Лекція 13. Багатопродуктова модель «витрати-випуск» Леонтьєва

§1. Міжгалузевий баланс.

Статична модель «витрати-випуск» або модель міжгалузевого балансу (МГБ) є основою багатьох лінійних моделей виробничого сектору економіки. Вона базується на понятті «чиста галузь» («вид економічної діяльності»):

1) Галузь випускає лише один продукт;
2) Кожен продукт випускається лише однією галуззю;
3) Кожна галузь має єдину технологію;
4) Не допускається заміщення ресурсів.

Припустимо, що весь виробничий сектор національного господарства (н/г) розбито на n чистих галузей. У процесі виробництва кожна з галузей потребує продукцію, вироблену іншими галузями. Отже, виробляється n продуктів (n>1). І нехай у масштабі н/г маємо балансовий звіт за підсумками певного періоду, відображений у такій таблиці:

Витрати / Випуск		Розподіл випуску між галузями						Кінцева продукція (споживання)	Валовий випуск
		1	2	…	j	…	n		
Розподіл продукції $i^{оï}$ галузі на потреби інших галузей	1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	y_1	x_1
	2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	y_2	x_2
	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{in}	y_i	x_i
	…	…	…	…	…	…	…	…	…
	n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	y_n	x_n
Додана вартість		v_1	v_2	…	v_j	…	v_n		
Валовий продукт (випуск)		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n		

Таблиця 1.

Тут x_{ij} – обсяг продукту $i^{оï}$ галузі, витраченого $j^{ою}$ галуззю у виробничому процесі,

x_i – загальний обсяг продукції $i^{оï}$ галузі,

y_i – обсяг $i^{оï}$ продукції, що витрачається у невиробничій сфері (кінцеве споживання),

v_j – додана вартість $j^{оï}$ продукції (прибуток, амортизаційні відрахування, оподаткування, зарплата за наймом тощо).

Оскільки **таблиця 1** має балансовий характер, то для кожної з галузей можна записати:

$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}) + y_i, \qquad i = \overline{1, n} \qquad (1)$$

а для національного господарства загалом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad (2)$$

Заув., що баланс (1) можна отримувати як у натуральному, так і у вартісному вираженні.

Аналогічно визначається баланс продукції за стовпчиком: обсяг випущеної продукції дорівнює сумарним витратам:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j, \quad j = \overline{1, n} \qquad (3)$$

Цей баланс може мати лише вартісне вираження. Загалом для національного господарства:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j, \qquad (4)$$

Із формул (2) та (4) маємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j, \qquad (5)$$

звідси очевидно:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \qquad (6)$$

(обсяги кінцевого продукту за матеріально-речовим та вартісним складом завжди рівні).

Умовою взаємно однозначної відповідності між галузевими балансами, які використовують різні показники, є незмінне співвідношення між масштабами цих показників за кожним видом продукції. Наприклад, якщо в одному МГБ (у натуральному вираженні) електроенергія вимірюється у кіловат-годинах, а в іншому (у вартісному вираженні) – у гривнях, то кожній гривні електроенергії має відповідати одна і та сама кількість кіловат-годин, як би ця енергія не використовувалась. Отже, показники МГ матеріального балансу у вартісному вираженні, які задовольняють вказану умову, позначимо:

$$\tilde{x}_j, \qquad \tilde{y}_j, \qquad \tilde{x}_{ij}, \qquad \tilde{v}_j.$$

Для МГБ у натуральному вираженні замінимо попередні позначення. Тоді замість (1) та (3) відповідно матимемо:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} + \tilde{y}_i, \qquad (7)$$

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_{ij} + \tilde{v}_j, \qquad (8)$$

Якщо $p_i -$ єдина (узгоджена) ціна $i^{\text{ого}}$ виду продукції ($i = \overline{1,n}$), то

$$\tilde{x}_j = p_i x_i, \qquad \tilde{y}_j = p_i y_i, \qquad \tilde{x}_{ij} = p_i x_{ij}. \tag{9}$$

§2. *Модель Леонтьєва*

Для побудови математичної моделі вирішальне значення має припущення про те, що x_{ij} є функцією від обсягу виробництва цієї продукції: $x_{ij} = \varphi(x_j)$.

У найпростішій моделі використовується припущення про пропорційну залежність між витратами та обсягом виробництва, тобто вводяться лінійні функції виробничих витрат:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \tag{10}$$

де $a_{ij} -$ коефіцієнт прямих виробничих витрат (технологічний коефіцієнт) продукції i на виробництво продукції j.

Підставляючи вираз (10) у баланс (1), маємо:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1,n} \qquad (11)$$

Позначимо $x = (x_1, \dots, x_n)^T -$ вектор загального обсягу продукції, $y = (y_1, \dots, y_n)^T -$вектор кінцевого споживання, $A = \{a_{ij}\}_1^n -$ квадратна матриця коефіцієнтів прямих виробничих витрат (технологічна матриця).

Тоді матимемо (у векторно-матричній формі):

$$\begin{gathered} x = Ax + y, \\ x \geq 0. \end{gathered} \qquad (12)$$

Формула (12) – це і є модель Леонтьєва.

Беручи до уваги (10), маємо:

$$\tilde{x}_{ij} = \tilde{a}_{ij} \cdot \tilde{x}_j,$$
$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\tilde{x}_{ij}}{\tilde{x}_j} = \frac{p_i x_{ij} a_{ij}}{p_j x_{ij}} = a_{ij} \frac{p_i}{p_j}. \qquad (13)$$

або

$$\tilde{x} = Px, \qquad \tilde{y} = Py, \qquad \tilde{A} = PAP^{-1},$$

де $P = \{p_i\}_1^n -$ діагональна матриця цін, $P^{-1} -$ діагональна матриця величин, обернених цінам. Отже, матриці A та $\tilde{A}$ подібні (тобто, мають однакові власні числа).

§3. Модель міжгалузевої залежності цін.

Вважатимемо, що додана вартість $\tilde{v}_j$ в $j^{\text{ій}}$ продукції пропорційна обсягу продукції:

$$\tilde{v}_j = r_j \tilde{x}_j,$$

де r_j – коефіцієнт доданої вартості в загальній вартості продукції.

Тоді одержимо:

$$\tilde{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j + r_j \tilde{x}_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Природно припустити, що $\tilde{x}_j \neq 0$, тоді

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} + r_j, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (14)$$

Помножимо (14) справа на $p_j \left(p_j \neq 0\right)$:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} p_j + r_j p_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Враховуючи співвідношення (13), маємо:

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} p_j^{-1} p_j + r_j p_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тобто,

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} + r_j p_j, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (15)$$

Позначимо $r_j p_j = s_j$ – додану вартість у ціні $j^{\text{ої}}$ продукції та введемо у розгляд такі вектори: $p = (p_1, \dots, p_n)$ – вектор цін, $s = (s_1, \dots, s_n)$ –вектор доданої вартості у цінах.

Тоді матимемо модель рівноважних цін (модель МГ залежності цін):

$$\begin{gathered} p = pA + s, \\ p \geq 0. \end{gathered} \qquad (16)$$

Модель цін (16) є по суті двоїстою до моделі Леонтьєва (12).

Пара двоїстих задач має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} s_j x_j \to max, \\ x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i\,, \quad i = \overline{1,n}, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (17)$$

та

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \to min, \\ p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} = s_j\,, \quad j = \overline{1,n}, \\ p_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (18)$$

Якщо x^* та p^* − розв'язки відповідних задач (17) та (18), то

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j^* = \sum_{i=1}^{n} p_i^* y_i\,, \qquad (19)$$

тобто обсяг створеної в національному господарстві продукції (за вартісним складом) дорівнює сумарній оцінці кінцевої продукції, яка використовується (вартість кінцевого споживання дорівнює сумарній доданій вартості).

§4. Аналіз продуктивності моделі «витрати-випуск»

Введемо поняття продуктивності.

***Означення 1*.** Якщо для будь-якого невід'ємного вектора кінцевого споживання $y \geq 0$ система (12) сумісна (має розв'язок), то відповідну модель Леонтьєва (технологічну матрицю A зокрема) називають *продуктивною*.

Означення 2. Матриця A називається *продуктивною*, якщо існує вектор $x \geq 0$, який дозволяє отримати невід'ємний вектор кінцевої продукції:

$$(E - A)x = y \geq 0. \qquad (20)$$

Термін «продуктивність» можна назвати синонімом «незбитковість» або «рентабельність».

Означення 3. У теорії невід'ємних матриць розкладними називаються такі матриці A, які одночасною перестановкою рядків та стовпчиків зводяться до вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

де A_{11}, A_{22} − квадратні блоки, що містять ненульові елементи,

0 − це блок, що містить лише нулі,

A_{12} − блок, елементи якого можуть набувати будь-якого значення.

Означення 4. Матриця A нерозкладна, якщо для неї не існує таких одночасних перестановок рядків та стовпчиків, які б звели її до вигляду (21).

Економічно нерозкладність означає те, що всі пари галузей перебувають у двосторонньому зв'язку.

Теорема 1. (Теорема Перона-Фробеніуса).

Нехай матриця A $(n \times n)$ невід'ємна і нерозкладна, а $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} -$ множина її власних чисел. Тоді в множині $\sigma(A)$ існує додатне число λ_A, яке є простим коренем характеристичного рівняння матриці A, і

$$|\lambda_k| \leq \lambda_A, \;\; k = \overline{1, m}.$$

Крім цього, власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до скалярного множника) власний вектор x_A, для якого $(x_A)_i \neq 0,\; sign(x_A)_i = sign(x_A)_j$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$, тобто вектор x_A можна вибрати додатнім: $x_A > 0$. (подаємо без доведення)

Зазначимо, що число λ_A називається числом Фробеніуса матриці A, а $x_A -$ вектором Фробеніуса матриці A:

$$Ax_A = \lambda_A x_A. \tag{22}$$

Теорема 2.

Нехай система (12) має розв'язок при деякому $y > 0$, тоді модель Леонтьєва продуктивна. Інакше кажучи, якщо деякий додатній кінцевий попит $(y > 0)$ можна задовольнити в моделі Леонтьєва (12), то вона продуктивна.

Теорема 3.

Нехай

1) Матриця A невід'ємна і нерозкладна;
2) Сума елементів кожного її рядка не перевищує 1:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \quad i = \overline{1,n};$$

3) Хоча б для одного рядка існує таке i_0, що $q_{i_0} < 1$.

Тоді модель Леонтьєва, яка відповідає цій матриці A, є продуктивною.

Теорема 4. (критерій продуктивності)

Для продуктивності моделі Леонтьєва (12) необхідно і достатньо, щоб число Фробеніуса λ_A матриці *A* задовольняло нерівність $\lambda_A < 1$.

Нехай $A = \{a_{ij}\}, \ \ i, j = \overline{1, n}, \ \ A \geq 0.$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} r &= \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,, \quad R = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,, \\ s &= \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,, \quad S = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Теорема 5.

Якщо квадратна матриця $A \geq 0$, то для її числа Фробеніуса λ_A виконуються такі нерівності:

$$\begin{aligned} r \leq \lambda_A \leq R, \\ s \leq \lambda_A \leq S. \end{aligned} \qquad (24)$$

А якщо матриця A ще й нерозкладна, всі ці нерівності строгі

$$\begin{aligned} r < \lambda_A < R, \\ s < \lambda_A < S. \end{aligned} \qquad (25)$$

Виняток становить, коли $r = R,\ s = S$.