Рациональные неравенства

Рациональное неравенство – неравенство, левая или правая часть которого является рациональным выражением. Рациональное выражение может быть упрощено, что может привести к рассмотренным ранее неравенствам. Перед преобразованиями необходимо исключить те значения переменной, для которых неопределены операции, входящие в выражения (деление на нуль), а также учесть, что умножение может производится на переменные величины, т.е. заранее неизвестного знака.

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Решить неравенства, преобразуя их к линейному или квадратному:

1) $\dfrac{1}{x+1} > 1$; 3) $\dfrac{x+4}{x-2} \geqslant 2x$;

2) $\dfrac{2}{x^2+3x+1} < 2$; 4) $\dfrac{2x-1}{x^2-4} \leqslant 3$;

Строгие неравенства

Если целую часть неравенства преобразовать в дробную, то рациональная дробь будет сравниваться с нулем. Это означает, что нужно указать при каких значениях переменной x выражение положительно или отрицательно.

Любое отношение положительно, если делитель и делимое одного знака, и отрицательно, если разного знака. Для решения неравенств с дробями необходимо рассмотреть совокупность двух систем.

$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

В рамках на листке № 10 получились точно такие же совокупности. Если решения задач оказываются одинаковыми, то такие задачи называются *равносильными*. И алгоритм решения одной задачи можно применить для получения решения другой задачи. Таким образом, для решения строгих неравенств с дробями можно воспользоваться методом интервалов, в котором неважно, где расположены скобки с двучленами вида $(x-\alpha)$, в числителе или в знаменателе.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить методом интервалов неравенства:

12.2. 1) $\dfrac{5}{x} > 0$; 3) $\dfrac{1}{x-1} < 0$;

2) $-\dfrac{3}{x} < 0$; 4) $\dfrac{1}{2x+1} > 0$;

12.3. 1) $\dfrac{x-1}{x-2} > 0$; 3) $\dfrac{x+3}{x-5} < 0$;

2) $\dfrac{x-4}{x-2} < 0$; 4) $\dfrac{x-7}{x+8} > 0$.

12.4. 1) $\dfrac{x-6}{2-x} > 0$; 3) $\dfrac{2x+4}{4x+2} < 0$;

2) $\dfrac{4-x}{x-9} < 0$; 4) $\dfrac{3x+6}{9x-3} > 0$.

12.5. 1) $\dfrac{2x+3}{x-4} < 0$; 3) $\dfrac{12x-6}{5x-4} > 0$;

2) $\dfrac{7+x}{4x-3} > 0$; 4) $\dfrac{7x-1}{2x+5} < 0$.

12.6. 1) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)} > 0$; 3) $\dfrac{(x+1)(7-x)}{(8+x)(x-5)} < 0$;

2) $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+3} < 0$; 4) $\dfrac{(x-6)(4-x)}{(x-1)(1+x)} > 0$.

Нестрогие неравенства

Для решения нестрогих неравенств необходимо решить систему из одного строгого неравенства и равенства.

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{g(x)} > 0, \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{array}\right.$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{g(x)} < 0, \\ \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{array}\right.$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Третья рамка представлена для повторения алгоритма решения рационального уравнения.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить неравенства:

12.7. 1) $\dfrac{1}{x-1} \geqslant 0$; 5) $\dfrac{5}{2-x} \leqslant 0$;

2) $\dfrac{x-8}{2x+3} \geqslant 0$; 6) $\dfrac{3-4x}{5+x} \leqslant 0$;

3) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1} \leqslant 0$; 7) $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-1} \geqslant 0$;

4) $\dfrac{x-3}{x^2-9} \leqslant 0$; 8) $\dfrac{x+1}{x^2-1} \geqslant 0$.