Лабораторна робота №3
з чисельного аналізу

Півень Денис ОМ-3

Варіант 10

1 Метод Рунге — Кутти 4-го порядку

1.1 Опис методу

Метод Рунге — Кутти 4-го порядку настільки широко розповсюджений, що його часто називають просто методом Рунге — Кутти або RK4.

Розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь довільного порядку, що записується у векторній формі як

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

Тоді значення невідомої функції в точці x_{n+1} обчислюється відносно значення в попередній точці x_n за формулою:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$
$$x_{n+1} = x_n + h$$

де h — крок інтегрування, а коефіцієнти k_n розраховуються таким чином:

$$k_1 = \mathbf{f}\left(x_n, \mathbf{y}_n\right),$$

$$k_2 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right),$$

$$k_3 = \mathbf{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right),$$

$$k_4 = \mathbf{f}\left(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3\right).$$

Це метод 4-го порядку, тобто похибка на кожному кроці становить $O(h^5)$, а сумарна похибка на кінцевому інтервалі інтегрування є величиною $O(h^4)$.

1.2 Розв'язання

Умова задачі:

Розв'язати рівняння методом Рунге-Кутти 4-го порядку точності на відрізку $x \in [1, 2]$, з кроком $h = 0.1$.

$$y' = \sqrt{x}y^2 + 1$$
$$y(1) = 0$$

На кожному кроці знаходимо коефіцієнти k_n, обчислюємо значення функції y_{n+1} у наступній точці x_{n+1}:

n	x(n)	y(n)	k1	k2	k3	k4	y(n+1)
0	1	0	0.1	0.10026	0.10026	0.10105	0.10035
1	1.1	0.10035	0.10106	0.10244	0.10246	0.10451	0.20291
2	1.20000	0.20291	0.10451	0.10728	0.10736	0.11098	0.31037
3	1.30000	0.31037	0.11098	0.11555	0.11575	0.12148	0.42621
4	1.40000	0.42621	0.12149	0.12855	0.12897	0.13775	0.55526
5	1.50000	0.55526	0.13776	0.14850	0.14934	0.16280	0.70463
6	1.60000	0.70463	0.16280	0.17936	0.18105	0.20228	0.88562
7	1.70000	0.88562	0.20226	0.22880	0.23229	0.26767	1.11764
8	1.80000	1.11764	0.26759	0.31301	0.32081	0.38521	1.43771
9	1.90000	1.43771	0.38492	0.47109	0.49097	0.62606	1.92690
10	2.00000	1.92690					

2 Модифікований метод Ейлера

2.1 Опис методу

Нехай дана задача Коші для рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y_{|x=x_0} = y_0,$$

де функція f визначена на деякії області $D \subset \mathbb{R}^2$. Розв'язок знаходиться в інтервалі $(x_0, b]$. На цьому інтервалі введемо вузли: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Наближенний розв'язок у вузлах x_i, який позначимо через y_i, визначається формулою:

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Ці формули зводяться на випадок систем звичайних диференціальних рівнянь.

2.2 Розв'язання

Умова задачі:

Розв'язати з кроком $h = 0.$ на відрізку $x \in [0, 1]$ задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, звівши його до системи диференціальних рівнянь першого порядку з подальшим застосуванням модифікованого методу Ейлера:

$$\begin{cases} y''(1 - 3x(y')^2) + (y')^3 = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Зводимо до системи першого порядку.

$$\begin{cases} z = y' \\ z'(1 - 3xz^2) + z^3 = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = -1 \end{cases}$$

Застосовуємо модифікований метод Ейлера до рівняння z'.

n	x{n}	Approximation	f(x,z)	dz	z{n+1}
0	0	-1	1	0.1	-0.9
1	0.1	-0.9	0.729000	0.0729	-0.827100
2	0.2	-0.827100	0.565814	0.056581	-0.770519
3	0.300000	-0.770519	0.457456	0.045746	-0.724773
4	0.4	-0.724773	0.380720	0.038072	-0.686701
5	0.5	-0.686701	0.323819	0.032382	-0.654319
6	0.6	-0.654319	0.280136	0.028014	-0.626305
7	0.7	-0.626305	0.245674	0.024567	-0.601738
8	0.800000	-0.601738	0.217883	0.021788	-0.579950
9	0.900000	-0.579950	0.195061	0.019506	-0.560444
10	1.000000	-0.560444			

Застосовуємо модифікований метод Ейлера до рівняння y'.

n	x{n}	Approximation	f(x,y)	dy	y{n+1}
0	0	0	-0.560444	-0.056044	-0.056044
1	0.1	-0.056044	-0.560444	-0.056044	-0.112089
2	0.2	-0.112089	-0.560444	-0.056044	-0.168133
3	0.300000	-0.168133	-0.560444	-0.056044	-0.224178
4	0.4	-0.224178	-0.560444	-0.056044	-0.280222
5	0.5	-0.280222	-0.560444	-0.056044	-0.336266
6	0.6	-0.336266	-0.560444	-0.056044	-0.392311
7	0.7	-0.392311	-0.560444	-0.056044	-0.448355
8	0.800000	-0.448355	-0.560444	-0.056044	-0.504400
9	0.900000	-0.504400	-0.560444	-0.056044	-0.560444
10	1.000000	-0.560444			