

進階資料結構

邱翊均

January 8, 2025

講師簡介

- 邱翊均
- 2022 全國賽場外觀眾
- IOI 2023、APIO 2023 銀牌
- ICPC PCkomachi 隊員

講師簡介

- 邱翊均
- 2022 全國賽場外觀眾
- IOI 2023、APIO 2023 銀牌
- ICPC PCkomachi 隊員
- 因為想學習資料結構所以當資料結構講師

大綱

1 很多很多線段樹

1 很多很多線段樹

很多很多線段樹

很多很多線段樹

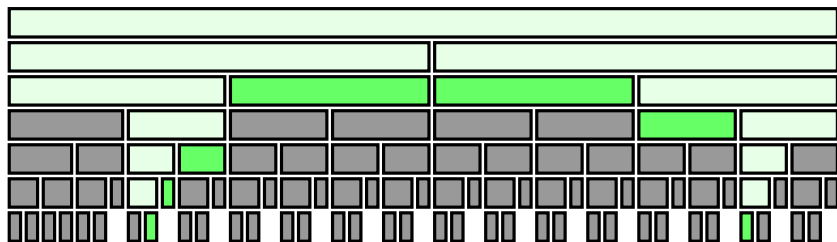


Figure: $N = 49$ ，區間查詢 $[9, 44]$ (Source: 2024 基礎資結投影片)

很多很多線段樹 – 前言

你一定寫過線段樹！

線段樹普及，大家都會用線段樹砸區間操作
你都用線段樹做過什麼事情？

很多很多線段樹 – 前言

- 區間求和、極值、最大公因數
- 單點修改、區間加值
- 歷史版本的區間和
- 區間最大連續和
- 區間 MEX、矩形覆蓋面積
- 靜態區間和 ??

一般線段樹

懶人標記

持久化

分治

離線、掃描線

拜託不要

很多很多線段樹 – 前言

不只是區間詢問，線段樹可以有更多花樣！

- 李超線段樹
- 時間線段樹
- 線段樹優化建圖

很多很多線段樹

線段樹優化建圖

線段樹優化建圖

題目 (Legacy, Codeforces 786B)

給定一張 N 個點的有向圖，接下來有 Q 次加邊的操作，每次操作會是以下三種中的一種：

- 1 $v\ u\ w$ ：從 v 到 u 建一條權重為 w 的邊。
- 2 $v\ l\ r\ w$ ：從 v 到 $[l, r]$ 區間內所有點分別都建一條權重為 w 的邊。
- 3 $v\ l\ r\ w$ ：從 $[l, r]$ 區間內所有點到 v 分別都建一條權重為 w 的邊。

請你輸出給定的源點 s 到所有點的最短路徑長。

- $1 \leq N, Q \leq 10^5$ 。

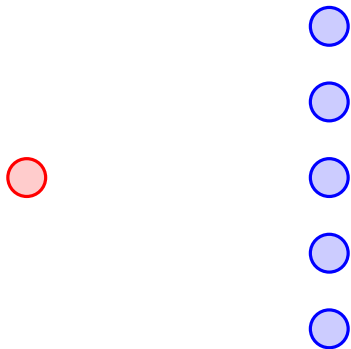
線段樹優化建圖

怎麼看起來跟線段樹沒什麼關係

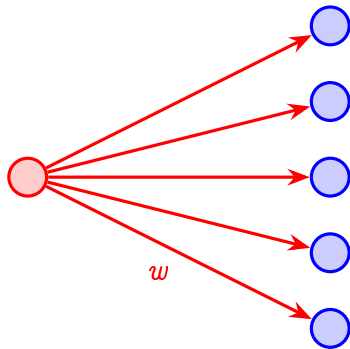
不急著砸是好事，我們先遺忘世界上所有資料結構

線段樹優化建圖

如果每次詢問都是「一個點對所有點，分別都建一條權重為 w 的邊」要怎麼辦？

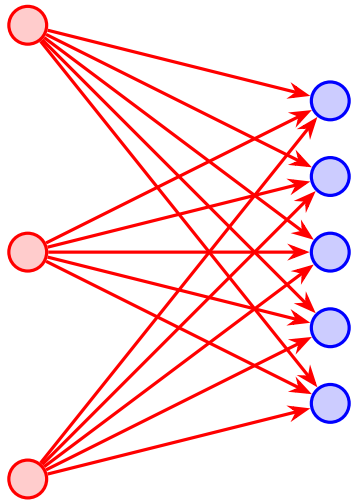


線段樹優化建圖 – 「代理人」



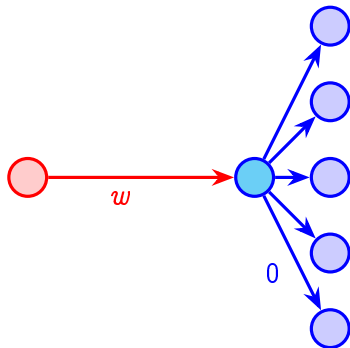
注意到，建出來每一條邊都長得一模一樣

線段樹優化建圖 – 「代理人」



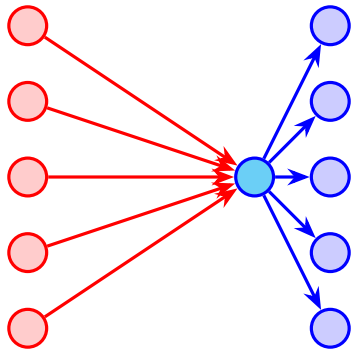
線段樹優化建圖 – 「代理人」

一次詢問建出太多邊了



先建一個中間點，中間點再連藍色點
詢問的時候，紅色點連一條邊到中間點

線段樹優化建圖 – 「代理人」



線段樹優化建圖 – 「代理人」

以鬆弛的角度來說，連 (a, b) 邊權 w ，造成 $d(a) + w \geq d(b)$

a 連中間人 c ， $d(a) + w \geq d(c)$

中間人 c 連 b_i ， $d(c) + 0 \geq d(b_i)$

\implies 實質上等同 a 連 b_i ， $d(a) + w \geq d(b_i)$

線段樹優化建圖

回到原本的問題，每次詢問要連邊的區間不一樣，每次開新的中間點的話問題沒有半點解決

如果可以預先決定少少的中間點，每個中間點連到一個區間？
如果可以預先決定一些區間，讓每個詢問都可以被這些區間拆分成少少段？

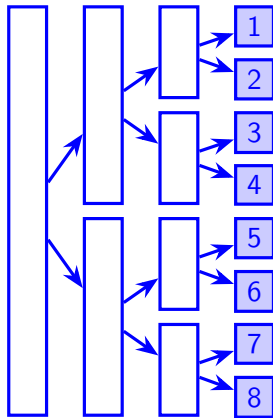
線段樹優化建圖

回到原本的問題，每次詢問要連邊的區間不一樣，每次開新的中間點的話問題沒有半點解決

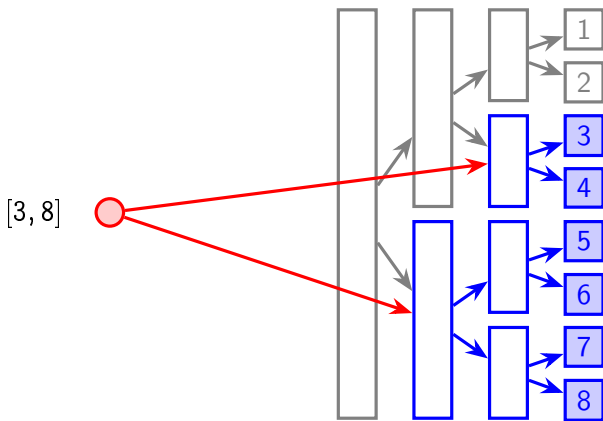
如果可以預先決定少少的中間點，每個中間點連到一個區間？
如果可以預先決定一些區間，讓每個詢問都可以被這些區間拆分成少少段？

把中間點開成**線段樹**的樣子

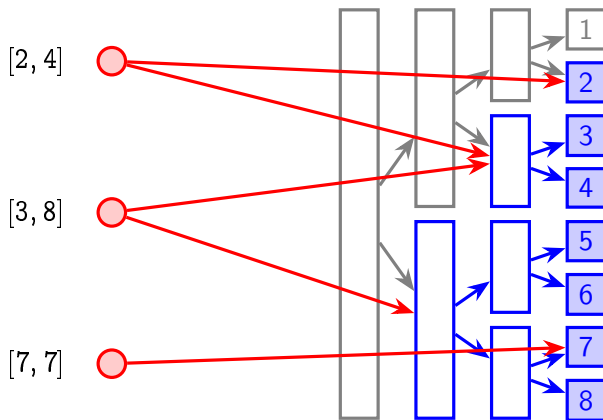
線段樹優化建圖



線段樹優化建圖



線段樹優化建圖



線段樹優化建圖

對一個線段樹節點連一條邊，等同於對區間內所有點分別連邊

如果把整張圖反過來：從線段樹節點連出來，等同於從區間內所有點分別連出來

線段樹優化建圖

預先建兩棵線段樹，一棵從根往葉子連邊，一棵從葉子往根連邊
每次詢問根據方向在對應的樹上連 $O(\log N)$ 條邊，就可以建出一樣的圖（在最短路的意義上一樣）

單源最短路？dijkstra 就好

線段樹優化建圖

最後建出來的圖上：

- 一棵線段樹有 $2N$ 個節點，但是兩棵線段樹葉節點可以共用，總共 $3N$ 個點
- 兩棵線段樹各建 $O(N)$ 條邊，之後每個詢問建 $O(\log N)$ 條邊，總共 $O(N + Q \log N)$ 條邊

時間複雜度 $O((N + Q \log N) \log N)$

線段樹優化建圖

線段樹本身和我們是怎麼建圖的並沒有關係
我們甚至可以用 sparse table 建類似的圖

線段樹在這裡發揮的最大價值是**把詢問區間拆解**成一些特別的小區間