BÀI TẬP LÝ THUYẾT TUẦN 5

Nhập môn Trí tuệ Nhân tạo

Nguyễn Hồng Yến – MSSV: 23280099

GVHD: PGS.TS Nguyễn Thanh Bình

Chứng minh: Mọi công thức mệnh đề đều đưa được về dạng chuẩn tắc (CNF/DNF)

1. Phát biểu định lý

Định lý. Với mọi công thức mệnh đề F, luôn tồn tại công thức G ở *dạng chuẩn tắc hội* (CNF) sao cho $F \equiv G$, và tồn tại công thức H ở *dạng chuẩn tắc tuyển* (DNF) sao cho $F \equiv H$.

2. Chứng minh theo hướng xây dựng (equational reasoning)

2.1. Ý tưởng

Ta xây dựng một **thuật toán chuẩn hoá** biến đổi F bằng các *phép tương đương logic* thành CNF (đối ngẫu sẽ cho DNF). Vì mỗi bước đều bảo toàn tương đương, đầu ra tương đương với F.

2.2. Ba bước chuẩn hoá về CNF

1. **Khử kéo theo/ tương đương:** dùng

   $$(A \to B) \equiv (\neg A \vee B), \qquad (A \leftrightarrow B) \equiv (A \to B) \wedge (B \to A).$$

   Kết quả không còn $\to, \leftrightarrow$.

2. **Đưa về NNF (Negation Normal Form):** đẩy $\neg$ vào sát biến bằng

   $$\neg\neg A \equiv A, \quad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B), \quad \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B).$$

   Thu được công thức chỉ gồm $\wedge, \vee$ trên các *literal*.

3. **Phân phối $\vee$ qua $\wedge$ để có CNF:**

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \qquad (B \wedge C) \vee A \equiv (B \vee A) \wedge (C \vee A).$$

   Lặp lại đến khi không còn $\vee$ nằm trực tiếp trên $\wedge$.

2.3. Tính dừng và đúng đắn

Bảo toàn tương đương. Mỗi luật ở ba bước trên là *đẳng trị logic*, nên mọi biến đổi bảo toàn giá trị chân lý: nếu $F \equiv F_1 \equiv \cdots \equiv F_k$ thì $F \equiv F_k$.

Dừng. Xét hàm đo

$$\mu(F) = \Big(\#\text{các } \to, \leftrightarrow\Big) + \Big(\text{tổng số phủ định nằm trên } \wedge, \vee\Big) + \Big(\#\text{mẫu } \vee\text{-trên-}\wedge\Big).$$

Mỗi lần khử $\to, \leftrightarrow$ giảm hạng mục đầu; mỗi lần đẩy $\neg$ vào trong giảm hạng mục hai; mỗi lần phân phối làm giảm số mẫu "$\vee$ trên $\wedge$" ở hạng mục ba. Vì μ là số tự nhiên và giảm chặt sau hữu hạn bước, thuật toán *dừng*.

Kết luận. Khi dừng, công thức thu được là hội các mệnh đề, mỗi mệnh đề là tuyển các literal, tức *CNF*. Do bảo toàn tương đương, tồn tại G ở CNF sao cho $F \equiv G$.

2.4. DNF là đối ngẫu

Để ra DNF, ta làm *bước 1–2* y hệt, còn **bước 3** đổi vai trò $\wedge, \vee$:

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Lập luận bảo toàn tương đương và tính dừng là đối ngẫu, nên luôn tồn tại H ở DNF với $F \equiv H$.

3. Chứng minh độc lập bằng bảng chân trị

Cũng có một chứng minh khác *không cần thuật toán*:

- **DNF từ minterm:** Với mỗi hàng của bảng chân trị mà $F = 1$, lập một *tích* các literal (biến xuất hiện dương nếu nhận 1, phủ định nếu nhận 0). Tuyển tất cả các tích này lại, thu được DNF tương đương.
- **CNF từ maxterm:** Với mỗi hàng mà $F = 0$, lập một *tuyển* các literal (biến xuất hiện dương nếu nhận 0, phủ định nếu nhận 1). Hội tất cả các tuyển này lại, thu được CNF tương đương.

Do cách dựng thỏa đúng chính xác các hàng mong muốn, công thức thu được *tương đương* F.

4. Nhận xét về độ phình to

Cả hai phép dựng có thể làm kích thước công thức *tăng theo hàm mũ* trong trường hợp xấu nhất (ví dụ phân phối lặp). Điều này giải thích vì sao các bộ giải SAT hiện đại dùng nhiều tối ưu hoá thay vì chỉ biến đổi thuần túy.

5. Kết luận

Hai hướng chứng minh (thuật toán chuẩn hoá và bảng chân trị) đều cho thấy: **mọi** công thức mệnh đề đều có dạng tương đương ở **CNF** và **DNF**. Đây là nền tảng cho kiểm định thoả mãn (SAT), logic programming và nhiều kỹ thuật suy diễn tự động.