Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

ЗВІТ

на тему:

Розв'язування одновимірної задачі теплопровідності

Виконав студент IV курсу
групи ОМ-4
Півень Денис Миколайович
Науковий керівник
кандидат фізико-математичних наук
доцент кафедри обчислювальної
математики
Кузьмін Анатолій Володимирович

Київ – 2021

Зміст

1 Постановка задачі

1.1 Умова

Довгий стальний стрижень діаметром 10 см був нагрітий до температури 500 °C. Визначити час, після закінчення якого температура стрижня, вміщеного в середовище з температурою 20 °C, зменшиться в п'ять разів. Фізичні характеристики стального стрижня мають такі значення:
$\lambda = 45{,}5 \quad \mathrm{W/(m{\cdot}}K)$,
$c = 0,46\, kJ/(kg \cdot K)$,
$\rho = 7900\, kg/m^3$,
$\gamma = 140 \quad \mathrm{W/(m{\cdot}}K)$.

1.2 Загальний вигляд

Розглянемо граничну задачу для одновимірного рівняння теплопровідності з циліндричною або сферичною симетрією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m \cdot k(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x) \cdot u(x) + f(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(k(x) \cdot x^m \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = 0 \tag{3}$$

$$k(x) \cdot x^m \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \gamma \cdot u(x,t)\bigg|_{x=R} = \varphi(t) \tag{4}$$

2 Різницева схема для рівняння теплопровідності

2.1 Введення рівномірної сітки

Для побудови різницевої схеми введемо рівномірну сітку по просторовій змінній x та змінній часу t

$x_i = ih, i = \overline{0, N}$ де $h = \frac{R}{N}$

$t_j = j\tau, j = \overline{0, J}$

Введемо проміжні вузли $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$

2.2 Інтегро-інтерполяційний метод

Спочатку проведемо апроксимацію по просторовій змінній x. Введемо позначення:

$$W = x^m \cdot k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

Тоді рівняння (1) запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial W}{\partial x} - q \cdot u(x) + f \tag{6}$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння по проміжку від $x_{i-\frac{1}{2}}$ до $x_{i+\frac{1}{2}}$ та поділимо на h

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{1}{x^m}\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\,dx - \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)\,u(x,t)\,dx + ... \\ ... + \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x,t)\,dx$$

Проведемо наближенні обчислення інтегралів враховуючи що h – мала величина

$$\frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t} = \frac{1}{x_i^m}\frac{W(x_{i+\frac{1}{2}},t) - W(x_{i-\frac{1}{2}},t)}{h} - u(x_i,t)\,\frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)\,dx + ... \\ ... + \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x,t)\,dx \tag{7}$$

Введемо позначення:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x_i,t)}{\partial t}$$

$$u_i(t) = u(x_i,t)$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}(t) = W(x_{i+\frac{1}{2}},t)$$

$$\overline{q}_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)\,dx$$

$$\overline{f}_i(t) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x,t)\,dx$$

В цих позначеннях запишемо співвідношення (7):

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{1}{x_i^m}\,\frac{W_{i+\frac{1}{2}}(t) - W_{i-\frac{1}{2}}(t)}{h} - u_i(t)\,\overline{q}_i + \overline{f}_i(t) \tag{8}$$

Для обчислення $W_{i+\frac{1}{2}}(t)$ скористаємось позначенням (6) і запишемо його у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{W}{x^m\,k}$$

Проінтегруємо це співвідношення від x_i до x_{i+1} та поділимо на h та обчислимо наближено інтеграли:

$$\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dx = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{W(x,t)}{x^m\,k(x)}\,dx$$

$$\frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h} = \frac{W_{i+\frac{1}{2}}(t)}{x_{i+\frac{1}{2}}^m}\cdot\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}$$

З останнього співвідношення знайдемо:

$$W_{i+\frac{1}{2}}(t) = x_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \overline{k}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h} \tag{9}$$

де

$$\overline{k}_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1}$$

Підставимо (9) в (8), отримаємо:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{1}{x_i^m}\,\frac{1}{h}\left(x_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \overline{k}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h} - x_{i-\frac{1}{2}}^m \cdot \overline{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}\right) - \ldots$$
$$\ldots - u_i(t)\,\overline{q}_i + \overline{f}_i(t)$$

Вираз:

$$\Lambda u_i(t) = \frac{1}{x_i^m}\,\frac{1}{h}\left(x_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \overline{k}_{i+\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h} - x_{i-\frac{1}{2}}^m \cdot \overline{k}_{i-\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}\right) - u_i(t)\,\overline{q}_i$$

Маємо:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \Lambda u_i(t) + \overline{f}_i(t) \tag{10}$$

Проведемо апроксимацію (10) по змінній t.
Проінтегруємо рівняння від t_j до t_{j+1} та поділимо на τ.

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u_i(t)}{\partial t}\,dt=\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Lambda\,u_i(t)\,dt+\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\overline{f_i(t)}\,dt$$

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\left(\delta\Lambda\,u_i^{j+1}+(1-\delta)\Lambda\,u_i^j\right)+f_i^{j+\frac{1}{2}}$$

При виборі $\delta=0.5$ різницева схема буде мати другий порядок апроксимації по τ та h.
Формула трапецій для обчислення інтегралу:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{2}\left(\Lambda\,u_i^{j+1}+\Lambda\,u_i^j\right)+f_i^{j+\frac{1}{2}},\quad i=\overline{1,N-1},j=\overline{0,J} \tag{11}$$

В початковий момент часу використовуємо умову (3)

$$u_i=u_0(x_i),\quad i=\overline{0,N}$$

Для замикання системи рівнянь апроксимуємо граничні умови.
Для апроксимації правої граничної умови співвідношення (6) проінтегруємо по x від $x_{N-\frac{1}{2}}$ до x_N і поділимо на $0.5\,h$

$$\frac{1}{0.5\,h}\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}\frac{\partial u(x)}{\partial t}\,dx=\frac{1}{0.5\,h}\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}\frac{1}{x^m}\frac{\partial W(x)}{\partial t}\,dx-\frac{1}{0.5\,h}\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}q(x)\,u(x)\,dx+...$$
$$...+\frac{1}{0.5\,h}\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}f(x)\,dx$$

Обчислимо наближено відповідні інтеграли:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}=\frac{1}{x_N^m}\left(\frac{W_N-W_{N-\frac{1}{2}}}{0.5\,h}\right)-\overline{q}_N\,u_N+\overline{f}_N$$

де

$$\overline{q}_N=\frac{1}{0.5\,h}\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}q(x)\,dx$$

$$\overline{f}_N=\frac{1}{0.5\,h}\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N}f(x)\,dx$$

Враховуючи (4):

$$W_N=\varphi-\gamma\,u_N$$

$$W_{N-\frac{1}{2}}=x_{N-\frac{1}{2}}^m\,\overline{k}_{N-\frac{1}{2}}\,\frac{u_N-u_{N-1}}{h}$$

Отримаємо:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} = -\frac{x^m_{N-\frac{1}{2}}\,\overline{k}_{N-\frac{1}{2}}\,(u_N - u_{N-1})}{x^m_N\,h^2} + \frac{\varphi - \gamma\,u_N}{x^m_N\,h} - \overline{q}_N\,u_N + \overline{f}_N$$

Проінтегруємо по t від t_j до t_{j+1} та поділимо на τ:

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial u_N}{\partial t}\,dt = -\frac{x^m_{N-\frac{1}{2}}}{x^m_N\,h}\cdot\overline{k}_{N-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{u_N - u_{N-1}}{h}\,dt + ...$$

$$... + \frac{1}{x^m_N\,h}\cdot\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(\varphi - \gamma\,u_N)\,dt - \overline{q}_N^{j+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}u_N\,dt + \overline{f}_N^{j+\frac{1}{2}}$$

для обчислення

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}u_N\,dt \approx \frac{u_N^{j+1} + u_N^j}{2}$$

3 Модель росповсюдження тепла

3.1 Формалізація

Константи:
c – теплоємність
ρ – щільність
k – теплопровідність
γ – коефіцієнт теплообміну
$x = (x_1, x_2, x_3), t$ – час
$u(x,t)$ – температура
Рівняння теплопровідності має вигляд:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + f(x_1, x_2, x_3, t)$$

Для випадку нескінченого циліндра оператор Лапласа записується в циліндричних координатах:

$$\Delta_{r,\varphi,z}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

У випадку сферичного тіла оператор Лапласа записується у сферичних координатах:

$$\Delta_{r,\varphi,\theta}u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

У всіх задачах розглядається випадок або циліндричної або сферичної симетрії, а це означає що температура залежить тільки від радіуса r і не залежить від φ та z в циліндричних координатах та від φ та θ у сферичних координатах, тобто рівняння буде мати вигляд:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{1}{r^\alpha}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\alpha\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r,t)$$

де

$\alpha = 0$ – стрижень
$\alpha = 1$ – нескінчений циліндр
$\alpha = 2$ – куля

Граничні умови на поверхні тіла:

1. Якщо задана температура на поверхні

$$u\Big|_s = v \quad \text{або} \quad u(r,t)\Big|_{r=R} = v(t)$$

2. Якщо заданий тепловий потік

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_s = q \quad \text{або} \quad k\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R} = q(t)$$

3. Якщо на границі конвективний теплообмін з оточуючим середовищем заданої температури

$$k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_s = \gamma(v-u) \quad \text{або} \quad k\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R} = \gamma(v(t)-u(R,t))$$

v – температура оточуючого середовища
γ – коефіцієнт теплообміну

Гранична умова в центрі тіла (вісь циліндра, центр кулі):

$$\lim_{r\to 0}\rho^\alpha\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \alpha = 1,2 \quad \text{(Умова симетрії)}$$

3.2 Приведення задачі до безрозмірного вигляду

Обираємо розмірні масштабні множини змінних величин:
U_0 – температури (характерна температура)
R_0 – радіусу (координати) (характерна довжина)
T_0 – часу

Представляємо $u = U_0 \cdot \overline{u}$, $t = T_0 \cdot \overline{t}$, $r = R_0 \cdot \overline{r}$ де $\overline{u}, \overline{t}, \overline{r}$ – безрозмірні.

Робимо заміну змінних в рівнянні, граничних та початкових умовах

$$c\rho\frac{U_0}{T_0}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{t}} = k\frac{U_0}{\overline{r}^\alpha R_0^2}\frac{\partial}{\partial\overline{r}}\left(\overline{r}^\alpha\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{r}}\right)$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} = \frac{k\,T_0}{c\rho R_0^2} \cdot \frac{1}{\overline{r}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \overline{r}} \left(\overline{r}^\alpha \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{r}} \right)$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} = \frac{1}{\overline{r}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \overline{r}} \left(\overline{r}^\alpha \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{r}} \right)$$

Покладаючи

$$\frac{k\,T_0}{c\rho R_0^2} = 1$$

обираємо масштаб зміни часу

$$T_0 = \frac{c\rho}{k} \cdot R_0^2$$

3.3 Загальний вигляд різницевої схеми

Різницева схема записується відносно наближених значень температури u у вузлах сітки (x_i, t_j) $\quad i = \overline{1, N+1},\ j = \overline{0, J}$

Позначимо їх u_i^j

А сама різницева схема представляє послідовність систем лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею

$$\begin{cases} a_{11}u_1^{j+1} + a_{12}u_2^{j+1} = \varphi_0(u_1^j, u_2^j) \\ a_{ii-1}u_{i-1}^{j+1} + a_{ii+1}u_{i+1}^{j+1} = \varphi_i(u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j) \quad i = \overline{2, N} \\ a_{N+1N}u_N^{j+1} + a_{N+1N+1}u_{N+1}^{j+1} = \varphi_{N+1}(u_N^j, u_{N+1}^j) \end{cases}$$

Елементи матриці не залежать від індексу j та не змінюються. Змінюється лише права частина.

4 Аналіз отриманих результатів та висновки

У результаті виконаної роботи було отримано розв'язок задачі теплопровідності за допомогою Інтерго-інтерполяційного методами. Час охолодження стрижня до заданої температури становить приблизно 120 секунд. Більш детально з результатом можна ознайомитись у програмному коді (6).

5 Лістинг програмного коду з коментарями

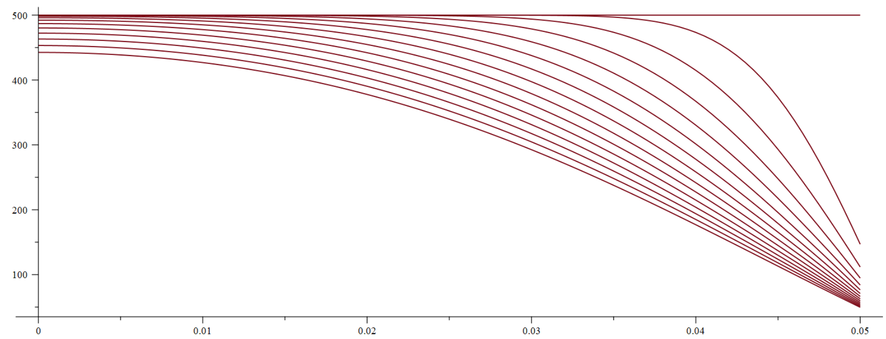
```
> restart :
> with(LinearAlgebra) :
  with(plots) :
> #Задаємо початкові умови
> r := 0.05 : #m
  u_0 := 500 : #C
  u_env := 20 : #C
  u_aim := 100 : #C
> #Задаємо коефіцієнти речовини
> lambda := 45.5 : #W/(m·K)
  co := 460 : #J/(kg·K)
  rho := 7900 : #kg/m^3
  gamma_ := 140 : #W/(m·K)
  gamma_1 := (gamma_·r)/lambda :
> k := sqrt(lambda/(co·rho)) :
> #Задаємо кількість точок
> N := 100 :
  h := 1/N :
  tau := h :
  tau_h := tau/h :
  tau_h2 := tau/h^2 :
```

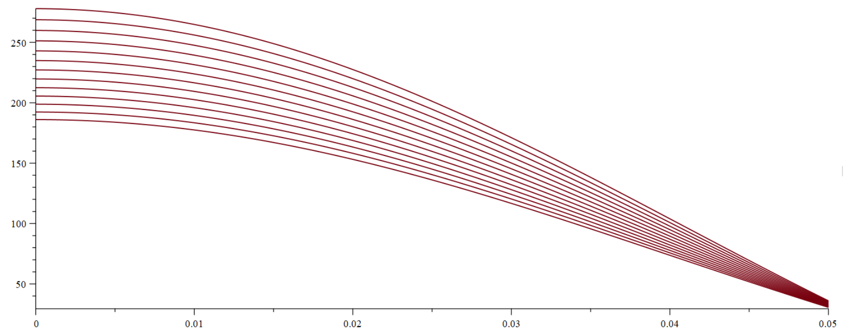
```
> #Задаємо кількість ітерацій
> max_iter := 100000 :
  check_iter := 200 :
> t1 := 0 :
  x1 := [seq(i·h, i = 0 ..N)] :
  v := [seq(0, i = 0 ..N)] :
> #Формуємо простір
> t := (r^2·t1)/k^2 :
  x := [seq(i·h·r, i = 0 ..N)] :
  u_00 := [seq(u_0, i = 0 ..N)] :
  plots_[1] := plot(x, u_00) :
  plots_counter := 1 :
> #Обраховуємо значення діагоналей
> bar_x := [(x1[2]^2 - x1[1]^2)/(2·h), seq((x1[i + 1]^2 - x1[i - 1]^2)/(4·h), i = 2 ..N), (x1[N + 1]^2 - x1[N]^2)/(2·h)] :
  bar_p := [0, seq(((x1[i] + x1[i - 1])/2)·k, i = 2 ..N + 1), 0] :
  diag1 := [0, seq(0.5·tau_h2·bar_p[i], i = 2 ..N + 1)] :
  diag3 := [seq(0.5·tau_h2·bar_p[i + 1], i = 1 ..N), 0] :
  diag2 := [-bar_x[1]/2 - diag3[1], seq(-bar_x[i] - diag1[i] - diag3[i], i = 2 ..N), -0.5·tau_h·gamma_1·x[N + 1]^2 - bar_x[N + 1]/2 - diag1[N + 1]] :
```

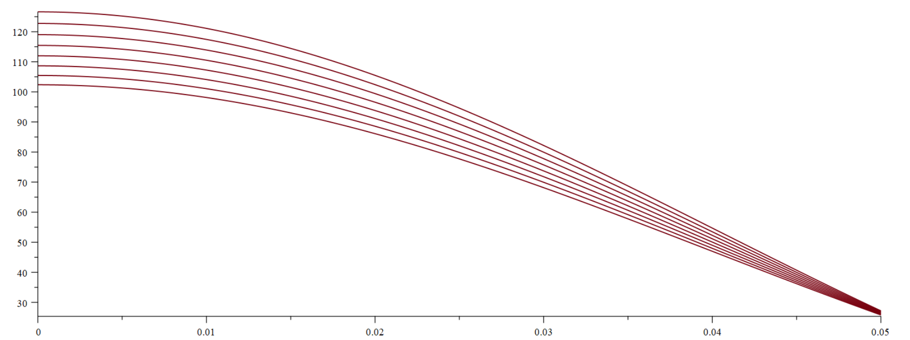
```
> #Формуємо матрицю
> A := Matrix(N + 1, N + 1) :

  A[1, 1] := diag2[1] :
  A[1, 2] := diag3[1] :

   for j from 2 to N do:
           A[j, j - 1] := diag1[j] :
           A[j, j] := diag2[j] :
           A[j, j + 1] := diag3[j] :
   od:

  A[N + 1, N] := diag1[N + 1] :
  A[N + 1, N + 1] := diag2[N + 1] :
> for i from 1 to max_iter do:
  f := Vector(N + 1);
  f[1] := -bar_x[1]·v[1]/2 - 0.5·tau_h2·bar_p[2]·(v[2] - v[1]);
    for j from 2 to N do:
           f[j] := -bar_x[j]·v[j] - 0.5·tau_h2·(bar_p[j + 1]·(v[j + 1] - v[j]) - bar_p[j]·(v[j] - v[j - 1]));
   od:
  f[N + 1] := 0.5·tau_h·gamma_1·x1[N + 1]·v[N + 1] - tau_h·gamma_1·x1[N + 1] - bar_x[N + 1]·v[N + 1]/2 + 0.5·tau_h2·bar_p[N + 1]·(v[N + 1] - v[N]);
  v := LinearSolve(A, f);
  t1 := t1 + tau;

   if ((i mod check_iter) = (check_iter - 1)) then
    for j from 1 to N + 1 do:
   temp := (v[j]·(u_env - u_0))/2 + u_0;
   u[j] := temp;
   od:
    plots_[plots_counter + 1] := plot(x, [seq(u[j], j = 1 ..N + 1)]);
    plots_counter := plots_counter + 1;

  if (u[1] < u_aim) then:
     i := max_iter + 1;
  fi:
   end if;
  od:
```

6 Представлення результатів у графічному та табличному виглядах

```
> #Виводимо результати
> #display(seq(plots_[i], i = 1 ..plots_counter − 1));

  display(seq(plots_[i], i = 1 ..floor(0.25 · (plots_counter − 1))));
  display(seq(plots_[i], i = floor(0.50 · (plots_counter − 1)) ..floor(0.70 · (plots_counter − 1))));
  display(seq(plots_[i], i = floor(0.9 · (plots_counter − 1)) ..floor((plots_counter − 1))));

  Time = evalf(t1);
```







Time = 121.9900000

```
> M := DataFrame(⟨[seq(x[floor(j/10 · (N + 1))], j = 1 ..10)] | [seq(u[floor(j/10 · (N + 1))], j = 1 ..10)]⟩, columns = ['Радіус','Температура']) :
  Tabulate(M, weights = [1, 10, 10]) :
```

	Радіус	Температура
1	0.004500000000	98.5491740526375679
	0.009500000000	95.6992496244879476
	0.01450000000	90.9399417206976750
	0.01950000000	84.4569308245558545
	0.02450000000	76.5031225958563255
	0.02950000000	67.3871136107676989
	0.03450000000	57.4596908754512015
	0.03950000000	47.0986281244655629
	0.04450000000	36.6924243978292566
	0.05	25.6495396653379544