Лекція 3. Керування у задачах динаміки популяцій.

Складність задач оптимального керування є такою, що побудова розв'язків у явній аналітичній формі виявляється можливою лише у виняткових випадках. Більше того, не існує універсальних обчислювальних процедур з гарантією збіжності. Як правило, у задачах керування ми встановлюємо необхідні і дуже рідко достатні умови оптимальності. Знаходження оптимальних керувань та траєкторій, що задовольняють усі умови, залишається значною справою мистецтва.

Зрозуміло, що в деяких випадках, ми вміємо розв'язувати так звані стандартні задачі. Збурені задачі, тобто такі, в яких рівняння відрізняються від стандартних на деяке мале ε, в окремих випадках розв'язуються методом збурення.

Питання дослідження вказаних задач давно хвилює дослідників. Йому присвячено досить багато публікацій. Та поки ця проблема ще повністю не розв'язана.

§1. Модель знищення шкідників за скінченний час

Як відомо деякі шкідники (наприклад, колорадський жук) розвиваються спонтанно і на малому проміжку часу підпорядковуються закону Мальтуса:

$$\frac{dN}{dt} = \mu N, \ \ N(0) = N_0 \qquad (1)$$

Нехай $u(t) \geq 0$ – інтенсивність знищення шкідників.

Модель процесу керування знищенням шкідників запишеться у наступному вигляді

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - u(t), \ \ N(0) = N_0 \qquad (2)$$

Розв’язок рівняння (2) має вигляд

$$N(t) = N_0 e^{\mu t} - \int_0^t u(\tau) e^{\mu(t-\tau)} d\tau \qquad (3)$$

Оскільки ми хочемо знищити шкідників за скінченний час, то будемо вимагати, щоб при $t = T$ виконувалась умова $N(T) = 0$.

Тоді з рівняння (3) матимемо:

$$N_0 = \int_0^T u(\tau) e^{-\mu\tau} d\tau \qquad (4)$$

Наприклад, при $u(t) = u_0 = const$ з рівняння (4) знаходимо:

$$N_0 = \frac{u_0}{\mu}(1 - e^{-\mu T}) \qquad (5)$$

Отже, можна підібрати таку функцію керування $u(t)$, що за скінченний час T популяція шкідників буде знищена.

§2. Модель про вирубку дерев.

Дерева в лісі класифікують, як правило, за розміром, а не за віком.

Основна складність при побудові моделі лісу – знайти аналог членів плодовитості основної моделі Леслі. Якщо припустити, що ліс відновлюється природним шляхом, то вільний простір, що утворився в результаті вирубки дерев, буде заповнюватись або природним відновленням, або кронами сусідніх дерев. Тому елементи матриці, що описують плодовитість, – залежать від числа вирубаних дерев.

Якщо в класі j в момент часу t маємо n_j дерев, то при стійкій віковій структурі популяції в момент часу $t+1$ у цьому класі буде λn_j дерев та $(\lambda-1)n_j$ з них буде вирубано, щоб звести чисельність до n_j. У цьому випадку вихідна матриця Леслі матиме вигляд $L=\{l_{ij}\}$, ненульові елементи якої визначаються наступним чином:

$$\begin{cases} l_{11}=a_1+c_1(\lambda-1), \\ l_{1j}=c_j(\lambda-1),\ \ j=\overline{2,n-1}, \\ l_{1n}=c_n(\lambda-a_n), \\ l_{jj}=a_j,\ \ j=\overline{2,n}, \\ l_{j+1,j}=b_j,\ \ j=\overline{1,n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

де:

a_j – ймовірність того, що дерево залишається в $j^{\text{ому}}$ розмірному класі,

b_j – ймовірність того, що дерево перейде в наступний розмірний клас,

c_j – число дерев розмірного класу нуль, що заповнює вільний простір, що утворився в результаті вирубки одного дерева $j^{\text{ого}}$ розмірного класу.

Величина a_n – керуючий розв'язок, що залежить від числа дерев, які необхідно залишити в самому великому розмірному класі. Дуже часто $a_n = 0$, причому $a_n = 1 - b_n$.

Доведено, що ця модель має лише одне власне значення більше одиниці, та відповідний йому додатній власний вектор.

Приклад. *Задача про вирубку сосни звичайної*

Нехай дерева в лісі розбиті на 6 розмірних класів. Матриця Леслі має вигляд:

$$L = \begin{pmatrix} 0.72 & 0 & 0 & 3.6(\lambda - 1) & 5.1(\lambda - 1) & 7.5\lambda \\ 0.28 & 0.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Використовуючи обчислювальні засоби, можна знайти швидкість росту $\lambda_L = 1.204$, та відповідну величину для вирубки дерев, що складає $H = \left(1 - \frac{1}{\lambda_L}\right) \approx 17\%$.

§3. Модель про вилов риби у ставку.

Розглянемо ізольовану популяцію та вивчимо зміну її чисельності. Для дослідження зміни чисельності використаємо логістичне рівняння у безрозмірних величинах:

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x), \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

Стаціонарні точки цього рівняння $q_1 = 0$, $q_2 = 1$.

Розв’язок рівняння (1) матиме вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) e^{-t}} \qquad (2)$$

З розв’язку (2) видно, що при $t \to +\infty$ $x(t) \to 1 = q_2$.

Таким чином, маємо стійкий стан рівноваги при довільному початковому значенні $x_0 > 0$.

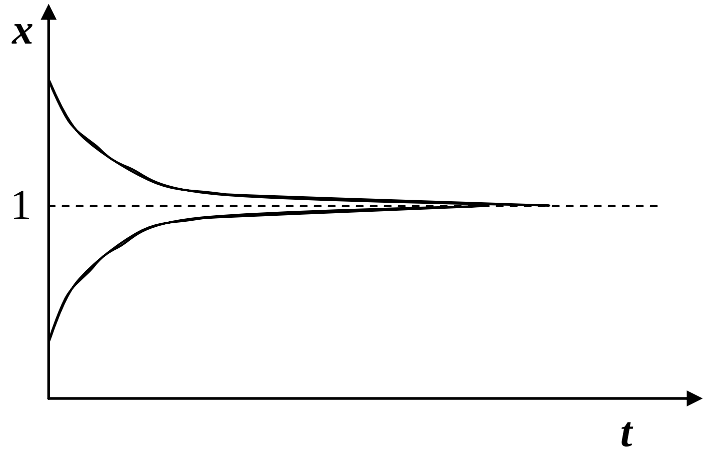


Рис. 1. Стійкий стан рівноваги

Введемо деяку квоту $p > 0$ на вилов популяції риби. Тоді вихідна модель матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - p, \quad x(0) = x_0 \qquad (3)$$

Знайдемо стаціонарні точки:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - p} \qquad (4)$$

Все буде залежати від знаку дискримінанту:

1) $D = 0 <=> p = \frac{1}{4}$, тоді $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

2) $D > 0 <=> p < \frac{1}{4}$ (нехай $p = \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), тоді $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$.

3) $D < 0 <=> p > \frac{1}{4}$ (нехай $p = \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), тоді дійсних коренів немає.

Розглянемо всі наші випадки.

1) Нехай $p = \frac{1}{4}$, тоді $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4}, \quad x(0) = x_0 \qquad (5)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad x(0) = x_0 \qquad (6)$$

Розв’язавши рівняння (6), знайдемо, що

$$-\frac{1}{x-\frac{1}{2}} = t + C$$

Константа

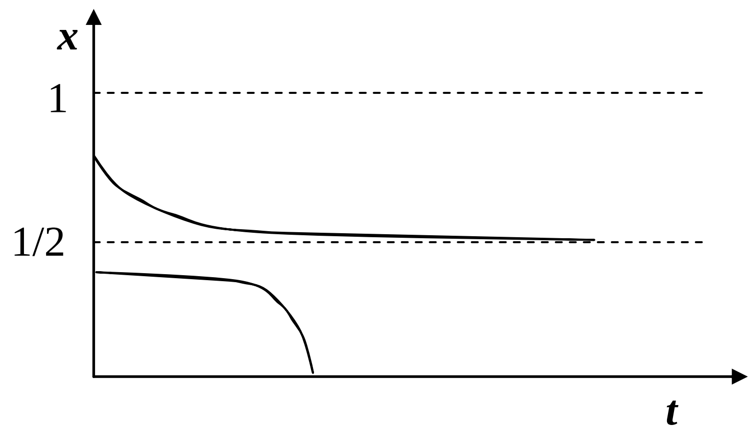
$$C = -\frac{1}{x_0-\frac{1}{2}}$$

Отже, розв'язок має вигляд

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t+C}, \qquad x_0 \neq \frac{1}{2} \qquad (7)$$

При $x_0 > \frac{1}{2}$ $x(t) \to \frac{1}{2}$.

При $x_0 < \frac{1}{2}$ $x(t) \to 0$.



2) Нехай $p < \frac{1}{4}$ (тоді $p = \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0 \qquad (8)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0 \qquad (9)$$

Рівняння (9) – це табличний інтеграл виду $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Отже,

$$\frac{1}{2\varepsilon} ln\left|\frac{x - \frac{1}{2} - \varepsilon}{x - \frac{1}{2} + \varepsilon}\right| = -t + lnC \qquad (10)$$

Все залежить від початкового значення x_0, а це в свою чергу визначає з яким знаком розкривається модуль.

Перепишем рівняння (10)

$$\left|\frac{x-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{x-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right| = Ce^{-2\varepsilon t} \qquad (11)$$

Константа має вигляд

$$C = \left|\frac{x_0-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}{x_0-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right|$$

<u>**Нехай**</u> $x_0 < \frac{1}{2} - \varepsilon$. Тоді розкриваємо модуль зі знаком «+»:

$$x-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) = Ce^{-2\varepsilon t}\left(x-\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\right) \qquad (12)$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2}+\varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}{1-Ce^{-2\varepsilon t}} = \frac{\frac{1}{2}-\varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)+2\varepsilon}{1-Ce^{-2\varepsilon t}} = \frac{1}{2}-\varepsilon+\frac{2\varepsilon}{1-Ce^{-2\varepsilon t}}.$$

$$x(t) = \frac{1}{2}-\varepsilon+\frac{2\varepsilon}{1-Ce^{-2\varepsilon t}} \to ? \qquad (13)$$

Припустимо, що $x_0 = \frac{1}{2} - \varepsilon - a$ $(a > 0)$. Підставимо в похідну, отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(\frac{1}{2} - \varepsilon - a - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right) = -((-\varepsilon - a)^2 - \varepsilon^2) = -(\varepsilon^2 + 2a\varepsilon + a^2 - \varepsilon^2) < 0$$

Отже, похідна падає, тому $x(t) = \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}} \to 0$ (14)

<u>Нехай</u> $\frac{1}{2} - \varepsilon < x_0 < \frac{1}{2} + \varepsilon$. Тоді розкриваємо модуль зі знаком «-»:

$$x - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = -Ce^{-2\varepsilon t}\left(x - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) \tag{15}$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon + Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}{1 + Ce^{-2\varepsilon t}} = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon + Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) - 2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1 + Ce^{-2\varepsilon t}} = \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1 + Ce^{-2\varepsilon t}}.$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{Ce^{2\varepsilon t} + 1} \to ? \tag{16}$$

Припустимо, що $x_0 = \frac{1}{2}$. Підставимо в похідну, отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right) = -(-\varepsilon^2) = \varepsilon^2 > 0$$

Отже, похідна зростає, тому

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}} \to \frac{1}{2} + \varepsilon - o. \qquad (17)$$

Нехай $x_0 > \frac{1}{2} + \varepsilon$. Тоді розкриваємо модуль зі знаком «+»:

$$x - \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = Ce^{-2\varepsilon t}\left(x - \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) \qquad (18)$$

Після відповідних перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}} = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon - Ce^{-2\varepsilon t}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) + 2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}} = \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{2\varepsilon Ce^{-2\varepsilon t}}{1 - Ce^{-2\varepsilon t}}.$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{Ce^{2\varepsilon t} - 1} \to ? \qquad (19)$$

Нехай $x_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon + a\ (a > 0)$. Підставимо в похідну, отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + a - \frac{1}{2}\right)^2 - \varepsilon^2\right) = -((\varepsilon + a)^2 - \varepsilon^2) = -(\varepsilon^2 + 2a\varepsilon + a^2 - \varepsilon^2) < 0$$

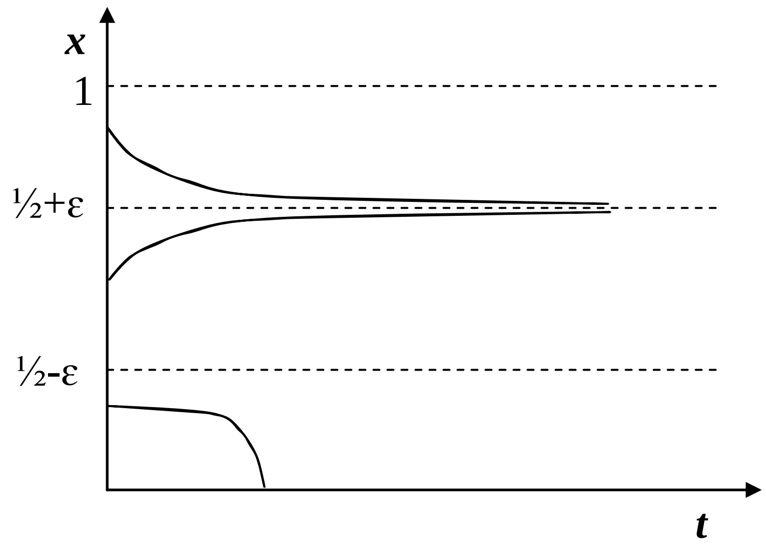
Отже, похідна падає, тому

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{Ce^{2\varepsilon t} - 1} \to \frac{1}{2} + \varepsilon + o. \qquad (20)$$

При $x_0 > \frac{1}{2} + \varepsilon \quad x(t) \to \frac{1}{2} + \varepsilon.$

При $\frac{1}{2} - \varepsilon < x_0 < \frac{1}{2} + \varepsilon \quad x(t) \to \frac{1}{2} + \varepsilon.$

При $x_0 < \frac{1}{2} - \varepsilon \quad x(t) \to 0.$



3) Нехай $p > \frac{1}{4}$ (тоді $p = \frac{1}{4} + \varepsilon^2, \varepsilon > 0$), $x_{1,2}$ не є дійсними.

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{1}{4} - \varepsilon^2, \quad x(0) = x_0 \qquad (21)$$

Перепишемо в іншому вигляді

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \varepsilon^2\right), \quad x(0) = x_0 \qquad (22)$$

Рівняння (22) – це табличний інтеграл виду $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\, arctg\, \frac{x}{a} + C.$

Тоді,

$$\frac{1}{\varepsilon}\, arctg\, \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon} = -t + C$$

Константа має вигляд

$$C = \frac{1}{\varepsilon}\, arctg\, \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{\varepsilon}.$$

Після перетворень отримаємо

$$x(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon tg(-\varepsilon t + C_1) \qquad (23)$$

Оскільки дійсних коренів немає, то маємо наступний графік динаміки