Кубические неравенства

Кубическое неравенство – неравенство, в обеих частях которого стоят многочлены 3-ей степени. Простейшим примером кубического неравенства может быть неравенство вида:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d > 0.$$

Существует утверждение, что любой многочлен 3-ей степени можно представить в виде:

$$a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Воспользуемся этим и составим таблицу возможных знаков каждого из слагаемых и их произведения:

$x-\alpha$	$x-\beta$	$x-\gamma$	произведение
+	+	+	+
+	+	−	−
+	−	+	−
+	−	−	+
−	+	+	−
−	+	−	+
−	−	+	+
−	−	−	−

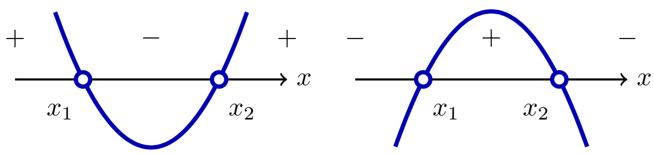
Мы видим, что если нужно найти значения x, при которых неравенство положительно или отрицательно, то мы должно рассмотреть 4 варианта произведения. Вспоминая аналитический метод решения неравенств мы приходим к тому, что нужно рассмотреть 4 системы из трех неравенств, решить их, и записать ответ в виде объединения. Это потребоует многочисленных записей, в которых можно запутаться, и как следствие сделать ошибку.

Применить графический метод решения также нерационально, поскольку мы не знаем как выглядит график многочлена 3-ей степени, а если его строить по точкам, то границы интервалом можно найти лишь приближенно.

Точное решение можно получить воспользовавшись *методом интервалов*.

Метод интервалов

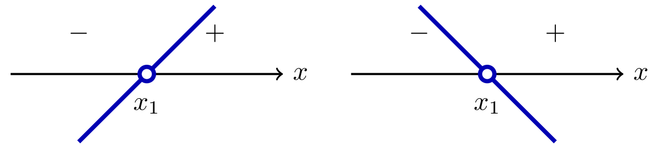
Метод интервалов основан на идее чередования интервалов, которые можно было обнаружить в графическом методе решения квадратных неравенств. Сравните два графика:



Здесь намеренно не нарисована ось ординат, потому что не играет роли, где именно относительно начала координат расположены графики. Видно, что если мы расставим на числовой прямой точки пересечения графика функции с осью абсцисс, то в этих точках происходит смена знака функции (произведения).

Аналогичная картина наблюдается и с прямой линией, которая может пересекать ось абсцисс только в одной точке (см. следующую страницу).

Поняв, что знаки чередуются, остается решить, с какого знака начинать. Обе левые картинки можно получить из правых отрожением относительно оси абсцисс,



т.е. домножением функции на -1. Заметим, что старший коэффициент функций, которые изображены на правых рисунках отрицательный. Это и является условием для требуемого домножения.

Алгоритм

1. Преобразовать левую часть кубического неравенства к виду $a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.
2. Разделить неравенство на a.
3. Расставить числа α, β и γ по возрастанию на числовой прямой, обозначив их кружками.
4. Заштрифовать круги, если неравенство нестрогое.
5. Расставить между отмеченными точками чередующиеся знаки справа налево, начиная с плюса.
6. Записать объединение интервалов одного знака, который определяем из неравенства.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

11.1. Выполнить первый и второй шаг алгоритма для следующих неравенства и найти числа α, β и γ:
1) $-(x-2)(x+3)(x-5) > 0$;
2) $(1-x)(x+3)(8-x) > 0$;
3) $(x+13)(7-x)(8-x) < 0$;
4) $(x-2)(4-x)(x-5) < 0$;
5) $(10-x)(15-x)(16-x) \geqslant 0$;
6) $-(15-x)(5-x)(7-x) \geqslant 0$;
7) $(10-5x)(15-3x)(16-x) \leqslant 0$;
8) $-(16-8x)(5-x)(7-x) \leqslant 0$;

Решить неравенства методом интервалов:

11.2. 1) $(x-1)(x-3)(x-5) > 0$;
2) $(x+1)(x-1)(x-2) \geqslant 0$;
3) $(x-1)(x-2)(x+5) < 0$;
4) $(x+2)(x+1)(x-3) \leqslant 0$;

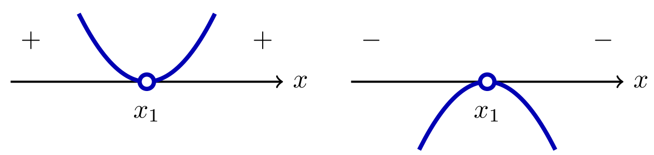
11.3. 1) $(2-x)(x+3)(x-7) < 0$;
2) $(5-x)(x-3)(x+12) > 0$;
3) $(3x-4)(1-x)(2x+1) < 0$;
4) $(2x-5)(7x+3)(x+8) < 0$.

11.4. 1) $(x-3)(x^2-3x+2) \geqslant 0$;
2) $(2-x)(x^2-x-12) \leqslant 0$.

11.5. 1) $(2-4x)(x^2-x-2) < 0$;
2) $(-4-3x)(x^2+3x-4) > 0$;
3) $(3x-7)(x^2+2x+2) < 0$;
4) $(5x-8)(x^2-4x+5) > 0$.

Обобщенный метод интервалов

Знак не будет чередоваться, если парабола пересекает ось абсцисс в одной точке.



Такая ситуация возникает в случае, если дискриминант неравенства равен нулю. В этом случае квадратный трехчлен можно записать в виде полного квадрата

$$ax^2 + cx + b = a(x - x_1)^2.$$

Это замечание обобщает метод интервалов на случай решения неравенств

$$(x - \alpha)^2(x - \beta) > 0, \quad (x - \alpha)^3 > 0.$$

Измененные шаги в обобщенном методе

1*. Преобразовать левую часть кубического неравенства к одному из следующих видов:

$$a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$
$$a(x - \alpha)^2(x - \beta),$$
$$a(x - \alpha)^3.$$

4*. Расставить знаки справа налево, начиная с плюса, изменяя знак при прохождении точек β и γ. При прохождении точки α изменяем знак, если $x - \alpha$ в нечетное степени, и оставляем его, если $x - \alpha$ в четной степени.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

Решить неравенства обобщенным методом интервалов:

11.6. 1) $(x-2)^2(x-1) > 0$;
2) $(x+4)(x+3)^2 < 0$;
3) $(x+2)(3-5x)^2 < 0$;
4) $(3x-1)(x+1)^2 > 0$.

11.7. 1) $(8x-9)^3 \geqslant 0$;
2) $(30-10x)^3 \geqslant 0$;
3) $(0{,}2x-0{,}4)^3 \leqslant 0$;
4) $(1{,}5-4{,}5x)^3 \leqslant 0$;
5) $(\sqrt{2}x-\sqrt{8})^3 > 0$;
6) $(2\frac{3}{4}-7\frac{5}{8}x)^3 > 0$;
7) $(\sqrt{10}x-\sqrt{100})^3 < 0$;
8) $(-\frac{1}{4}-\frac{15}{16}x)^3 < 0$.

11.8. 1) $(x+1)(x^2-x+x) > 0$;
2) $(3-x)(x^2+2x+1)^2 < 0$;
3) $(4x^2+4x+4)(8-4x)^2 < 0$;
4) $(3x^2+2x-1)(x+1) > 0$.