### Неравенства с произведением

Известно, что положительное произведение двух сомножителей возможно тогда, когда оба сомножителя имеют один и тот же знак, а отрицательно, когда сомножители разного знака. Получается для того, чтобы решить неравенство вида

$$(x-\alpha)(x-\beta)>0 \quad \text{или} \quad (x-\alpha)(x-\beta)<0,$$

необходимо заменить его двумя системами неравенств.

| $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ | $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ |
|---|---|
| $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-\alpha>0,\\ x-\beta>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-\alpha<0,\\ x-\beta<0;\end{cases}\end{array}\right.$ | $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-\alpha>0,\\ x-\beta<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-\alpha<0,\\ x-\beta>0;\end{cases}\end{array}\right.$ |

Все неравенства могут быть и нестрогими. Квадратная скобка слева от систем означает, что ответ будет состоять из объединения решений каждой системы. Данный подход применим к произведению любых функций.

**УПРАЖНЕНИЯ**

**10.1.** При каких значениях $x$ положительны произведения:

1) $(x-3)(x-6)$; 2) $(x+4)(x+1)$.

**10.2.** При каких значениях $y$ отрицательны произведения:

1) $(y-2)(y+6)$; 2) $(2y+9)(8-6y)$.

**10.3.** При каких значениях $x$ неположительны произведения:

1) $-(x+1)(x+2)$; 2) $(2x+9)(8-6x)$.

**10.4.** При каких значениях $y$ неотрицательны произведения:

1) $\left(\frac{2}{3}y-5\right)\left(y+\frac{1}{10}\right)$;
2) $-(0{,}01y+0{,}9)\left(8\frac{1}{2}-3{,}2y\right)$.

### Квадратные неравенства

Квадртаное неравенство – это неравенство, в левой и правой частях которого содержится квадратичная функция.

Решением квадратного неравенства называются те значения переменной, при подстановке которых в неравенство, получается верное утверждение.

**УПРАЖНЕНИЯ**

**10.5.** Являются ли решениями неравенства $5x^2-x+3\geqslant 0$ числа:

1) $0$; 4) $1/2$; 7) $1$;
2) $-3$; 5) $0{,}4$; 8) $-1$;
3) $10$; 6) $-1.6$; 9) $-2$.

Простейшим примером квадратного неравенства является неравенство вида:

$$ax^2+bx+c>0.$$

Знак неравенства может быть любым. Решить подобное неравенство можно одним из двух методов: *аналитическим* или *графическим* методом.

### Аналитический метод решения

Представим квадратный трехчлен, входящий в левую часть неравенства в виде произведения

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

где $\alpha$ и $\beta$ – корни квадратного трехчлена. Далее необходимо перейти к решению систем неравенств (см. рамки).

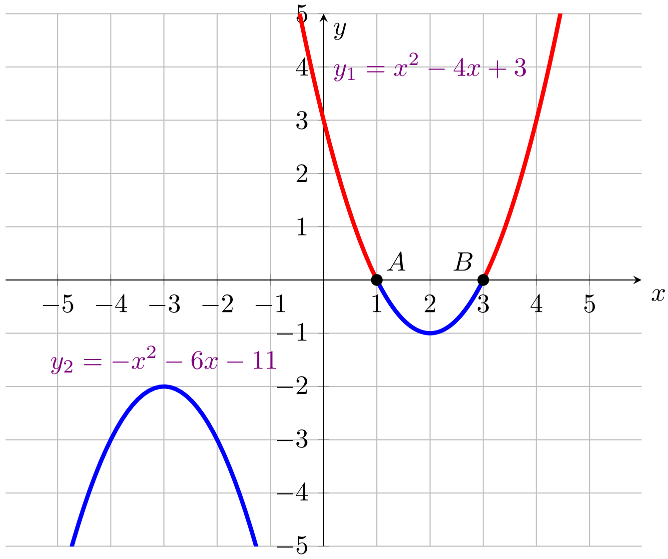
**УПРАЖНЕНИЯ**

**10.6.** Решить неравенства методом, сведения к системам:

1) $x^2>0$; 6) $5x^2-2x\geqslant 0$;
2) $x^2\leqslant 0$; 7) $9-x^2<0$;
3) $x^2+3>0$; 8) $-8+4x^2\leqslant 0$;
4) $x^2-4\geqslant 0$; 9) $x^2+2x-3\leqslant 0$;
5) $x^2+x>0$; 10) $2x^2+8x-10>0$;

### Графический метод решения

Построим график квадратичной функции. Мы знаем, что в зависимости от знака старшего коэффициента ветви параболы могут быть направлены в разные стороны. А о расположении параболы можно судить по ее вершине. Таким образом можно выделить два принципиальных случая, когда ветви параболы пересекают и не пересекают ось абсцисс.




Парабола $y_1$ пересекает ось абсцисс в точках $A$ и $B$ и может принимать как положительные (в точках красных линий), так и отрицательные (в точках синих линий) значения. А парабола $y_2$ не пересекает ось абсцисс и может принимать только отрицательные значения.

Если бы необходимо было решить неравенство, где квадратный трехчлен больше или больше или равен нулю, то решением для параболы $y_1$ была бы вся числовая прямая кроме открытого или закрытого в зависимости от строгости знака неравенства интервала от точки $A$ до точки $B$. А для параболы $y_2$ решений бы не было.

Если бы необходимо было решить неравенство, где квадратный трехчлен меньше или бменьше или равен нулю, то решением для параболы $y_1$ был бы открытый или закрытый интервала от точки $A$ до точки $B$. А для параболы $y_2$ – вся числовая приямая.

Понятие *дискриминанта* вводится и для неравенства. По этой величине мы можем определять число точек пересечения и тем самым быстро сказать, будут ли решения у квадратного неравенства и из какого числа интервалов оно будет состоять.

**10.7.** Решите графически следующие неравенства:

1) $x^2 - 3x + 2 > 0$;
2) $x^2 + 5x + 6 < 0$;
3) $3x^2 - 2x - 6 \leqslant 0$;
4) $7x^2 + 2x - 5 > 0$;
5) $x^2 + 4x + 3 < 0$;
6) $x^2 - 5x + 4 \geqslant 0$;
7) $4x^2 - x - 3 < 0$;
8) $10x^2 + 3x - 1 > 0$.

**10.8.** Решите неравенства, используя график квадратичной функции::

1) $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$;
2) $3x^2 - 2x + 1 > 0$;
3) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
4) $-4x^2 + x - 6 \leqslant 0$;
5) $x^2 + 6x + 9 \leqslant 0$;
6) $5x^2 - 4x + 2 < 0$;
7) $4x^2 - 4x + 1 > 0$;
8) $-7x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$.

**10.9.** Найти область определения функции:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 7}$;
2) $\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$;

**10.10.** Укажите все значения $p$, при каждом из которых неравенствао верно при любом значении $x$:

1) $3x^2 + 2x + p > 0$;
2) $x^2 - 6x + p^2 = 0$;

**10.11.** Найдите все значения параметра $p$, при которых имеет действительгные корни уравнение:

1) $x^2 - x + p^2 = 0$;
2) $x^- 12px - 3p = 0$;
3) $x^2 - 4x - 2p = 0$;
4) $x^2 + 2px + p + 2 = 0$.

**10.12.** При каким значения параметра $p$ неравенство $x^2 \leqslant 9p^2$ имеет одно целочисленное решение?

**10.13.** Длина прямоугольника на 2 см больше его ширины. Чему равна длина прямоугольника, если известно, что его площадь не превосходит 224 см$^2$?

**10.14.** Найти промежутки знакопостоянства следующих функций:

1) $y = 7x - 3x^2 + 40$;
2) $y = 4x^2 - x + 14$.

**10.15.** Решите неравенство $\dfrac{23}{x^2 - 7x - 11} \leqslant 0$.

**10.16.** Найдите все значения $a$, при которых существует по крайней мере одно решение неравенства:

1) $x^2 - ax + 4 < 0$;
2) $x^2 - ax + 3 > 0$.