = LINE, axes = frame, shading = ZGRAYSCALE, orientation = [115, 55], scaling = UNCONSTRAINED\Big);$$



Побудова графічних структур

В системі MAPLE існують функції ядра PLOT, PLOT3D, які дозволяють будувати графічні структури. Кожен об'єкт структури може представляти собою точку або фігуру, полігон, напис або інші, які позиціонуються з заданою точністю в обраній системі координат. Функції PLOT, PLOT3D одночасно є даними, які описують графічні об'єкти. Їх можна представити в вигляді файлів, і після відкриття файлів представити в вигляді графіків.

Основними об'єктами структури є :

- POINTS([x1,y1],…..[xn,yn]) – точки з заданими координатами;
- CURVES([[x11,y11],…..[x1n,y1n]]…. [xm,ym,1],…..[xmn,ymn]]) – криві (ламані) по заданим точкам;
- POLIGONS([x11,y11],…..[x1n,y1n]]…. [xm,ym,1],…..[xmn,ymn]) – замкнені області, полігони (багатокутники), остання точка співпадає з першою;
- TEXT ([x,y],'string',horizontal,vertical) – текстова інформація 'string' позиціонована в точці з координатами [x,y] з вертикальним або горизонтальним розміщенням тексту.

Графічні структури PLOT3D

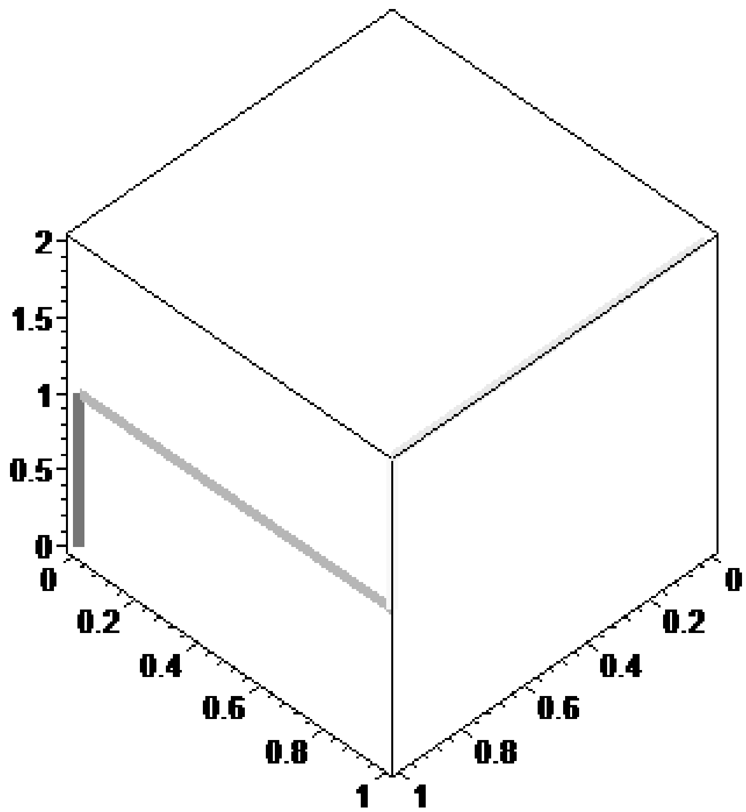
Серед графічних структур PLOT3D є ті ж самі структури POINT, CURVES, POLIGON, TEXT з додаванням третьої координати. Крім того, існують деякі специфічні тривимірні структури:

- GRID(a..b,c..d, listlist) – поверхня над частиною координатної площини, обмеженої відрізками [a,b], [c,d] по даним, заданим списком listlist=[[z11…z1n],[z21…z2n],[zm1…zmn]]. Цей список задає координату z для точок рівномірної сітки.
- MESH (listlist) – поверхні в тривимірному просторі по даним змінної listlist, яка задає повний списочний склад трьох координат функції, listlist=[[[x11,y11,z11],…[x1n,y1n,z1n]], [[x21,y21,z21], ..[x2n,y2n,z2n]],…,[[xm1,ym1,zm1],…,[xmn,ymn,zmn]]].

Розглянемо приклади використання різних структур.

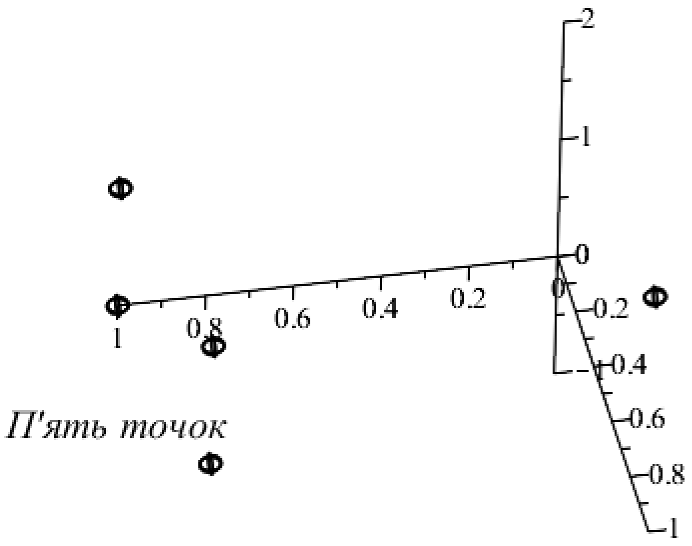
Побудова ламаної лінії в тривимірному просторі.

```
>PLOT3D(CURVES([[1,0,0],[1,0,1],[1,1,1],[1,1,2],[0,1,2]],
THICKNESS(5));
```



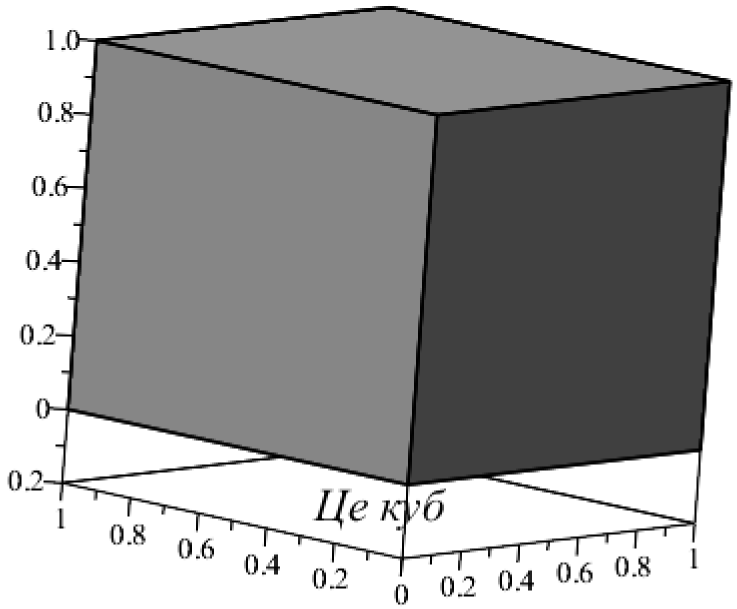
Побудова точок в просторі.

```
>PLOT3D(POINTS([[1,0,0],[1,0,1],[1,1,1],[1,1,2],[0,1,2]]),SYMBOL(CIR
CLE,24),COLOR(RGB,1,0.5,0),AXES(NORMAL),TEXT([1,0,-1],`П’ять
точок`,FONT(TIMES,ROMAN,16),COLOR(RGB,1,0,0)));
```



Побудова графічної структури POLYGONS, TEXT

```
> PLOT3D(POLYGONS([[0,0,0],[1,0,0],[1,1,0],[0,1,0]],
                  [[0,0,0],[0,1,0],[0,1,1],[0,0,1]],
                  [[1,0,0],[1,1,0],[1,1,1],[1,0,1]],
                  [[0,0,0],[1,0,0],[1,0,1],[0,0,1]],
                  [[0,1,0],[1,1,0],[1,1,1],[0,1,1]],
                  [[0,0,1],[1,0,1],[1,1,1],[0,1,1]]),TEXT([0.5,0.5,-
0.2],`Це куб`,FONT(TIMES,ROMAN,18)));
```

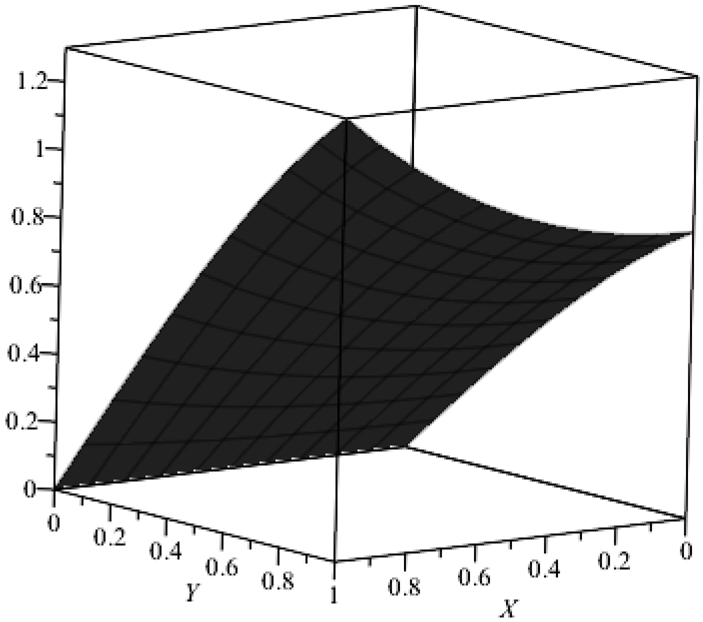


Побудова поверхні на рівномірній сітці

$> Z := \left[seq\left(\left[seq\left(evalf\left(\sin\left(\frac{i}{10}\right)\cdot\cosh\left(\frac{j}{10}\right)\right), i = 0..10\right)\right], j = 0..10\right)\right];$

[[0., 0.09983341665, 0.1986693308, 0.2955202067, 0.3894183423, 0.4794255386, 0.5646424734, 0.6442176872, 0.7173560909, 0.7833269096, 0.8414709848], [0., 0.1003329998, 0.1996635055, 0.2969990395, 0.3913670571, 0.4818246645, 0.5674680392, 0.6474414607, 0.7209458613, 0.7872468091, 0.8456818470], [0., 0.1018367495, 0.2026559798, 0.3014503386, 0.3972327052, 0.4890460539, 0.5759730161, 0.6571450463, 0.7317511005, 0.7990457396, 0.8583565777], [0., 0.1043597154, 0.2076767030, 0.3089186537, 0.4070739913, 0.5011619801, 0.5902425241, 0.6734255598, 0.7498799501, 0.8188417877, 0.8796220288], [0., 0.1079271485, 0.2147759247, 0.3194787308, 0.4209894110, 0.5182937042, 0.6104193781, 0.6964459432, 0.7755138508, 0.8468330802, 0.9096910335], [0., 0.1125747528, 0.2240246959, 0.3332362583, 0.4391182340, 0.5406126856, 0.6367055139, 0.7264365912, 0.8089093542, 0.8832997623, 0.9488645313], [0., 0.1183490430, 0.2355155815, 0.3503289263, 0.4616419000, 0.5683423006, 0.6693640128, 0.7636976610, 0.8504006947, 0.9286068057, 0.9975345844], [0., 0.1253078103, 0.2493635865, 0.3709278041, 0.4887858336, 0.6017600767, 0.7087217321, 0.8086020741, 0.9004031316, 0.9832076585, 1.056188300], [0., 0.1335207002, 0.2657073057, 0.3952390517, 0.5208216996, 0.6412004693, 0.7551725759, 0.8615992477, 0.9594171047, 1.047648783, 1.125412701], [0., 0.1430699102, 0.2847103131, 0.4235059847, 0.5580701244, 0.6870582120, 0.8091814410, 0.9232195965, 1.028033247, 1.122575129, 1.205900612], [0., 0.1540510120, 0.3065627971, 0.4560115082, 0.6009039029, 0.7397922645, 0.8712888664, 0.9940798378, 1.106938292, 1.208736585, 1.298457582]]

$PLOT3D(\ GRID(0\,..1,0\,..1,Z),AXESLABELS(X,Y,Z),$
$ORIENTATION(140,30),AXES(BOXED),COLOR(RGB,1,0,0.5));$



Побудова поверхні на нерівномірній сітці

Задаємо сімейство кривих:

```
> y1:=x->1/2*x+2;x1:=[0,2,3,4]; y2:=x->1/3*x+2;x2:=[0,1,2.5,4];
y3:=x->0;x3:=[1,2,3,3.5];f:=(x,y)->sin(x^2+y^2);
```

$y1 := x \to \frac{1}{2}x + 2$, $x1 := [0, 2, 3, 4]$, $y2 := x \to \frac{1}{3}x + 2$,

$x2 := [0, 1, 2.5, 4]$ $y3 := x \to 0$, $x3 := [1, 2, 3, 3.5]$, $f := (x, y) \to \sin(x^2 + y^2)$

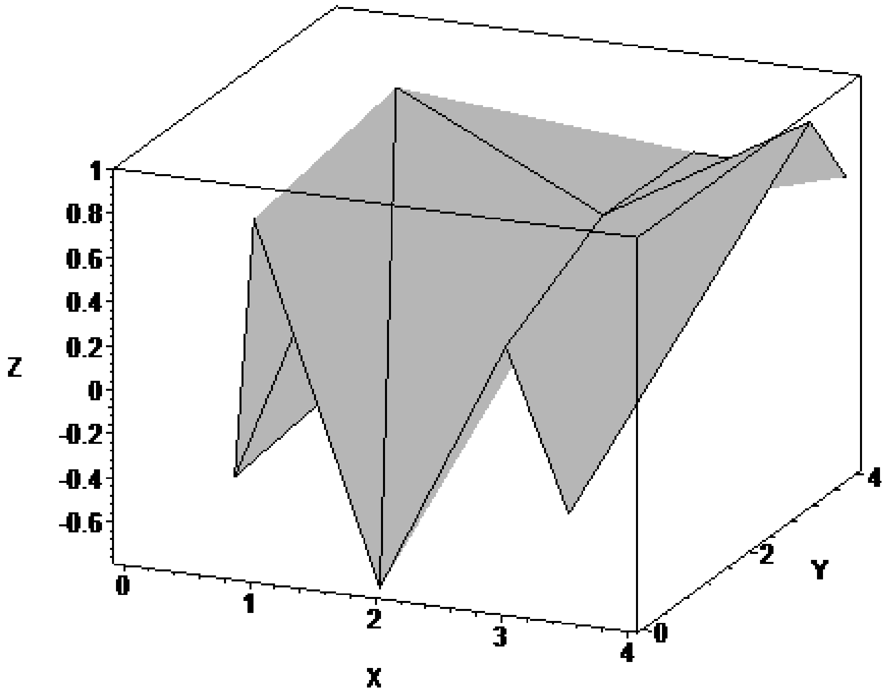
Будуємо криволінійну сітку та обчислюємо значення функції в точках сітки:

```
>gg:=[[evalf(seq([x1[i],y1(x1[i]),f(x1[i],y1(x1[i]))],i=1..4))],[eva
lf(seq([x2[i],y2(x1[i]),f(x2[i],y2(x1[i]))],i=1..4))],[evalf(seq([x3
[i],y3(x1[i]),f(x3[i],y3(x1[i]))],i=1..4))]];
```

$gg :=$ [[[0., 2., -0.7568024953], [2., 3., 0.4201670368], [3., 3.500000000, 0.6751356533], [4., 4., 0.5514266812]], [[0., 2., -0.7568024953], [1., 2.666666667, 0.9671239513], [2.5, 3., 0.4421221686], [4., 3.333333333, 0.9180853258]], [[1., 0., 0.8414709848], [2., 0., -0.7568024953], [3., 0., 0.4121184852], [3.5, 0., -0.3111193550]]]

Відображаємо структуру

```
> PLOT3D(MESH(gg),AXESLABELS(X,Y,Z),COLOR(RGB,0,1,0));
```



Додаткові графічні можливості системи MAPLE

Додаткові графічні можливості системи MAPLE можна отримати, використовуючи функції графічного пакету ***plots*** **.**

\> **with(plots);**

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *dualaxisplot*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *graphplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*]

Команди пакету plots

plots - дуже потужний пакет двовимірної та тривимірної графіки, налічує більше 50 функцій.

Продемонструємо на прикладах можливості лише деяких функцій цього пакету:

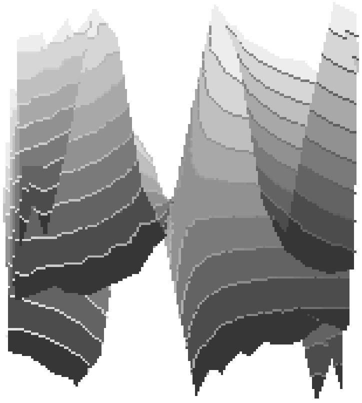
1. ***animate*** - створює анімацію двовимірних графіків функцій;

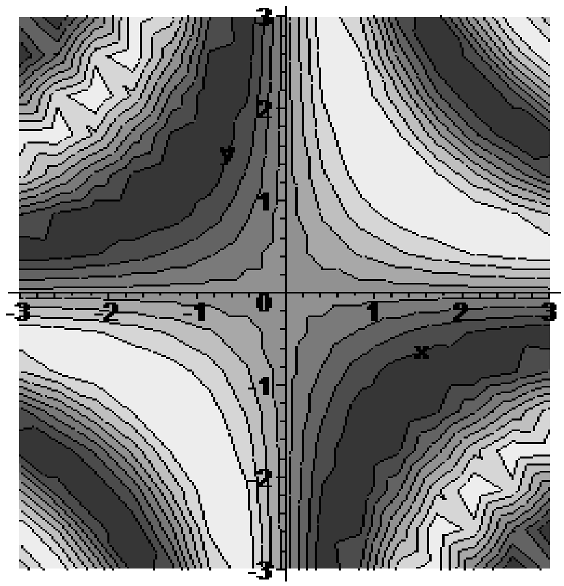
2. ***animate 3d*** **-** створює анімацію тривимірних графіків функцій;
3. ***complexplot3d*** – побудова графіків в комплексній площині;
4. ***contourplot3d-*** побудова графіку поверхні у вигляді изогипсів (ліній рівної висоти);
5. ***coordplot3d*** – презентація стандартних поверхонь для криволінійних координат;
6. ***cylinderplot*** – побудова графіків поверхні в циліндричній системі координат;
7. ***display*** – зображення сукупності графіків для списку графічних об'єктів на площині;
8. ***display3d*** – зображення сукупності графіків для списку графічних об'єктів у тривимірному просторі;
9. ***fieldplot*** – побудова графіку векторного поля на площині;
10. ***fildplot3d*** **-** побудова графіку векторного поля в просторі;
11. ***gradplot*** – побудова графіку векторного поля градієнту функції двох змінних;
12. ***gradplot3d*** **-** побудова графіку векторного поля градієнту функції трьох змінних;
13. ***implicitplot3d*** – побудова графіку поверхні неявно заданої функції;
14. ***oderlot*** – побудова графіку чисельного розв'язку звичайного диференціального рівняння;
15. ***spacecurve*** – побудова тривимірних кривих;
16. ***sphereplot*** – побудова графіку поверхні в сферичних координатах;
17. ***textplot (textplot3d)*** – вивід тексту на задане місце;
18. ***tuberplot*** – побудова тривимірного графіку типу труби.

Розглянемо приклади використання команд пакету ***plots.***

Команди ***contourplot*** *та* ***contourplot3d***

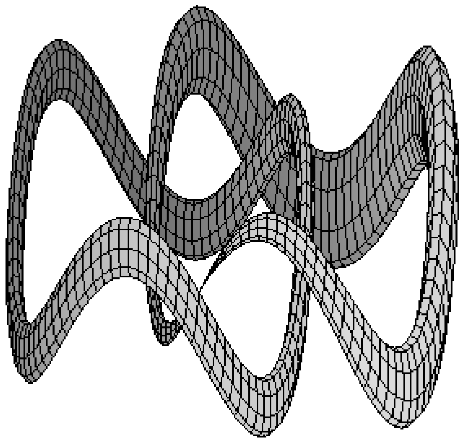
```
> contourplot3d(sin(x*y),x=-3..3,y=-3..3,grid=[15,15],filled=true);
> contourplot(sin(x*y),x=-3..3,y=-3..3,grid=[15,15],filled=true);
```





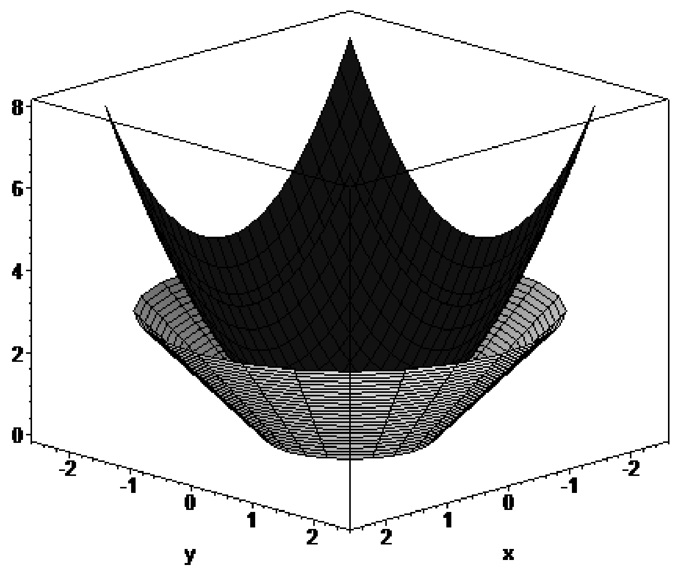
Команди ***tubeplot*** *та* ***display3d***

```
> N:=15: k:=3.^(1/2):
> knot1 := tubeplot([1+k*cos(t),k*sin(t),
.3*sin(3*t)],t=0..2*Pi,numpoints=100,radius=.1):
> knot2:=tubeplot([-1/2+k*cos(t),
k/2+k*sin(t),.3*sin(3*t)],t=0..2*Pi,numpoints=100,radius=.2*sin(t/2)
):
> display3d({knot1,knot2});
```

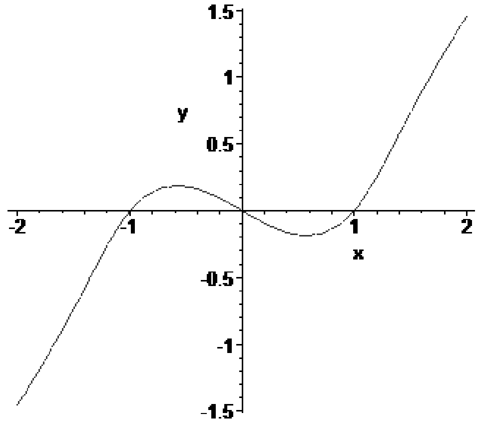


Команди ***cylinderplot, display***

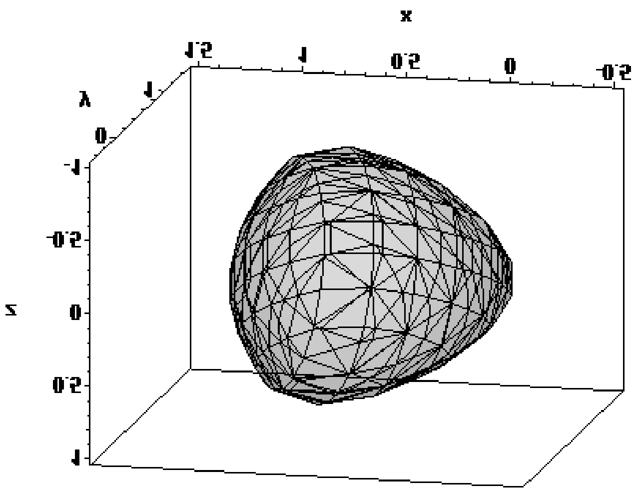
```
> pp1 := cylinderplot(1+0.5*z,t=0..2*Pi,z=0..3, orientation
=[45,70],style=patch):
> pp2:=plot3d(x^2+y^2,x=-2..2,y=-2..2,color=blue):
display({pp2,pp1});
```



```
> implicitplot(x^3-y^3=x+2*y, x=-2..2,y=-2..2);
```

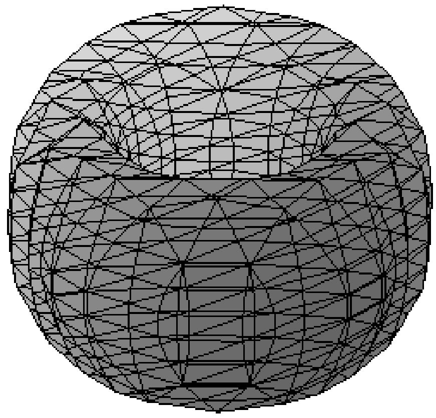



```
> implicitplot3d(x^4+y^2+z^2-x-y=0,x=-0.5..1.5,y=-0.5..1.5,z=-1..1);
```



Зображення поверхні тору за допомогою неявно заданої функції:

```
> implicitplot3d((x^2+y^2+z^2+25-4)^2-100*(x^2+y^2)=0,x=-7..7,y=-
7..7,z=-2..2);
```



Команда ***odeplot***:

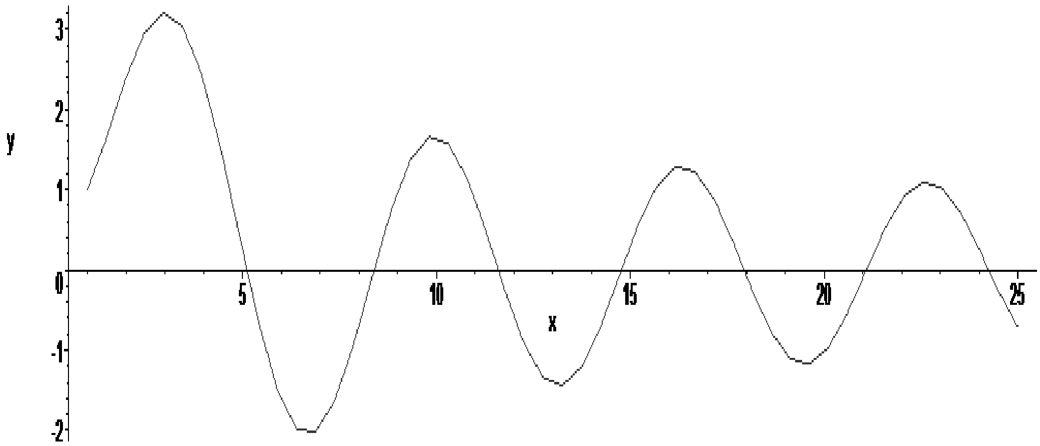
> **g:=2;** $g := 2$

> **eq11:={x^2*diff(y(x),x,x)+x*diff(y(x),x)+(x^2-g^2)*y(x)=0,y(1)=1.,D(y)(1)=1.};**

$$eq11 := \{\mathrm{D}(y)(1)=1.,\ \mathrm{y}(1)=1.,\ x^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right)+x\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)+(x^2-4)\,\mathrm{y}(x)=0\}$$

> **ss:=dsolve(eq11,numeric);** $ss :=$ **proc** (x_rkf45) ... **end proc**

> **odeplot(ss,[x,y(x)],x=1..25);**

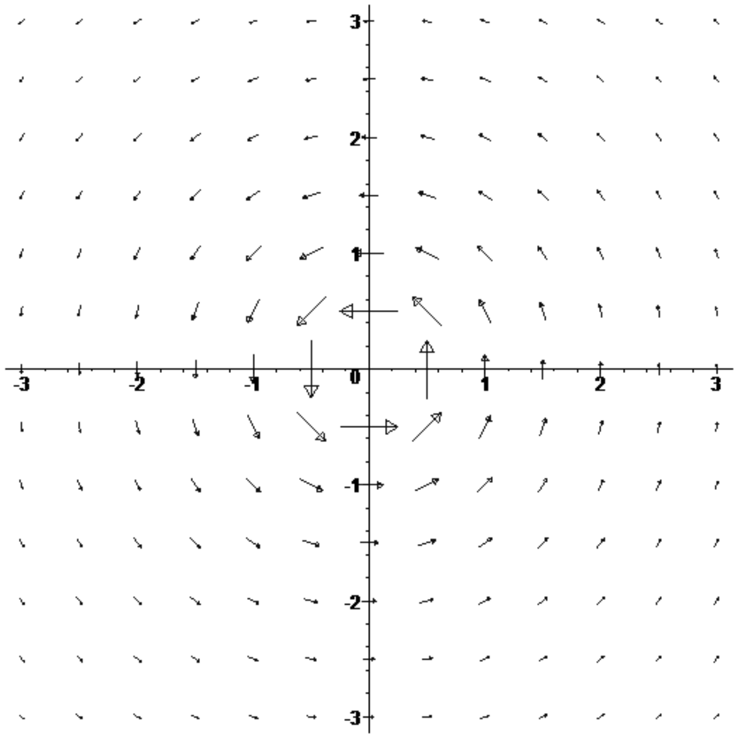


Команда ***fieldplot***:

> **vx:=(x,y)->-y/(x^2+y^2);** $vx := (x,y) \to -\dfrac{y}{x^2+y^2}$

> **vy:=(x,y)->x/(x^2+y^2);** $vy := (x,y) \to \dfrac{x}{x^2+y^2}$

> **fieldplot([vx,vy],x=-3..3,y=-3..3,arrows=SLIM, grid=[13,13],color=blue);**

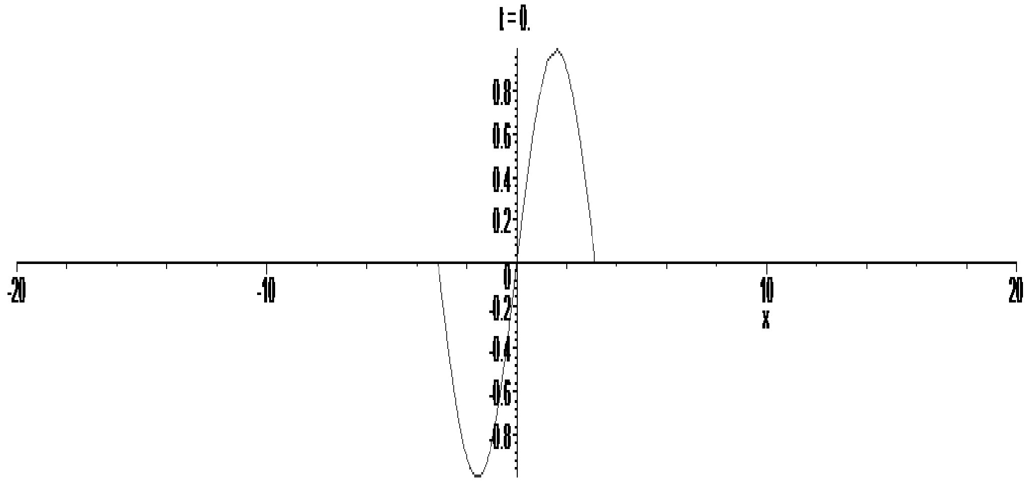


Команда ***animate***

> **f:=x->piecewise(abs(x)<Pi,sin(x),0);** $f := x \to \text{piecewise}(|x| < \pi, \sin(x), 0)$

> **ff:=(x,t)->(f(x-2*t)+f(x+2*t))/2;** $ff := (x, t) \to \frac{1}{2}\,\text{f}(x - 2\,t) + \frac{1}{2}\,\text{f}(x + 2\,t)$

> **animate(plot,[ff(x,t),x=-20..20],t=0..10);**



Базові засоби програмування в системі Maple

Умовний оператор

Для створення умовних конструкцій в системі Maple використовується оператор ***if.*** Синтаксис цього оператора має загальноприйнятий в мовах програмування вигляд:

if <Логічний вираз 1> then <Послідовність операторів 1>|elif < Логічний вираз 2> then <Послідовність операторів 2>| |else <Послідовність операторів n+1>| fi:

Семантика оператора має наступний зміст: якщо *<Логічний вираз 1>* має значення істина, то виконується *<Послідовність операторів 1>* до першого *elif,* якщо це значення хибне то перевіряється *<Логічний вираз 2>* і якщо його значення є істина, то виконується *<Послідовність операторів 2>*, якщо значення *<Логічний вираз 2>* хибне, то виконується *<Послідовність операторів n+1>.* Блоків ***elif*** може бути скільки завгодно, логічні вирази, що їм відповідають, послідовно перевіряються і виконується відповідна група операторів у випадку, коли логічний вираз приймає значення істина. За допомогою вертикальних рисок | | вказуються ті елементи конструкції ***if*** , які можуть бути пропущені.

Наведемо приклад використання умовного оператору:

```
> x:=2.5;                          x := 2.5
>if x <0 then f(x):=0
elif (x>=0 and x<1)then f(x):=x
elif (x>=1 and x<2) then f(x):=1
elif x>=2 and x< 3 then f(x):=1+(x-2)
elif x>=3 and x<4 then f(x):=3
else f(x):=3+(x-4)
fi;                                f(2.5) := 1.5
```

Оператори циклу

Для організації повторних обчислень в системі Maple існують оператори циклу. Синтаксис оператору циклу має вигляд:

for <ім’я змінної 1> from <вираз 1> |to <вираз 2>| |by <вираз 3>| do <Набір операторів > od;

Тут *<ім’я змінної 1>* - ім’я змінної управління циклом;

<вираз 1>, <вираз 2>, <вираз 3> – вирази, що задають початкове значення, кінцеве значення та крок зміни змінної *<ім’я змінної 1>*.

Якщо складова циклу *by <вираз 3>* відсутня, то крок зміни змінної управління дорівнює +1.

Наведений оператор циклу буде виконуватись доти, доки управляюча змінна не перевищить значення *<вираз 2>*. Якщо конструкція *to <вираз 2>* відсутня, то цикл буде виконуватись нескінченну кількість разів, і для його припинення необхідні додаткові дії.

Цикл можна перервати за допомогою додаткової конструкції *while <вираз 4>*. Синтаксис такого циклу має вигляд:

for <ім’я змінної 1> from <вираз 1> |to <вираз 2>| |by <вираз 3>| while <умова 1> do <Набір операторів > od;

Цей цикл буде виконуватись до тих пір, поки *<ім’я змінної 1>* **<** *<вираз 2>*, і завершує свою роботу, як тільки *<умова 1>* стає хибною.

Існує ще одна форма оператора циклу з конструкцією in, який має наступний синтаксис:

for <ім’я змінної 1> |in <список значень >| |while <умова 1> do <Набір операторів > od;

Цей список виконуватиметься доти, доки не вичерпається *<список значень>* та доки виконується умова *<умова 1>.*

У Maple існує також спрощена конструкцію циклу

while <умова 1> do <Набір операторів > od;

Тут набір операторів буде виконуватись доти, доки є істинним *<умова 1>.*

Розглянемо приклад використання оператору циклу для знаходження суми з додатковою умовою:

```
> s:=0;
```

$$s := 0$$

```
> for i from 1 to 10000 by 2 while s<1.05 do s:=s+1/(i^3) od: evalf(s);i;
```

1.050075546 13

Оператори переривання циклу та пропуску циклу

Іноді виникає потреба пропустити окреме значення змінної циклу. Для цього існує оператор ***next.*** Наступний приклад демонструє використання оператору ***next*** у складі операторів ***if – fi.***

```
> for i in [1,2,5,7,9,11] do if i=7 then next else  k[i]:=i^2;
print(k[i]) fi od;
```

1 4 25 81 121

Оператор ***break*** перериває виконання фрагменту програми або циклу. Його дію пояснює наступний приклад:

```
>for i in [1,2,5,7,9,11] do if i=7 then break else  k[i]:=i^2;
print(k[i]) fi od;
```

1 4 25

Додаткові можливості застосування функцій map та map2 до списків та множин

Часто виникає потреба виконати деяку операцію або обчислити функцію для кожного елементу списку або множини. В такому випадку, окрім застосування оператору циклу, система Maple надає можливість використання спеціальних команд:

map(функція або команда, список або множна [,пар1, пар2, …., парN]);

map2(функція або команда, пар1, список або множна [, пар2, …., парN]);

Команда ***map*** дозволяє застосувати функцію або команду, що вказана першим параметром, до усіх елементів списку або множини, що вказана другим параметром, при цьому елементи списку або множини виступають першим параметром цієї функції або команди. Якщо функція або команда потребує додаткових аргументів, то вони вказуються після списку або множини у вигляді пар1, пар2, …., парN. Результатом роботи команди ***map*** є відповідно список або множина.

```
> map(diff,[sin(x),cos(x),x^2],x$2);
```

$[-\sin(x), -\cos(x), 2]$

```
> map(cos,[x,y,z,v,w]);
```

$[\cos(x), \cos(y), \cos(z), \cos(v), \cos(w)]$

```
> map(int ,[seq(x^2*sin(k*x),k=1..10)],x=0..2*Pi);
```

$$\left[-4\pi^2, -2\pi^2, -\frac{4}{3}\pi^2, -\pi^2, -\frac{4}{5}\pi^2, -\frac{2}{3}\pi^2, -\frac{4}{7}\pi^2, -\frac{1}{2}\pi^2, -\frac{4}{9}\pi^2, -\frac{2}{5}\pi^2\right]$$

Команда ***map2*** дозволяє застосувати функцію або команду, що вказана першою, до виразу, що вказаний у вигляді пар1. В якості другого параметру функції або команди використовуються елементи списку або множини, в якості можливих додаткових параметрів використовуються пар2, …., парN. Команда ***map2*** повертає список або множину.

```
> f:=(x,y,z)->x^y+z;
```

$$f := (x, y, z) \to x^y + z$$

```
> map2(f,x,[1,2,3,4,5,6],sqrt(x));
```

$$[x + \sqrt{x}, x^2 + \sqrt{x}, x^3 + \sqrt{x}, x^4 + \sqrt{x}, x^5 + \sqrt{x}, x^6 + \sqrt{x}]$$

```
> map2(diff,sin(x*y*z)/(x*y),[x,y,z]);
```

$$\left[\frac{\cos(x\,y\,z)\,z}{x} - \frac{\sin(x\,y\,z)}{x^2\,y}, \frac{\cos(x\,y\,z)\,z}{y} - \frac{\sin(x\,y\,z)}{x\,y^2}, \cos(x\,y\,z)\right]$$

Процедури та процедури-функції

Мова програмування Maple так само, як мови програмування високого рівня, має конструкції, які називаються процедурами. Процедурою називають самостійний модуль програми, що призначений для виконання якоїсь відокремленої сукупності операцій. Процедура є найважливішим елементом структурного програмування і використовується для розширення існуючих можливостей системи Maple.

Найпростіша форма процедури має наступний вигляд:

name: = proc (Параметри)

Тіло процедури

end;

Тут ***name*** – ім'я процедури. Параметри процедури задаються у вигляді списку змінних, наприклад proc (x,y,z). При цьому список формальних і фактичних параметрів повинні відповідати один одному в тому розумінні, що однакові місця в цих списках повинні займати змінні одного типу.

Розглянемо приклад процедури, яка обчислює коефіцієнти Фур'є заданого порядку для заданої функції.

```
> koef:=proc(f,k,ks1,kc1)
> ks1:=(int(f(x)*sin(k*x),x=0..2*Pi)/int((sin(k*x))^2,x=0..2*Pi)):
> kc1:=(int(f(x)*cos(k*x),x=0..2*Pi)/int((cos(k*x))^2,x=0..2*Pi)):
> end proc;
```

proc(*f*, *k*, *ks1*, *kc1*)

$ks1 := int(f(x) * \sin(k*x), x = 0 ..2 * \mathrm{Pi}) / int(\sin(k*x)\hat{}2, x = 0 ..2 * \mathrm{Pi});$

$kc1 := int(f(x) * \cos(k*x), x = 0 ..2 * \mathrm{Pi}) / int(\cos(k*x)\hat{}2, x = 0 ..2 * \mathrm{Pi})$

end proc

Звернення до відповідної процедури має вигляд:

```
> g:=x->x^7;          #Завдання функції
```

$g := x \to x^7$

```
> ks:='ks';kc:='kc';
```

$ks := ks$ $\qquad kc := kc$

```
> koef(g,8,ks,kc):        # Звернення до процедури
> ks;kc;                  # Виведення значень коефіцієнтів Фур'є
```

$$\frac{-\frac{105}{512}\pi^3 + \frac{315}{65536}\pi - 16\pi^7 + \frac{21}{8}\pi^5}{\pi} \qquad \frac{7\pi^6 + \frac{315}{8192}\pi^2 - \frac{105}{128}\pi^4}{\pi}$$

Локальні та глобальні змінні

Змінні, що використовуються в процедурі, можуть бути або локальними або глобальними по відношенню до цієї процедури. Усі змінні, що визначені поза тілом процедури, є по відношенню до неї глобальними. Процедура може використовувати та змінювати їх значення, причому змінені значення будуть доступними і поза тілом процедури. Усі змінні, які визначені та використовуються лише в тілі процедури, є локальними, і їх імена можна використовувати для визначення поза тілом цієї процедури без жодних обмежень.

В системі Maple існує алгоритм автоматичного визначення, яка зі змінних є локальною, а яка глобальною. В той же час, існує можливість явної об'яви глобальних і локальних змінних за допомогою операторів:

local L1,L2,…..Ln;

global G1,G2,…Gm;

Якщо в процедурі немає ніяких об'яв локальних та глобальних змінних, то в Maple діє наступне правило для визначення того, що змінна є локальною:

- змінна з'являється в лівій частині оператора присвоювання;
- змінна є змінною параметру циклу ***for*** або індексною змінною операторів ***seq(), add().*** Якщо жодне з правил не можна застосувати до деякої змінної, то вона вважається глобальною.

Локальні змінні відрізняються від глобальних також по алгоритму їх обчислення. Для глобальних змінних використовується правило повного обчислення, тобто якщо в вираз, який попередньо був присвоєний змінній, входила невідома величина, якій потім було надано деяке значення, то це значення підставляється в попередній вираз до повного обчислення глобальної змінної, поки обчислення не дійде до невідомих величин або числових значень.

Локальні змінні в процедурах не обчислюються згідно з правилом повного обчислення. Для них Maple використовує правило обчислення точно на один рівень, тобто якщо при визначенні локальної змінної використовувалась невідома величина якій пізніше було присвоєне значення, то цей факт не приймається до уваги.

Лекція 8

Використання окремих спеціальних функцій та ортогональних поліномів.

При розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь, дуже часто розв'язки задач не можуть бути знайдені у вигляді суперпозиції елементарних функцій. Тому в математиці, крім елементарних функцій, використовуються вищі трансцендентні функції або, як їх ще називають, – спеціальні функції. Більшість цих функцій є особливими розв'язками звичайного диференціального рівняння другого порядку вигляду: $\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y=0$, де коефіцієнт *p(x)* обертається в нуль в одній або декількох точках проміжку зміни *x*.

Ортогональні поліноми

Класичні ортогональні поліноми $p_n(x),\ n=0...\infty$, ортогональні на відрізку (a,b) з ваговим множником $\rho(x)$ задовольняють диференціальному рівнянню:

$\sigma(x)p_n''(x)+\tau(x)p_n'(x)+\lambda_n p_n(x)=0$, де $\lambda_n=-n[\tau'(x)+0.5(n-1)\sigma''(x)]$, де $\tau(x)$ – поліном першої степені, а $\sigma(x)$ в залежності від типу інтервалу (a,b) має наступний вигляд:

$$\sigma(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x), & a\neq-\infty, b\neq\infty;\\ (x-a), & a\neq-\infty,\ b=\infty\\ (b-x) & a=-\infty,\ b\neq\infty\\ 1 & a=-\infty,\ b=\infty\end{cases},$$

де вага $\rho(x)$ задовольняє диференціальному рівнянню $[\sigma(x)\rho(x)]'=\tau(x)\rho(x)$. В залежності від значень a,b $\rho(x)$ приймає наступні значення:

$$\rho(x)=\begin{cases}(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}, \quad \alpha=-\dfrac{\tau(b)}{b-a}-1,\ \beta=\dfrac{\tau(a)}{b-a}-1, & a\neq-\infty, b\neq\infty;\\ (x-a)^{\alpha}e^{x\tau'}(x), \quad \alpha=\tau(a)-1, & a\neq-\infty,\ b=\infty\\ (b-x)^{\alpha}e^{-x\tau'}(x), \quad \alpha=-\tau(b)-1, & a=-\infty,\ b\neq\infty\\ e^{\int\tau(x)dx}, & a=-\infty,\ b=\infty\end{cases}$$

Наведемо таблицю для основних характеристик найбільш поширених класичних ортогональних поліномів – Якобі, Лагера, Ерміта.

(a,b)	$\rho(x)$	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$p_n(x)$
(-1,1)	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Якобі
$(0,\infty)$	$e^{-x}x^{\alpha}$	x	$-x+\alpha+1$	$L_n^{\alpha}(x)$ Лагера
$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}	1	$-2x$	$H_n(x)$ Ерміта

Важливими частинними випадками поліномів Якобі є :

- поліноми Лежандра $P_n(x)$, $(\alpha=\beta=0)$;

- поліноми Чебишева першого та другого роду

$$T_n(x), \ (\alpha = \beta = -\frac{1}{2}) \qquad U_n(x), \ (\alpha = \beta = \frac{1}{2});$$

- поліноми Гегенбауера (ультрасферичні) $C_n^{\lambda}(x), \ (\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2});$

Для виклику в системі Maple ортогональних поліномів, необхідно підключити пакет за допомогою команди ***with(orthopoly)*** та скористатися іменами функцій, що їм відповідають:

- G(n,a,x) – поліноми Гегенбауера;
- H(n,x) – поліноми Ерміта;
- L(n,a,x) – поліноми Лагера;
- P(n,x) – поліноми Лежандра;
- P(n,a,b,x) – поліноми Якобі;
- T(n,x) – поліноми Чебишева 1 – го роду;
- U(n,x) – поліноми Чебишева 2 – го роду.

Розглянемо приклади роботи з ортогональними поліномами.

Обчислення поліному Чебишева першого роду з першого по п'ятий степінь включно:

```
with(orthopoly);                          [G, H, L, P, T, U]
> map(T,[1,2,3,4,5],x);
```

$$[x, -1 + 2x^2, 4x^3 - 3x, 1 + 8x^4 - 8x^2, 16x^5 - 20x^3 + 5x]$$

Обчислення коренів поліному Ерміта п'ятого степеня

```
> solve(H(5,x),x);
```

$$0, -\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{10}}}{2}, \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{10}}}{2}, -\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{10}}}{2}, \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{10}}}{2}$$

Обчислення поліному Чебишева другого роду з другого по шостий степінь включно

```
> map(U,[2,3,4,5,6],x);
```

$$[-1 + 4x^2, 8x^3 - 4x, 1 + 16x^4 - 12x^2, 32x^5 - 32x^3 + 6x, -1 + 64x^6 - 80x^4 + 24x^2]$$

Перевірка умов ортогональності для поліномів Чебишева другого роду.

```
> int(U(5,x)*U(5,x)*sqrt(1-x^2),x=-1..1);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

```
> int(U(5,x)*U(7,x)*sqrt(1-x^2),x=-1..1);
```

$$0$$

Перевірка умов ортогональності для поліномів Лежандра.

```
> (int(P(3,x)*P(10,x),x=-1..1));
```

$$0$$

Перевірка умов ортогональності для поліномів Лагера

```
> (int(L(10,1,x)*x^7*exp(-x)*x,x=0..infinity));
```

$$0$$

Формування функції, що є лінійною комбінацією поліномів Лежандра та обчислення значення цієї функції в точці 0.5.

```
> s:=x->sum(i*P(i,x),i=0..5);
```

$$s := x \to \sum_{i=0}^{5} i\,\mathrm{P}(i, x)$$

```
> s(0.5);
```

$$-1.769531250$$

Для роботи з ортогональними поліномами та їх рядами існує пакет, який підключається за допомогою команди `> with(OrthogonalSeries);`

[*Add*, *ApplyOperator*, *ChangeBasis*, *Coefficients*, *ConvertToSum*, *Copy*, *Create*, *Degree*, *Derivate*, *DerivativeRepresentation*, *Evaluate*, *GetInfo*, *Multiply*, *PolynomialMultiply*, *ScalarMultiply*, *SimplifyCoefficients*, *Truncate*]

Слід зауважити, що використання пакету **OrthogonalSeries** вимагає від користувача застосування повного імені відповідного ортогонального полінома, які є доступними безпосередньо у ядрі системи Maple.

GegenbauerC(n,a,x) – поліноми Гегенбауера;

HermiteH(n,x) – поліноми Ерміта

LaguerreL(n,a,x) – поліноми Лагера;

JacobiP(n,a,b,x) – поліноми Якобі

ChebyshevT(n,x) – поліноми Чебишева 1 – го роду;

ChebyshevU(n,x) – поліноми Чебишева 2 – го роду;

Розглянемо окремі функції цього пакету.

Функція ***Create(a, F);*** призначена для створення ряду з ортогональних поліномів, ім’я яких вказане другим параметром, а коефіцієнти при них вказані першим параметром. В залежності від першого параметру сума може бути як скінченою, так і нескінченою.

```
>S:=(Create({1/n!,n=1..infinity},
ChebyshevU(n,x)));
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ChebyshevU(n, x)}{n!}$$

```
>V1:=Create({[1=2,2=4,3=10]},Cheb
yshevT(n,x));
```

*V1 := 2*ChebyshevT(1, x)+ 10*ChebyshevT(3, x)+4*ChebyshevT(2, x)*

```
>Create({2^n,n=0..10,[11=1,12=3]}
,JacobiP(n,0,0,x));
```

*3*JacobiP(12, 0, 0, x)+JacobiP(11, 0, 0, x)+Sum(2^n*JacobiP(n, 0, 0, x), n = (0 .. 10))*

Функція ***Evaluate*** дозволяє обчислити значення утвореної оператором ***Create*** зваженої суми ортогональних поліномів у вигляді поліному відповідної змінної, або числове значення, якщо задане значення аргументу.

```
> Evaluate(V1);
```

$$40 x^3 + 8 x^2 - 28 x - 4$$

```
> Evaluate(V1,x=1);
```

$$16$$

```
> evalf(Evaluate(S,1));  (in Evaluate) infinite number of terms
```

Зауважимо, що у випадку нескінченої суми, команда ***Evaluate*** не обчислює значення суми, і видає про це відповідне повідомлення.

Команда ***ChangeBasis(***P, R1, R2,.. ,Rn), де P – поліном n змінних, R1 ,R2, Rn– ортогональні поліноми від змінних поліному P, дозволяє представити поліном P в базисі ортогональних поліномів R1,R2,….Rn.

```
> P1:=10*x^7+2*x^5+6;
```

$$P1 := 10 x^7 + 2 x^5 + 6$$

```
> ChangeBasis(P1,ChebyshevT(n,x));
```

$$6\, ChebyshevT(0, x) + \frac{5}{32} ChebyshevT(7, x) + \frac{215}{32} ChebyshevT(1, x) + \frac{39}{32} ChebyshevT(5, x) + \frac{125}{32} ChebyshevT(3, x)$$

```
> ChangeBasis(P1,JacobiP(n,0,0,x));
```

$$6\, JacobiP(0, 0, 0, x) + \frac{160}{429} JacobiP(7, 0, 0, x) + \frac{88}{21} JacobiP(1, 0, 0, x) + \frac{1888}{819} JacobiP(5, 0, 0, x) + \frac{508}{99} JacobiP(3, 0, 0, x)$$

```
> P2:=3*x^5*y^5+2*x^2*y+3*x+y+5;
```

$$P2 := 3\,x^5\,y^5 + 2\,x^2\,y + 3\,x + y + 5$$

```
> ChangeBasis(P2,ChebyshevT(n,x),ChebyshevT(m,y));
```

$$\frac{3}{16}\,ChebyshevT(5, x)\,ChebyshevT(1, y) + 3\,ChebyshevT(1, x)\,ChebyshevT(0, y) + \frac{15}{8}\,ChebyshevT(1, x)\,ChebyshevT(1, y) + \frac{15}{16}\,ChebyshevT(3, x)\,ChebyshevT(1, y) + ChebyshevT(2, x)\,ChebyshevT(1, y) + 5\,ChebyshevT(0, x)\,ChebyshevT(0, y) + 2\,ChebyshevT(0, x)\,ChebyshevT(1, y)$$

Функція ***Coefficients*** дозволяє обчислити коефіцієнт (множник) при ортогональному поліномі відповідного степеня.

```
> Coefficients(S,k);
```

$$\frac{1}{k!}$$

```
> Coefficients(V1,3);
```

$$10$$

Команда ***ApplyOperatop*** дозволяє застосувати диференціальний оператор з поліноміальними коефіцієнтами до функціонального ряду ортогональних поліномів.

```
> ss:=Create({[5=1]},HermiteH(n,x));
```

$$ss := HermiteH(5, x)$$

```
> ApplyOperator([x*dx^2, [dx,x]],ss);
```

$$40\,HermiteH(4, x) + 240\,HermiteH(2, x)$$

```
> Evaluate(%);
```

$$640\,x^4 - 960\,x^2$$

Цей приклад демонструє застосування диференціального оператора $x\dfrac{d^2}{dx^2}$ до поліному Ерміта п'ятого степеня та обчислення результату у вигляді поліному.

```
> S:=(Create({1/n!,n=1..infinity},HermiteH(n,x)));
```

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{HermiteH(n, x)}{n!} \right)$$

```
>S2:=SimplifyCoefficients(ApplyOperator ([(x^2+2*x+1)*dx,
[dx,x]],S),simplify);
```

$$11\,HermiteH(1,x)+6\,HermiteH(0,x)+\frac{17}{2}HermiteH(2,x)$$
$$+\left(\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{(n^2+7n+18)\,HermiteH(n,x)}{2\,\Gamma(n+1)}\right)\right)$$

Цей приклад демонструє застосування оператора $(x^2+2x+1)\dfrac{d}{dx}$ до ряду ортогональних поліномів Ерміта. З подальшим застосуванням до результату функції ***SimplifyCoefficients***, яка дозволяє виконати спрощення коефіцієнтів результуючого поліному. Останній параметр функції ***SimplifyCoefficients*** **–** ***simplify*** **–** вказує на те, що до коефіцієнтів поліному застосовується алгоритм приведення подібних та скорочення дробів. Окрім параметру ***simplify***, команда ***SimplifyCoefficient*** допускає використання параметрів ***expand, factor, normal***.

Функція ***Multiply(S1, S2)*** дозволяє знайти добуток скінченої суми ортогональних поліномів S1 та можливо нескінченого ряду ортогональних поліномів S2, і представити результат в базисі ортогональних поліномів функціонального ряду S2.

```
> P1:=10*x^7+2*x^5+6;
```

$$P1 := 10\,x^7+2\,x^5+6$$

```
> S1:=ChangeBasis(P1,ChebyshevT(n,x));
```

$$S1 := \frac{125}{32}ChebyshevT(3,x)+\frac{215}{32}ChebyshevT(1,x)+6\,ChebyshevT(0,x)$$
$$+\frac{39}{32}ChebyshevT(5,x)+\frac{5}{32}ChebyshevT(7,x)$$

```
> SimplifyCoefficients(Multiply(S1,S2),simplify);
```

$$\frac{136143}{4}HermiteH(1,x)+\frac{3427837}{320}HermiteH(5,x)$$
$$+\frac{51421}{4}HermiteH(0,x)+\frac{5849093}{4480}HermiteH(7,x)$$
$$+44289\,HermiteH(2,x)+\frac{1775141}{48}HermiteH(3,x)$$

$$+\frac{5919563}{1440}\mathit{HermiteH}(6,x)+\frac{725299}{32}\mathit{HermiteH}(4,x)$$
$$+\frac{18944581}{53760}\mathit{HermiteH}(8,x)+\frac{237425099}{2903040}\mathit{HermiteH}(9,x)$$
$$+\left(\sum_{n=10}^{\infty}\left(\frac{1}{128\,\Gamma(n+1)}((5n^9-70n^8+1074n^7-5052n^6\right.\right.$$
$$+37677n^5-22710n^4+380156n^3+676184n^2+1704272n$$
$$\left.\left.+1683296)\,\mathit{HermiteH}(n,x))\right)\right)$$

Команда ***PolynomialMultiply(p, S)*** дозволяє знайти добуток поліному p та функціонального ряду ортогональних поліномів S, і представити результат в термінах ортогональних поліномів S.

```
> ss:=Create({[5=1]},HermiteH(n,x));
```

$$ss := \mathit{HermiteH}(5,x)$$

```
> PolynomialMultiply(x^2+2*x+1,ss);
```

$$\frac{13}{2}\mathit{HermiteH}(5,x)+\frac{1}{4}\mathit{HermiteH}(7,x)+20\,\mathit{HermiteH}(3,x)$$
$$+\mathit{HermiteH}(6,x)+10\,\mathit{HermiteH}(4,x)$$

Функція ***Add(S1, S2, a, b)*** знаходить лінійну комбінацію функціональних рядів ортогональних поліномів S1, S2 з множниками a, b. Функціональні ряди S1,S2 мають бути записані по однаковим системам ортогональних поліномів.

```
> S:=(Create({1/n!,n=1..infinity},HermiteH(n,x)));
```

$$S := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathit{HermiteH}(n,x)}{n!}\right)$$

```
> R1:=Create({[1=2,2=3,5=6]},HermiteH(n,x));
```

$$R1 := 2\,\mathit{HermiteH}(1,x)+6\,\mathit{HermiteH}(5,x)+3\,\mathit{HermiteH}(2,x)$$

```
> Add(S,R1,2,3);
```

$$6\,\mathit{HermiteH}(1,x)+18\,\mathit{HermiteH}(5,x)+9\,\mathit{HermiteH}(2,x)$$
$$+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\,\mathit{HermiteH}(n,x)}{n!}\right)\right)$$

З іншими функціями пакету ***OrthogonalSeries*** можна ознайомитись використовуючи довідку.

Циліндричні функції

Важливим класом спеціальних функцій є циліндричні функції дійсного аргументу, або функції Бесселя, які визначаються, як лінійно незалежні розв'язки звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$U'' + \frac{1}{z}U' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)U = 0,$$

в якому z - комплексна змінна, ν - комплексний параметр.

Перший лінійно незалежний розв'язок цього звичайного диференціального рівняння (функція Бесселя першого роду, ν - го порядку) визначається у вигляді степеневого ряду : $J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}, |z| < \infty, |\arg z < \pi|$. Другий лінійно незалежний розв'язок (функція Бесселя другого роду , ν -го порядку) для нецілих ν визначається у вигляді $Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi$, а для цілих ν у вигляді $Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu}\right]$. Таким чином, загальний розв'язок диференціального рівняння (1) можна записати у вигляді $U_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z)$. В Maple:

```
>eq1_Cilindric:=diff(U(x),x$2)+1/x*diff(U(x),x)+(1-nu^2/x^2)*U(x)=0;
```

$$eq1\_Cilindric := \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{U}(x)\right) + \frac{\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\mathrm{U}(x) = 0$$

```
> dsolve(eq1_Cilindric);
```

$$\mathrm{U}(x) = \_C1\ \mathrm{BesselJ}(\nu, x) + \_C2\ \mathrm{BesselY}(\nu, x)$$

```
> series(BesselJ(n,x),x,10);
```

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2}\,x^{(5/2)}}{6\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2}\,x^{(9/2)}}{120\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{2}\,x^{(13/2)}}{5040\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2}\,x^{(17/2)}}{362880\sqrt{\pi}} + \mathrm{O}(x^{(19/2)})$$

```
> series(BesselY(1/2,x),x,10);
```

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{2}\,x^{(3/2)}}{2\sqrt{\pi}}-\frac{\sqrt{2}\,x^{(7/2)}}{24\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{2}\,x^{(11/2)}}{720\sqrt{\pi}}-\frac{\sqrt{2}\,x^{(15/2)}}{40320\sqrt{\pi}}+\mathrm{O}(x^{(19/2)})$$

Приклад демонструє знаходження розв'язку звичайного диференціального рівняння у вигляді лінійної комбінації функцій Бесселя першого та другого роду, та представлення функцій Бесселя порядку 0.5 у вигляді степеневого ряду, зберігаючи члени не вище x^{10}.

Система Maple містить вбудовані функції, що надають можливість знаходити нулі функцій Бесселя першого та другого роду довільного порядку

BesselJZeros(v, n), BesselJZeros(v, n1..n2), BesselYZeros(v, n), BesselYZeros(v, n1..n2).

Параметр *n* задає порядковий номер нуля функції Бесселя, параметри *n1, n2* задають нижню та верхню межу номерів нулів, параметр *v* задає порядок функції Бесселя.

```
> BesselJZeros(1/2, 1..10);
```

$$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi, 9\pi, 10\pi$$

```
> BesselJZeros(1/4, 1..10);
```

$$\mathrm{BesselJZeros}\left(\frac{1}{4}, 1\,..\,10\right)$$

```
> evalf(BesselJZeros(1/4, 1..10));
```

2.780887724, 5.906142699, 9.042383664, 12.18134153, 15.32136983, 18.46192725, 21.60278445, 24.74382780, 27.88499460, 31.02624748

```
> BesselYZeros(1/2, 1..10);
```

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}, \frac{19\pi}{2}$$

Другий клас циліндричних функцій – циліндричні функції уявного аргументу є лінійно-незалежними розв'язками звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$U''+\frac{1}{x}U'-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)U=0,\ 0<x<\infty$$

Останнє переходить у рівняння (1), якщо зробити заміну незалежної змінної $z=ix$. Один з лінійно незалежних розв'язків рівняння (2) може бути представлений у вигляді степеневого ряду $I_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)},\quad 0<x<\infty$. Ця функція називається функцією Бесселя уявного аргументу ν - го порядку першого роду. Другий лінійно незалежний розв'язок рівняння (2) – функцію Бесселя другого роду уявного аргументу ν - го порядку (функцію Макдональда) визначають для нецілих ν у вигляді $K_\nu(x) = \pi \dfrac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2\sin(\nu\pi)}$, $\nu \neq n$, для випадку цілих ν у вигляді $K_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2}\left[\left(\dfrac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - \left(\dfrac{\partial I_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (2) може бути записаний у вигляді $U_\nu(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$.

```
>eq2_Cilindric:=diff(U(x),x$2)+1/x*diff(U(x),x)-(1+nu^2/x^2)*U(x)=0;
```

$$eq2\_Cilindric := \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{U}(x)\right) + \frac{\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)}{x} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)\mathrm{U}(x) = 0$$

```
> dsolve(eq2_Cilindric);
```

$$\mathrm{U}(x) = \_C1\ \mathrm{BesselI}(\nu, x) + \_C2\ \mathrm{BesselK}(\nu, x)$$

```
> series(BesselI(1/2,x),x,8);
```

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2}\,x^{(5/2)}}{6\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2}\,x^{(9/2)}}{120\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{2}\,x^{(13/2)}}{5040\sqrt{\pi}} + \mathrm{O}(x^{(15/2)})$$

```
>series(BesselK(1/2,x),x,8);
```

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,x^{(3/2)}}{4} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,x^{(5/2)}}{12} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,x^{(7/2)}}{48} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,x^{(9/2)}}{240}$$
$$+ \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,x^{(11/2)}}{1440} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,x^{(13/2)}}{10080} + \mathrm{O}(x^{(15/2)})$$

Ейлерові інтеграли першого та другого роду

Інтеграли $B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ та $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ називають ейлеревими інтегралами першого та другого роду відповідно. Крім того, більш поширеною назвою цих функцій є Бета-функція та Гамма-функція.

Система Maple дозволяє звертатися до цих функцій для їх обчислення та застосування в різноманітних виразах

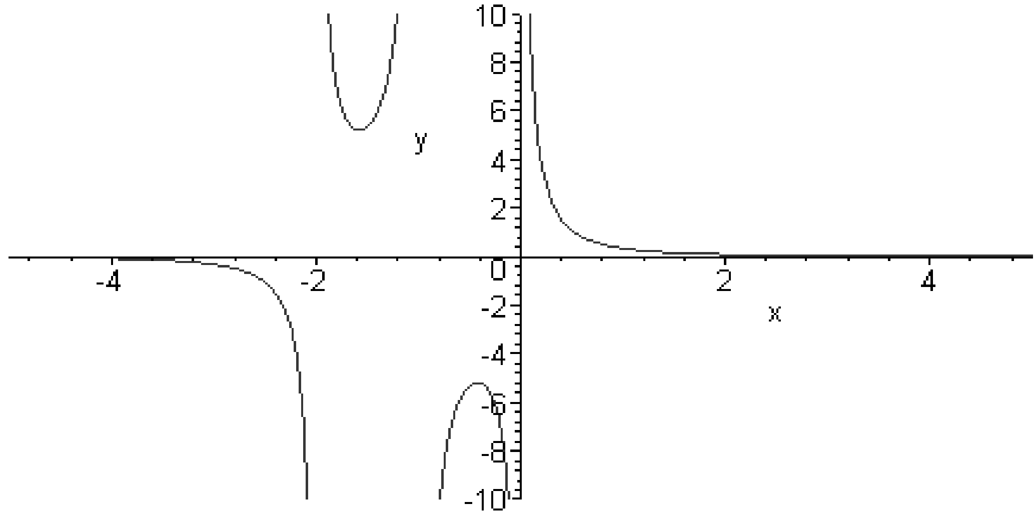
```
> Beta(2,5.2);
```

0.03101736973

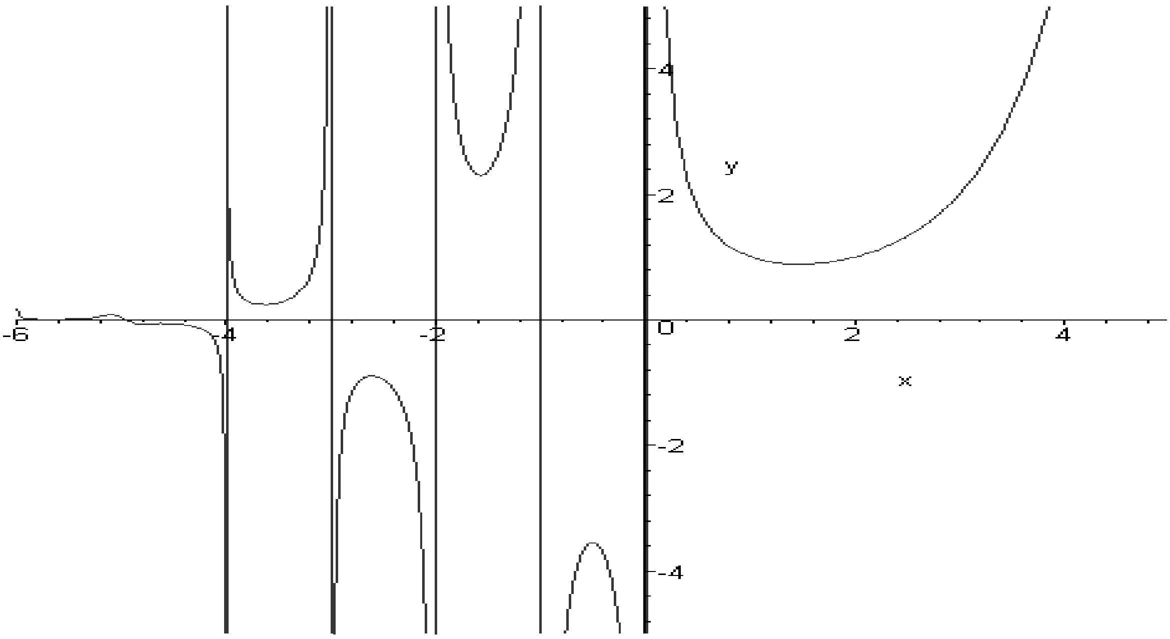
```
> GAMMA(3.2);
```

2.423965480

```
> plot(Beta(x,3),x=-5..5,y=-10..10,discont = true);
```



> **plot(GAMMA(x),x=-6..5,y=-5..5);**



> **convert(Beta(x,y),GAMMA);**

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(y+x)}$$

Останній приклад демонструє формулу, що виражає Бета-функцію через Гамма-функцію.

Інтегральний синус та косинус, інтеграл вірогідності

Інтегральним синусом та косинусом називають відповідно інтеграли:

$$Si(x)=\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt \qquad Ci(x)=-\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t}dt$$

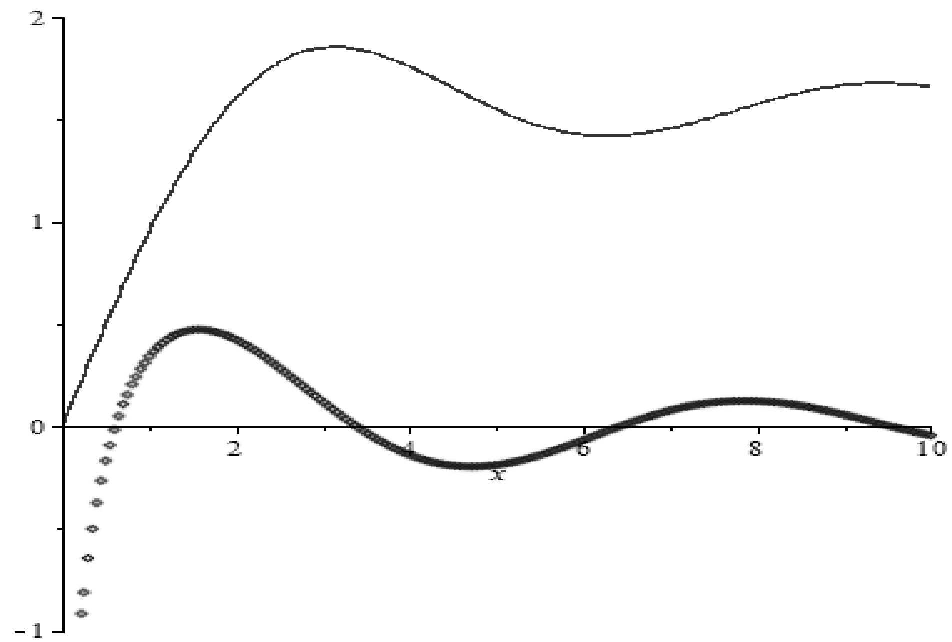
> **evalf(Si(Pi));**

$$1.851937052$$

> **evalf(Ci(Pi/2));**

$$0.4720006514$$

> **plot([Si(x),Ci(x)],x=0..10,color=[red,blue],style=[line,point]);**



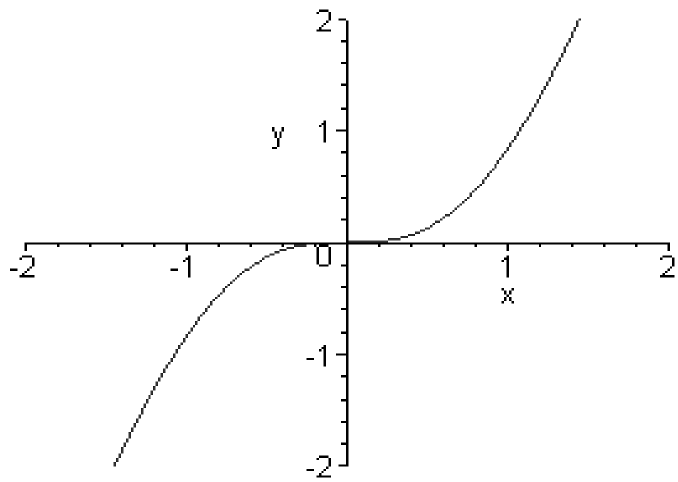
Інтегралом вірогідності в математиці називають функцію, яка при будь-якому комплексному значенні змінної z обчислюється за формулою $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

В системі Maple ця функція може бути викликана за допомогою імені erf(x).

> **erf(3.)+erf(0.25);**

$$1.276304300$$

> **plot(x^2*erf(x),x=-2..2,y=-2..2);**



> **series(erf(x),x=0,10);**

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}x-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}x^3+\frac{1}{5\sqrt{\pi}}x^5-\frac{1}{21\sqrt{\pi}}x^7+\frac{1}{108\sqrt{\pi}}x^9+O(x^{10})$$

> **diff(erf(x),x);**

$$\frac{2\,e^{(-x^2)}}{\sqrt{\pi}}$$

Сферичні функції Лежандра першого та другого роду

Узагальненням ортогональних поліномів Лежандра $LegandreP(n,x)$, що були розглянуті вище, є сферичні функції Лежандра першого та другого роду, які є двома лінійно незалежними розв'язками звичайного диференціального рівняння

$(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0$, ν-числовий параметр.

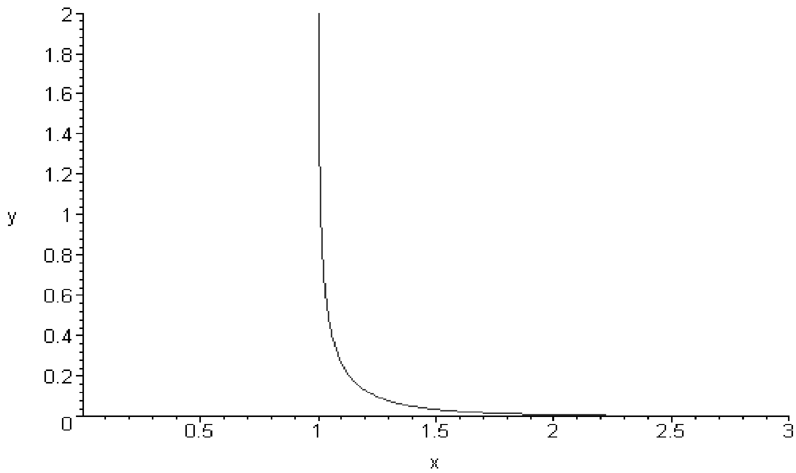
Загальний розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді $y(x)=c_1P_\nu(x)+c_2Q_\nu(x)$, де $P_\nu(x)$ та $Q_\nu(x)$ – сферичні функції Лежандра першого та другого роду.

В системі Maple сферичні функції Лежандра можна викликати за допомогою їх імен *LegandreP(ν,x)* та *LegandreQ(ν,x)*.

Імена сферичних функцій Лежандра можуть використовуватись у будь-яких виразах та операторах.

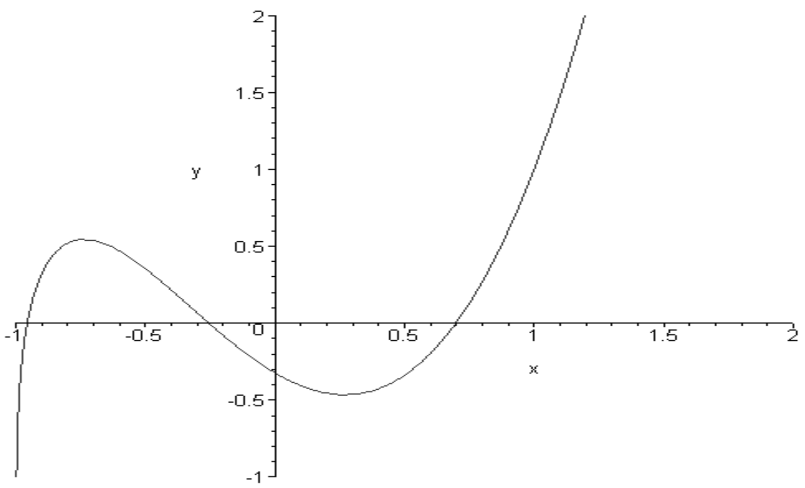
\> **evalf(LegendreQ(2.5,1.5));** 0.03621096718

\> **plot(LegendreQ(2.5,x),x=0..3,y=0..2);**



\> **evalf(LegendreP(2.5,1.5));** 4.177619139

\> **plot(LegendreP(2.5,x),x=-1..2,y=-1..2);**



Гіпергеометрична функція

Найбільш загальною трансцендентною функцією, за допомогою якої можна записати розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку вигляду $\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0$, де $\sigma(x),\ \tau(x),\ \lambda$ відповідно довільні поліноми не вище другого та першого ступенів та комплексний параметр.

Гіпергеометрична функція $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ може бути визначена, як обмежений розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$ та представлена у вигляді степеневого ряду $F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}$, де $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1).....(\alpha+n-1)$.

В системі Maple гіпергеометричну функцію можна викликати за допомогою її імені $hypergeom([\alpha,\beta],\ [\gamma],\ x)$ та використовувати її в будь-яких математичних виразах.

```
>eqhipergeom:=x*(x-1)*diff(U(x),x$2)+(2*x-
1.3)*diff(U(x),x)+0.25*U(x)=0;
```

$$eqhipergeom := x\,(x-1)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{U}(x)\right) + (2\,x - 1.3)\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{U}(x)\right) + 0.25\,\mathrm{U}(x) = 0$$

```
> F:=unapply(op(2,dsolve([eqhipergeom,U(0)=1])),x);
```

$$F := x \to \mathrm{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{13}{10}\right],x\right)$$

```
> evalf(F(1));
```

$$1.980805992$$

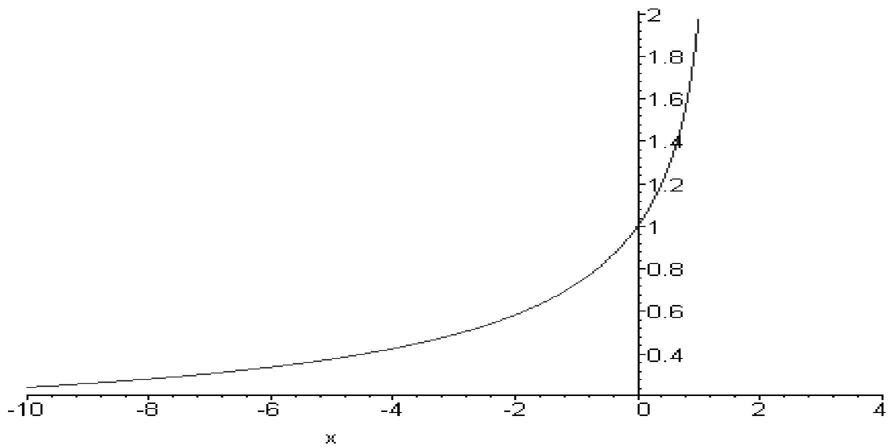
Приклад демонструє знаходження розв'язку звичайного диференціального рівняння другого порядку, його запис за допомогою гіпергеометричної функції та обчислення розв'язку в точці.

> **series(hypergeom([a,b],[c],x),x=0);**

$$1+\frac{a\,b}{c}\,x+\frac{a\,b\,(a+1)\,(b+1)}{2\,c\,(c+1)}\,x^2+\frac{a\,b\,(a+1)\,(b+1)\,(a+2)\,(b+2)}{6\,c\,(c+1)\,(c+2)}\,x^3+$$
$$\frac{a\,b\,(a+1)\,(b+1)\,(a+2)\,(b+2)\,(a+3)\,(b+3)}{24\,c\,(c+1)\,(c+2)\,(c+3)}\,x^4+$$
$$\frac{a\,b\,(a+1)\,(b+1)\,(a+2)\,(b+2)\,(a+3)\,(b+3)\,(a+4)\,(b+4)}{120\,c\,(c+1)\,(c+2)\,(c+3)\,(c+4)}\,x^5+\mathrm{O}(x^6)$$

Приклад демонструє відрізок степеневого ряду в який розкладається гіпергеометрична функція.

> **plot(hypergeom([1,2],[5],x),x=-10..4);**



Приклад демонструє побудову графіку гіпергеометричної функції.

> **convert(LegendreP(2,x),hypergeom);** $\quad \mathrm{hypergeom}\left([-2,3],[1],\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)$

> **convert(BesselJ(3,x),hypergeom);** $\quad \frac{1}{48}\,x^3\,\mathrm{hypergeom}\left([\ ],[4],-\frac{x^2}{4}\right)$

Приклад демонструє можливості команди ***convert*** системи Maple по перетворенню різних спеціальних функцій через гіпергеометричну функцію.

Лекція 9

В системі Maple існує декілька пакетів, призначених для розв'язання задач лінійної алгебри. Одним з них є потужний пакет ***LinearAlgebra***, який нараховує більше 100 функцій. Підключення пакету здійснюється командою

> **with(LinearAlgebra);**

[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace, CompanionMatrix, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation, CrossProduct, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct, EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape, GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix, HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix, JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUDecomposition, LeastSquares, LinearSolve, LyapunovSolve, Map, Map2, MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower, MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize, NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, QRDecomposition, RandomMatrix, RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, StronglyConnectedBlocks, SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, SylvesterSolve, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm, UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip]

Створення об’єктів Matrix та Vector

Усі функції пакету застосовуються до об’єктів типу Matrix та Vector. Матриці та вектори в ***LinearAlgebra*** створюють за допомогою відповідно команд Matrix() та Vector(), або за допомогою коротких позначень.

Короткі позначення для матриць та векторів.

Для того, щоб задати матрицю або вектор, можна використовувати трикутні дужки “<” і “>”. При цьому запис вигляду <a,b,c> означає, що структура даних організовується за рядками, а <a|b|c> — за стовпчиками. Наприклад,

```
> <1,2>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> <1|2|3>;
```

$$[1, 2, 3]$$

```
> <<1,2,3>|<4,5,6>>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> <<1|2|3>,<4|5|6>>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Функція Matrix()

Команда Matrix() має такий синтаксис:

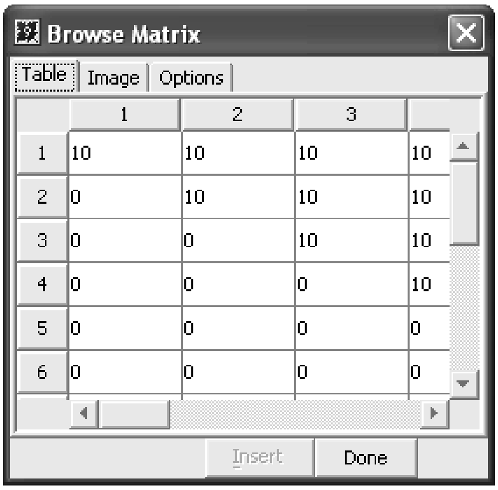
```
> Matrix(r,c,init,ro,sym,sc,sh,st,o,dt,f,a);
```

Тут r,c — розмірність матриці за рядками та стовпцями. У випадку квадратної матриці параметр c можна опустити. За замовчуванням, Maple повністю виводить на екран лише матриці, розміри яких не більші 10x10. Більші матриці виводяться у наступному вигляді:

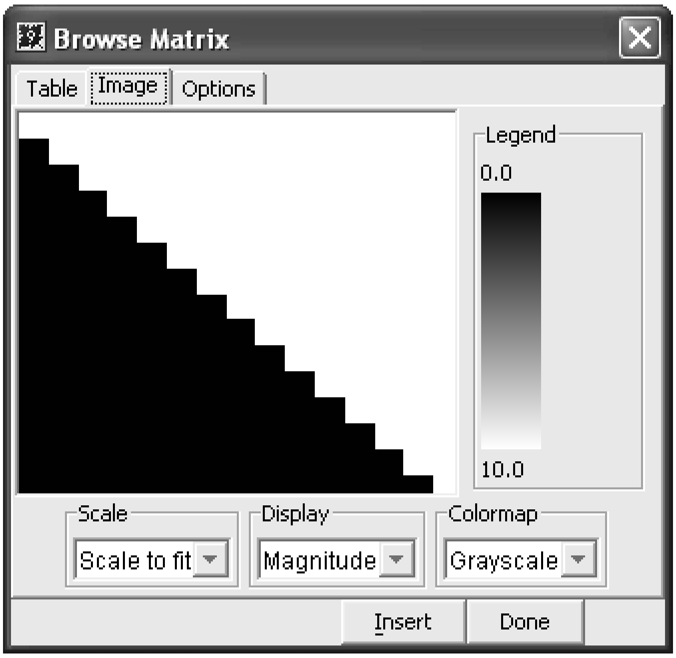
```
> Matrix(15,15,10,shape=triangular[upper]);
```

$$\begin{bmatrix} \textit{15 x 15 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: triangular[upper]} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}$$

Для їх перегляду потрібно двічі клацнути мишкою на отриманому об'єкті. В результаті відкриється вікно Browse Matrix, за допомогою якого можна переглянути елементи матриці (на вкладці Table).



так і її структуру (на вкладці Image).



Максимальні розміри матриць, які безпосередньо виводяться на екран, можна змінити за допомогою команди ***interface(rtablesize = MaxValue)***

Елементи матриці можна задати за допомогою параметра ***init***. Якщо його опущено, матриця заповнюється нулями. Наприклад

```
> Matrix(2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(2,3);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Параметр ***init*** можна задати кількома способами. Це може бути процедура або функція, яка кожній парі індексів ставить у відповідність деякий об’єкт типу algebraic; об’єкт типу table, array, Array або Matrix; множина рівностей вигляду ***(i, j)=value***, за допомогою яких можна явно вказати елементи матриці з відповідними індексами; об’єкт Vector для діагональної матриці; список list елементів або списків list, за допомогою яких перераховано елементи матриці. В останньому випадку порядок перерахунку задається параметром ***sc***.

Розглянемо приклади.

```
> mA:=Matrix(2,2,(i,j)->i+2*j);
```

$$mA := \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(3,3,mA);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(3,3,{(2,3)=10,(3,2)=100});
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}$$

Параметр ***ro*** — це рівність вигляду ***readonly=true*** (або ***false***), яка забороняє (або дозволяє) зміну елементів матриці.

Параметр sym вигляду symbol=name задає символ для позначення елементів матриці.

```
> mB:=Matrix(2,2,readonly=true,symbol=b);
```

$$mB := \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$$

```
> mB[1,1]:=0;
```

Error, cannot assign to a read-only Matrix

Параметр ***sc*** використовується, коли ***init*** є списком. Він має вигляд ***scan=name*** або ***scan=list***. Значеннями параметра ***scan*** можуть бути службові слова: ***rectangular, triangular[upper], triangular[lower], Hessenberg[upper], Hessenberg[lower], band[m,n], band[m], diagonal***. Додатково у списку scan може задаватись порядок заповнення матриці: rows — за рядками, columns — за стовпцями, diagonals — за діагоналями.

Параметр ***scan=rectangular*** означає, що значення списку списків init заповнюють матрицю як прямокутну, починаючи з верхнього лівого елемента. Заповнення може відбуватися за рядками (за замовчуванням) або стовпцями. Якщо розміри матриці більші за прямокутник, заданий параметром init, залишкові елементи заповнюються нулями.

```
>Matrix(2,2,[[1,2],[3,4]],scan
=[rectangular,rows]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>Matrix(3,4,[[1,2],[3,4]],scan
=[rectangular,columns]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Параметр ***scan=triangular[upper]*** означає, що значення списку списків init заповнюють матрицю як верхню трикутну, починаючи з верхнього лівого елемента. При цьому перший елемент кожного списку всередині init лежить на діагоналі. Заповнення може відбуватися за рядками (за замовчуванням) або стовпцями. Якщо матриця не вичерпується параметром init, залишкові елементи заповнюються нулями. Параметр scan=triangular[lower] працює подібно.

```
> Matrix(3,3,[[1,2,3],[4,5],[6]],
scan=[triangular[upper],rows]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(3,3,[[1],[2,3],[4,5,6]],
scan=[triangular[upper],columns]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(3,3,[[1],[2,3],[4,5,6]],
scan=[triangular[lower],rows]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix(3,3,[[1,2,3],[4,5],[6]],
scan=[triangular[lower],columns]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Параметр ***scan=Hessenberg[upper]*** означає, що значення списку списків init заповнюють матрицю як гесенбергову, тобто як верхню трикутну з піддіагоналлю. При цьому останній елемент кожного списку всередині init лежить на піддіагоналі. Заповнення може відбуватися за рядками (за замовчуванням) або стовпцями. Якщо матриця не вичерпується параметром init, залишкові елементи заповнюються нулями. Параметр ***scan=Hessenberg[lower]*** працює подібно.

```
>Matrix(4,4,[[1,2,3,4],[5,6,7,8],[
9,10,11],[12,13]],
scan=[Hessenberg[upper],rows]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

```
>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5],[6,7,8,
9],[10,11,12,13]],
scan=[Hessenberg[upper],columns]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

```
>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5],[6,7,8,9],[
10,11,12,13]],
scan=[Hessenberg[lower],rows]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

```
>Matrix(4,4,[[1,2,3,4],[5,6,7,8],[9,10
,11],[12,13]],
scan=[Hessenberg[lower],columns]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 11 & 13 \end{bmatrix}$$

Параметр ***scan=band[m,n]*** означає, що значення списку списків init заповнюють матрицю як (m+n+1)-діагональну. При цьому під головною діагоналлю розташовано m піддіагоналей, а над нею – n наддіагоналей. За замовчуванням заповнення здійснюється за діагоналями, починаючи з найнижчої. Також заповнення може відбуватися за рядками або стовпцями. Якщо матриця не вичерпується параметром init, залишкові елементи заповнюються нулями. Параметр ***scan=band[m]*** еквівалентний ***scan=band[m,m]***, а ***scan=diagonal*** — ***scan=band[0]***.

```
>Matrix(4,4,[[1,2,3],[4,5,6,7],[8,
9,10],[11,12]],
scan=[band[1,2],diagonals]);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 11 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

```
>Matrix(4,4,[[1,2,3],[4,5,6,7],[8,
9,10],[11,12]],
scan=[band[1,2],rows]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

```
>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5],[6,7,8,
9],[10,11,12]],
scan=[band[1,2],columns]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 5 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

```
>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5],[6,7,8,9],[10
,11,12]], scan=[band[2,1],diagonals]);
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

```
>
Matrix(4,4,[[1,2,3],[4,5,6,7],[8,9,10]],
scan=band[1]);
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Функція Vector()

Команда Vector() має такий синтаксис: Vector[o](d,init,ro,sym,sh,st,dt,f,a,o)

Тут [o] — це параметр вигляду [row] або [column], який задає відповідно вектор-рядок або вектор-стовпчик. Орієнтацію вектору також можна задати за допомогою параметра o, який записується orientation=row або orientation=column.

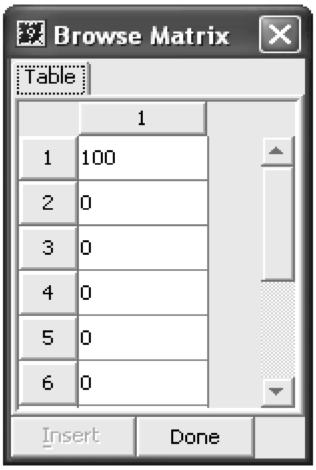
Зауважимо, що у випадку наявності обох цих параметрів, перевага надається [o]. За замовчуванням використовується орієнтація у стовпчик.

Параметр d — це невід'ємне ціле число, яке задає вимір вектору. За замовчуванням Maple безпосередньо виводить лише вектори, вимір яких не більше 10.

```
> Vector(11,shape=scalar[1,100]);
```

$$\begin{bmatrix} \textit{11 Vector[column]} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: empty} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}$$

Для перегляду елементів великих векторів потрібно викликати вікно Browse Matrix:



Решта параметрів подібні до відповідних у конструкторі Matrix(). Тому наведемо лише відмінності. Зокрема, init не може бути матрицею або двомірним списком, список списків зчитується як один рядок. Параметр sh вигляду shape=name або shape=list допускає такі вбудовані індексні функції: constant, scalar, unit, zero.

Розглянемо приклади.

```
> Vector([1,2]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> Vector[row](5,{2=10,4=100});
```

$[0, 10, 0, 100, 0]$

```
> Vector[row](5,{2=10,4=100},fill=-1);
```

$[-1, 10, -1, 100, -1]$

```
> Vector[row](6,shape=constant[2]);
```

$[2, 2, 2, 2, 2, 2]$

```
> Vector[row](5,shape=unit[3]);
```

$[0, 0, 1, 0, 0]$

```
> Vector[row](5,shape=scalar[2,10]);
```

$[0, 10, 0, 0, 0]$

```
>vZ:=Vector(2,shape=zero,readonly=true);
```

$$vZ := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> vZ[1]:=1;
```

```
Error, cannot assign to a read-only Vector
```

```
> Vector[row](6,i->x^i);
```

$[x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6]$

```
> Vector(2,symbol=u);
```

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Робота з елементами матриць та векторів

Для виділення елементів матриць та векторів використовують команди відповідно M[L1,L2] та V[L]. Тут M — матриця, V — вектор, L, L1, L2 — цілі індекси або списки цілих індексів. При цьому допускаються діапазони індексів вигляду i..j, від'ємні індекси (-1 означає останній індекс, -2 — передостанній і т.д.).

Якщо L — один індекс, V[L] повертає відповідну координату вектору як число. Якщо L — список, результатом V[L] буде вектор, який складається з відповідних координат вектору V.

Для випадку матриці, якщо L1, L2 – цілі числа, результатом буде (L1,L2) – елемент матриці. Якщо один з параметрів число, а інший – список, отримаємо вектор. Якщо обидва параметри є списками, то результат – матриця.

Для роботи з частиною матриці можна використовувати функцію ***SubMatrix(A,r,c)***, де А – ім’я матриці, r,c – списки цілих індексів номерів рядків та стовпчиків.

Розглянемо приклади:

$A := Matrix([[2, 3, 5, 6, 8], [3, 5, 8, 9, 12], [7, 2, 9, 2, 1], [3, 5, 8, 0, 4], [3, 5, 7, 3, 2]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 9 & 12 \\ 7 & 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

> $A1 := A[[2..4, 5], [1, 3]];$

$$A1 := \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 9 \\ 3 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

> $SubMatrix(A, [1, 3, 5], [1..5]);$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Функції ***Row(A,L), Column(A,L), Diagonal(A,L)*** дозволяють виділити з матриці А відповідні рядки або стовпчики, які задаються параметром L, який представляє собою список цілих індексів. Результатом буде список векторів рядків матриці, векторів стовпчиків матриці, або список діагоналей у формі стовпчиків.

> $A;$ $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 9 & 12 \\ 7 & 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$Row(A, [3..5]);$ $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$Column(A, [1..3]);$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$

$C := Diagonal(A, [-1, 0, 1]);$ $\quad C := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$C[2];$ $\quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Функції ***DeleteColumn(A,L), DeleteRow(A,L)*** – видаляють з матриці A рядки або стовпчики, які визначає параметр L – список цілих чисел.

Побудова стандартних матриць

Пакет LinearAlgebra надає низку функцій для побудови матриць базових форм, а саме: BandMatrix(), ConstantMatrix(), ConstantVector(), DiagonalMatrix(), IdentityMatrix(), JordanBlockMatrix(), ScalarMatrix(), ScalarVector(), UnitVector(), ZeroMatrix(), ZeroVector().

Арифметика матриць та векторів

Множення матриць та векторів

Над матрицями та векторами можна виконувати операцію некомутативного множення. У Maple вона задається символом «.» Нагадаємо, що необхідною умовою при такому множенні двох об'єктів (матриць або векторів) є рівність кількості стовпчиків першого об'єкта і рядків другого. Для того, щоб відрізнити оператор «.» від десяткової крапки, прийнято обрамляти його символами пробілу.

Для некомутативного множення в пакеті LinearAlgebra наявні ще декілька функцій. Це:

`>MatrixMatrixMultiply(A,B,ip) -` для множення матриці A на матрицю B,

`>MatrixVectorMultiply(A,U)–` матриці A на вектор U,

>VectorMatrixMultiply(V,A,outputoptions=list)— вектору V на матрицю A,

>MatrixScalarMultiply(A,s,ip)— скаляра s на матрицю **A**,

>VectorScalarMultiply(V,s,ip)— скаляра s на вектор V,

>ScalarMultiply(A,s,ip)— скаляра s на матрицю або вектор A,

>OuterProductMatrix(U,V,cpt)— вектор-стовпчика U на вектор-рядок V.

> $U := \langle 2, 4, 6, 9, 3\rangle;\quad U := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\qquad V := \langle a, b, c, d\rangle;\quad V := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

$OuterProductMatrix(U, V);\qquad \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c & 2d \\ 4a & 4b & 4c & 4d \\ 6a & 6b & 6c & 6d \\ 9a & 9b & 9c & 9d \\ 3a & 3b & 3c & 3d \end{bmatrix}$

Крім того, є функція Multiply(), яка узагальнює всі перелічені випадки. Її синтаксис ***Multiply(A,B,ip)***.

Векторний добуток

Для обчислення векторного добутку тривимірних векторів пакет ***LinearAlgebra*** пропонує функцію ***CrossProduct()***. Її синтаксис ***CrossProduct(U,V)***.

Тут U, V — тривимірні вектори. Якщо вони обидва є вектор-рядками, таким же буде і результат, інакше результат — це вектор-стовпчик.

Аналогом функції ***CrossProduct()*** є операція &x, яка також доступна в пакеті LinearAlgebra.

Розглянемо приклади.

```
> vV:=Vector[row]([1,2,3]);
```

$$vV := [1, 2, 3]$$

```
> vU:=Vector[row]([2,4,6]);
```

$$vU := [2, 4, 6]$$

```
> CrossProduct(vV,vU);
```

$$[0, 0, 0]$$

```
> vW:=Vector([3,-1,5]);
```

$$vW := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> CrossProduct(vV,vW);
```

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

```
> vV &x vW;
```

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Норма вектора

В пакеті ***LinearAlgebra*** є функція ***VectorNorm()***, за допомогою якої можна обчислити p-норму вектора. Нагадаємо, що p-норма є визначеною для значень p від одиниці до нескінченності. Функція має наступний синтаксис: ***VectorNorm(V,p,conj).***

Тут V — вектор, p визначає норму. Maple не забороняє використовувати значення p між 0 і 1, хоча в цьому випадку відбувається обчислення не p-норми, а p-відстані від вектора до початку координат.

Випадок p=2 має синоніми Frobenius і Euclidean.

Випадок $p = \infty$ задається константою infinity. Нескінченність-норма обчислюється також, якщо значення p опущено.

Аналогічно до ***VectorNorm()*** працює функція ***Norm().***

Розглянемо приклади.

```
> v_a:=Vector[row]([x,y]);
```
$$v\_a := [x, y]$$

```
> VectorNorm(v_a,2);
```
$$\sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

```
> VectorNorm(v_a,Frobenius);
```
$$\sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

```
> VectorNorm(v_a,Euclidean);
```
$$\sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

```
>
VectorNorm(v_a,2,conjugate=false);
```
$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

```
> VectorNorm(v_a,10);
```
$$\left(|x|^{10} + |y|^{10}\right)^{(1/10)}$$

```
> VectorNorm(v_a,infinity);
```
$$max(|x|, |y|)$$

```
> VectorNorm(v_a);
```
$$max(|x|, |y|)$$

```
> Norm(v_a,infinity);
```
$$max(|x|, |y|)$$

```
> VectorNorm(Vector([1,-2+I,I,5,8-I]),0.25);
```
$$6.403248671$$

Операція транспонування

Пакет ***LinearAlgebra*** дозволяє швидко знайти транспоновану матрицю за допомогою функції ***Transpose()***. Синтаксис виклику – Transpose*(A,ip,outputoptions=list),* де A – матриця, яку потрібно транспонувати.

```
> mA:=Matrix([[1,3,5],[2,4,6]]);
```
$$mA := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Transpose(mA);
```
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Комплексно спряжене транспонування

Для виконання цієї операції використовують функцію ***HermitianTranspose()***, у вигляді HermitianTranspose(A,ip,outputoptions=list), де A – матриця, яку потрібно транспонувати.

```
> mC:=<<1+I|2+10*I>,<3|4-100*I>>;
```

$$mC := \begin{bmatrix} 1+I & 2+10\,I \\ 3 & 4-100\,I \end{bmatrix}$$

```
> HermitianTranspose(mC,inplace=true):
> mC;
```

$$\begin{bmatrix} 1-I & 3 \\ 2-10\,I & 4+100\,I \end{bmatrix}$$

Визначник матриці

Для знаходження визначника квадратної матриці призначена функція ***Determinant().*** Її синтаксис `Determinant(A, method=value)`, де A – матриця, а другий параметр задає метод обчислення визначника. Не вдаючись у деталі, зауважимо, що, наприклад, метод integer призначений для обчислення визначника цілочисельної матриці, rational – матриці з раціональними елементами, float видасть результат у дійсній формі, а modular[m] обчислює визначник за модулем числа m.

Розглянемо приклади.

```
> mA:=Matrix([[1,1/2,1/3],[1/4,0,1],[3,1/7,1/13]]);
```

$$mA := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 3 & \frac{1}{7} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(mA);
```

$$\frac{2969}{2184}$$

```
> Determinant(mA,method=float);
```

$$1.359432235$$

```
> mB:=<<10|3>,<-2|5>>;
```

$$mB := \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(mB);
```

$$56$$

```
> Determinant(mB,method=modular[5]);
```

$$1$$

Мінори

У пакеті ***LinearAlgebra*** є також функція ***Minor()*** для обчислення мінорів матриці. Її синтаксис

```
Minor(A,r,c,output=value,method=value,outputoptions=list).
```

Ця функція для заданої матриці A вилучає r-ий рядок та c-ий стовпчик, і, в залежності від значення matrix чи determinant параметра output, повертає відповідно матрицю чи значення мінору.

Розглянемо приклади

```
> mA:=Matrix([[5,1,2],[-3,9,2],[1,-1,7]]);
```

$$mA := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> Minor(mA,2,2,output=matrix);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> Minor(mA,2,2,output=determinant);
```

$$33$$

```
>Minor(mA,2,2,output=determinant,method=modul
ar[3]);
```

$$0$$

Ранг матриці

Для обчислення рангу матриці M призначена функція `Rank(M);`

Наприклад,

```
> mA:=Matrix(3,[1,2,3],scan=diagonal);
```

$$mA := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(mA);
```

$$3$$

```
> mB:=Matrix(3,fill=10);
```

$$mB := \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(mB);
```

$$1$$

```
> mB[1,1]:=100;
```

$$mB_{1,1} := 100$$

```
> Rank(mB);
```

$$2$$

Обернена матриця

Для знаходження оберненої матриці в пакеті ***LinearAlgebra*** передбачено потужну функцію ***MatrixInverse***. Зауважимо лише, що її параметрами є матриця, для якої потрібно знайти обернену, а також метод пошуку, його опції, список властивостей матриці результату та ін. Детальніше про це можна прочитати у довідці системи.

За замовчанням, якщо матриця A є квадратною та невиродженою, шукається її обернена A^{-1}. Якщо ж матриця прямокутна, або задано метод pseudo, шукається так звана інверсна матриця, тобто матриця X, яка задовольняє рівностям AXA=A і XAX=X, при цьому матриці AX і XA повинні бути ермітовими.

Щодо допустимих методів, то для цілочисельної матриці доцільно використовувати метод integer, для раціональної – univar, для трикутної – subs.

Розглянемо приклади

$B := Matrix([[a, b, c], [c, d, e]]);$

$$B := \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & d & e \end{bmatrix}$$

$B1 := B([1, 2], [1, 2]);$

$$B1 := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$MatrixInverse(B1); \quad \begin{bmatrix} \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{bmatrix}$$

$$MatrixInverse(B);$$

$$\Bigg[\bigg[\frac{a\,d^2+a\,e^2-b\,c\,d-c^2\,e}{a^2\,d^2+a^2\,e^2-2\,a\,b\,c\,d-2\,a\,c^2\,e+b^2\,c^2+b^2\,e^2-2\,b\,c\,d\,e+c^4+c^2\,d^2},$$
$$-\frac{a\,b\,d+a\,c\,e-b^2\,c-c^3}{a^2\,d^2+a^2\,e^2-2\,a\,b\,c\,d-2\,a\,c^2\,e+b^2\,c^2+b^2\,e^2-2\,b\,c\,d\,e+c^4+c^2\,d^2}\bigg],$$
$$\bigg[-\frac{a\,c\,d-b\,c^2-b\,e^2+c\,d\,e}{a^2\,d^2+a^2\,e^2-2\,a\,b\,c\,d-2\,a\,c^2\,e+b^2\,c^2+b^2\,e^2-2\,b\,c\,d\,e+c^4+c^2\,d^2},$$
$$\frac{a^2\,d-a\,b\,c-b\,c\,e+c^2\,d}{a^2\,d^2+a^2\,e^2-2\,a\,b\,c\,d-2\,a\,c^2\,e+b^2\,c^2+b^2\,e^2-2\,b\,c\,d\,e+c^4+c^2\,d^2}\bigg],$$
$$\bigg[-\frac{a\,c\,e+b\,d\,e-c^3-c\,d^2}{a^2\,d^2+a^2\,e^2-2\,a\,b\,c\,d-2\,a\,c^2\,e+b^2\,c^2+b^2\,e^2-2\,b\,c\,d\,e+c^4+c^2\,d^2},$$
$$\frac{a^2\,e-a\,c^2+b^2\,e-b\,c\,d}{a^2\,d^2+a^2\,e^2-2\,a\,b\,c\,d-2\,a\,c^2\,e+b^2\,c^2+b^2\,e^2-2\,b\,c\,d\,e+c^4+c^2\,d^2}\bigg]\Bigg]$$

```
> MatrixInverse(%);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{bmatrix}$$

```
> MatrixInverse(%);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{a\,d-b\,c} & -\frac{b}{a\,d-b\,c} \\ -\frac{c}{a\,d-b\,c} & \frac{a}{a\,d-b\,c} \end{bmatrix}$$

```
>mA:=Matrix([[1,2,3,4],[2,0,3,0],
[3,0,0,1],[4,1,0,0]]);
```

$$mA := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> mAinv:=MatrixInverse(mA,
method=integer);
```

$$mAinv := \begin{bmatrix} \frac{-1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{-4}{21} & \frac{-16}{21} & \frac{13}{21} \\ \frac{2}{63} & \frac{19}{63} & \frac{-8}{63} & \frac{-4}{63} \\ \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \end{bmatrix}$$

```
> mA.mAinv;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>mB:=Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[5,7,
9]]);
```

$$mB := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixInverse(mB);
```

Error, (in MatrixInverse) singular matrix

```
>mX:=MatrixInverse(mB,method=pse
udo);
```

$$mX := \begin{bmatrix} \frac{-7}{9} & \frac{11}{18} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{-7}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

```
> mB.mX.mB=mB;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

```
> mX.mB.mX=mX;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{-7}{9} & \frac{11}{18} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{-7}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{9} & \frac{11}{18} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & \frac{-7}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

```
> mB.mX;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
> mX.mB;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

```
>mC:=Matrix([[1,10,100],[0,2,200
0],[0,0,3]]);
```

$$mC := \begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 0 & 2 & 2000 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
>mCinv:=MatrixInverse(mC,method=
subs);
```

$$mCinv := \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3300 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1000}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

```
> mC.mCinv;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Перевірка властивостей матриць

В пакеті ***LinearAlgebra*** існує декілька функцій, які дозволяють здійснювати перевірку властивостей матриці:

IsDefinite(A,q) – перевірка матриці А на знаковизначеність;

IsOrthogonal(A, M) – перевірка матриці А на ортогональність;

Issimilar(A,B) – перевірка подібності матриці А та В.

Функції від квадратних матриць

Якщо f(x) — аналітична функція, має зміст вираз f(A), де A – квадратна матриця. Під f(A) розуміють підстановку A в степеневий ряд функції f. Пакет ***LinearAlgebra*** містить функцію ***MatrixFunction()***, яка виконує цю процедуру. Крім того, є дві часткових форми цієї функції – ***MatrixPower()*** для обчислення степеневої функції від матриці, та ***MatrixExponential()*** – для обчислення e^A. Синтаксис цих функцій:

```
MatrixFunction(A,F,x,outputoptions=list)
MatrixPower(A,n,outputoptions=list)
MatrixExponential(A,outputoptions=list)
```

Тут A — квадратна матриця, F — вираз, який задає функцію f, x позначає аргумент функції F, n — степінь, до якого потрібно піднести матрицю A.

Розглянемо приклади.

```
> mA:=Matrix([[-5,-2],[21,8]]);
```

$$mA := \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixFunction(mA,ln(x),x);
```

$$\begin{bmatrix} 7\ln(1) - 6\ln(2) & -2\ln(2) + 2\ln(1) \\ 21\ln(2) - 21\ln(1) & -6\ln(1) + 7\ln(2) \end{bmatrix}$$

```
> MatrixFunction(mA,f(x),x);
```

$$\begin{bmatrix} 7f(1) - 6f(2) & -2f(2) + 2f(1) \\ 21f(2) - 21f(1) & -6f(1) + 7f(2) \end{bmatrix}$$

```
> MatrixFunction(mA,x^2,x);
```

$$\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}^2$$

```
> %;
```

$$\begin{bmatrix} -17 & -6 \\ 63 & 22 \end{bmatrix}$$

```
> mA . mA;
```

$$\begin{bmatrix} -17 & -6 \\ 63 & 22 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixPower(mA,10);
```

$$\begin{bmatrix} -6137 & -2046 \\ 21483 & 7162 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixFunction(mA,x^10,x);
```

$$\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}^{10}$$

```
> %;
```

$$\begin{bmatrix} -6137 & -2046 \\ 21483 & 7162 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixFunction(mA,exp(x),x);
```

$$\begin{bmatrix} 7\mathbf{e} - 6\mathbf{e}^2 & -2\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e} \\ 21\mathbf{e}^2 - 21\mathbf{e} & -6\mathbf{e} + 7\mathbf{e}^2 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixExponential(mA);
```

$$\begin{bmatrix} 7e-6e^2 & -2e^2+2e \\ 21e^2-21e & -6e+7e^2 \end{bmatrix}$$

Ортогоналізація системи векторів

Якщо розглядати евклідовий (або унітарний) лінійний простір, породжений деякою системою векторів, природно ставити задачу опису цього простору в термінах ортонормованої або хоча б ортогональної системи векторів. Процедуру переходу від системи довільних твірних векторів до ортогональної бази простору в алгебрі називають ортогоналізацією цієї системи. Відомо алгоритм Грама-Шмідта, який дозволяє ортогоналізувати задану систему векторів. В пакеті ***LinearAlgebra*** цей алгоритм реалізовано за допомогою функції ***GramSchmidt()***. Її синтаксис – GramSchmidt(V,conjugate=value,normalized=value,outputoptions=list), де V — список векторів або множина векторів, які породжують лінійний простір. Всі вектори у V повинні мати однакові розмірність та орієнтацію.

Якщо V — список, результат теж повертається у вигляді списку, інакше — у вигляді множини векторів ортогональної бази.

Кількість векторів результату може бути меншою за вхідну. Таке трапляється у випадку лінійної залежності вхідних векторів.

Якщо ***conjugate=false***, припускається, що заданий простір евклідовий, тобто в обчисленнях використовується дійсний скалярний добуток. За замовчуванням використовується ***conjugate=true***, і у цьому випадку припускається унітарність простору, тобто використовується комплексний скалярний добуток.

Якщо вказано ***normalized=true*** (за замовчуванням значення цього параметра false) результатом буде ортонормована база.

Наприклад,

```
> vA1:=Vector[row]([1,0,-1,2]);
```

$$vA1 := [1, 0, -1, 2]$$

```
> vA2:=Vector[row]([-1,-2,1,0]);
```

$$vA2 := [-1, -2, 1, 0]$$

```
> vA3:=Vector[row]([2,2,-2,2]);
```

$$vA3 := [2, 2, -2, 2]$$

```
> GramSchmidt([vA1,vA2,vA3]);
```

$$\left[[1, 0, -1, 2], \left[\frac{-2}{3}, -2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \right]$$

```
>ortA:=GramSchmidt({vA1,vA2,vA3},normalized=true);
```

$$ortA := \left\{ \left[\frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} \right], \left[-\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, 0 \right] \right\}$$

Типові задачі лінійної алгебри

Власні значення та власні вектори

Нагадаємо, що власне значення лінійного оператора A – це таке число λ, що Ax=λx для деякого ненульового вектора x, який називають власним вектором, що відповідає λ. Для знаходження власних значень використовують характеристичну матрицю A-λE, визначник якої дорівнює нулю лише для власних значень λ. Цю матрицю можна обчислити, використовуючи таку функцію.

```
CharacteristicMatrix(A,lambda,outputoptions=list).
```

Тут A — задана матриця, lambda — змінна, параметр характеристичної матриці, ***outputoptions=list*** задає додаткові опції ***readonly, shape, storage, order, datatype*** або ***attributes***, які описано в пункті «функція ***Matrix()***».

Розглянемо приклади.

```
> A := Matrix([[-2,1,2],
[3,-1,0],[4,3,5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

```
>A_ch:=CharacteristicMatrix(A,lambda);
```

$$A\_ch := \begin{bmatrix} -\lambda-2 & 1 & 2 \\ 3 & -\lambda-1 & 0 \\ 4 & 3 & -\lambda+5 \end{bmatrix}$$

```
> A_ch_pol:=Determinant(A_ch);
```

$$A\_ch\_pol := -\lambda^3+2\lambda^2+24\lambda+21$$

```
> solve(A_ch_pol=0,lambda);
```

$$-1, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{93}, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{93}$$

Останні дві команди обчислюють відповідно характеристичний многочлен, тобто визначник характеристичної матриці, та власні значення матриці А, як його корені.

Характеристичний многочлен можна обчислити також, використовуючи безпосередньо функцію ***CharacteristicPolynomial()***. Її синтаксис

```
CharacteristicPolynomial(A,x)
```

Тут А — матриця оператора, ***x*** — змінна характеристичного многочленна.

Продовжуючи попередній приклад, маємо

```
> A_ch_pol1:=CharacteristicPolynomial(A,lambda);
```

$$A\_ch\_pol1 := \lambda^3-2\lambda^2-24\lambda-21$$

Як бачимо, дана функція шукає характеристичний поліном з старшим коефіцієнтом, рівним 1.

Також у пакеті ***LinearAlgebra*** є функції для безпосереднього обчислення власних значень та векторів. Це — ***Eigenvalues()*** та ***Eigenvectors()***. Синтаксис першої з них – Eigenvalues(A,implicit,output=obj,outputoptions=list), де А – матриця оператора, необов'язковий параметр ***implicit*** обчислює власні значення у неявній формі RootOf, параметр ***output*** вказує, як вивести результат. Можливі значення параметра ***output***: 'Vector', 'Vector[row]', 'Vector[column]' і 'list'.

Наприклад, продовжуючи попередні обчислення, отримаємо

```
> Eigenvalues(A,output='list');
```

$$\left[-1, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{93}, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{93} \right]$$

```
> Eigenvalues(A,implicit,output='Vector[column]');
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \mathrm{RootOf}(\_Z^2 - 3\ \_Z - 21, index = 1) \\ \mathrm{RootOf}(\_Z^2 - 3\ \_Z - 21, index = 2) \end{bmatrix}$$

Синтаксис функції ***Eigenvectors()*** є подібним –
Eigenvectors(A,implicit,output=obj,outputoptions=list).

Уточнення тут вимагає лише параметр output=obj. За замовчанням функція повертає результат у вигляді вектора власних значень та матриці, стовпчики якої формують відповідні власні вектори. Якщо значення параметра output='list', то результати виводяться у вигляді списку векторів, перша координата яких формується власним значенням, друга — розмірністю власного підпростору, а третя — відповідними власному значенню векторами. Значення 'values' чи 'vectors' означають, що потрібно виводити власні значення чи вектори.

Наприклад,

```
> B:=Matrix([[-235, -357, -204, -357], [189, 359, 252, 441], [-45, -
105, -142, -105], [-45, -105, -60, -187]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -235 & -357 & -204 & -357 \\ 189 & 359 & 252 & 441 \\ -45 & -105 & -142 & -105 \\ -45 & -105 & -60 & -187 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(B);
```

$$\begin{bmatrix} -82 \\ -82 \\ -82 \\ 41 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-7}{3} & \frac{17}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-21}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду AX=B призначена функція **LinearSolve(A,B,** method = name,free = name);

A – прямокутна або квадратна матриця;

B – прямокутна матриця або вектор стовпчик;

method - метод знаходження розв'язку системи рівнянь;

free – ім'я вільної змінної для випадку, якщо розв'язок не єдиний.

```
> A:=Matrix(2,2,[[2,3],[4,7]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> B:=Matrix(2,2,[[3,7],[1,8]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> C:=LinearSolve(A,B);
```

$$C := \begin{bmatrix} 9 & \frac{25}{2} \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

```
> A1:=Matrix(2,2,[[2,4],[4,7]]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> C1:=LinearSolve(A1,B,method=QR);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} \frac{-17}{2} & \frac{-17}{2} \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Лекція 10

Наближення функцій

Проблема наближення функцій полягає в заміні функції, яка обчислюється досить складно або задана в окремих точках, на більш просту функцію. При цьому норма різниці між цими функціями повинна бути мінімальною.

Поліноміальна інтерполяція функцій

Якщо деяка функція задана таблично, тобто у вигляді масивів X, Y однакової розмірності $\{X(i), Y(i), i=1,N\}$, то існує можливість побудови аналітичної функції у вигляді поліному *N-1* степеня, який пройде через всі відповідні точки. В системі Maple існує активна форма функції ***interp(X,Y, x)***, та пасивна форма цієї функції ***Interp(X,Y, x)***. Параметри X,Y – списки, які задають масив значень аргументів та масив значень функцій, x – ім'я змінної, яка вказує на аргумент інтерполяційного поліному.

```
> f1:=x->(2*x+1)/((x^2+2*x+1)^2);
```

$$f1 := x \to \frac{2x+1}{(x^2+2x+1)^2}$$

```
> spx:=evalf([seq(i*Pi/4/10,i=0..10)]);
```

$spx :=$ [0., 0.07853981635, 0.1570796327, 0.2356194490, 0.3141592654, 0.3926990818, 0.4712388981, 0.5497787144, 0.6283185308, 0.7068583472, 0.7853981635]

```
> spy:=map(f1,spx);
```

$spy :=$ [1.000000000, 0.8551031742, 0.7331536571, 0.6311669592, 0.5459430729, 0.4745761698, 0.4145942442, 0.3639560905, 0.3209994255, 0.2843782471, 0.2530039700]

```
> Int_pol:=x->interp(spx,spy,x);
```

$Int\_pol := x \to interp(spx, spy, x)$

```
> Int_pol(x);
```

$$-1.410129845\,x^{10} + 6.870951225\,x^9 - 2.000073559\,x - 15.19170886\,x^8 + 2.002850952\,x^2 + 20.29164809\,x^7 - 0.0461013942\,x^3 - 18.31379063\,x^6 - 4.580301922\,x^4 + 11.56293290\,x^5 + 1.000000000$$

Приклад демонструє побудову інтерполяційного поліному 10 степеня для функції заданої аналітично на інтервалі $[0, \frac{\pi}{4}]$. В змінних ***spx, spy*** обчислюються масиви значень аргументу та функції. Змінна ***Int_pol*** призначена для задання інтерполяційного поліному, вигляд якого демонструє останній оператор прикладу.

Сплайнова інтерполяція

Сплайнова інтерполяція призначення для наближення таблично заданої функції за допомогою кусково-поліноміальної функції на кожному з елементарних інтервалів. У вузлах повинні виконуватись певні умови гладкості сплайну в залежності від степені поліномів. В системі Maple для проведення сплайн апроксимації використовується вбудована функція ***spline(X,Y,v,d)***. Тут ***X,Y,v*** мають той самий зміст, що і в попередній функції. Параметр ***d*** задає порядок сплайну і може приймати цифрові значення 1, 2, 3, 4, або символьні значення ***linear, quadratic, cubic, quartic***, що відповідає лінійним, квадратичним, кубічним сплайнам, або поліномам четвертого порядку відповідно.

```
> Sp_1:=x->spline(spx,spy,x,1);
```

$$Sp\_1 := x \rightarrow spline(spx, spy, x, 1)$$

```
> map(Sp_1,[0.1,0.2,0.3,0.4]);
```

[0.8217817435, 0.6774200590, 0.5613073513, 0.4690003593]

```
> Sp_3:=x->spline(spx,spy,x,3);
```

$$Sp\_3 := x \rightarrow spline(spx, spy, x, 3)$$

```
> Sp_1(x);
```

$$\begin{cases} 1.000000000 - 1.844883685\,x & x < 0.07853981635 \\ 0.9770526911 - 1.552709476\,x & x < 0.1570796327 \\ 0.9371270528 - 1.298534969\,x & x < 0.2356194490 \\ 0.8868386176 - 1.085104221\,x & x < 0.3141592654 \\ 0.8314106843 - 0.9086716314\,x & x < 0.3926990818 \\ 0.7744857980 - 0.7637135968\,x & x < 0.4712388981 \\ 0.7184231675 - 0.6447449980\,x & x < 0.5497787144 \\ 0.6646527455 - 0.5469412455\,x & x < 0.6283185308 \\ 0.6139688531 - 0.4662753248\,x & x < 0.7068583472 \\ 0.5667467407 - 0.3994697031\,x & otherwise \end{cases}$$

Приклад демонструє наближення функції, заданої даними таблиці попереднього прикладу, за допомогою лінійних та кубічних сплайнів. Лінійний сплайн представлений у вигляді кусково-лінійної функції.

Дробово-раціональне рівномірне наближення функцій за алгоритмом Ремеза

В пакеті ***numapprox*** існує функція ***remez(w, f, a, b, m, n, crit, 'maxerror')***, яка призначена для побудови рівномірного наближення функції у дробово-раціональному вигляді. Параметри цієї функції мають наступний зміст:

W - функція аргументу ***x***, $w(x) > 0, x \in [a,b]$, яка використовується для обчислення відхилення $\max_{x \in [a,b]} w(x) \left| (f(x) - r(x) \right|$ між функціями ***f(x)*** та дробово – раціональним наближенням, функцією ***r(x***). Найбільш поширеними випадками функції ***w(x)*** є ***w(x)=1*** для випадку абсолютної похибки та $w(x) = \frac{1}{|f(x)|}$ для випадку відносної похибки.

f – наближувана функція

a, b – відрізок, на якому здійснюється наближення

m, n – степені поліномів чисельника та знаменника

crit – масив точок розмірності m+n+2, що належать інтервалу [a,b], в яких реалізується максимальне відхилення.

'maxerror' – ім'я вихідної змінної, якій присвоюється значення найбільшого відхилення на відрізку [a,b].

```
>w:=x->1;f:=x->exp(x);crit:=array(1..6,[0,0.5,0.7,0.8,1.2,1.5]);
```

$$w := x \to 1 \quad f := x \to e^x \quad crit := [0, 0.5, 0.7, 0.8, 1.2, 1.5]$$

```
> ff:=remez(w,f,0,2,3,1,crit,'maxerror');
```

$$ff := x \to \frac{1.241133455 + (1.009150365 + (0.3493997146 + 0.1183993828\,x)\,x)\,x}{1.241587759 - 0.2415877588\,x}$$

```
> maxerror;
```

$$0.0003659247886$$

Приклад демонструє наближення функції e^x на відрізку [0,2] у вигляді відношення поліномів третього та першого степенів.

Раціональна інтерполяція

В пакеті ***CurveFitting*** існує функція ***RationalInterpolation(xdata, ydata, x, opts)***, яка дозволяє побудувати дробово-раціональну інтерполюючу функцію. Призначення параметрів функції CurveFitting:

xdata – список раціональних значень аргументів розмірності n+1

ydata – список раціональних значень функцій розмірності n+1

x – незалежна змінна інтерполюючої функції, або числове значення, в якому обчислюється інтерполююча функція.

opts – параметр, який може мати вигляд *degrees=[d1,d2]*, де $n \geq d1 + d2$.

```
> f2:
=x->(2*x+1)/sin((x^2+2*x+1)^2);
```

$$f2 := x \to \frac{2x+1}{\sin((x^2+2x+1)^2)}$$

```
> spx:=convert(evalf([seq(i*Pi/4/10,i=0..10)]),rational);
```

$$spx := \left[0, \frac{13008}{165623}, \frac{26087}{166075}, \frac{12866}{54605}, \frac{52174}{166075}, \frac{13221}{33667}, \frac{25945}{55057}, \frac{26087}{47450}, \frac{104348}{166075}, \frac{13079}{18503}, \frac{26087}{33215}\right]$$

```
> spy:=convert(evalf(map(f2,spx)),rational);
```

$$spy := \left[\frac{46717}{39311}, \frac{12783}{10787}, \frac{73037}{54217}, \frac{51709}{25471}, \frac{106999}{10405}, \frac{-53285}{17353}, \frac{-111139}{57194}, \frac{-181613}{42565}, \frac{101403}{30526}, \frac{59376}{19823}, \frac{-47120}{12309}\right]$$

```
> with(CurveFitting):
evalf(RationalInterpolation(spx,spy,0.4,degrees=[5,4]));
```

$$-2.793889501$$

```
> evalf(f2(0.4));
```

$$-2.794062219$$

Приклад демонструє обчислення наближеного значення функції $f_2(x)$ за допомогою дробово-раціональної інтерполюючої функції в точці $x = 0.4$ та порівняння цього значення з точним значенням функції в цій точці.

Середньоквадратичне наближення за методом найменших квадратів.

В пакеті ***CurveFitting*** існує процедура, яка дозволяє по заданій множині точок побудувати функцію найкращого середньоквадратичного наближення. Середньоквадратичне наближення будують у вигляді узагальненого поліному по деякій системі лінійно незалежних функцій. Функція ***LeastSquares(xdate, ydate, x, curve= f, weight=s)*** має наступний зміст параметрів:

xdate, ydate **–** списки, або масиви однакової розмірності точок незалежної змінної та значення функції відповідно.

x – незалежна змінна, відносно якої записується функція найкращого середньоквадратичного наближення.

f **–** функція аргументу ***x***, що містить деякий набір параметрів.

s **–** список, або масив, вагових множників, однакової розмірності з ***xdate, ydate***, який враховує точність вимірювання значення функції.

Приклад демонструє побудову поліному найкращого середньоквадратичного наближення 5-го степеня у вигляді лінійної комбінації поліномів Ерміта. Значення параметрів ***spx, spy*** взяті з прикладу підрозділу «поліноміальна інтерполяція функцій».

```
> Hermit_5:=sum(a[n]*HermiteH(n,x),n=0..5);
```

$$Hermit\_5 := a_0\,HermiteH(0, x) + a_1\,HermiteH(1, x) + a_2\,HermiteH(2, x) + a_3\,HermiteH(3, x) + a_4\,HermiteH(4, x) + a_5\,HermiteH(5, x)$$

```
> LeastSquares(spx,spy,x,curve=Hermit_5);
```

$$2.27663095035097696\,HermiteH(0, x) - 1.84570182039444952\,HermiteH(1, x) + 0.733475882404449053\,HermiteH(2, x) - 0.118806861217190486\,HermiteH(3, x) + 0.0158619626955087134\,HermiteH(4, x) + 0.00213983282391130587\,HermiteH(5, x)$$

Чисельне інтегрування

Система Maple прагне провести аналітичне обчислення заданого інтегралу і навіть тоді, коли значення цього інтегралу виражається через спеціальні функції, записує його явний вигляд. У випадку, коли визначений інтеграл не може бути обчислений точно, система Maple надає користувачеві можливості провести наближене (чисельне) інтегрування. У випадку застосування чисельних процедур інтегрування головна процедура ***int( )*** або ***Int( )*** сама стає параметром процедури ***evalf( ).*** При цьому використовується наступне правило. Якщо параметром процедури ***evalf( )*** є процедура ***int( )*** то спочатку робиться спроба виконати точне аналітичне обчислення, якщо воно неможливе, то проводиться чисельне обчислення. Якщо ж використовується неактивна форма процедури інтегрування ***Int( ),*** то відразу відбувається наближене обчислення відповідного інтегралу.

Процедура обчислення інтегралу ***int( )*** або ***Int( )***, окрім стандартних параметрів, які використовуються при аналітичному обчислення визначених інтегралів ***int(f(x), x=a..b)***, використовує додаткові необов'язкові параметри: ***int(f(x), x=a..b, необов'язкові параметри).***

Необов’язкові параметри процедури ***int*** мають наступний зміст:

digits=n	n – ціле додатне число, яке задає кількість вірних цифр в результаті обчислення інтегралу;
epsilon=ε	ε – дійсне число, яке задає відносну похибку обчислення результату. Ці два параметри зв’язані між собою співвідношенням $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{1-n}$;
method=назва методу	назва методу – приймає значення назви методу наближеного обчислення інтегралу, назва методу може вказуватися і без посилання на значення параметру method;

method = _CCquad -- Clenshaw- Curtis квадратурний метод.

method = _Dexp -- адаптивний метод подвійного показника.

method = _Gquad -- адаптивний метод Гауса.

method = _Sinc -- адаптивний ***sinc*** метод квадратур

method = _NCrule -- адаптивний метод Ньютона - Котеса ***"quanc8".***

method = _d01ajc -- Адаптивний 10 – точковий метод Гауса, застосовується для скінчених інтервалів інтегрування.

method = _d01akc -- Адаптивний 30 – точковий метод Гауса, застосовується для скінчених інтервалів інтегрування з осцилюючими підінтегральними функціями.

method = _d01amc -- метод обчислення інтегралів з нескінченими межами інтегрування.

При чисельному обрахуванні багатовимірних інтегралів в багатовимірних паралелепіпедах можна використовувати спеціальну форму процедури ***Int( )*** у поєднанні з процедурою ***evalf(), evalf(Int(f, [x1=a1..b1, x2=a2..b2, ..., xn=an..bn]))***.

В цьому випадку система Maple надає можливість використання чисельних методів знаходження багатовимірних інтегралів:

method=_cuhre - метод обчислення багатовимірних інтегралів у паралелепіпедах скінченого розміру з розмірністю від 2 до 15, що базується на алгоритмі ACM TOMS Algorithm 698.

method=_MonteCarlo – метод Монте–Карло обчислення багатовимірних інтегралів. Він дає невисоку відносну похибку обчислення.

Для чисельного знаходження багатовимірних інтегралів можна також використовувати стандартний підхід зведення багатовимірних інтегралів до повторних.

Наведемо приклади чисельного знаходження одновимірних інтегралів.

```
> evalf(Int( exp(-x^5)/(x^3+1), x=0..1));
```

$$0.7543143320$$

```
> evalf(Int( sin(x)/(x^2+1), x = 0..infinity,digits=20));
```

$$0.64676112277913007155$$

```
> evalf(Int( sin(x)*ln(x+1)*exp(-x^3), x = 0..infinity));
```

$$0.2090363674$$

```
> e1 := 1/GAMMA(x)^2:
Int(e1, x = 0..2) = evalf(Int(e1, x=0..2, digits=14, method=_d01ajc));
```

$$\int_0^2 \frac{1}{\Gamma(x)^2}\,dx = 1.5630430689991$$

Приклад демонструє обчислення багатовимірного інтегралу методом Монте – Карло.

```
> f:=(x,y,z,u)->piecewise(x^2+y^2+z^2+u^2<1,1/(x^3+y^3+z^3+u^3+1),0);
```

$$f := (x, y, z, u) \to \text{piecewise}\left(x^2+y^2+z^2+u^2<1, \frac{1}{x^3+y^3+z^3+u^3+1}, 0\right)$$

```
> evalf(Int(f(x,y,z,u),[x=-1..1, y=-1..1, z=-1..1, u=-1..1],method=_MonteCarlo, digits=3));
```

$$5.96$$

Чисельне розв'язування нелінійних рівнянь та їх систем

Для знаходження чисельного розв'язку нелінійних рівнянь та систем Maple використовує базову процедуру ***fsolve(****eqns****,*** *vars****,*** *options****).***

eqns – одне рівняння або система рівнянь, що задається у вигляді множини.

vars – змінна, або множина змінних, відносно яких здійснюється знаходження розв'язку.

options – набір додаткових необов'язкових опцій, які можуть включати значення наведені в таблиці:

avoid	avoid ={список рівностей} Список рівностей визначає ті

	значення змінної, які слід ігнорувати при пошуку розв'язків;
complex	якщо ця опція вказана, то пошук розв'язків буде відбуватися на множині комплексних чисел;
fulldigits	опція дозволяє підтримувати високу точність заокруглення при проміжних розрахунках;
maxsols	maxsols=n – ця опція використовується при роботі з поліномами, n – вказує кількість коренів, які необхідно обчислити. В якості коренів обираються найменші.
interval	{x=a..b, y=c..d,…z=l..s} Ця опція задає паралелепіпед якому повинен належати розв'язок системи рівнянь.

Продемонструємо на прикладах можливості використання процедури ***fsolve*** для обчислення розв'язків систем рівнянь.

```
> eq1:={sin(2*x-y)-1.2*x=0.4,0.8*x^2+1.5*y^2=1};
```

$$eq1 := \{0.8\,x^2 + 1.5\,y^2 = 1,\ \sin(2\,x - y) - 1.2\,x = 0.4\}$$

```
> fsolve(eq1,{x,y},fulldigits);
```

$$\{x = 0.4912379505,\ y = -0.7334613013\}$$

```
> eq2:={3*x^2+3/2*y^2+z^2-5=0, 6*x*y*z-x+5*y+3*z=0,5*x*z-y*z-1=0};
```

$$eq2 := \{3\,x^2 + \frac{3\,y^2}{2} + z^2 - 5 = 0,\ 6\,x\,y\,z - x + 5\,y + 3\,z = 0,\ 5\,x\,z - y\,z - 1 = 0\}$$

```
> fsolve(eq2,{x,y,z});
```

$$\{x = -1.284457050,\ y = -0.1297565120,\ z = -0.1589186226\}$$

```
> fsolve(eq2,{x,y,z}, {x=1..1.5,y=-0.5..0.5,z=0..0.5},fulldigits);
```

$$\{z = 0.1589186226,\ x = 1.284457050,\ y = 0.1297565120\}$$

Продемонструємо приклад знаходження чисельного розв'язку для одного трансцендентного рівняння.

```
> eq3:=tan(x)=(x^2-1)/x;
```

$$eq3 := \tan(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

```
> fsolve(eq3,x,{x=Pi/2..3*Pi/2});
```

$$4.481749781$$

Наступні приклади демонструють знаходження коренів поліномів.

> ***with(orthopoly)***;

$$[G, H, L, P, T, U]$$

```
> eq5:=T(7,x);
```

$$eq5 := 64\,x^7 - 112\,x^5 + 56\,x^3 - 7\,x$$

```
> fsolve(eq5,x,maxsols=5);
```

-0.9749279122, -0.7818314825, -0.4338837391, 0., 0.4338837391

```
> eq4:=5*x^7+3*x^4-25;
```

$$eq4 := 5\,x^7 + 3\,x^4 - 25$$

```
> fsolve(eq4,x,maxsols=3);
```

1.206786284

```
> fsolve(eq4,x,maxsols=3,complex);
```

$$-1.166245256 - 0.5018463345\,I,\ -1.166245256 + 0.5018463345\,I,\ -0.2334153741 - 1.202374214\,I$$

Чисельне розв'язання задач Коші та граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Чисельне розв'язання задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь в системі Maple здійснюється за допомогою процедури **dsolve(odesys,numeric,[method=namemethod],vars, options).**

В цій процедурі параметр ***odesys*** задає у вигляді множини диференціальне рівняння або систему звичайних диференціальних рівнянь, та додаткові умови (початкові або граничні).

Параметр ***numeric*** вказує, що задача Коші або гранична задача буде розв'язуватись чисельно.

Параметр ***namemethod*** (не обов'язковий) приймає значення, що задають метод чисельного розв'язування задачі:

bvp –використовується при розв'язанні граничних задач і використовує метод трапецій ***bvp[trapdefer]***, або метод середньої точки ***bvp[middefer]***, або покращений метод трапецій ***bvp[traprich]***, або покращений метод середньої точки ***bvp[midrich]***;

classical – використовуються класичні методи Рунге – Кутти 1 - 4 порядку точності;

rkf45 – використовується метод Рунге – Кутти – Фелберга 4 – 5 порядку точності;

l***sode*** – використовуються процедури для інтегрування жорстких систем диференціальних рівнянь на базі метода Адамса;

gear – використовується метод Гіра (простої інтерполяції).

Параметр options задає додаткові параметри чисельного розв'язування:

range = numeric..numeric –діапазон інтегрування для граничних задач;

abserr = numeric – абсолютна точність інтегрування на кроці при інтегрування задачі Коші або оцінка абсолютної похибки розв'язку для граничної задачі.

relerr = numeric - відносна точність інтегрування на кроці при інтегруванні задачі Коші та оцінка відносної похибки розв'язку для граничної задачі.

Параметр ***vars*** (необов'язковий) задає у вигляді множини залежні змінні системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо приклад застосування процедури dsolve до знаходження розв'язку граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

```
> a:=10;k:=1;h1:=1;h2:=1;H1:=2;H2:=1;f:=x->10*cos(Pi*x);
```

$a := 10 \;\; k := 1 \;\; h1 := 1 \;\; h2 := 1 \;\; H1 := 2 \;\; H2 := 1 \;\; f := x \to 10\cos(\pi\, x)$

```
> eq:=diff(y(x),x$2)+a*sin(k*Pi*x)*diff(y(x),x)+y(x)=f(x);
ly:=h1*D(y)(0)-h2*y(0)=0,H1*D(y)(1)+H2*y(1)=1;
```

$$eq := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + 10\sin(\pi\, x)\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = 10\cos(\pi\, x)$$

$ly := \mathrm{D}(y)(0) - \mathrm{y}(0) = 0,\ 2\,\mathrm{D}(y)(1) + \mathrm{y}(1) = 1$

```
> nsol:=dsolve([eq,ly],y(x),range=0..1,numeric,abserr=1.0E-8);
```

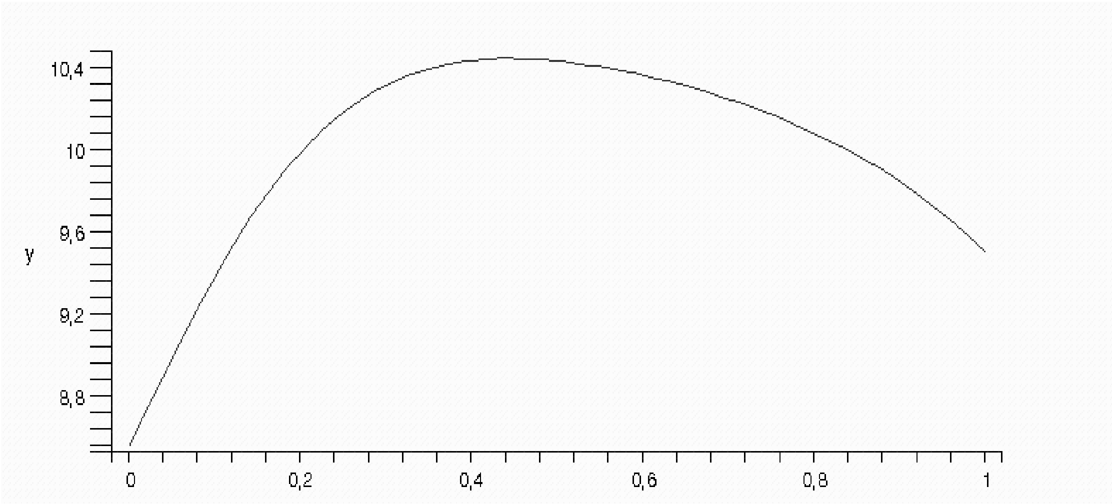
$nsol :=$ **proc** (x_bvp) ... **end proc**

```
> seq([i*0.1,op(2,nsol(i*0.1))],i=0..10);
```

$[0., y(x) = 8.56340856206107], [0.1, y(x) = 9.38222958731456], [0.2, y(x) = 9.98961288200047], [0.3, y(x) = 10.3177704832926], [0.4, y(x) = 10.4354440213653], [0.5, y(x) = 10.4330459877077], [0.6, y(x) = 10.3644030670557], [0.7, y(x) = 10.2483527136564], [0.8, y(x) = 10.0824556006397], [0.9, y(x) = 9.84800766007461], [1.0, y(x) = 9.50269067330178]$

Підключімо графічний пакет `plots` та побудуємо графік розв'язку.

```
> with(plots):      > odeplot(nsol);
```



Розглянемо приклад знаходження чисельних розв'язків для системи шести звичайних диференціальних рівнянь з додатковими умовами Коші або граничними умовами

```
> seq(y[i],i=1..6)];
```

$$[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$$

Задамо список параметрів системи рівнянь:

```
> a:=[-1,-0.001,1,1,2,3];
```

$$a := [\,\text{-}1,\, \text{-}0.001,\, 1,\, 1,\, 2,\, 3\,]$$

Задамо систему диференціальних рівнянь першого порядку (6 рівнянь).

```
>eq:=diff(y[1](x),x)=a[1]*(y[1](x))^2+y[2](x),diff(y[2](x),x)=
a[3]*y[1](x)*y[2](x)+a[1]*y[2](x), diff(y[3](x),x)=
a[2]*y[3](x), diff(y[4](x),x)=a[4]*y[3](x)+a[2]*y[4](x),
diff(y[5](x),x)=a[5]*y[4](x)+a[2]*y[5](x),
diff(y[6](x),x)=a[6]*y[5](x)+a[2]*y[6](x);
```

$$eq := \frac{d}{dx}y_1(x) = -y_1(x)^2 + y_2(x), \frac{d}{dx}y_2(x) = y_1(x)\,y_2(x) - y_2(x), \frac{d}{dx}y_3(x) = -0.001\,y_3(x),$$
$$\frac{d}{dx}y_4(x) = y_3(x) - 0.001\,y_4(x), \frac{d}{dx}y_5(x) = 2\,y_4(x) - 0.001\,y_5(x),$$
$$\frac{d}{dx}y_6(x) = 3\,y_5(x) - 0.001\,y_6(x)$$

Задання початкових умов:

```
> NU:=y[1](0)=1, y[2](0)=2,y[3](0)=0.5,y[4](0)=0.5, y[5](0)=0.5,
y[6](0)=0.5;
```

$$NU := y_1(0) = 1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 0.5, y_4(0) = 0.5, y_5(0) = 0.5, y_6(0) = 0.5$$

Задання граничних умов:

```
> KU:=y[1](0)=1,y[2](0)=1,y[3](0)=0.5,y[4](0)=0.5,
y[5](2)=10,y[6](0)=0.5;
```

$$KU := y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0.5, y_4(0) = 0.5, y_5(2) = 10, y_6(0) = 0.5$$

Спроба обчислення аналітичного розв'язку задачі Коші та граничної задачі

```
> asol:=dsolve([eq,NU],func);
>asol_G:=dsolve([eq,KU],func);
```

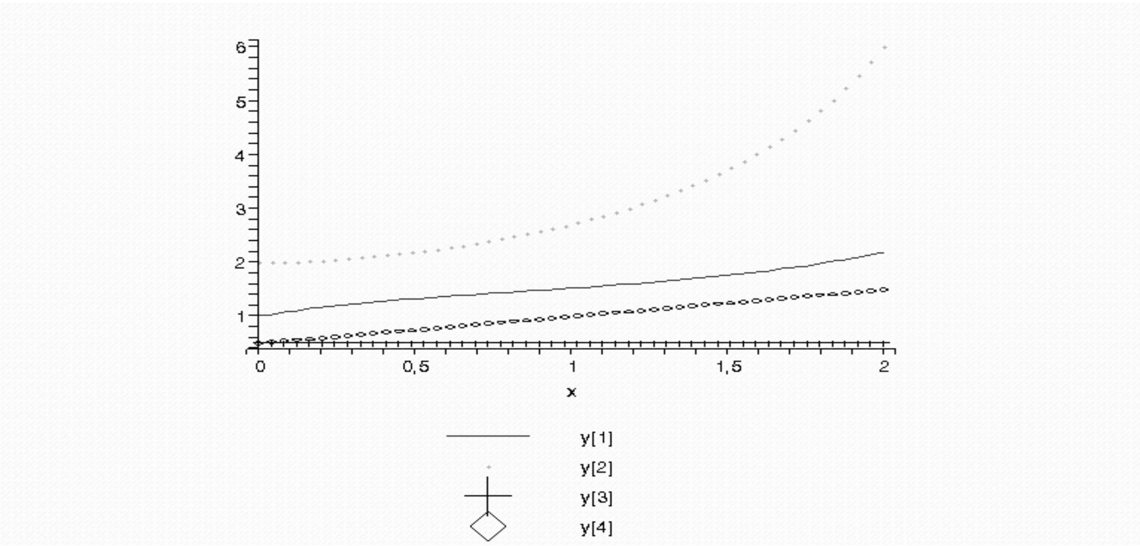
$asol :=$
$asol\_G :=$

Обчислення чисельного розв'язку задачі Коші методами Рунге – Кута, Адамса – Бешфорда та методом розвинення в ряд Тейлора. Побудова графіку окремих компонент розв'язку.

```
> nsol1:=dsolve({eq,NU},func,range=0..2, numeric,method=rkf45);
```

$$nsol1 := \mathbf{proc}(x\_rkf45) \;\; ... \;\; \mathbf{end\ proc}$$

```
>odeplot(nsol1,[[x,y[1](x)],[x,y[2](x)],[x,y[3](x)],[x,y[4](x)]]);
```




```
> nsol2:=dsolve({eq,NU},func, numeric,method=classical[adambash]);
```

$$nsol2 := \mathbf{proc}(x\_classical) \;\; ... \;\; \mathbf{end\ proc}$$

```
> nsol3:=dsolve({eq,NU},func, numeric,method=taylorseries);
```

$$nsol3 := \mathbf{proc}(x\_taylorseries) \;\; ... \;\; \mathbf{end\ proc}$$

Обчислення розв'язку граничної задачі

```
> nsol1_G:=dsolve({eq,KU},func,range=0..2, numeric);
```

$$nsol1\_G := \mathbf{proc}(x\_bvp) \;\; ... \;\; \mathbf{end\ proc}$$

Обчислення значень чисельних розв'язків в точці x =1.

```
> nsol1(1);
```

$$[x = 1., y_1(x) = 0.99999999999999988, y_2(x) = 0.99999999999999988,$$
$$y_3(x) = 0.499500249916687454, y_4(x) = 0.999000499833374800,$$
$$y_5(x) = 1.99800099966673538, y_6(x) = 3.99600199938870260]$$

> **nsol2(1);**

$$[x = 1., y_1(x) = 1., y_2(x) = 1., y_3(x) = 0.499500249916687400,$$
$$y_4(x) = 0.999000499833374688, y_5(x) = 1.99800099966674848,$$
$$y_6(x) = 3.99600199933348942]$$

> **nsol3(1);**

$$[x = 1., y_1(x) = 1., y_2(x) = 1., y_3(x) = 0.499500249916687, y_4(x) = 0.999000499833375,$$
$$y_5(x) = 1.99800099966675, y_6(x) = 3.99600199933350]$$

Обчислення розв’язків граничної задачі в точці *x =1*.

> **nsol1_G(1);**

$$[x = 1., y_1(x) = 0.99999999999999978, y_2(x) = 0.99999999999999978,$$
$$y_3(x) = 0.499500249916687566, y_4(x) = 0.999000499833374578,$$
$$y_5(x) = 7.51250375208348409, y_6(x) = 20.5395102556668796]$$

Знаходження розв’язків задач лінійного програмування

Для знаходження розв’язків задач лінійного програмування в системі Maple існує пакет ***simplex***, який підключається за допомогою стандартного ***with***.

```
with(simplex);
```

```
Warning, the protected names maximize and minimize have been
redefined and unprotected
```

[*basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize*]

Після підключення пакету виводиться попередження про перевизначення двох стандартних функцій ядра системи Maple, а саме функцій ***maximize*** та ***minimize***. Функції з такими самими назвами існують в ядрі системи Maple.

Головними функціями пакету ***simplex*** є функції ***maximize*** та ***minimize***, які призначені для знаходження оптимального розв’язку задачі лінійного програмування. Виклик цих функцій здійснюється у наступних формах:

maximize(ЦФ, МЛО, ТЗ), minimize(ЦФ, МЛО, ТЗ)

ЦФ – цільова функція, яка задається у вигляді деякого лінійного виразу; ***МЛО*** – множина лінійних нерівностей стандартного вигляду; ***ТЗ*** – тип ведучих змінних (необов'язковий параметр), який може приймати значення ***NONNEGATIVE*** – невід'ємні (за замовчанням) ***UNRESTRICTED*** – обмежень на знак ведучих змінних не накладається.

Результати своєї роботи процедури ***maximize*** та ***minimize*** повертають у вигляді множини рівнянь по її ведучим змінним, на яких цільова функція досягає свого максимального або мінімального значення. У випадку відсутності оптимального розв'язку повертається порожня множина, а у випадку необмеженого розв'язку повертається ***NULL.***

Розглянемо приклад знаходження розв'язку задачі лінійного програмування:

$$4x+5y+9z+11u \to \max \qquad \begin{cases} x+y+z+u \le 15 \\ 7x+5y+3z+2u \le 80 \\ 3x+5y+10z+15u \le 60 \end{cases}$$

```
> a:=4*x+5*y+9*z+11*u;
```

$$a := 2\,x - 3\,y - 3\,z$$

```
> L:={x+y+z+u<=15,7*x+5*y+3*z+2*u<=80,3*x+5*y+10*z+15*u<=60};
```

$$L := \{x+y+z+u \le 15,\ 7\,x+5\,y+3\,z+2\,u \le 80,\ 3\,x+5\,y+10\,z+15\,u \le 60\}$$

```
> b:=evalf(maximize(a,L,NONNEGATIVE));
```

$$b := \{y = 0.,\ u = 0.,\ z = 2.950819672,\ x = 10.16393443\}$$

```
> evalf(subs(%,a));
```

$$67.21311477$$

Функція ***dual***(ЦФ, МЛО, Y) повертає спряжену (двоїсту) лінійну задачу до задачі, заданої параметрами функції ***dual*** ЦФ, МЛО, параметр Y, задає ім'я змінної, яке буде присвоєне змінним спряженої задачі.

Розглянемо приклад застосування функції ***dual*** для побудови двоїстої задачі для задачі лінійного програмування попереднього прикладу.

```
> f:=dual(a,L,w);
```

$$15\,w1+80\,w2+60\,w3,\ \{4 \le w1+7\,w2+3\,w3,\ 5 \le w1+5\,w2+5\,w3,\ 11 \le w1+2\,w2+15\,w3,\ 9 \le w1+3\,w2+10\,w3\}$$

Знайдемо розв'язок двоїстої задачі лінійного програмування та обчислимо значення цільової функції:

```
> d:=minimize(f[1],(f[2]),NONNEGATIVE);
```

$$d := \{ w2 = \frac{13}{61}, w3 = \frac{51}{61}, w1 = 0 \}$$

```
> evalf(subs(%,f[1]));
```

$$67.21311475$$

Використана функція ***standardize*** дозволяє привести лінійні обмеження, що записані у вигляді лінійних нерівностей або рівностей, до стандартного вигляду.

```
> standardize(f[2]);
```

$$\{ -w1 - 7\,w2 - 3\,w3 \le -4, -w1 - 3\,w2 - 10\,w3 \le -9, -w1 - 5\,w2 - 5\,w3 \le -5, -w1 - 2\,w2 - 15\,w3 \le -11 \}$$

Завдання для самостійного виконання 1

1. Для заданих цілих чисел m, n, k та N:
   - Визначити, які з них є простими;
   - Складені цілі числа розкласти на прості множники;
   - Знайти цілу частину від операції ділення m на k;
   - Знайти залишок від операції ділення m на k;
   - Утворити дроби m/n, n/k, та знайти суму та різницю цих дробів;
   - Обчислити наближений десятковий вигляд дробу m/n, який містить п'ять знаків після коми;
   - Вивести мантису та ступінь числа m*n/k, заданого у експоненційному вигляді.
   - Обчислити N-й знак після коми десяткового представлення числа m/n (один з варіантів - можна використати команди evalf, op та irem);

   1.1 m = 3647, n = 24567, k = 347, N = 10;

   1.2 m= 459, n= 4591, k = 34567, N = 100;

   1.3 m= 4153, n= 45683, k= 23798, N = 25;

   1.4 m= 574 , n= 35671, k= 76452, N = 50;

   1.5 m= 341, n= 4573, k=56737, N = 20;

2. Для заданих комплексних чисел z1 і z2:

- Знайти їх суму та різницю;
- Знайти їх добуток та частку;
- Знайти модуль та аргумент числа z1;
- Порахувати y2 - комплексно спряжене число до z2;
- Перевірити рівність: $|z2|^2 - y2*z2 = 0$;

2.1 $z1 = 2+3i,\ z2 = 4-2i$;

2.2 $z1 = 1+2i,\ z2 = 3-i$;

2.3 $z1 = 3+3i,\ z2 = 2-2i$;

2.4 $z1 = 5+4i,\ z2 = 4+6i$;

2.5 $z1 = 1/2+3i,\ z2 = 1-2i$;

3. Виконайте наступні операції з рядками:

- Задайте три рядкові константи: Ваше прізвище, ім'я та по батькові, записані латинськими літерами;
- Визначте кількість символів у кожній з цих констант;
- Об'єднавши ці константи, створіть один рядок, що містить Ваше ім'я, по батькові та прізвище;
- Створіть з попереднього рядка новий, який об'єднує літери попереднього рядка, починаючи з третьої по шосту, та три передостанні літери;
- Використовуючи три рядка з першого пункту, створіть рядкову константу яка містить Ваші ініціали, розділені крапками (П.І.Б);
- Використовуючи рядок, що містить Ваше ім'я, створіть рядок, якій містить i-ту з початку та j-ту з кінця його літери, і дві крапки між ними (наприклад: «О..р» для i=1, j=1 та імені Олександр);
- Знайдіть N-й знак числа x, записавши послідовність його цифр як рядок;

3.1 x = e, N = 100, i=1, j=1;

3.2 x = Pi, N = 100, i=2, j=2;

3.3 x = e, N = 25, i=1, j=2;

3.4 x = Pi, N = 20, i=2, j=1;

3.5 x = e, N = 20, i=3, j=1;

4. Задати функцію

4.1 $f(x)=\sqrt{x}+\sin^2(\lg(2^x+1))$

4.2 $f(x)=\dfrac{arctg(x^2+3^{-x})}{\cos^2(\ln(x+\sqrt[3]{x}))}$

4.3 $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\lg(\sin^2\dfrac{1}{x}-\sqrt{x})$

4.4 $f(x)=\arcsin(x\ln x)+\sin^2\dfrac{2^x}{x}$

4.5 $f(x)=\sqrt[3]{x^2-\sin 2x}+\lg^2(3^{2x}-x))$

5. Задати функцію

5.1 $f(x)=\begin{cases} arctg(x),\ -\infty<x<-1 \\ \dfrac{\pi x}{4},\quad -1\le x\le 1 \\ arctg(x),\ 1<x<\infty \end{cases}$

5.2 $f(x)=\begin{cases} arctg(x),\ -\infty<x<-1 \\ \dfrac{\pi x}{4},\quad -1\le x\le 1 \\ arctg(x),\ 1<x<\infty \end{cases}$

5.3 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x},\ -\infty<x<0 \\ \sin(x),\quad 0\le x\le \pi \\ \ln(\dfrac{x}{\pi}),\ \pi<x<\infty \end{cases}$

5.4 $f(x)=\begin{cases} \cos(x),\quad -\infty<x<-\pi \\ 1-\left|\dfrac{x}{\pi}\right|,\quad -\pi\le x\le \pi \\ \cos(x),\quad \pi<x<\infty \end{cases}$

5.5 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+0.5\pi},\quad -\infty<x<-\pi/2 \\ tg(x),\quad -\pi/2<x<\pi/2 \\ \dfrac{1}{x-0.5\pi},\quad \pi/2<x<\infty \end{cases}$

6. Утворити послідовність елементів (виразів):

6.1 $\frac{\sin(x)}{x},\frac{\sin(2x)}{2x},\frac{\sin(3x)}{3x},.....\frac{\sin(nx)}{nx},.....$

6.2 $\frac{\cos(x)}{3x},\frac{\cos(2x)}{5x},\frac{\cos(3x)}{7x},.....\frac{\cos(nx)}{(2n+1)x},.....$

6.3 $\frac{\sin(x)}{x},\frac{\sin(2x)}{2x^2},\frac{\sin(3x)}{3x^3},.....\frac{\sin(nx)}{nx^n},.....$

6.4 $\frac{\cos(x^1)}{3x},\frac{\cos(2x^2)}{5x^2},\frac{\cos(3x^3)}{7x^3},.....\frac{\cos(nx^n)}{(2n+1)x^n},..$

6.5 $\frac{\cos(x)}{\sin(3x)},\frac{\cos(2x)}{\sin 5x)},\frac{\cos(3x)}{\sin(7x)},.....\frac{\cos(nx)}{\sin((2n+1)x)},..$

7. З послідовності, яку створено в попередньому завданні:
   - Використовуючи select та has, вибрати елементи, які містять як операнд цифру «2».
   - Вибрати елементи, де числовий коефіцієнт при «***x***» в середині тригонометричної функції в чисельнику ділиться націло на Ваш номер варіанту.
8. На базі послідовностей пункту 6:
   - утворити список з 12 елементів, починаючи з номера, що відповідає номеру Вашого варіанту;
   - Обчислити суму другого, сьомого та дев'ятого елементів списку;
   - Знайти відношення п'ятого та дев'ятого елементів списку. Знайдене значення добавити у кінець списку;
9. Використовуючи команди роботи з послідовностями та списками:
   - Утворити числову послідовність (x_i), $i=1..N$, формула і-го елементу відповідно варіанту;
   - На базі цієї послідовності утворити нову послідовність (y_i), замінивши другий та передостанній елементи на обернені.
   - Просумувати частки відповідних елементів послідовностей ($x_1/y_1+x_2/y_2+\ldots+x_N/y_N$) (для сумування можна скористатись командою add)

- Пересвідчитись, що обраний Вами спосіб виконання завдання дозволяє змінити N (наприклад, збільшити його вдвічі), і отримати результат для нових послідовностей, не змінюючи більше нічого в тексті команд.

  9.1 N = 10, $x_i=1/i^2$;

  9.2 N = 8, $x_i=i^2$;

  9.3 N = 7, $x_i=1/(i+1)$;

  9.4 N = 6, $x_i=i/(i^2+1)$;

  9.5 N = 10, $x_i=1/i$;

10. Використовуючи команди роботи з послідовностями та списками:

- Згенерувати послідовність N випадкових цілих чисел від p до q.
- Отримати з цієї послідовності два списки – простих та складених чисел.
- На основі списку складених чисел, отримати список, що складається з сум простих множників для кожного з цих чисел.
- Зауваження та рекомендації:
  - Для генерування випадкових чисел, можна використати команду rand
  - Для розкладу на множники може бути зручно використати команду ifactors (повертає результат у вигляді списку)
  - Під сумою простих множників числа мається на увазі така, де кожен з простих множників зустрічається стільки разів, яка його степінь в розкладі. Наприклад: $168 = 2^3 * 3 * 7$, і сума множників буде $2 * 3 + 3 + 7 = 16$.

  10.1 N=10; p=5, q=150;

  10.2 N=15; p=100, q=200;

  10.3 N=10; p=200, q=1000;

  10.4 N=15; p=1, q=90;

  10.5 N=10; p=500, q=1000;

11. Утворити множини елементів. Побудувати множини, які є об’єднанням, перетином та різницею першої та другої множини.

  11.1 $\{x, y, z, u, w, v\}$, $\{y, t, s, z, v\}$;

11.2 $\{m,n,y,j,u,w,l\}$, $\{y,r,s,z,v\}$;

11.3 $\{a,b,g,r,p,q\}$, $\{y,g,s,p,v\}$;

11.4 $\{o,p,g,u,h,v\}$, $\{y,t,o,g,v\}$;

11.5 $\{r,n,d,j,u,w,l\}$, $\{w,r,s,r,v\}$;

12. Задати матрицю $A=[a_{i,j}]\ \begin{matrix} i=1,n \\ j=1,m \end{matrix}$ розмірністю *m* на *n*:

12.1 $A=[a_{i,j}]=\dfrac{i^3}{j}\ \begin{matrix} i=1,4 \\ j=1,5 \end{matrix}$

12.2 $A=[a_{i,j}]=\dfrac{i-j}{i+j}\ \begin{matrix} i=1,4 \\ j=1,3 \end{matrix}$

12.3 $A=[a_{i,j}]=\dfrac{i}{i+j}\ \begin{matrix} i=1,3 \\ j=1,5 \end{matrix}$

12.4 $A=[a_{i,j}]=\dfrac{i^2}{i^2+j^2}\ \begin{matrix} i=1,5 \\ j=1,3 \end{matrix}$

12.5 $A=[a_{i,j}]=\dfrac{ij^2}{(i+j)^3}\ \begin{matrix} i=1,3 \\ j=1,4 \end{matrix}$

13. Задати символьну матрицю *M=*[*m* $_{i,j}$] *i=1..n, j=1..m,* розмірність якої співпадає з розмірністю матриці в попередньому завданні. Присвоїти елементу другого стовпця та третього рядка цієї матриці значення цього елементу з попереднього завдання.

14. Використовуючи операції перетворення виразів, довести наступні алгебраїчні тотожності, або спростувати їх.

14.1 $(xy+2x-y+1)(xy-y+1)=(1+x^2)y^2+2(x-y)(1+xy)+1$;

14.2 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$;

14.3 $(a+b+c)(b^2-bc-ab-ac+a^2+c^2)=a^3+b^3+c^3-3abc$;

14.4 $\dfrac{(y+x)(x+z)(z+y)+xyz}{(x+y+z)}=(xz+yz+xy)$

14.5 $\dfrac{xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-x^3y^3-z^3x^3}{(yx-z^2)}=(x^2-yz)(zx-y^2)$

15. Спростити наступні вирази:

15.1 $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}-1}$

15.2 $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x(x-1)}{x+1}}$

15.3 $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x-x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x-x^2}}$ 15.4 $\dfrac{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1)(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})}$

15.5 $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$

16. Довести або спростувати умовні тотожності:

16.1 $m_1+m_2+m_3=m_1m_2m_3$ *якщо* $m_1=\dfrac{a+b}{a-b},\ m_2=\dfrac{c+d}{c-d},\ m_3=\dfrac{ac-bd}{ad+bc}$

16.2 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ *якщо* $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$

16.3 $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\dfrac{a-c}{b-c}$ *якщо* $a^2+b^2=(a+b-c)^2$

16.4 $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{a^3-1}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$ *якщо* $a+b=1$

16.5 $\left(\dfrac{y-z}{x}+\dfrac{z-x}{y}+\dfrac{x-y}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y-z}+\dfrac{y}{z-x}+\dfrac{z}{x-y}\right)=9$ *якщо* $x+y+z=0$

17. За допомогою аналізу структури виразів присвоїти змінній ***struct*** значення виділеного у фігурних дужках виразу.

17.1 $\dfrac{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1)(\frac{1}{x}-\frac{1}{y})^2}{\left\{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right\}-(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})}$ 17.2 $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x-x^2}+\dfrac{1+x}{\left\{1+x+x^2\right\}}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$

17.3 $(xy+2x-y+1)(xy-y+1)=(1+x^2)y^2+2(x-y)\left\{(1+xy)\right\}+1$

17.4 $\dfrac{xyz(x^3+y^3+z^3)-\left\{y^3z^3\right\}-x^3y^3-z^3x^3}{(yx-z^2)}=(x^2-yz)(zx-y^2)$

17.5 $\dfrac{a}{b^3-1}-\dfrac{b}{\left\{a^3-1\right\}}=\dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$

18. Враховуючи область визначення функцій, провести спрощення наступних виразів:

18.1 $\dfrac{\log_a \sqrt{a^2-1}\ \log_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2} \sqrt{a^2-1}\ \log_{a^{1/3}} \sqrt{a^2-1}}$

18.2 $a^{\frac{2}{\log_a b}+1} b - 2a^{\log_a b+1} b^{\log_b a+1} + ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$

18.3 $(\log_b a + \log_a b + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$

18.4 $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \dfrac{a}{b}}$

18.5 $\lg\dfrac{(m+n)^2}{a} + \lg\dfrac{ab}{m^2-n^2} + \lg\dfrac{m-n}{b}$

19. Довести або спростувати тригонометричні тотожності.

19.1 $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg(\pi/4+\alpha)$

19.2 $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$

19.3 $4\cos(\dfrac{\pi}{6}-\alpha)\sin(\dfrac{\pi}{3}-\alpha) = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$

19.4 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$

19.5 $\dfrac{\cos 4\alpha\ tg 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\ ctg 2\alpha + \sin 4\alpha} = -tg^2 2\alpha$

Завдання для самостійного виконання 2

1.Обчислити границі послідовностей:

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + ... + \dfrac{n-1}{n^2})$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$;

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} ... + \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n})$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$;

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + ... + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}$ $a>1$;

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{(2n-1)}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}$ $a>1$;

1.5 $\lim(\frac{1}{1\circ 2}+\frac{1}{2\circ 3}+...+\frac{1}{n(n-1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$;

2. Обчислити границі функцій.

2.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\sin bx}$; $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

2.2 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

2.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tg\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

2.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

2.5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{arctg\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

3. Обчислити вираз, який містить похідні вказаного порядку від функції однієї змінної.

3.1 $f(x)=\frac{y^{(7)}(x)}{y^{(5)}(x)}$, $y(x)=\frac{x^2}{1-x}$;

3.2 $f(x)=\frac{y^{(17)}(x)y^{(12)}(x)}{y^{(10)}(x)}$, $y(x)=x^2e^{2x}$;

3.3 $f(x)=\frac{y^{(20)}(x)}{y^{(15)}(x)+y^{(10)}(x)}$, $y(x)=x^2\sin 2x$;

3.4 $f(x)=\dfrac{y^{(4)}(x)+y^{(2)}(x)}{y^{(1)}(x)},\ y(x)=e^x\cos x;$

3.5 $f(x)=\dfrac{y^{(9)}(x)+y^3(x)}{y^{(6)}(x)},\ y(x)=\dfrac{e^x}{x};$

4. Перевірити наступні рівності з частинними похідними :

4.1 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0,\ z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy);$

4.2 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\beta z\dfrac{\partial u}{\partial z}=nu,\ u=x^n\varphi(\dfrac{y}{x^\alpha},\dfrac{z}{x^\beta});$

4.3 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ z=\varphi(x^2+y^2);$

4.4 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u+\dfrac{xy}{z},\ u=\dfrac{xy}{z}\ln x+x\varphi(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x});$

4.5 $(x^2-y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xyz,\ z=e^y\varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}});$

5. Від параметрично заданих функцій знайти y''_{x^2} , y'''_{x^3}

5.1 $x=\dfrac{2}{\sin t},\ y=ctg\,t,\ t\in(0..\pi/2);$ 5.2 $x=arctgt,\ y=\ln(1+t^2),\ t=(-\infty;+\infty);$

5.3 $x=e^t,\ y=t^3,\ t\in(-\infty;+\infty);$ 5.4 $x=\dfrac{1}{\cos t},\ y=tgt,\ t\in(0;\pi/2);$

5.5 $x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t,\ t\in[0;2\pi];$

6. Для заданої функції *u(x,y)* визначити функцію двох змінних $v(x,y)$, яка дорівнює $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$, та обчислити її значення в точці $(x,y)=(1,1);$

6.1 $u=\ln(x+y^2);$ 6.2 $u=arctg\dfrac{x}{y};$ 6.3 $u=arctg\dfrac{x=y}{1-xy};$

6.4 $u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$ 6.5 $u=tg\dfrac{x^2}{y};$

7. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для неявної функції, заданої системою співвідношень:

7.1 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = uv \end{cases}$; 7.2 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$; 7.3 $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = kv \end{cases}$;

7.4 $\begin{cases} x = \dfrac{u^2 + v^2}{2} \\ y = \dfrac{u^2 - v^2}{2} \\ z = uv \end{cases}$; 7.5 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 v^2 \end{cases}$.

Тут u, v, z є залежними, а x та y – незалежними змінними.

8. Показати, що вказана функція задовольняє диференціальне рівняння в частинних похідних.

8.1 $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

8.2 $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

8.3 $u = \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{0.5}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$;

8.4 $u = \frac{y}{\left(y^2 - a^2 x^2\right)}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

8.5 $u = \ln(e^x \cdot e^y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$;

9. Перейти в диференціальних виразах до полярних координат ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$):

9.1 $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = w$; 9.2 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = w$;

9.3 $(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 = w;$ 9.4 $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = w$;

9.5 $y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}) = w$;

10. Обчислити суму ряду:

10.1 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots;$

10.2 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$

10.3 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots;$

10.4 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots;$

10.5 $\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \dots;$

11. Дослідити збіжність рядів, та при можливості обчислити їх суму точно або наближено.

11.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$

11.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n};$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$

11.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)};$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}};$

11.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$;

11.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n};$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$;

12. Розкласти функцію в ряд Маклорена.

12.1 $\dfrac{x}{e^x-1}$ *до члена з* x^4;

12.2 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ *до члена з* x^{12};

12.3 $\ln(\cos x)$ *до члена з* x^6;

12.4 $\ln\dfrac{\sin x}{x}$ *до члена з* x^7;

12.5 $\sin(\sin x)$ *до члена з* x^5;

13. Розкласти в ряд Тейлора в точці x=0, y=0 функцію двох змінних.

13.1 $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$;

13.2 $f(x,y)=e^x\sin y$;

13.3 $f(x,y)=e^x\cos y$;

13.4 $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$;

13.5 $f(x,y)=\ln(1+x)\ \ln(1+y)$;

14. Обчислити невизначені інтеграли:

14.1 $\displaystyle\int\frac{xdx}{(5-3x^2)^7}$; $\displaystyle\int\frac{(2x+5)dx}{(x^3-x^2+2x-2)}$; $\displaystyle\int x\arcsin 2xdx$;

14.2 $\displaystyle\int(x^2+5x)\ln xdx$; $\displaystyle\int\frac{dx}{(2\cos^2 x+3\sin^2 x)}$; $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

14.3 $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt[6]{7-x^2}}$; $\displaystyle\int\frac{(3x^2-4)dx}{(x+7)(x^2-2x+1)}$; $\displaystyle\int tg^4 2xdx$;

14.4 $\displaystyle\int\frac{(8-x)dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$; $\displaystyle\int arctg\sqrt{\frac{x}{2}}dx$; $\displaystyle\int\frac{x^4-1}{x^3+4x}dx$;

14.5 $\displaystyle\int(8x-1)\sin 2xdx$; $\displaystyle\int\sin^3 2xdx$; $\displaystyle\int\frac{(x^2-2x)dx}{x^3+6x^2+9x}$;

15. Обчислити визначені інтеграли:

15.1 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$; $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^6+2}}$; $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{\sin\frac{x}{2}}dx$;

15.2 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}4xtg^2xdx$; $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-4x}\cos 2xdx$; $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{1}{1+\cos x}dx$;

15.3 $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$; $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{x}dx$; $\int\limits_{-1}^{2,5} \frac{dx}{x^2-5x+6}$;

15.4 $\int\limits_{0}^{0,2} xe^{5x}dx$; $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$; $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$;

15.5 $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$; $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

16. Обчислити подвійний інтеграл:

16.1 $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$ де область Ω обмежена кривою $x^2+y^2=x+y$;

16.2 $\iint\limits_{\Omega}\sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}dxdy$ де область Ω обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

16.3 $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dxdy$ де область Ω обмежена кривою

$y^2=2x,\ x+y=4,\ x+y=12$;

16.4 $\iint\limits_{\Omega}xydxdy$ де область Ω обмежена кривою $x\ \ y\ \ =1,\ \ x+y=\frac{5}{2}$;

16.5 $\iint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{y^2}dxdy$ де область Ω обмежена прямими $x=2,\ y=x$ та гіперболою $xy=1$;

17. Обчислити потрійний інтеграл по множині ***E***, обмеженій даними поверхнями:

17.1 $\iiint\limits_{E}(x+yz)dxdydz,\ x=0, y=0, z=0, x=2, y=4,\ x+y+z=8;$

17.2 $\iiint\limits_{E}xy\sqrt{z}dxdydz,\ z=0, z=y,\ y=x^2, y=1;$

17.3 $\iiint\limits_{E}xyzdxdydz,\ y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy,\ z=0;$

17.4 $\iiint\limits_{E}(x^{2\cdot}+y^2+z^2)dxdydz,\ 3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$;

17.5 $\iiint\limits_{E}(x^2+y^2+z^2)dxdydz;\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ y^2+z^2=x^2, x\geq 0;$

18. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

18.1 $\int\limits_{\Gamma}(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})dl,\ \Gamma=\{(x,y): x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\};$

18.2 $\int\limits_{\Gamma}(x+y)dl,\ \Gamma=\{(x,y): x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}\};$

18.3 $\int\limits_{\Gamma}\sqrt{x^2+y^2}dl,\ \Gamma=\{(x,y): x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), 0\le t\le 2\pi\};$

18.4 $\int\limits_{\Gamma}x^2 dl,\ \Gamma -$ *верхня половина кола* $x^2+y^2=4;$

18.5 $\int\limits_{\Gamma}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \Gamma -$ *відрізок прямої* $2y-x+4=0$ від точки A(0,-2) до точки B(4,0);

19.Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

19.1 $\int\limits_{\Gamma}ydx+2xdy,\ \Gamma -$ *контур ромба зі сторонами* $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\pm 1,\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\pm 1;$

19.2 $\int\limits_{\Gamma}\frac{x}{x^2+y^2}dx-\frac{y}{x^2+y^2}dy,\ \Gamma=\{(x,y): x^2+y^2=r^2\};$

19.3 $\int\limits_{\Gamma}xdy-ydx,\ \Gamma=\{(x,y): x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3},\ t\in[0;+\infty)\};$

19.4 $\int\limits_{\Gamma}xdy-ydx,\ \Gamma=\{(x,y): x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[0;2\pi]\};$

19.5 $\int\limits_{\Gamma}xdy-ydx,\ \Gamma=\{(x,y): x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0;2\pi]\}$

20. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:

20.1 $\iint\limits_{S}\frac{1}{(1+x+z)^2},\ S-$ *частина площини* $x+y+z=1,$ розміщена у першому октанті.

20.2 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS,\ S-$*поверхня сфери* $x^2+y^2+z^2=a^2;$

20.3 $\iint\limits_{S}(x+y+z)dS,\ S-$ *частина поверхні сфери* $x^2+y^2+z^2=a^2, x\ge 0;$

20.4 $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS,\ S-$ *частина поверхні* $x^2+y^2=z^2,\ z\le 1;$

20.5 $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, S – *бічна поверхня конуса* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0,\ 0\le z\le b$;

21. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду:

21.1 $\iint\limits_S zdxdy$, S – зовнішня поверхня еліпсоїду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

21.2 $\iint\limits_S \frac{dxdy}{z}$, S – зовнішня поверхня сфери $x^2+y^2+z^2=1$;

21.3 $\iint\limits_S x^2dydz$, S – зовнішня поверхня частини параболоїда

$z=\frac{H}{R^2}(x^2+y^2),\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le H$;

21.4 $\iint\limits_S ydxdz$, S – зовнішня поверхня частини параболоїда

$z=x^2+y^2,\ 0\le z\le 2$;

21.5 $\iint\limits_S (z-x)dxdz$, S – внутрішня поверхня частини конусу

$z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 2$;

Завдання для самостійного виконання 3

1. Знайти вектор, що є розв'язком неповної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $A\overline{x}=\overline{b}$, і довжина якого дорівнює одиниці. Здійснити перевірку знайденого розв'язку шляхом підстановки.

2.1 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

2.2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & -18 & 11 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}$;

2.3 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$;

2.4 $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2.5 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

2. Знайти всі розв’язки рівняння в явному вигляді (у вигляді дійсних або комплексних чисел)

2.1 $x\sin x+2x^2+x^7=0$ 2.2 $x^8-x^3+x-2=0$ 2.3 $x^{10}-x^3-1=0$

2.4 $x^6e^x-x^5-1=0$ 2.5 $x^{10}-1=0$

3. Знайти раціональні корені многочлена

3.1 $6x^5+37x^4-52x^3-104x^2+102x-21$;

3.2 $8x^5+18x^4-41x^3-51x^2+51x-9$;

3.3 $24x^5+10x^4-x^3-19x^2-5x+6$;

3.4 $2x^4+7x^3-8x^2-14x+8$;

3.5 $2x^4-11x^3+x^2+22x-10$;

4. Знайти розв’язки системи алгебраїчних рівнянь:

4.1 $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5 \\ x^{-2}+y^{-2}=13 \end{cases}$ 4.2 $\begin{cases} x+y=5 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$ 4.3 $\begin{cases} y^2-xy=-12 \\ x^2-xy=28 \end{cases}$

4.4 $\begin{cases} u^2+uv=15 \\ v^2+uv=10 \end{cases}$ 4.5 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ xy=2 \end{cases}$

5. Знайти дійсні розв’язки рівняння.

5.1 $\sin 2x=\cos x\cos 2x$; 5.2 $2\sin^2 x+3\cos x=0$;

5.3 $x^2\sin x+\sin x+x^2\cos x+\cos x=0$;   5.4 $x^2\cos 2x=2\sin^2 x-1$;

5.5 $\sin^2 2x+\cos x\sin x+\sin 3x=0$;

6. Знайти розв'язок рекурентного рівняння з заданими початковими умовами та обчислити 20-й і 50-й члени рекурентної послідовності.

6.1 $f(n+1)=-4f(n)-7f(n-1)+0.5n$, $f(0)=1$, $f(1)=-2$;

6.2 $2f(n+1)=-3f(n)-4f(n-1)+0.25n$, $f(0)=2$, $f(1)=-1$;

6.3 $f(n+1)=-5f(n)-7f(n-1)-n$, $f(0)=3$, $f(1)=-2$;

6.4 $f(n+1)=-4f(n)-5f(n-1)+n^2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$;

6.5 $f(n+1)=-4f(n)-7f(n-1)+0.5n$, $f(0)=1$, $f(1)=-2$;

7. Знайти розв'язки нерівності.

7.1 $x(x-2)>2-3x^2$;   7.2 $x(2-x)\le 5-4x^2$;

7.3 $2(x-3)(1-2x)>6$;   7.4 $(2-x)(3-x)\le 2$;

7.5 $(3-2x)(1-2x)>6$;

8. Знайти розв'язки системи нерівностей:

8.1 $\begin{cases}(x-2)(x-3)(x-5)>0\\ |x+1|-|x-5|>1\end{cases}$ 8.2 $\begin{cases}(x+3)(x-3)(x-15)<0\\ |x+6|-|x-3|>3\end{cases}$

8.3 $\begin{cases}(x+5)(x-8)(x+1)>0\\ |x+6|-|x-4|>6\end{cases}$ 8.4 $\begin{cases}(x-12)(x+3)(x-10)>0\\ |x+3|-|x-15|>10\end{cases}$

8.5 $\begin{cases}(x+4)(x-13)(x+5)>0\\ |x+11|-|x-1|>2\end{cases}$

9. Знайти загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння

9.1 $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$;   9.2 $xyy'=y^2+2x^2$;

9.3 $(x^2+y^2)-xyy'=0$;   9.4 $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}$;

9.5 $y'=\dfrac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$;

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

10.1 $(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$;

10.2 $(x^2 + y^2)dx - xdy = 0$;

10.3 $(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$;

10.4 $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$;

10.5 $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$;

11. Знайти загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

11.1 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$

11.2 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$

11.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases}$

11.4 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases}$

11.5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z - x + y \end{cases}$

12. Знайти розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку.

12.1 $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}},\ y(0) = \ln 4,\ y'(0) = 3(1-\ln 2)$;

12.2 $y'' + 4y = 8ctg2x,\ y(\dfrac{\pi}{4}) = 5,\ y'(\dfrac{\pi}{4}) = 4)$;

12.3 $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}},\ y(0) = 0\ \ y'(0) = 0$;

12.4 $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

12.5 $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}},\ y(0) = 1 + 8\ln 2,\ y'(0) = 14\ln 2$;

13. Знайти розв’язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + by = f(x),\ \ h_1y(0) - h_2y'(0) = 0,\ \ H_1y(1) + H_2y'(1) = 0.$$

13.1 $a = 1, b = -2,\ h_1 = 1, h_2 = 1, H_1 = 1, H_2 = 0,\ f(x) = x(1-x)$;

13.2 $a = 2, b = -3,\ h_1 = 0, h_2 = 2, H_1 = 0, H_2 = 2,\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x)$;

13.3 $a = -2, b = 3,\ h_1 = 1, h_2 = 2, H_1 = 1, H_2 = 2,\ f(x) = \sin(x)(1-x)$;

13.4 $a = 4, b = -1,\ h_1 = 1, h_2 = 2, H_1 = 3, H_2 = 2,\ f(x) = \frac{1}{2}x^2\sin(1-x)$;

13.5 $a = 5, b = -2,\ h_1 = 0, h_2 = 1, H_1 = 0, H_2 = 1,\ f(x) = \frac{1}{2}x^2\sin^2(1-x)$;

14. Знайти розв’язок граничної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь

14.1 $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - z - y + 2t^2 \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z - \sin t \\ \frac{dz}{dt} = 2z - x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(1) = 1 \end{cases}$$

14.2 $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z + 3t^2 \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z - \cos t \\ x(0) = 1, y(1) = 2, z(1) = 1 \end{cases}$$

14.3 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y - 2t^2 + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y + \sin t \\ x(0) = 0, y(0) = 1, z(1) = 2 \end{cases}$ 14.4 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - z - y + (t-1)^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + z + \sin t^2 \\ x(1) = 1, y(0) = 0, z(1) = 2 \end{cases}$

14.5 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + z + \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z + \dfrac{t^2}{2} + 1 \\ x(1) = 2, y(1) = 0, z(0) = 1 \end{cases}$

15. Знайти функцію $\phi(x)$, яка задовольняє інтегральному рівнянню

15.1 $\phi(x) = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 + y^2)\phi(y)dy + x^2$ 15.2 $\phi(x) = \int\limits_{0}^{1} (x\sin y)\phi(y)dy + 1$

15.3 $\phi(x) = \int\limits_{-1}^{1} (x^2 \sin y)\phi(y)dy + x^3$ 15.4 $\phi(x) = \int\limits_{0}^{1} e^{x+y}\phi(y)dy + \sin x$

15.5 $\phi(x) = \int\limits_{-1}^{1} \phi(y)\cos x dy + x$

Завдання для самостійного виконання 4

1. На одному полі побудувати графіки трьох функцій, з використанням різних стилів їх зображення, різних символів та кольорів.

1.1 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - |x|)$, $f(x) = x\, arcctg|x|$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{(1+x)^2}{|x|}}$;

1.2 $f(x) = |x|\, arctgx$, $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + |x|)$, $f(x) = \arccos\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$;

1.3 $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{|x|}}$, $f(x) = \sqrt{\left|1 - e^{-x^2}\right|}$, $f(x) = |x - arctg\, x|$;

1.4 $f(x)=|x-3|\sqrt{x}$, $f(x)=ar\sin\frac{2x}{1+x^2}$, $f(x)=\frac{e^x}{|1+x|}$;

1.5 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$, $f(x)=x\ln|x|$, $f(x)=\ln\cos x$;

2. На одному полі побудувати графіки функцій, деякі з яких задані явно, а деякі – неявно (наприклад, вираз x=3 задає неявну функцію, графіком якої є відповідна вертикальна пряма).

2.1 $y=x\sin x,\ x=\pi,\ x=-\pi;$

2.2 $y=x\cos x,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=-\frac{\pi}{2};$

2.3 $y=\frac{\sin x}{x},\ x^2+y^2=\pi^2;$

2.4 $y=\ln x,\ |x|+|y|=1;$

2.5 $y=|\ln(x-1)|,\ x=1;$

3. Побудувати графік функції, що задана параметрично.

3.1 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ t\in[0,\pi];$

3.2 $x=2\cos t,\ y=5\sin t,\ t\in[0,\pi];$

3.3 $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ t\in[0,2\pi];$

3.4 $x=1+\cos t, y=1+\sin t,\ t\in[0,\pi];$

3.5 $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t\ ,\ t\in[0,\ 2\pi];$

4. На одному полі побудувати графіки функцій, заданих в полярній системі координат, використати для їх зображення лінії різного кольору та різної товщини.

4.1 $\rho^2=a^2\cos 2\theta,\quad r=3+2\cos 2\theta$;

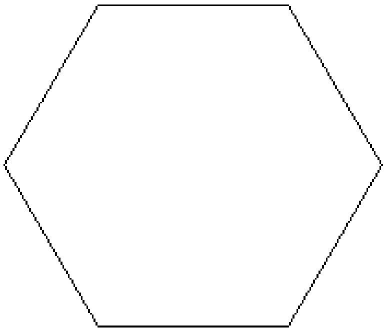
4.2 $\rho=a\sin 3\theta,\ \rho=2(1+\cos\theta)$;

4.3 $\rho=a\sqrt{\cos 2\theta},\ \theta\in[0,\pi/4],\ \rho=e^{2\theta},\theta\in[0,3];$

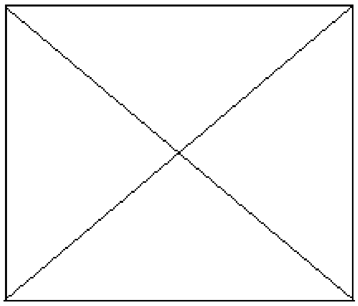
4.4 $\rho=2(1+\cos^2\frac{\theta}{2}),\ \rho=e^{-\theta},\theta\in[0,\ \pi];$

4.5 $\rho=2\sin^2\frac{\theta}{2},\ \rho=4\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos\theta$;

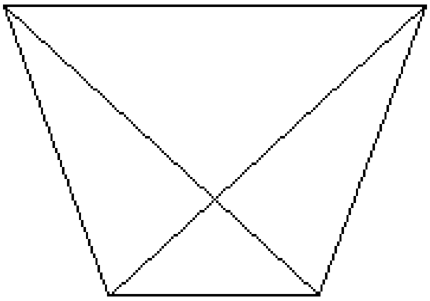
5. Зобразити у вигляді полігону наступні фігури.



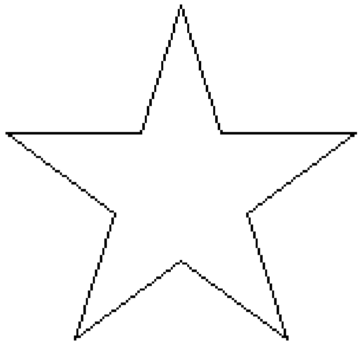
5.1



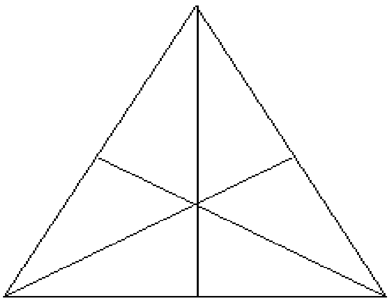
5.2



5.3



5.4



5.5

Завдання 5.1 та 5.4 бажано виконувати з використанням зв’язку між прямокутною та полярною системою координат.

6. За допомогою функції ***plot3d*** побудувати наступні поверхні, використовуючи прямокутну систему координат та різні стилі зображення частин поверхні.

6.1 Поверхню циліндра з радіусом основи 2 та висотою 4, всередині якого лежить конус з радіусом основи 1 і висотою 4. Площина нижньої основи циліндру та конусу співпадають.

6.2 Поверхню нижньої півсфери радіусу 2, на верхньому перерізі якої розміщений циліндр з радіусом основи 2 та висотою 1.

6.3 Поверхню циліндра з радіусом основи 2 та висотою 4, всередині якого лежить конус з радіусом основи 1 і висотою 4. Площина верхньої основи циліндру та конусу співпадають.

6.4 Поверхню усіченого конусу з радіусом нижньої основи 2, верхньої основи 4 та висотою 2, на нижній основі циліндру лежить верхня півсфера з радіусом основи 2.

6.5 Поверхню параболоїда обертання з вершиною внизу, висотою 4 та радіусом найбільшого кола 2, всередині якого розташований конус, вершина якого співпадає з вершиною параболоїда висоти 4 та радіусом верхньої основи 2.

7. Провести підготовчий етап для знаходження об’ємів тіл, обмежених заданими поверхнями. Для цього потрібно наочно відобразити відповідну частину простору (яка містить тіло або його частину) так, щоб можна було зрозуміти, в яких межах по якій координаті буде проводитись інтегрування (один з підходів – використати команду *implicitplot3d*).

7.1 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1, z=\dfrac{1}{2}x, z=0;$

7.2 $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=2x;$

7.3 $x+y+z^2=1, x=0, y=0, z=0;$

7.4 $z=\dfrac{x^2}{4}+y^2, z=1;$

7.5 $(z-1)^2=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}, z=0;$

8. Використовуючи сферичну систему координат, побудувати поверхні, що задаються рівняннями:

8.1 $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2,\ z>0;$

8.2 $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2+y^2-z^2,\ x>0;$

8.3 $(x^2+y^2)^2+z^4=1,\ z>0;$

8.4 $(x^2+y^2+z^2)^2=\dfrac{z^2}{x^2+y^2},\ z>0$

8.5 $(x^2+y^2+z^2)^2=x,\ z>0$

9. Використовуючи циліндричну систему координат, побудувати поверхні:

9.1 $(z-1)^2=x^2+y^2,\ 1<z<3;$

9.2 $(x^2+y^2)^2+z^4=1,\ z<0;$

9.3 $2z=4-x^2-y^2;$

9.4 $x^2+y^2+z^2=2z,\quad 0<z<1;$

9.5 $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2+y^2,\ \ 0<z<1/2$;

10. Побудувати поверхні в параметричній системі координат, використовуючи узагальнену сферичну систему координат для параметризації, якщо рівняння поверхні записане в прямокутній системі координат.

Узагальнена сферична система координат має вигляд:

$x = ar\cos\varphi\sin\theta$

$y = br\sin\varphi\sin\theta$

$z = cr\cos\theta$

Рівняння поверхні в прямокутній системі координат має вигляд:

10.1 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x}{h}$, де a,b,c,h - додатні числові параметри;

10.2 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, a,b,c - додатні числові параметри;

10.3 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4} = 1$, a,b,c - додатні числові параметри;

10.4 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}$, a,b,c - додатні числові параметри;

10.5 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}+1$, a,b,c - додатні числові параметри;

11. Маючи функцію *y(x,t)*, що залежить від просторової змінної *x* та від часової змінної *t*, показати анімований відносно *t* графік цієї функції.

11.1 $y(x,t) = \sin(x-t)\sin(\sqrt{t}), x\in[-10,10], t\in[0,20]$;

11.2 $y(x,t) = x\cos\left(x\dfrac{t}{7}\right), x\in[-10,10], t\in[0,20]$;

11.3 $x^3+y^3-txy=0, x\in[-5,5], y\in[-5,5], t\in[0,10]$ (функцію задано неявно);

11.4 $(x+y)^3-3t(x-y)=0, x\in[-5,5], y\in[-5,5], t\in[0,10]$ (функцію задано неявно);

11.5 $(x+y)^3-3t(xy^2)=0, x\in[-5,5], y\in[-5,5], t\in[0,10]$ (функцію задано неявно);

Завдання для самостійного виконання 5

1. Обчислити суму коренів ортогональних поліномів та побудувати графіки цих поліномів.
   1.1 Чебишева 6 степеня першого роду;
   1.2 Чебишева 7 степеня другого роду;
   1.3 Ерміта 5 степеня;
   1.4 Лежандра 7 степеня;
   1.5 Лагера 6 степеня з параметром $\alpha = 1$
2. Написати процедуру, яка перевіряє попарну ортогональність системи функцій відносно зваженого скалярного добутку в просторі *L2[a,b]* з вагою *p* $\left(\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) p(x) dx \right)$. Процедура повинна приймати як параметри список функцій, межі проміжку та вагову функцію, і видавати числову матрицю відповідних скалярних добутків. Використовуючи цю процедуру, перевірити ортогональність заданої системи з *N* функцій. (Для ортогональної системи всі елементи матриці, окрім діагональних, повинні дорівнювати нулю).
   2.1 Поліноми Чебишева першого роду на проміжку [-1,1], *N*=4, $p = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
   2.2 Поліноми Чебишева другого роду на проміжку [-1,1], *N*=5, $p = \sqrt{1 - x^2}$
   2.3 Поліноми Ерміта на проміжку$(-\infty, \infty)$, *N*=4, $p = e^{-x^2}$
   2.4 Поліноми Лежандра на проміжку*[-1,1]*, *N*=6, $p = 1$
   2.5 Поліноми Лагера з параметром *a=0* на проміжку $(0, \infty)$, *N*=6, $p = e^{-x}$
3. Заданий поліном представити в базисі вказаних ортогональних поліномів та застосувати до результату диференціальний оператор *L*
   3.1 $5x^6 - 3x^2 + 2x - 1$ за поліномами Ерміта, $L = x^2 \frac{d}{dx} + x$;
   3.2 $7x^8 + 4x^5 - x^3 + x$ за поліномами Лежандра, $L = x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$;

3.3 $5x^6+4x^5-6x^2+1$ за поліномами Чебишева другого роду, $L=x\dfrac{d^2}{dx^2}+x\dfrac{d}{dx}$,

3.4 $5x^6-3x^2+2x-1$ за поліномами Лагера з параметром, $\alpha=2$; $L=x^2\dfrac{d^2}{dx^2}$;

3.5 $7x^8+4x^5-x^3+x$ за поліномами Чебишева першого роду, $L=x^3\dfrac{d^2}{dx^2}$;

4. Побудувати два поліноми (степені не вище N-1) найкращого середньоквадратичного наближення в просторі $L_2[a,b]$ до функцій $f_1(x)=x^5-x+3$ та $f_2(x)=x^5-x+3+\sin(5x)$, використовуючи ортогональні поліноми. Для кожного з них зобразити на одному полотні графік вхідної функції та побудованого поліному.

Схема побудови:

Розглянемо функції вигляду $g(x)=\sum_{i=0}^{N-1}c_i\varphi_i(x)$, *де* $\varphi_i(x)$ *- поліном степені i (тип поліномів згідно варіанту), а* c_i *- невідомі дійсні числа. Неважко довести, що елементом найкращого наближення для функції f(x) серед таких функцій буде та, де* c_i, *i=0..N-1 є розв'язками наступної системи лінійних рівнянь:* $c_i\sum_{j=0}^{N-1}\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle=\langle f,\varphi_i\rangle, i=0..N-1$.

У нашому випадку, функції $\varphi_i, i=1..N-1$ *є попарно ортогональними, тобто* $\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle=0\ \forall i\neq j$, *і СЛАР вироджується в систему рівностей* $c_i\langle\varphi_i,\varphi_i\rangle=\langle f,\varphi_i\rangle, i=0..N-1$, *з якої можна безпосередньо обчислити* c_i.

Нагадаємо, що для того, щоб відповідні поліноми були ортогональними, треба використовувати зважений варіант скалярного добутку в $L_2[a,b]$, а саме $\langle u,v\rangle=\int_a^b u(x)v(x)\rho(x)dx$, де ваговий множник $\rho(x)$ має свій вигляд для кожного з типів ортогональних поліномів.

Варіанти:

4.1 N=6, поліноми Чебишева другого роду, $[-1,1]$, $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$

4.2 N=6, поліноми Чебишева першого роду, $[-1,1], \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.3 N=7, поліноми Лагера з параметром *a=0*, проміжок - $(0,+\infty), \rho(x)=e^{-x}$

4.4 N=6, поліноми Ерміта на проміжку $(-\infty,\infty), \rho=e^{-x^2}$

4.5 N=7, поліноми Лежандра на проміжку *[-1,1]*, $\rho=1$

5. Розкласти задану функцію $f(x)$ на проміжку $[0, l]$, в узагальнений ряд Фур'є за функціями Бесселя $J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x)$ виду $\sum_{n=1}^{\infty} a_k J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x)$ де $a_k=\frac{\int_0^l f(x)J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x)xdx}{\int_0^l (J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x))^2 xdx}$, μ_n - n – й за номером додатній корінь функції Бесселя $J_\nu(x)$. Знайти перші N членів ряду. Вивести графіки N – часткової суми ряду Фур'є та вказаної функції.

5.1 $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{l})x^3,\ \nu=3,\ \ N=5, l=2;$

5.2 $f(x)=\cos(\frac{\pi x}{l})x^2,\ \nu=1,\ \ N=6, l=4;$

5.3 $f(x)=\ln(1+\frac{x}{l})x^3,\ \nu=4,\ \ N=4, l=2;$

5.4 $f(x)=tg(\frac{\pi x}{4l})(x-l)^2,\ \nu=3,\ \ N=5, l=2;$

5.5 $f(x)=\ln(1+(\frac{x}{l})^3)(x-l)\ ,\ \nu=2,\ \ N=5, l=1;$

6. Знайти обмежений розв'язок звичайного диференціального рівняння $\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx})+n(n+1)y=0,\ -1<x<1,\ \ y(1)<\infty$ і такий, що $y(1)=1$

6.1 $n=6;$

6.2 $n=8;$

6.3 $n=7;$

6.4 $n=5;$

6.5 $n=10$;

7. Знайти розв’язок диференціального рівняння (задачі Коші) $\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx})+(\eta(\eta+1)-\frac{\mu^{2.}}{(1-x^2)})y=0,\ -1<x<1$

7.1 $\eta=\frac{5}{3},\ \mu=\frac{7}{4},\ y(0)=1,\ \frac{dy(0)}{dx}=0$;

7.2 $\eta=\frac{7}{2},\ \mu=\frac{5}{4},\ y(0)=0,\ \frac{dy(0)}{dx}=1$;

7.3 $\eta=\frac{9}{2},\ \mu=\frac{11}{7},\ y(0.3)=0,\ \frac{dy(0.3)}{dx}=0.9$;

7.4 $\eta=\frac{13}{6},\ \mu=\frac{12}{7},\ y(0.4)=0,\ \frac{dy(0.4)}{dx}=0.7$;

7.5 $\eta=\frac{13}{6},\ \mu=\frac{12}{7},\ y(0.4)=0,\ \frac{dy(0.4)}{dx}=0.7$;

8. Знайти розв’язок диференціального рівняння $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}\frac{dy}{dx})+2ne^{-x^2}y(x)=0$, такий, що при $x\to\infty$ зростає не швидше x^s, де s –довільне додатне число. Порівняти цей розв’язок з поліномами Ерміта.

8.1 n=4; 8.2 n=6; 8.3 n=7; 8.4 n=5; 8.5 n=9;

9. Знайти розв’язок диференціального рівняння $\frac{d}{dx}(xe^{-x}\frac{dy}{dx})+ne^{-x}y(x)=0$, такий, що при $x\to\infty$ зростає не швидше x^s де s –довільне додатне число, та задовольняє умові $y(0)<\infty$

9.1 n=6; 9.2 n=4; 9.3 n=5; 9.4 n=9; 9.5 n=7;

10. Використовуючи твірну функцію $\Phi(x,t)$ для відповідного класу ортогональних поліномів, представити її у вигляді степеневого ряду по змінній t виду $\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\mathrm{P}_n(x)$. Перевірити, що коефіцієнт при t^n співпадає з відповідним ортогональним поліномом n степені змінної x.

10.1 Обчислити $P_{10}(x)$ для твірної функції $\Phi(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ поліномів Лежандра $P_n(x)$.

10.2 Обчислити $L_{12}^2(x)$ для твірної функції $\Phi(x,t)=(1-t)^{-3}e^{-\frac{xt}{1-t}}$ поліномів Лагера $L_n^2(x)$.

10.3 Обчислити $H_9(x)$ для твірної функції $\Phi(x,t)=e^{-2xt-t^2}$ поліномів Ерміта $H_n(x)$.

10.4 Обчислити $T_9(x)$ для твірної функції $\Phi(x,t)=\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2}$ поліномів Чебишева $T_n(x)$.

10.5 Обчислити $U_9(x)$ для твірної функції $\Phi(x,t)=\dfrac{1}{1-2tx+t^2}$ поліномів Чебишева $U_n(x)$.

Завдання для самостійного виконання 6

1. Створити квадратну матрицю розмірності N, в якій позадіаональні елементи з індексами (i,j) мають значення f(i,j), а діагональні елементи з індексами (i,i) мають значення g(i).
   1.1 N=3, f(i, j) = 1/(i+j), g(i)=4;
   1.2 N=4, f(i, j) = 1/ln(i+j+1), g(i)=2*I;
   1.3 N=5, f(i, j) =i*j/10, g(i)=i+5;
   1.4 N=3, f(i, j) =sin(i+j), g(i)=2*I;
   1.5 N=4, f(i, j) =1/(i+j), g(i)=5/(i+i).
2. Створити квадратну матрицю відповідного розміру, верхня трикутна частина якої ініціалізується на базі списку
   2.1 [1, 2, 3], [1.5,2.5], [3];
   2.2 [4, 2, 0], [3,1], [5];
   2.3 [1/2, 1/3, 1/4], [1/5,1/6], [1/7];

2.4 [5, 4, 3], [2,1], [1];

2.5 [1, 1,1], [1,1], [1];

3. Ініціалізувати дійсну 2*k*+1 - діагональну матрицю розміру NxN так, щоб ненульові елементи в рядку приймали значення відповідно a_1, a_2, … , a_{2k+1}.

   а) Реалізувати найпростішим шляхом

   б) Реалізувати таким чином, щоб можна було змінювати лише розмірність матриці (параметр N), і отримувати аналогічну матрицю нової розмірності без зміни будь-яких інших параметрів

   3.1 a_1=1, a_2=4, a_3=2; N = 5, k=1;

   3.2 a_1=5, a_2=1, a_3=3; N = 4, k=1;

   3.3 a_1=1, a_2=1, a_3=1; N = 5, k=1;

   3.4 a_1=1, a_2=2, a_3=3; N = 6, k=1;

   3.5 a_1=3, a_2=2, a_3=1; N = 4, k=1;

4. Створити вектор-стовпчик та вектор-рядок розмірності N з елементами v[i] = f(i)

   4.1 f(i) = i*2, N=9;

   4.2 f(i) = i^2, N=6;

   4.3 f(i) = i/3, N=11;

   4.4 f(i) = i+i/2, N=9;

   4.5 f(i)=i, N=5;

5. Знайти норму L_P для вектора з завдання 4

   5.1 p=2;

   5.2 p=3;

   5.3 p=∞;

   5.4 p=10;

   5.5 p=1;

6. Для двох векторів *a* та *b* з простору R^3:

   i. знайти їх скалярний добуток

   ii. знайти вектор *c* = *a*x*b* (векторний добуток)

iii. знайти кут між векторами a та c (рекомендація: див. функцію VectorAngle)

iv. побудувати вектор $d = (x,y,z)$ так, щоб він був ортогональним до вектора b

v. намалювати вектори a,b,c та d (рекомендація: використати функцію arrow з пакета plots)

6.1 a=(1,2,3), b=(2,1,2), y=3, z=1;

6.2 a=(2,2,2), b=(3,2,1), y=1, z=1;

6.3 a=(1,0,0), b=(0,1,0), y=2, z=1;

6.4 a=(1,2,1), b=(3,1,2), y=3, z=3;

6.5 a=(1,1,3), b=(1,1,2), y=1, z=2;

7. Довести наступні властивості, де A,B,C матриці 3x3; x,y,z – вектори розмірності 3, а u,v,w – скаляри:

7.1 (A+B)C=AC+BC;

7.2 $Ax = x_1A[1]+x_2A[2]+x_3A[3]$;

7.3 (u+v)A=uA+vA;

7.4 (A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD;

7.5 $A(x+y)=Ax+Ay$;

8. Для заданої матриці A знайти, який вектор-рядок має мінімальну довжину, а який максимальну (в класичному евклідовому просторі)

8.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

8.2 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$;

8.3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

8.4 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

8.5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

9. Створити символьну квадратну матрицю A розмірності N та вектори відповідної довжини $B=(b_{ij})$ і $X=(x_{ij})$.

   i. Знайти (в символьному вигляді) визначник матриці та обернену матрицю. Перевірити, що вона дійсно є оберненою.

   ii. Відобразити «розгорнутий» вигляд запису системі лінійних рівнянь A*X=B ($a_{11}*x_1+\ldots+a_{1n}*x_n=b_1$ і т.д.)

   iii. Продемонструвати варіант метода Гауса для системи A*X=B в символьному вигляді (рекомендація: записати розширену матрицю системи, звести до діагонального вигляду допомогою ReducedRowEchelonForm, виділити розв'язок, як відповідний стовпчик отриманої матриці). Показати, що отриманий вектор дійсно є розв'язком системи.

9.1 N = 3, символ елементу матриці – a;

9.2 N = 2, символ елементу матриці – u;

9.3 N = 3, символ елементу матриці – v;

9.4 N = 2, символ елементу матриці – w;

9.5 N = 3, символ елементу матриці – p;

10. Ортогоналізувати матрицю A. Перевірити властивість ортогональності отриманих векторів-рядків. Розкласти за цими векторами заданий вектор b.

10.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b = (1,2,3);

10.2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b = (3,2,1);

10.3 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b = (1,1,3);

10.4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b = (1,0,1);

10.5 A=$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, b = (2,2,3);

11. Перевірити матрицю A на симетричність, ортогональність і додатньовизначеність.
    a. З використанням будь-яких функцій
    b. Без використання функцій IsDefinite, IsOrthogonal (використати критерій Сильвестра). Пересвідчитись, що результати співпадають.

11.1 A = [[1,2], [2,1]];
11.2 A = [[1,2,3], [2,1,2], [3,2,1]];
11.3 A = [[1,0,1], [0,1,1], [1,1,1]];
11.4 A = [[10,1], [1,10]];
11.5 A = [[2,1,1], [1,2,0], [1,2,2]];

12. Знайти ранг матриці A. Навести приклад модифікації (бажано як найменшої кількості) елементів матриці, яка призведе до зміни рангу.

12.1 A = [[1,2], [2,1]];
12.2 A = [[1,2,3], [2,1,2], [3,2,1]];
12.3 A = [[1,0,1], [0,1,1], [1,1,1]];
12.4 A = [[10,1], [1,10]];
12.5 A = [[2,1,1], [1,2,0], [1,2,2]];

13.

a) Довести, що визначник матриці Вандермонда розмірності n для точок [x_1, x_2,… x_n] дорівнює добутку попарних різниць цих точок (в символьному вигляді).

b) Маючи на вході вектори X та Y, що задають таблицю з n точок (x_i,y_i), побудувати поліном степені n-1, який проходить через ці точки.
Відобразити формулу та графік отриманого поліному, і, на тому ж полотні, відобразити вхідні точки.
Рекомендація: скласти систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів шуканого полінома. Матриця системи – це матриця Вандермонда для точок x_i. Вектор правої частини – вектор значень y_i. Розв’язок системи – вектор коефіцієнтів a_i при степенях полінома, що проходить через задані точки.
Посилання для інформації:

https://uk.wikipedia.org/wiki/Поліноміальна_інтерполяція

Приклад-пояснення:

Задано точки (x_1=1,y_1=2), (x_2=2,y_2=5), (x_3=3,y_3=10). Можемо вважати, що на вході є два вектори – X = (1,2,3), Y=(2,5,10). Точок три, отже, поліном буде мати степінь два (загальний вигляд – $P(x)=a_1+a_2x+a_3\,x^2$). Нам потрібно, щоб він пройшов через задані точки – отже, записуємо це у вигляді системи з трьох рівнянь $P(x_1)=y_1$; $P(x_2)=y_2$; $P(x_3)=y_3$:

$$\begin{cases} a_1 + 1 * a_2 + 1^2 a_3 = 2 \\ a_1 + 2 * a_2 + 2^2 a_3 = 5 \\ a_1 + 3 * a_2 + 3^2 a_3 = 10 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо вектор (1,0,1) – тобто, $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=1$, і шуканий поліном має вигляд $P(x)=1+x^2$

13.1 n=5, X=(-2,-1,0,1,2), Y=(y_i), $y_i=\sin(x_i)$;
13.2 n=7, X=(-3,-2,-1,0,1,2,3), Y=(y_i), $y_i=\cos(x_i)$;
13.3 n=5, X=(-2,-1,0,1,2), Y=(y_i), $y_i=x_i - 2\cos(x_i)$;
13.4 n=7, X=(-3,-2,-1,0,1,2,3), Y=(y_i), $y_i=x_i + \sin(x_i)$;
13.5 n=7, X=(-3,-2,-1,0,1,2,3), Y=(y_i), $y_i=2 - \sin(x_i)$;

14. Побудувати поліном найкращого середньоквадратичного наближення степені M за вхідними даними задачі 13. Відобразити його формулу та графік, також відобразивши і точки, за якими його побудовано (на відміну від задачі 13, цей поліном не обов'язково проходить через точки).

14.1 M=2;

14.2 M=3;

14.3 M=2;

14.4 M=3;

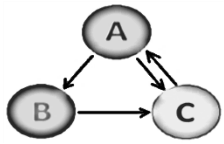
14.5 M=3;

15. Один з базових алгоритмів ранжування (обчислення «важливості») веб-сторінок має назву PageRank. В спрощеному випадку він виходить з того, що найбільш важливою є та сторінка, на якій веб-серфер може опинитися з найбільшою імовірністю в результаті переходу по посиланням між сторінками. Обчислення такої ймовірності на к-му кроці зводиться до піднесення матриці

переходів М до відповідної степені. (див., наприклад, https://uk.wikipedia.org/wiki/PageRank).

Завдання – для наведеного веб-графу обчислити ймовірності знаходження користувача на кожному з вузлів після 10 кроків по мережі. Вважаємо, що початкова ймовірність знаходження користувача в будь-якому з вузлів однакова, і дорівнює 1/n, де n – кількість вузлів.

Приклад-пояснення:

Нехай маємо веб-граф з трьох сторінок: 

Тоді матриця переходів буде мати наступний вигляд: M = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$. А саме:

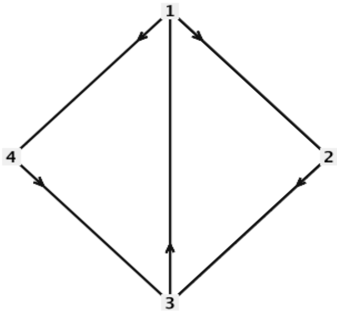
(a) Перший рядок відповідає сторінці «А» – на неї посилається лише сторінка «С», і зі сторінки «С» виходить лише одне посилання, тому вона всю свою вагу «віддає» сторінці «А» (елемент матриці [1,3] дорівнює 1).

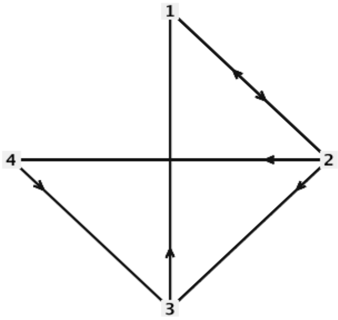
(b) Другий рядок – сторінка «В». На неї посилається сторінка «А», яка має два вихідних посилання, отже, кожне з них має вагу 1/2.

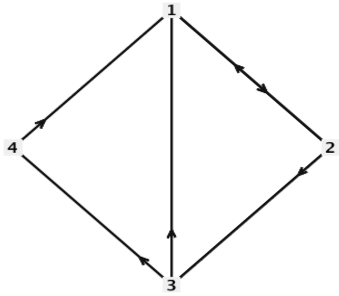
(c) Аналогічно, третій рядок – сторінка «С», на яку посилається «А» (елемент матриці [3,1]) і сторінка «В» (елемент матриці [3,2]).

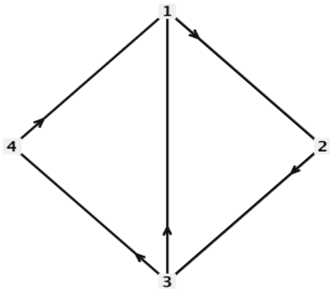
На початку вектор імовірностей знаходження користувача на цих сторінках має вигляд X_0=(1/3, 1/3, 1/3). Після першого кроку, ця ймовірність буде $X_1=M*X_0$. На другому – $X_2=M*X_1=M^2*X_0$, і так далі.

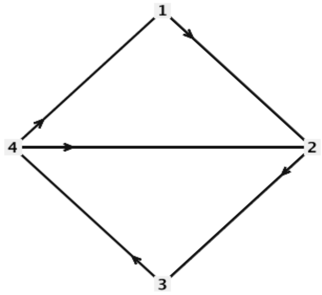
Варіанти графів (1 – 5):











16. Знайти ранжування веб-сторінок в задачі 15. Ранг відповідної сторінки - це компонента власного вектора матриці M, що відповідає власному значенню 1.

Завдання для самостійного виконання 7

1. Побудувати інтерполяційний поліном $L_n(x)$ для заданої функції, відобразити графік функції і поліному на одному полотні різними кольорами, а також провести вказані додаткові дослідження:

1.1 $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$ на проміжку [0.45;0.50] за рівновіддаленими вузлами n=5, n=10. Обчислити $L_5(0.4555)$, $L_5(0.4756)$.

1.2 $f(x) = \frac{1}{1+40x^2}, -1 \le x \le 1$ в точках а) рівновіддалених вузлів; б) вузлів; що є нулями полінома Чебишева 1–го роду, $n = 5$.

1.3 $f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)e^x}{x}, 0 < x \le 2, f(0) = 0$ по системі рівновіддалених вузлів , $n = 11, n = 21$, Обчислити значення інтерполяційного багаточлена в точках, що лежать посередині між вузлами інтерполяції, порівняти з точним значення функції.

1.4 $f(x)=Sinc(5x),\ -2\le x\le 2$ де $Sinc(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ по системі рівновіддалених вузлів, $n=11, n=21$, Обчислити значення інтерполяційного багаточлена в точках, що лежать посередині між вузлами інтерполяції, порівняти з точним значення функції.

1.5 $f(x)=e^{-\omega^2x^2},\ -1\le x\le 1,\ \omega=\overline{1{,}4}$ по системі вузлів; що є нулями полінома Чебишева 1 –го роду, $n=11$, $n=20$.

2. Побудувати лінійний та кубічний сплайни, що інтерполюють значення функції $f(x)$ з попереднього завдання, відобразити їх на одному полотні з функцією $f(x)$.

3. Побудувати дробово-раціональний інтерполянт, степінь чисельника *n*, степінь знаменника *m*, до заданої функції, обравши на заданому проміжку потрібну кількість рівномірно розподілених точок для інтерполяції. Відобразити графік функції і інтерполянта на одному полотні.

3.1 $f(x)=arctgx,\ x\in[-1{,}1]$, *n*=3, *m*=4;

3.2 $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x\in[-1{,}1]$, *n*=2, *m*=3;

3.3 $f(x)=\sin(x), x\in[0{,}2\pi]$, *n*=3, *m*=4;

3.4 $f(x)=x\sin(x),\ x\in[-\pi,\pi]$, *n*=2, *m*=3;

3.5 $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0{,}1]$, *n*=2, *m*=3;

4. Для заданої функції побудувати поліном найкращого рівномірного наближення третього степеня та знайти відхилення. Відобразити графік функції і полінома на одному полотні.

4.1 $f(x)=3x^4-2x^2+x+1\ ,x\in\ [0{,}1]$;

4.2 $f(x)=x^4-2,\ \ x\in[0{,}1]$;

4.3 $f(x)=2x^4,\ x\in[-1{,}1]$;

4.4 $f(x)=5x^4+x-4,\ \ x\in[2{,}5]$;

4.5 $f(x) = x^4, x \in [0,1]$;

5. На заданій множині точок, використовуючи рівномірну сітку на відрізку $[-1, 1]$ побудувати багаточлен найкращого середньоквадратичного наближення по вказаній системі ортогональних поліномів. Відобразити графік функції і побудованого полінома на одному полотні.

5.1 $f(x) = x^2 \sin(\pi x)$, $x_i = -1 + ih,\ i = \overline{0..N},\ h = \dfrac{2}{N}$, за поліномами Чебишева першого роду.

5.2 $f(x) = x\cos(\pi x)$, $x_i = -1 + ih,\ i = \overline{0..N},\ h = \dfrac{2}{N}$,за поліномами Чебишева другого роду.

5.3 $f(x) = x\,arctg(x)$, $x_i = -1 + ih,\ i = \overline{0..N},\ h = \dfrac{2}{N}$, за поліномами Лежандра.

5.4 $f(x) = arctg(x^3)$, $x_i = -1 + ih,\ i = \overline{0..N},\ h = \dfrac{2}{N}$, за поліномами Гегенбауера з $\lambda = \dfrac{3}{2}$.

5.5 $f(x) = x\,tg(x)$, $x_i = -1 + ih,\ i = \overline{0..N},\ h = \dfrac{2}{N}$, за поліномами Лежандра.

6. Використовуючи процедури чисельного інтегрування, експериментальним шляхом обрати метод для обчислення матриці, та обчислити її з п’ятьма вірними знаками після десяткової крапки.

$a_{i,j} = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} K(x,y)\varphi_i(y)\varphi_j(x)\rho(x)dx\ \ i,j = \overline{1..n}$ для заданого ядра $K(x,y)$,

заданої системи функцій $\varphi_i(x),\ i = \overline{1..n}$, та вагової функції $\rho(x) \ge 0$.

Варіант	$K(x,y)$	$\varphi_i(x)$	$\rho(x)$
6.1	$\sin(\sqrt{x^2 + y^2}$	$T_i(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$

6.2	$\ln(1+x^2y^2)$	$U_i(x)$	$\sqrt{1-x^2}$
6.3	$tg(\frac{x^2+y^2}{2})$	$P_i(x)$	1
6.4	$arctg(1-x^2-y^2)$	$G_i^{(2)}(x)$	$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$
6.5	$xy/(1+x^2y^2)$	$T_i(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$

7. Чисельно розв'язати систему нелінійних рівнянь. Зобразити графіки функцій, з яких складається система, та знайдений розв'язок на одному полотні (розв'язок можна зобразити як перетин двох прямих).

7.1 $\begin{cases} \sin(x) - y = 0.4 \\ 0.8x^2 + 1.5y^2 = 1 \end{cases}$

7.2 $\begin{cases} \sin(x-y) - y = 0 \\ y^2 - x\sin(x) + x = 0.5 \end{cases}$

7.3 $\begin{cases} \sin(x)\sqrt{x} - y = 1 \\ y - x\sin(x) + x = 0.5 \end{cases}$

7.4 $\begin{cases} \sin(x)\ln(x) - 1.33y = 1 \\ 0.17y^2 - \sin(x) = 0.5 \end{cases}$

7.5 $\begin{cases} arctg(x)\ln(x) - 1.33y = 1 \\ 0.17y^2 - \sin(y-x) + x = 0.5 \end{cases}$

8. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування. Відобразити на одному полотні всі обмеження (використати функцію inequal), цільову функцію (наприклад, якщо цільова функція це *L(x,y)*, то намалювати потрібно графік неявної функції *L(x,y)*=0) та розв'язок.

8.1 $\begin{cases} x + 3y \to \max \\ x + y \le 1 \\ 3x + y \ge -1 \\ x - y \le 2 \end{cases}$

8.2 $\begin{cases} 5x - y \to \max \\ x + y \le 1 \\ 3x + y \ge -1 \\ x - y \le 2 \end{cases}$

8.3 $\begin{cases} x - y \to \max \\ x - y \le 1 \\ 3x + y \ge -1 \\ x - y \ge -2 \\ x \le 2 \end{cases}$

8.4 $\begin{cases} x + y \to \max \\ x - y \le 1 \\ 3x + y \ge -1 \\ x - y \ge -2 \\ x \le 6 - 3y \end{cases}$

8.5 $\begin{cases} y - x \to \max \\ x - y \le 1 \\ 3x + y \ge -1 \\ x - y \ge -2 \\ x \le 6 - 3y \end{cases}$

Список рекомендованої літератури

Maple

1. Аладьев В. Эффективная работа в Maple 6 и 7. М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2002.
2. Аладьев В., Богдявичюс М. Maple 6: Решение математических, статистических и инженерно-физических задач. М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2001.
3. Аладьев В., Шишаков М. Автоматизированное рабочее место математика. М.: Лаборатория базовых знаний. 2000.
4. Васильев А. Maple 8. Самоучитель, М.: Диалектика, Вильямс, 2003.
5. Говорухин В., Цибулин В. Введение в Maple. Математический пакет для всех. М.: Мир. 1997.
6. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX. СПб.: Питер. 2001.
7. Голоскоков Д. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб: Питер, 2004.
8. Дьяконов В. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж. 2000.
9. Дьяконов В. Maple 8 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс, 2003.
10. Дьяконов В. Maple 9 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс, 2004.
11. Кирсанов М. Решебник. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 2002.
12. Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. БХВ-Петербург, 2001.
13. Очков В. Физические и экономические величины в MathCAD и Maple. М.: Финансы и статистика, 2002.
14. Прохоров Г., Леденев М., Колбеев В. Пакет символьных вычислений Maple. М: Компания Петит, 1997.
15. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: Maple 8. М.: Солон-пресс, 2003.

MATLAB

16. Ануфриев И., Смирнов А., Смирнова Е. MATLAB 7.0 в подлиннике. М.: Новая техническая книга, 2005.
17. Гультяев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB: Учебный курс. СПб.: Питер, 2000.
18. Дьяконов В. MATLAB: Учебный курс. СПб.: Питер, 2000.
19. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB: Специальный справочник. СПб.: Питер, 2001.

20. Дьяконов В. MATLAB 6 + Simulink 5 в математике и моделировании. М.: СОЛОН-Пресс, 2003.
21. Потемник В. Система MATLAB. М.: Диалог-МИФИ, 1997.
22. Потемник В. MATLAB 5 для студента. М.: Диалог-МИФИ, 1998.

Mathematica

23. Аладьев В., Шишаков М. Введение в среду пакета Mathematica 2.2. М: Филинъ, 1997.
24. Воробьев Е. Введение в систему Mathematica. Финансы и статистика, 1998.
25. Дьяконов В. Mathematica 4.0 с пакетами расширений. М.: Нолидж, 2000.
26. Дьяконов В. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. М.: СОЛОН-Пресс, 2004.
27. Капустина Т. Компьютерная система Mathematica 3.0 для пользователя. М.: Солон, 1999.
28. Шмидский Я. К. Mathematica 5. Самоучитель. М.: Диалектика, 2004.

Mathcad

29. Бидасюк Ю. Mathsoft MathCAD 11. Самоучитель, Диалектика, 2004.
30. Гурский Д. Вычисления в Mathcad. М: Новое знание, 2003.
31. Дьяконов В. Mathcad 8-12 для всех. М.: Солон-Пресс, 2005.
32. Дьяконов В. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 11. М.: СОЛОН-Пресс, 2004.
33. Ивановский Р. Компьютерные технологии в науке. Практика применения систем Mathcad Pro. М.: Высшая школа, 2003.
34. Измайлов Г. Информатика. Пакет Mathcad: Лабораторный практикум. СПб.: СПбГТУ, 2001.
35. Каганов В. Компьютерные вычисления в средах Excel и Mathcad. М.: Горячая линия - Телеком. 2003.
36. Каганов В. Радиотехника + компьютер + Mathcad. М.: Горячая линия - Телеком. 2001.
37. Кирьянов Д. Mathcad 12 в подлиннике (+CD-ROM). СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
38. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 12. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
39. Кузнецов А., Мельников О., Новиков В., Черняк А. Математика для экономистов на базе Mathcad. СПб.: БХВ, 2003.
40. Макаров Е. Инженерные расчеты в MathCAD. Учебный курс. СПб.: Питер, 2003.
41. Очков В. Mathcad 12 для студентов и инженеров. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

42.Плис А., Сливина Н. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов. Финансы и статистика. 2003.

43.Поршнев С. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета Mathcad. Учебное пособие. М.: Горячая линия - Телеком, 2002.

44.Салманов О. Математические методы в экономике с применением средств Excel и MathCAD. М.: Нолидж.

45.Сдвижков О. MathCAD-2000. Введение в компьютерную математику. М.: ИД Дашков и Ко. 2002.

46.Семененко М. Математическое моделирование в MathCad. М: Альтекс-А, 2003.

47.Солодов А., Очков В. Mathcad. Дифференциальные модели. М.: МЭИ, 2002.

48.Херхагер М., Партолль Х. Mathcad 2000. Полное руководство. К.: BHV-Киев, 2000.

49.Черняк А., Черняк Ж., Доманова Ю. Высшая математика на базе Mathcad. Общий курс. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

Математическое моделирование

50.Дьяконов В. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2000.

51.Дьяконов В. VisSim +Mathcad + MATLAB. Визуальное математическое моделирование. М.: СОЛОН-Пресс, 2004.

52.Семененко М. Введение в математическое моделирование. М.: Солон-пресс, 2002.

53.Тан К. Символьный С++: Введение в компьютерную алгебру с использованием объектно-ориентированного программирования. Мир, 2001.

54.Тарасевич Ю. Информационные технологии в математике. М: СОЛОН-Пресс, 2003.

Тарасевич Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. М.: Едиториал-УРСС, 2001.