Лекція 7. Теорія споживання.

Споживач – один із основних учасників будь-якої економічної системи. Ми вивчатимемо математичні моделі поведінки одиничного споживача, у ролі якого може виступати окремий індивід, сім’я або домашне господарство, що мають спільний споживчий бюджет і разом формують систему переваг відносно наявних споживчих благ.

Сучасний математичний аналіз споживання в математичній економіці виник на базі теорії граничної корисності. Ця теорія виникла ще у $70^{\text{ті}}$ рр. XIX ст. і була обтяжена низкою неадекватних дійсності ідей про можливість точної кількісної вимірності корисності та занадто великими акцентами на маргінальних (граничних) поняттях.

§1. Простір товарів. Відношення переваги. Функція корисності.

Під ***товаром*** розумітимемо споживче благо або послугу, що надійшла в продаж у певний час у певному місці.

Під ***споживачем*** будемо розуміти групу індивідів, які спільно розподіляють свій дохід на закупівлю товарів або послуг.

Головна проблема раціонального ведення господарства споживачем полягає у вирішенні питання про те, яку кількість наявних товарів він повинен придбати за певний період часу при заданих цінах і відомому споживчому доході.

Вважатимемо, що існує обмежена кількість наявних товарів, які мають властивість довільної подільності. Вибір споживача можна охарактеризувати набором товарів $x = (x_1, \dots, x_n)$, де $x_i -$ кількість і[ого] товару, придбаного споживачем. Тоді всі можливі набори товарів є точками векторного простору товарів $X \subseteq R^n$ (при цьому $x_i < 0$ означає, що споживач віддав відповідну кількість товару, а $x_i > 0$, що споживач одержав (купив) відповідну кількість товару).

Вибір споживачем деякого набору товарів залежить не тільки від його потреб, а й від його смаків та вподобань. Цей вибір характеризується суб'єктивним *відношенням переваги*, що позначається $\succcurlyeq$ і є парним порівнянням можливих партій товарів. Тобто, якщо $x \succcurlyeq y$, де $x, y \in X$, то це означає, що споживач надає перевагу набору товарів x перед набором товарів y ($x \succ y$, строга перевага), або ж не рбобить між ними різниці ($x \sim y$, відношення байдужості).

Пара $(X, \succcurlyeq)$ називається ***полем переваг споживача.***

Аксіома 1. Відношення переваги $\succcurlyeq$ є бінарним відношенням у просторі X та має такі властивості:

1) $\succcurlyeq$є рефлексивним;

2) $\succcurlyeq$ є транзитивним;

3) Для $\forall x, y \in X$ виконується або $x \succcurlyeq y$, або $x \preccurlyeq y$.

Аксіома 2. Відношення переваги $\succcurlyeq$ є неперервним, тобто множина $\{(x, y) \in X \otimes X: x \succ y\}$ є відкритою в декартовому добутку $X \otimes X$.

У застосуванні полів переваг споживача $(X, \succcurlyeq)$ найчастіше маємо ситуацію, коли $X \subseteq R_+^n$, а вибір споживача стиснутий заданим обмеженим бюджетом.

До бюджетних факторів належать ціни p_i на товари $i^{\text{ого}}$ виду $(i = \overline{1, n})$а також рівень споживчого доходу I ($Income$). Якщо ввести до розгляду вектор цін p, то споживач при виборі набору товарів x повинен враховувати бюджетне обмеження виду

$$px = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq I \tag{1}$$

Надалі вважатимемо, що вектор цін p – вектор-рядок, вектор товарів x – вектор-стовпчик.

Таким чином, допустимі набори товарів (споживче меню) у просторі R_+^n задовольняють обмеження (1) і утворюють споживчий симплекс

$$S_n = \{x \in R_+^n : px \leq I\}, \tag{2}$$

що є замкненою обмеженою опуклою множиною в R^n.

§2. Функція корисності.

Нехай $(X, \succcurlyeq)$ деяке поле переваг споживача, $X \subseteq R_+^n$ з відношенням переваги, що задовольняє аксіому 1. Тоді числова функція $U: X \rightarrow R$, визначена на X, називається ***індикатором переваги*** $\succcurlyeq$, або ***функцією корисності (ФК)***, яка зображає відношення переваги $\succcurlyeq$, якщо для $\forall x, y \in X$ виконується

$$U(x) \geq U(y) \leftrightarrow x \succcurlyeq y \qquad (3)$$

Таким чином, ФК дає нам числове втілення порядкової структури поля переваг.

Наведемо деякі властивості ФК:

1) $U(x) = U(y) => x_{\sim} y$,
2) Якщо $U(x)$, $x \in X$ є функцією корисності поля переваг $(X, \succcurlyeq)$ і $F: U(x) \rightarrow R$ є строго зростаючою функцією, то суперпозиція $F^\circ U = F(U)$ також є функцією корисності, яка зображає поле переваг $(X, \succcurlyeq)$.

3) Якщо $U(x)$ та $V(x),\ x \in X$ – дві функції корисності, то існує така строго зростаюча дійсна функція f, яка визначна на $U(x)$, така що $V(x) = f^{\circ}U(x) = f\big(U(x)\big),\ x \in X$.

Теорема Дебре.

Якщо множина X поля переваг $(X, \succcurlyeq)$ є зв'язною, а відношення переваги $\succcurlyeq$ – неперервним (задовольняє Аксіому 2), то існує ФК $U(x),\ x \in X$, яка зображає поле переваг $(X, \succcurlyeq)$.■

Очевидно, що перевага $\succcurlyeq$ є монотонною, тоді і тільки тоді, коли ФК, яка зображує поле переваг $(X, \succcurlyeq)$, також є монотонною.

При цьому, якщо ФК є диференційованою, то існує похідна

$$MU(x) = \frac{dU(x)}{dx} = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n} = \big(MU_i(x)\big)_{i=1}^{n} \qquad (4)$$

що називається ***граничною корисністю***.

Наведемо ще одну властивість ФК. Будемо вважати, що для $\forall x, y \in R_+^n$ виконуються нерівності

$$U(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda U(x) + (1-\lambda)U(y), \ \ \lambda \in [0,1]$$

$$U(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda U(x) + (1-\lambda)U(y), \ \ \lambda \in (0,1)$$

Тобто, ФК є ввігнутою (строго ввігнутою) функцією.

У подальшому розгляді, за винятком окремо обумовлених випадків, будемо вважати, що ФК споживача є строго ввігнутою і навіть припускаємо, що виконується сильніша умова: ФК є двічі неперервно диференційованою, а її матриця Гессе

$$\ddot{U}(x) = \frac{d^2U(x)}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_1^n \qquad (5)$$

є від'ємно визначеною.

Введемо таке позначення: якщо квадратна матриця A є від'ємно визначеною, то будемо писати A<<0. Тобто $\ddot{U}(x) \ll 0, \ x \in R_+^n$.

Заув., що діагональні елементи матриці Гессе є від’ємними:

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Умова (6) виражає відомий ***перший закон Госсена***: гранична корисність будь-якого товару зменшується зі збільшенням споживання цього товару.

Лекція 8. Раціональна поведінка споживача

Кожна людина в процесі прийняття індивідуального рішення про витрачання свого доходу керується власними бажаннями, смаками та вподобаннями. Ресурси споживача є обмеженими щодо його бажань. І хоча ми не можемо передбачити на що конкретно споживач вирішить витратити свій дохід, проте ми можемо сформулювати основні принципи, які визначають те чи інше рішення споживача, а також умови, за яких забезпечується максимізація його корисності.

В аналізі поведінки споживача візьмемо за основу припущення про його суверенітет, тобто він приймає рішення самостійно.

Теорія вибору споживача дає змогу відповісти на питання про те, як люди здійснюють свій вибір і як впливають на нього ціни тоаврів, дохід та структура потреб.

В основі цієї теорії лежить гіпотеза раціональної поведінки споживача, яка означає, що споживач:

- Знає чого він хоче;
- Може порівнювати доступні йому набори товарів;
- Вибирає той набір товарів, якому він надає найбільшу перевагу.

Крива байдужості – це лінія рівної корисності, ясі точки якої характеризують набори товарів, що забезпечують споживачеві один і той самий рівень корисності.

Карта кривих байдужості є множиною всіх можливих рівнів корисності для певного споживача

$$\Delta X = X_B - X_A$$

$$-\Delta Y = Y_B - Y_A$$

Для того, щоб спожити більшу кількість одного блага в наборі, споживач мусить відмовитись від певної кількості іншого блага.

$$\frac{dY}{dX} = \lim_{\Delta X \to 0}\left(-\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right) \qquad (7)$$

Формула (7) означає кількість блага *Y* від якого споживач готовий відмовитись в обмін на додаткову одиницю блага *X* при незмінному загальному рівні корисності і називається ***граничною нормою заміщення благ*** за умови, що диференціювання проводиться вздовж кривої байдужості.

В цілому кривим байдужості притаманні такі властивості:

- Криві байдужості мають від'ємний нахил, оскільки для збереження корисності кількість одного товару в наборі має компенсуватись збільшенням кількості іншого;
- Криві байдужості не перетинаються;
- Криві байдужості, що лежать далі від початку координат, характеризують набори товарів, що мають вищий рівень корисності;
- Вздовж кривої байдужості гранична норма заміщення зменшується.

§1. Неокласична задача споживання (НЗС)

НЗС пов’язана з раціональним вибором набору благ та послуг споживачем при заданих функції корисності та визначеному бюджетному обмеженні.

Якщо ФК $U(x),\ x \in R_+^n$ є двічі неперервно диференційованою та строго опуклою, а бюджетне обмеження має вигляд $px \le I$, де p – вектор рядок цін, x – вектор-стопчик товарів, I – дохід споживача, що може бути використаний на придбання товарів, то ***раціональна поведінка споживача*** визначається такою задачею опуклого математичного програмування:

$$\begin{cases} U(x) \to max, \\ px \le I, \\ x \in R_+^n \end{cases} \qquad (8)$$

або в розгорнутій формі

$$\begin{cases} U(x_1, x_2, \dots, x_n) \to max, \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I, \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (9)$$

Оскільки допустима множина векторів для даної задачі є компактною і опуклою, то вона має єдиний розв'язок x^*. Необхідні і достатні умови оптимальності розв'язку x^* задачі (8) визначаються теоремою Куна-Таккера.

Розглянемо для задачі (8) функцію Лагранжа

$$L(\lambda, x) = U(x) + \lambda\big(I - (p, x)\big) \qquad (10)$$

де λ – множник Лагранжа. Необхідні умови оптимальності розв'язку x^* та множника λ^*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = MU(x^*) - \lambda^* p^T \leq 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = I - (p, x^*) \geq 0, \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)^T x^* = (MU(x^*) - \lambda^* p)x^* = 0, \\ \lambda^* \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda^*\big(I - (p, x^*)\big) = 0, \\ x^* \geq 0, \lambda^* \geq 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Вважаючи, що всі товари споживаються, тоді з наведених умов оптимальності (11) випливає, що виконуються такі співвідношення:

$$x_i^* \geq 0 \Rightarrow MU_i(x^*) \leq \lambda^* p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

і при цьому

$$\begin{cases} MU_i(x^*) = \lambda^* p_i, & x_i^* > 0 \\ MU_i(x^*) < \lambda^* p_i, & x_i^* = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

Таким чином, для усіх закуплених товарів, коли $x_i^* > 0$, маємо

$$\frac{MU_i(x^*)}{p_i} = \lambda^* \qquad (13)$$

Звідси, вважаючи, що деякі товари були куплені, маємо $\lambda^* > 0$, і отже з четвертого рівняння (11) маємо

$$I = px^*$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що споживач закуповує всі види товарів. Тоді умови з (11) набувають системи рівнянь

$$MU_i(x^*) - \lambda^* p_i = 0, \qquad I - px^* = 0$$

Або в розгорнутому вигляді

$$MU_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) - \lambda^* p_i = 0, \qquad I - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = 0$$

Отже, ***рівновага споживача*** відповідає такій комбінації придбаних товарів, за якої максимізується корисність при заданому бюджетному обмеженні.

Оптимальний множник Лагранжа λ^* можна інтерпретувати на основі загальної теорії гладких задач математичного програмування як граничну корисність додаткового доходу (гранична корисність грошей)

$$\lambda^* = \frac{\partial U(x^*(p, I))}{\partial I} \tag{14}$$

Наведемо граничну інтерпретацію задачі (8) про раціональну поведінку споживача. Але спочатку надамо означення.

Бюджетна лінія – геометричне місце точок, які характеризують усі такі набори товарів x, на придбання яких за цінами p споживач повністю витрачає свій дохід I.

Розглянемо випадок двох товарів (n=2). Тоді оптимальне споживання задовольняє систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda^* p_2 = 0, \\ I - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Розв'язок лежить на бюджетній лінії, що описується третім рівнянням із (15) і є її точкою дотику до кривої байдужості

$$U(x_1, x_2) = U(x_1^*, x_2^*) = const \qquad (16)$$

При цьому нахил (кутовий коефіцієнт) бюджетної лінії дорівнює $-\frac{p_1}{p_2}$, а нахил кривої байдужості $\frac{dx_2}{dx_1}$можна знайти з рівняння

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (17)$$

що є наслідком кривої байдужості (16).

Із (17) маємо

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{на лінії байдужості}} = \frac{{\partial U}/{\partial x_1}}{{\partial U}/{\partial x_2}}.$$

Оскільки в точці дотику нахили рівні, то

$$-\frac{{\partial U}/{\partial x_1}}{{\partial U}/{\partial x_2}} = -\frac{p_1}{p_2}$$

і таким чином

$$\frac{1}{p_1}\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = \frac{1}{p_2}\frac{\partial U(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}$$

або ж

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2}.$$

§2. Задача споживання за Хіксом

Дуальною (двоїстою) задачею до неокласичної задачі споживання є задача мінімізації витрат споживача на придбання наборів товару х, з рівнем корисності на меншим заданого U_0, яка записується у наступному вигляді

$$\begin{cases} px \to min, \\ U(x) \geq U_0, \\ x \in R_+^n \end{cases} \qquad (18)$$

або в розгорнутій формі

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to min, \\ U(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq U_0 \\ x_i \geq 0, \ \ i = \overline{1, n}. \end{cases} \qquad (19)$$

Ця задача тісно пов’язана з неокласичною задачею споживання і разом вони дають повний аналітичний опис раціональної поведінки споживача.

Для задачі (18) розглянемо функцію Лагранжа

$$L(\lambda, x) = -(p, x) + \lambda(U(x) - U_0) \tag{20}$$

де λ – множник Лагранжа. Необхідні умови оптимальності розв'язку x^* та множника λ^*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -p + \lambda^* MU(x^*) \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = U(x^*) - U_0 \ge 0, \\ \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)^T x^* = \sum_{i=1}^{n} \left(-p_i + \lambda^* MU_i(x^*)\right) x^* = 0, \\ \lambda^* \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda^*(U(x^*) - U_0) = 0, \\ x^* \ge 0, \lambda^* \ge 0. \end{cases} \tag{21}$$

Вважаючи, що всі товари споживаються, тоді з наведених умов оптимальності (21) випливає, що виконуються такі співвідношення:

$$x_i^* \geq 0 \Rightarrow \lambda^* MU_i(x^*) \leq p_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

і при цьому

$$\begin{cases} \lambda^* MU_i(x^*) = p_i, & x_i^* > 0 \\ \lambda^* MU_i(x^*) < p_i, & x_i^* = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

Таким чином, для усіх закуплених товарів, коли $x_i^* > 0$, маємо

$$\frac{p_i}{MU_i(x^*)} = \lambda^* \qquad (23)$$

Звідси, вважаючи, що деякі товари були куплені, маємо $\lambda^* > 0$, і отже з четвертого рівняння (21) маємо

$$U(x^*) = U_0$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що споживач закуповує всі види товарів. Тоді умови з (21) набувають системи рівнянь

$$\lambda^* MU_i(x^*) - p_i = 0, \qquad U(x^*) - U_0 = 0$$

або в розгорнутому вигляді

$$\lambda^* MU_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - p_i = 0, \qquad U(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - U_0 = 0$$

Отже, ***Хіксіанська рівновага споживача*** відповідає такій комбінації придбаних товарів, за якої мінімізуються витрати при заданому рівні корисності.

Оптимальний множник Лагранжа $\lambda^*_{\text{Хікс}}$ за Хіксом пов’язаний з оптимальним множником Лагранжа НЗС $\lambda^*_{\text{Нео}}$ наступним чином

$$\lambda^*_{\text{Хікс}} = \frac{1}{\lambda^*_{\text{Нео}}} \qquad (24)$$