Лабораторна робота №3

Півень Денис

Варіант 10

1 Метод Якобі

1.1 Опис методу

Нехай початкова система виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишемо її у матричному вигляді:

$$Ax = b$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матрицю A можна розкласти на два доданки: діагональну матрицю D, та все інше R:

$$A = D + R, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Систему лінійних рівнянь можна переписати в вигляді:

$$Dx = b - Rx$$

Ітераційний метод Якобі виражається формулою:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Rx^{(k)}).$$

чи

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді вектор x^* є розв'язком нашої системи.

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Метод є збіжним, коли матриця A має домінантну головну діагональ:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

іншою умовою збіжності є, те щоб спектральний радіус матриці не перевищував одиницю:

$$\rho(D^{-1}R) < 1.$$

1.2 Розв'язання

Умова задачі:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 1 & 0 & 25 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 31 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 19 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 35 \end{array}\right)$$

Розв'яжемо задачу програмно:

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 5 \end{cases}$

```
Task: Jacobi`s Method
+6.0 +3.0 +1.0 +0.0     +25.0
+3.0 +5.0 +0.0 +2.0     +31.0
+1.0 +0.0 +3.0 +1.0     +19.0
+0.0 +2.0 +1.0 +5.0     +35.0

0)      x0 = 0 x1 = 0 x2 = 0 x3 = 0
1)      x0 = 4.2 x1 = 6.2 x2 = 6.3 x3 = 7.0
2)      x0 = 0.0 x1 = 0.9 x2 = 2.6 x3 = 3.3
3)      x0 = 3.3 x1 = 4.9 x2 = 5.2 x3 = 6.1
4)      x0 = 0.8 x1 = 1.8 x2 = 3.2 x3 = 4.0
5)      x0 = 2.7 x1 = 4.1 x2 = 4.7 x3 = 5.6
6)      x0 = 1.3 x1 = 2.3 x2 = 3.5 x3 = 4.4
7)      x0 = 2.4 x1 = 3.6 x2 = 4.4 x3 = 5.4
8)      x0 = 1.6 x1 = 2.6 x2 = 3.7 x3 = 4.7
9)      x0 = 2.2 x1 = 3.4 x2 = 4.2 x3 = 5.2
10)     x0 = 1.8 x1 = 2.8 x2 = 3.8 x3 = 4.8
11)     x0 = 2.1 x1 = 3.2 x2 = 4.1 x3 = 5.1
12)     x0 = 1.9 x1 = 2.9 x2 = 3.9 x3 = 4.9
13)     x0 = 2.1 x1 = 3.1 x2 = 4.1 x3 = 5.1
14)     x0 = 1.9 x1 = 2.9 x2 = 3.9 x3 = 4.9
15)     x0 = 2.0 x1 = 3.1 x2 = 4.0 x3 = 5.0
16)     x0 = 2.0 x1 = 3.0 x2 = 4.0 x3 = 5.0
17)     x0 = 2.0 x1 = 3.0 x2 = 4.0 x3 = 5.0

Answer:
x1 = 2.0
x2 = 3.0
x3 = 4.0
x4 = 5.0
```

2 Метод Зейделя

2.1 Опис методу

Нехай початкова система виглядає наступним чином:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишемо її у матричному вигляді:

$$Ax = b$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Метод Зейделя можна розглядати як модифікацію методу Якобі. Основна ідея модифікації полягає в тому, що нові значення $x^{(i)}$ використовуються тут одразу ж у міру отримання, в той час як у методі Якобі вони не використовуються до наступної ітерації:

Таким чином і-тий компонент $(k+1)$-го наближення обчислюється за формулою:

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)} + d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

де

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Тоді вектор x^* є розв'язком нашої системи.

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Достатні умови збіжності методу Зейделя такі самі, як для методу Якобі. Крім того, метод Зейделя збігається, якщо $A^T = A \geq 0$. Умова невід'ємності симетричної матриці A означає, що невід'ємні її головні мінори.

Метод Зейделя збігається для довільного початкового наближення тоді й тільки тоді, коли всі корені рівняння

$$P_n^Z(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

за модулем менші 1.

2.2 Розв'язання

Умова задачі:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 1 & 0 & 17 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 23 \end{array}\right)$$

Розв'яжемо задачу програмно:

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 5 \end{cases}$

```
Task: Zeidel`s Method
+5.0 +1.0 +1.0 +0.0     +17.0
+1.0 +2.0 +0.0 +0.0     +8.0
+1.0 +0.0 +4.0 +2.0     +28.0
+0.0 +0.0 +2.0 +3.0     +23.0

0)      x0 = 0 x1 = 0 x2 = 0 x3 = 0
1)      x0 = 3.4 x1 = 2.3 x2 = 6.2 x3 = 3.6
2)      x0 = 1.7 x1 = 3.1 x2 = 4.8 x3 = 4.5
3)      x0 = 1.8 x1 = 3.1 x2 = 4.3 x3 = 4.8
4)      x0 = 1.9 x1 = 3.0 x2 = 4.1 x3 = 4.9
5)      x0 = 2.0 x1 = 3.0 x2 = 4.0 x3 = 5.0

Answer:
x1 = 2.0
x2 = 3.0
x3 = 4.0
x4 = 5.0
```