

1 Pattern

Pattern

資料結構往往不會赤裸出現

不是「我要用這個資結砸掉這題」
而是「這題需要這樣做，所以可以拿這個資結砸掉」
永遠都先想怎麼做，再尋找合適的資結幫助你

– 2024 基礎資結

資料結構往往不會赤裸出現

不是「我要用這個資結砸掉這題」
而是「這題需要這樣做，所以可以拿這個資結砸掉」
永遠都先想怎麼做，再尋找合適的資結幫助你

– 2024 基礎資結

有時候，題目要你維護的東西實在是太荒謬了，你需要自己創造
可以維護的東西去維護

題目 (Taxis, POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$ ，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i ，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$ ，其中 d 為里程數。

給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y ，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出恰好是這個排列（當收費價格一樣，順序可以任意安排），若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。

接著會有 q 筆修改，每筆修改會有 a_i, b_i ，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字，每次交換後皆須輸出先前問題的答案。

■ $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。

■ $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$ 。

題目 (Taxis, POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$ ，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i ，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$ ，其中 d 為里程數。給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y ，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出恰好是這個排列（當收費價格一樣，順序可以任意安排），若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。

接著會有 q 筆修改，每筆修改會有 a_i, b_i ，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字，每次交換後皆須輸出先前問題的答案。 **???**

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。
- $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$ 。

題目 (Taxis, POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$ ，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i ，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$ ，其中 d 為里程數。給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y ，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出恰好是這個排列（當收費價格一樣，順序可以任意安排），若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。
- $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$ 。

題目 (Taxis, POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$ ，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i ，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$ ，其中 d 為里程數。給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y ，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出**恰好是這個排列 ???** (當收費價格一樣，順序可以任意安排)，若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。
- $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$ 。

Pattern – Taxis

什麼時候.....

- 計程車照收費排序剛好是 $1, 2, \dots, n$

Pattern – Taxis

什麼時候.....

- 🤔 計程車照收費排序剛好是 $1, 2, \dots, n$

Pattern – Taxis

什麼時候.....

- 🤔 計程車照收費排序剛好是 $1, 2, \dots, n$
- 1 號車收費 \leq 2 號，而且
- 2 號車收費 \leq 3 號，而且
-
- $n - 1$ 號車收費 \leq n 號

Pattern – Taxis

什麼時候.....

- 🤨 計程車照收費排序剛好是 $1, 2, \dots, n$
- 😊 1 號車收費 \leq 2 號，而且
- 😊 2 號車收費 \leq 3 號，而且
-
- 😊 $n - 1$ 號車收費 \leq n 號

$n = 2$ 我們總會做了吧？

Pattern – Taxis

只考慮 i 號車和 $i + 1$ 號車，可以滿足「 i 在 $i + 1$ 前面」的距離 d 是一個 $d \leq \square$ 或 $d \geq \square$ 的限制

當每一組相鄰計程車的順序都滿足，所有車就會照順序排好

Pattern – Taxis

只考慮 i 號車和 $i + 1$ 號車，可以滿足「 i 在 $i + 1$ 前面」的距離 d 是一個 $d \leq \square$ 或 $d \geq \square$ 的限制

當每一組相鄰計程車的順序都滿足，所有車就會照順序排好

維護一坨射線有沒有交集
可以用兩個 multiset 維護

Pattern – Taxis

帶修改？

「每筆修改會有 a_i, b_i ，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字」

Pattern – Taxis

帶修改？

~~「每筆修改會有 a_i, b_i ，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字」~~

每次都做兩個單點修改

Pattern – Taxis

帶修改？

~~「每筆修改會有 a_i, b_i ，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字」~~

每次都做兩個單點修改

時間複雜度：一次詢問 $O(1)$ 次 multiset 操作，總共 $O((n + q) \log n)$

題目 (Grades, POI 2017)

有 n 位學生編號 $1 \sim n$ 以任意順序由左到右排成一列，現在你要派給這 n 位學生成績，成績必須是一個介於 $1 \sim n$ 之間的數字，且必須滿足以下條件：

- 若學生 u 的編號比學生 v 大，則學生 u 的成績不可以小於學生 v 。
- 若學生 v 排在學生 u 右邊一位，則學生 v 的成績不可以小於學生 u ，不然他會很傷心。

請問最多可以有多少不同的成績種類被派送出去？

接著會有 z 筆修改，每筆修改會有 p_i, q_i ，代表交換排在位置 p_i 和 q_i 的學生編號，每次交換後皆須輸出先前問題的答案。

- $1 \leq n \leq 10^6$ 。
- $1 \leq z \leq 3 \times 10^5$ 。

Pattern – Grades

TL;DR

有 n 個學生從左到右排成一行，編號大的、排左邊的，成績要比較高。最多能派出幾種不同的成績？

Pattern – Grades

TL;DR


有 n 個學生從左到右排成一列，編號大的、排左邊的，成績要比較高。最多能派出幾種不同的成績？

z 次修改，每次交換隊伍裡兩個學生的位置

Pattern – Grades

TL;DR

有 n 個學生從左到右排成一列，編號大的、排左邊的，成績要比較高。最多能派出幾種不同的成績？

 ~~z 次修改，每次交換隊伍裡兩個學生的位置~~

Pattern – Grades

$n = 2$

- $[2, 1]$: 兩種
- $[1, 2]$: 一種

Pattern – Grades

有兩個人 $u < v$

- v 排 u 左邊
- u 排 v 左邊

Pattern – Grades

有兩個人 $u < v$

- v 排 u 左邊： v 的分數本來就該比較高
- u 排 v 左邊： $u, u + 1, \dots, v - 1, v$ 的分數全都要一樣！

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多） $n - 1$ 條限制
「 $u_i, u_i + 1, \dots, v_i - 1, v_i$ 的分數要一樣」

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多） $n - 1$ 條限制
「 $u_i, u_i + 1, \dots, v_i - 1, v_i$ 的分數要一樣」

要怎麼詢問「最多能派出幾種不同的成績」？

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多） $n - 1$ 條限制
「 $u_i, u_i + 1, \dots, v_i - 1, v_i$ 的分數要一樣」

每條限制都是「 $u_i + 1, \dots, v_i - 1, v_i$ 的分數都固定了，只有 u_i 的分數可以自由決定」
最後數數看有幾個人的分數可以自由決定

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多） $n - 1$ 條限制
「 $u_i, u_i + 1, \dots, v_i - 1, v_i$ 的分數要一樣」

每條限制都是「 $u_i + 1, \dots, v_i - 1, v_i$ 的分數都固定了，只有 u_i 的分數可以自由決定」

最後數數看有幾個人的分數可以自由決定

區間加值 (± 1)，數數看全域有幾個 0

Pattern – Grades

帶修改（交換兩人位置）？

依然可以是兩次單點修改

Pattern – Grades

區間加值、單點修改、數全域有幾個 0

拿你最喜歡的資料結構砸掉
時間複雜度 $O((n + z) \log n)$

我們是怎麼做完前面兩題的？

- 題目要維護的東西難以維護（整個排列的長相）
- 找到小小的特徵點，用小特徵湊出題目要的條件（排列中相鄰元素關係）
- 小特徵足夠單純可以維護（multiset、線段樹）

Pattern – Seats

題目 (Seats, IOI 2018)

(完整敘述請見講義)

有 $H \times W$ 個位子排成一個矩形，還有 HW 位選手每人分別佔一個位置。有幾個 $r \times c$ **矩形區域**內坐的選手的編號恰好是 $0, 1, \dots, rc - 1$ ？

支援 Q 次修改，每次交換兩位選手的位置，每次交換完輸出以上問題的答案。

- $1 \leq H \times W \leq 10^6$
- $1 \leq Q \leq 5 \times 10^4$

Pattern – Seats

題目 (Seats , IOI 2018)

Subtasks

- (5) $HW \leq 100$, $Q \leq 5000$
- (6) $HW \leq 10^4$, $Q \leq 5000$
- (20) $H \leq 1000$, $W \leq 1000$, $Q \leq 5000$
- (6) $Q \leq 5000$, 對於每次交換 $|a - b| \leq 10^4$
- (33) $H = 1$
- (30) 無額外限制

拿零分還可以金牌的難題 !?

Pattern – Seats

選手一個一個坐進去，檢查他們是不是坐成矩形的樣子

躲不開的障礙：

要怎麼檢查一個矩形範圍是不是好的？

要怎麼檢查 $0, \dots, rc - 1$ 的範圍是不是好的？

Pattern – Seats

題目 (Seats, IOI 2018)

Subtasks

- (5) $HW \leq 100$, $Q \leq 5000$
- (6) $HW \leq 10^4$, $Q \leq 5000$
- (20) $H \leq 1000$, $W \leq 1000$, $Q \leq 5000$
- (6) $Q \leq 5000$, 對於每次交換 $|a - b| \leq 10^4$
- **(33) $H = 1$**
- (30) 無額外限制

二維太荒謬了，先想辦法搞定一維

Pattern – Seats

選手一個一個坐進去，檢查他們是不是坐成連續區間的樣子

躲不開的障礙：

要怎麼檢查一個區間是不是好的？

要怎麼檢查 $0, \dots, rc - 1$ 的範圍是不是好的？

Pattern – Seats

9('□`*)و插圖

Pattern – Seats

把 $0, \dots, rc - 1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好在一個連續區間的**充要條件**是.....

Pattern – Seats

把 $0, \dots, rc - 1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好在一个連續區間的**充要條件**是.....

對於每一組相鄰的格子，**恰好有兩組是一黑一白**

Pattern – Seats

9('□`*)و插圖

Pattern – Seats

把 $0, 1, \dots, HW - 1$ 一個一個塗黑，每個時間點檢查是不是恰好兩組格子是一黑一白

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在哪些時間是一黑一白？

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑一白

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑一白的格子有幾組，數數看全域有幾個 2

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑一白

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑一白的格子有幾組，**數數看全域有幾個 2 ???**

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑一白

只要有格子是黑的，一黑一白的格子就至少有兩組

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑一白的格子有幾組，**檢查全域最小值是不是 2、數數看最小值有幾個**

Pattern – Seats

修改？還是可以兩次單點修改

時間複雜度： $O((W + Q) \log W)$

Pattern – Seats

題目 (Seats , IOI 2018)

Subtasks

- (5) $HW \leq 100$, $Q \leq 5000$
- (6) $HW \leq 10^4$, $Q \leq 5000$
- (20) $H \leq 1000$, $W \leq 1000$, $Q \leq 5000$
- (6) $Q \leq 5000$, 對於每次交換 $|a - b| \leq 10^4$
- (33) $H = 1$
- (30) 無額外限制

Pattern – Seats

9('□`*)و插圖

Pattern – Seats

把 $0, \dots, rc - 1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好形成一個矩形的**充要條件**是.....

Pattern – Seats

把 $0, \dots, rc - 1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好形成一個矩形的**充要條件**是.....

對於每一塊 2×2 相鄰的格子，

- 恰好四塊是一黑三白

Pattern – Seats

٩(' ٥ ` *) ٩插圖：甜甜圈

Pattern – Seats

把 $0, \dots, rc - 1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好形成一個矩形的**充要條件**是.....

對於每一塊 2×2 相鄰的格子，

- 恰好 4 塊是一黑三白
- 沒有任何一塊是三黑一白

Pattern – Seats

9('□`*)و插圖

Pattern – Seats

對於每一組 2×2 的格子，他們在哪些時間是一黑三白、或是三黑一白？

Pattern – Seats

對於每一組 2×2 的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑三白、或是三黑一白

只要有格子是黑的，一黑三白的格子就至少有 4 組

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑三白、三黑一白的格子有幾組，**檢查全域最小值是不是 4、數數看最小值有幾個**

Pattern – Seats

修改？還是可以兩次單點修改

時間複雜度： $O((HW + Q) \log HW)$
(多花點力氣 $O(HW + Q \log HW)$)

Pattern – Seats

修改？還是可以兩次單點修改

時間複雜度： $O(HW + 16Q \log HW)$
常數巨大！

Pattern – 好的連續子序列

題目 (好的連續子序列，台大演算法設計與分析 (ADA) 作業)

給定一個 $1, 2, \dots, N$ 的排列，試求有多少子區間 $[l, r]$ ，滿足該子區間是一個連續正整數的排列？

■ $1 \leq N \leq 5 \times 10^5$

在 NEOJ 788 有可以傳的 Judge

Pattern – 好的連續子序列

跟一維的 Seats 比起來，少了修改，多了不是 1 開頭的區間也要數數看

Pattern – 好的連續子序列

跟一維的 Seats 比起來，少了修改，多了不是 1 開頭的區間也要數數看

- 用 Seats 作法找出 1 開頭的好區間有幾個
- 把 1 拿掉（讓他永遠是白色），找出 2 開頭的好區間有幾個
-
- 把 $1, 2, \dots, N - 1$ 拿掉（讓他們永遠是白色），找出 N 開頭的好區間有幾個

Pattern – 好的連續子序列

跟一維的 Seats 比起來，少了修改，多了不是 1 開頭的區間也要數數看

- 用 Seats 作法找出 1 開頭的好區間有幾個
- 把 1 拿掉（讓他永遠是白色），找出 2 開頭的好區間有幾個
-
- 把 $1, 2, \dots, N - 1$ 拿掉（讓他們永遠是白色），找出 N 開頭的好區間有幾個

題目沒叫你修改，但是你自己把「枚舉排列的開頭」當成 N 次修改

Pattern – 好的連續子序列

時間複雜度： $O(N \log N)$

Pattern – 好的連續子序列

時間複雜度：**至少** $O(4N \log N)$

常數巨大！我在 NEOJ 吃 TLE

Pattern – 好的連續子序列：番外

本題官方作法是分治，也有其他使用大資料結構但可以時限內通過的作法

你能想到幾種不同的作法？

Pattern

- 題目要維護的東西難以維護
- 找到小小的特徵點，用小特徵湊出題目要的條件
- 小特徵足夠單純可以維護

資結不是重點，重點是發現精妙的轉換和觀察