Лекція 11. Багатопродуктове виробництво

Теорією поведінки однопродуктової фірми, розглянуту вище, можна поширити на більш загальний випадок – багатопродуктової фірми, яка виробляє довільну кількість n видів продукції ($n \geq 1$), використовуючи при цьому m видів факторів виробництва ($m \geq 1$).

§1. Максимізація прибутку

Якщо позначити через q_i $(i = \overline{1,n})$ обсяг випуску продукції $i^{\text{ого}}$ виду, то загальний обсяг випуску продукції q є n-вимірним вектором $q = (q_i)_{i=\overline{1,n}}$.

Тоді вектор факторів виробництва (ресурсів) матиме вигляд $x = \left(x_j\right)_{j=\overline{1,m}}$.

Виробнича функція F задається як векторна функція у просторі факторів виробництва (ресурсів) R_+^m:

$$F = \left(F_i\left(x^i\right)\right)_{i=\overline{1,n}} = \left(f_i\left(x_1^i, \dots, x_m^i\right)\right)_{i=\overline{1,n}} = q, \qquad (1)$$

де $q_i = F_i\left(x^i\right), i = \overline{1,n}$ – виробнича функція, що описує випуск $i^{\text{ого}}$ виду продукції,

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_j^i, \qquad j = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

де x_j^i – обсяг $j^{\text{ого}}$ фактору виробництва (ресурсу), який використовується при виробництві $i^{\text{ого}}$ виду продукції.

Якщо позначити через $p = (p_i)_{i=\overline{1,n}}$ вектор цін продукції, де p_i – ціна одиниці $i^{\text{ої}}$ продукції, то функція доходу матиме вигляд:

$$TR = F(x)p = \sum_{i=1}^{n} F_i\left(x^i\right)p_i, \qquad (3)$$

а функція прибутку фірми матиме наступний вигляд:

$$\pi(x) = Fp - wx = \sum_{i=1}^{n} F_i(x^i)p_i - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j, \qquad (4)$$

де $w = (w_j)_{j=\overline{1,m}}$ – вектор цін на фактори виробництва (ресурси).

Підкреслимо, що в моделі багатопродуктової фірми, кожний вид продукції фірми вважається кінцевим і не використовується на виробництво інших видів продукції.

Задача максимізації прибутку матиме вигляд:

$$\begin{cases} \pi(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x^i)p_i - \sum_{j=1}^{m} w_j \sum_{i=1}^{n} x_j^i \to max, \\ x^i \geq 0, i = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (5)$$

Необхідні умови оптимальності

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial x_j^i} = \dfrac{\partial F_i(x^i)}{\partial x_j^i} p_i - w_j = 0, \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial x_j^i} x_j^i = \left(\dfrac{\partial F_i(x^i)}{\partial x_j^i} p_i - w_j \right) x_j^i = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

Іншим більш агрегованим підходом до опису багатопродуктової фірми при використанні m видів ресурсів є задання функції випуску у вигляді неявної функції витрат

$$\Phi(q,x) = \Phi(q_1, \dots, q_n, x_1, \dots x_m) = 0 \qquad (7)$$

причому, щоб відобразити загальні закономірності виробництва, як правило, вважається, що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \le 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \ge 0, \qquad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \qquad (8)$$

Функція прибутку π визначається тоді як

$$\pi(q,x) = qp - wx = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j \tag{9}$$

Задача максимізації прибутку матиме вигляд:

$$\begin{cases} \pi(q,x) \to max, \\ \Phi(q,x) = 0, \\ q \geq 0, x \geq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Будуємо функцію Лагранжа:

$$L(\lambda,q,x) = qp - wx + \lambda\Phi(q,x).$$

Необхідні умови рівноваги фірми

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q} = p + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = -w + \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \Phi(q, x) = 0, \qquad \lambda > 0. \end{cases} \tag{11}$$

У скалярній формі умови рівноваги (11) можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} -p_i = \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \qquad i = \overline{1, n}, \\ w_j = \lambda \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j}, \qquad j = \overline{1, m}, \\ \Phi(q, x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

§2. Олігополія та олігопсонія

Важливим випадком недосконалої конкуренції є конкуренція серед небагатьох, коли діє невелика кількість фірм. Визначальною властивістю конкуренції серед небагатьох є той факт, що всі конкуруючі фірми певною мірою можуть впливати на ціни продукції та виробничих факторів (ресурсів). Отже, прибуток кожної фірми залежить від політики решти конкуруючих фірм.

Олігополія – така ринкова структура, коли на ринку продукції пропозиції небагатьох фірм заповнюють ринок і кілька з цих фірм займають значні частки ринку.

Олігопсонія – така ринкова структура, коли на ринку факторів виробництва (ресурсів) попит на певні ресурси розподілений серед небагатьох фірм, на окремі з яких припадають значні частки ринку.

Розглянемо простий випадок, коли на ринку діє дві фірми, що займають значні частки ринку.

Дуополія / дуопсонія – це олігополія / олігопсонія з двома конкурентами.

Нехай дві конкуруючі фірми виробляють однотипну продукцію, використовуючи технологічні процеси, що відображаються їхніми виробничими функціями:

$$q_j = F_j\left(x_1^j, \dots, x_m^j\right), \ \ j = 1,2 \qquad (13)$$

де q_j − випуск продукції $j^{\text{ою}}$ фірмою, $x_j = \left(x_i^j\right)_{i=\overline{1,m}}$ − обсяг факторів виробництва (ресурсів) на виробництво $j^{\text{ого}}$ виду продукції.

Тоді ціни на продукцію визначаються обома рівнями випуску $p = p(q_1, q_2)$. Наприклад, якщо обидва обсяги випуску зростуть, то ціна p зменшиться:

$$\frac{\partial p}{\partial q_1} < 0, \ \ \frac{\partial p}{\partial q_2} < 0 \qquad (14)$$

Ціна будь-якого з факторів виробництва (ресурсів) залежатиме від їх закупівлі обома фірмами, тобто:

$$w_i = w_i\left(x_i^1, x_i^2\right), \qquad i = \overline{1,m} \qquad (15)$$

Наприклад, коли фірми збільшують попит на ресурси i $(i = \overline{1,m})$, то ціна на них зростає:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} > 0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} > 0 \qquad (16)$$

Якщо вважати першу фірму оперуючою стороною, а дії другої фірми – неконтрольованими факторами для оперуючої сторони та прийняти за критерій ефективності дій першої фірми її функцію прибутку π_1, то завдання першої фірми полягає у знаходженні стратегії $(q_1, x_1^1, \ldots, x_m^1)$, що, по можливості, максимізує її прибуток:

$$\pi_1 = p(q_1, q_2)q_1 - \sum_{i=1}^{m} w_i\left(x_i^1, x_i^2\right)x_i^1 \to \max. \qquad (17)$$

Функція Лагранжа для такої задачі матиме вигляд:

$$L = \pi_1 + \lambda(F_1(x^1) - q_1) \qquad (18)$$

Умови оптимальності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = p(q_1, q_2) + q_1 \dfrac{\partial p}{\partial q_1} + q_1 \dfrac{\partial p}{\partial q_1} \dfrac{\partial q_2}{\partial q_1} - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i^1} = -w_i - x_i^1 \dfrac{\partial w_i}{\partial x_i^1} - x_i^1 \dfrac{\partial w_i}{\partial x_i^1} \dfrac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1} + \lambda \dfrac{\partial F_i}{\partial x_i^1} = 0, \; i = \overline{1, m}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = F_1(x^1) - q_1 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Задача (17) є задачею багатокритеріальної оптимізації, оскільки залежить від стратегії $(q_2, x_1^2, \ldots, x_m^2)$ другої фірми.

Вирази

$$\frac{\partial q_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}, i = \overline{1, m} \tag{20}$$

називаються ***<u>гаданим варіаціями</u>***, оскільки перша фірма повинна зробити деякі припушення про поведінку конкурента та його реакцію на обрану нею політику, а отже, на поведінку виразів (20), перший з яких – зміни у випуску продукції другою фірмою щодо змін q_1, а другий вираз – зміни у виробничих факторах (ресурсах) щодо змін x_i^1.

Подальший аналіз залежить від різних припущень про поведінку виразів (20), кожен з яких зумовлює окремий аналіз ситуації. Розглянемо деякі з подібних альтернатив для найпростіших випадків, коли товар, що виробляється, є однорідним, граничні витрати – сталими, функція ціни – лінійна, тобто $p = a - b(q_1 + q_2), a, b > 0$, а функції витрат мають вигляд:

$$TC_j = cq_j + d, \qquad c, d > 0,$$

де c – граничні витрати, d – фіксовані витрати.

Тоді прибуток першої фірми задається

$$\pi_1 = \big(a - b(q_1 + q_2)\big)q_1 - cq_1 - d \to \max \tag{21}$$

Умова оптимальності має вигляд

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \big(a - b(q_1 + q_2)\big) - bq_1\left(1 + \frac{\partial q_2}{\partial q_1}\right) - c = 0 \tag{22}$$

Аналіз **ДУОПОЛІЇ КУРНО** ґрунтується на припущенні, що гадані варіації $\frac{\partial q_2}{\partial q_1}$ та $\frac{\partial q_1}{\partial q_2}$ дорівнюють нулю, тобто кожен із дуополістів вважає, що зміни у випуску його продукції НЕ впливають на конкурента. Тоді ***рівновага Курно*** – це пара обсягів (q_1, q_2), яка задовольняє умови

$$\left.\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}\right|_{\frac{\partial q_2}{\partial q_1}=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}\right|_{\frac{\partial q_1}{\partial q_2}=0} = 0 \qquad (23)$$

З урахуванням (22) умови (23) набувають вигляду

$$a - b(q_1 + q_2) - bq_j - c = 0, \;\; j = 1,2,$$

звідки рівновага Курно задається рівностями

$$q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b}, \;\; p = \frac{a+2c}{3}.$$

При більш складному аналізі припускаються ненульові гадані варіації. Подібним прикладом є аналіз **ДУОПОЛІЇ ШТАКЕЛЬБЕРГА**, коли одна або дві фірми вважають, що конкурент буде поводити себе як дуополіст Курно.

Нехай **перша фірма** вважає, що друга реагуватиме згідно з функцією реакції Курно, тоді

$$\frac{\partial q_1}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \neq 0 \qquad (24)$$

Для попереднього прикладу, використовуючи (22) та $q_2 = \frac{a-c-bq_1}{2b}$, отримаємо, що гадана варіація $\frac{\partial q_2}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}$. Маємо $a - b(q_1 + q_2) - bq_1 - c + \frac{bq_1}{2} = 0$, звідки реакція першої фірми буде $q_1 = \frac{2(a-c-bq_2)}{3b}$.

Отже, результати обох фірм залежать від поведінки другої фірми-конкурента. Якщо вона обирає реакцію Курно, то рішенням є ***рівновага Штакельберга*** для першої фірми

$$q_1 = \frac{a-c}{2b}, \quad q_2 = \frac{a-c}{4b}. \qquad (25)$$

Таким чином, перша фірма має вдвічі більший прибуток, ніж друга. Проте, коли друга фірма не використовує реакцію Курно, а діє згідно з реакцією Штакельберга, тобто кожна фірма неправильно вважає, що інша використовує наївне припущення Курно, то маємо нерівновагу Штакельберга

$$q_1 = q_2 = \frac{2(a - c)}{5b}, \tag{26}$$

згідно з якою фірми отримують менший прибуток, ніж за рівновагою Курно.

Серед інших можливостей розглядаються ще корпоративне рішення обох фірм в дуополії – максимізувати загальний прибуток. Воно описується такою задачею:

$$\pi = \pi_1 = \pi_2 = \big(a - b(q_1 + q_2)\big)(q_1 + q_2) - c(q_1 + q_2) - 2d \to \max \tag{27}$$

Розв’язок такої задачі має задовольняти умову

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \big(a - b(q_1 + q_2)\big) - b(q_1 + q_2) - c = 0,$$

звідки $q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b}$.