Лабораторна робота №1
з чисельного аналізу

Півень Денис ОМ-3

Варіант 10

1 Метод середніх прямокутників

1.1 Опис методу

Формула середніх прямокутників. Якщо у формулі Ньютона-Котеса відкритого типу взяти один вузол $\frac{(a+b)}{2}$, отримаємо формулу середніх прямокутників

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=1}^{n} H_k f(x_k),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{1}{2}})\right),$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{24}.$$

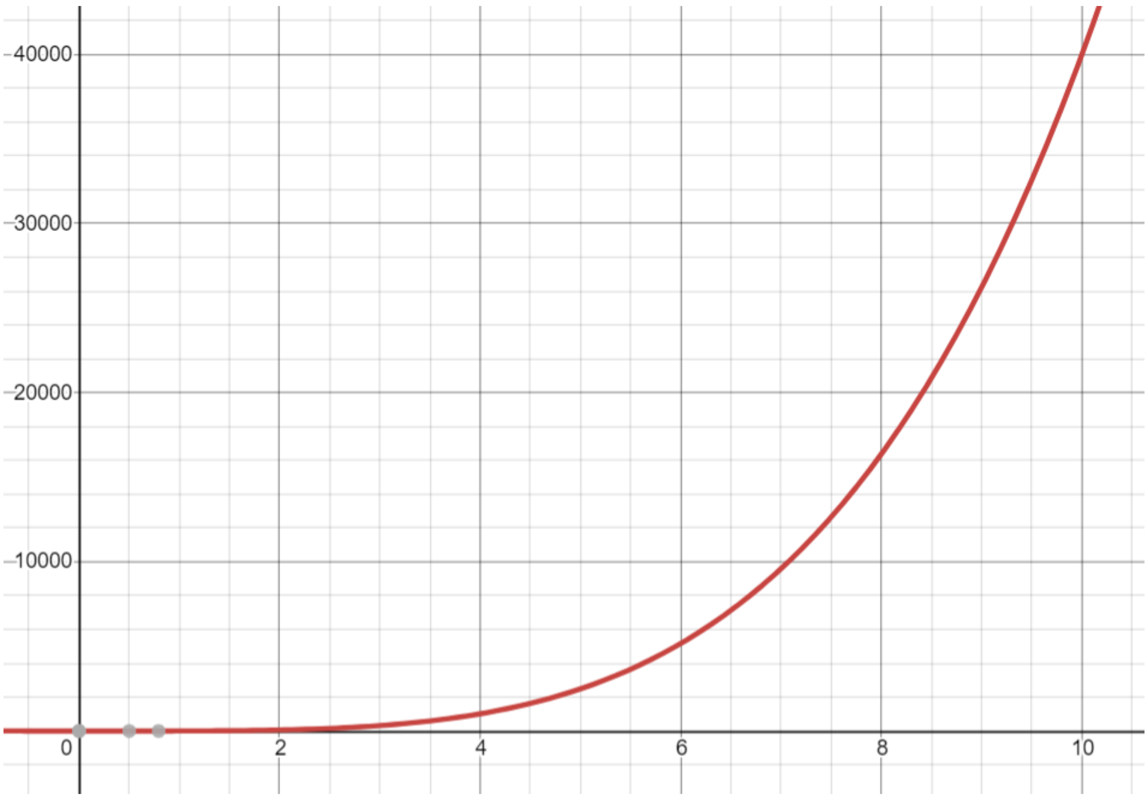
Враховуючи зауваження про симетричне розташування вузлів, алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 1. Порядок точності складеної формули середніх прямокутників – 2, а на одному проміжку – 3.

1.2 Розв'язання

Умова задачі:
Виконати чисельне інтегрування методом середніх прямокутників.

$$\int_0^{10} (4x^4 - 2x)dx,$$

1. Побудуємо графік підінтегральної функції.



2. Оберемо крок апроксимації. $n = 100$. Тоді похибка буде:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} \approx 20.$$

3. Застосуємо метод середніх прямокутників.

```
Calculate Integral by the midpoint method:
Integral(0,10)(4*x^4-2*x)dx = 79893.3
```

4. Порівняємо з точним значенням інтеграла.

$$\int_0^{10} (4x^4 - 2x)dx = 79900$$

2 Метод Сімпсона

2.1 Опис методу

Формула Сімпсона. Поклавши у формулі Ньютона-Котеса замкненого типу $n = 2$, отримуємо формулу парабол (Сімпсона)

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right),$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880}.$$

Складена формула Сімпсона з оцінкою залишкового члена має вигляд:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right),$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{2880}.$$

Враховуючи зауваження про парні степені інтерполяції, алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 3. Порядок точності складеної формули – 4, а по одному проміжку – 5.

Зауваження. Інколи, при застосуванні складеної квадратурної формули Сімпсона, для зручності використовують цілу нумерацію вузлів:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right),$$

Похибка при цьому має вигляд

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{2880}.$$

Також формулу можна записати використовуючи тільки відомі значення функції, тобто значення у вузлах:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=1,2}^{n-1}\left[f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + 2f(x_{k+1})\right],$$

де $k = 1, 2$ означає що індекс змінюється від одиниці з кроком, рівним двум.

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{2880}.$$

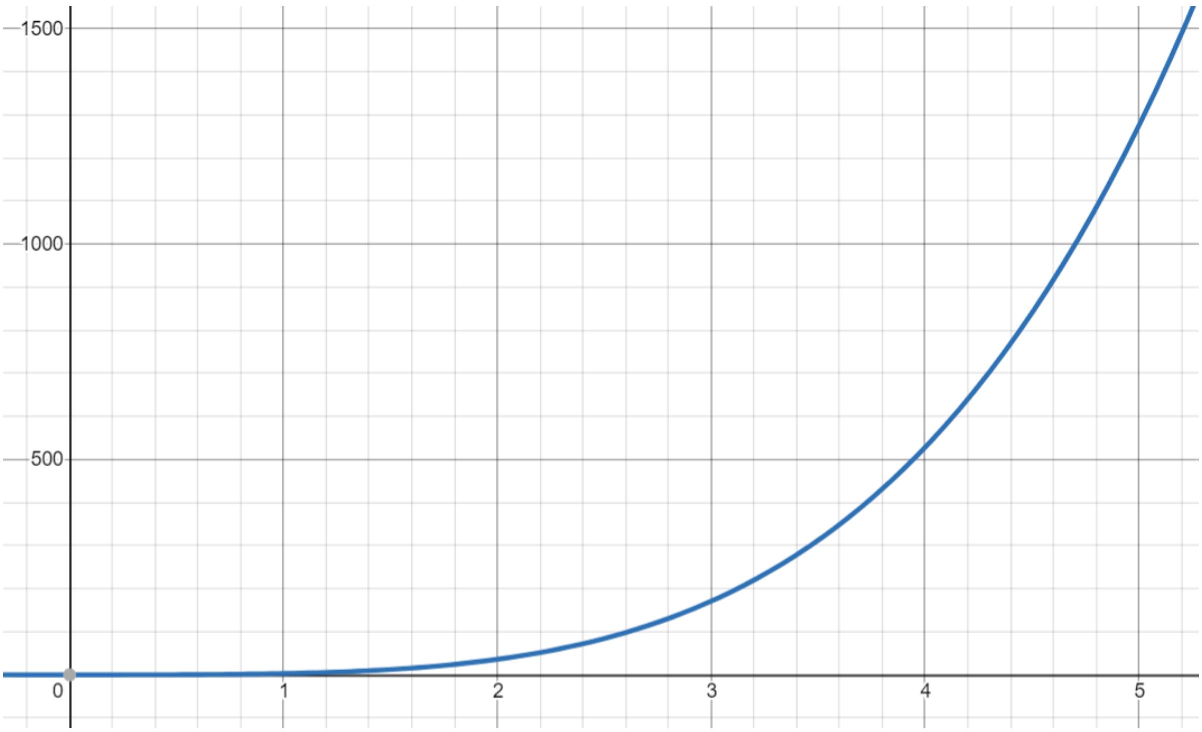
2.2 Розв'язання

Умова задачі:

Виконати чисельне інтегрування методом Сімпсона з точністю 0.001 та порахувати потрібну довжину кроку.

$$\int_0^5 (2x^4 + x^2)dx,$$

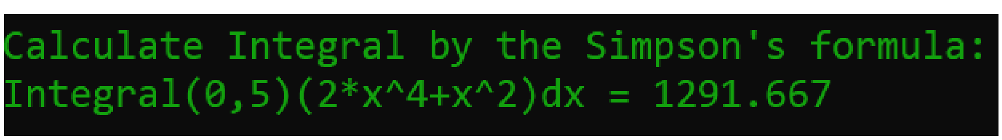
1. Побудуємо графік підінтегральної функції.



2. Порахуємо довжину кроку за формулою:

$$h \leqslant \frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{\frac{2880 \cdot 0.001}{M_4(b-a)}}\right] \approx 0.15625.$$

3. Застосуємо метод Сімпсона.



```
Calculate Integral by the Simpson's formula:
Integral(0,5)(2*x^4+x^2)dx = 1291.667
```

4. Порівняємо з точним значенням інтеграла.

$$\int_0^5 (2x^4 + x^2)dx = \frac{3875}{3} \approx 1291.667$$