進階資料結構

邱翊均

January 13, 2025

講師簡介

- 邱翊均
- 2022 全國賽場外觀眾
- IOI 2023、APIO 2023 銀牌
- ICPC PCkomachi 隊員

講師簡介

- 邱翊均
- 2022 全國賽場外觀眾
- IOI 2023、APIO 2023 銀牌
- ICPC PCkomachi 隊員
- 因為想學習資料結構所以當資料結構講師

大綱

很多很多線段樹

很多很多線段樹

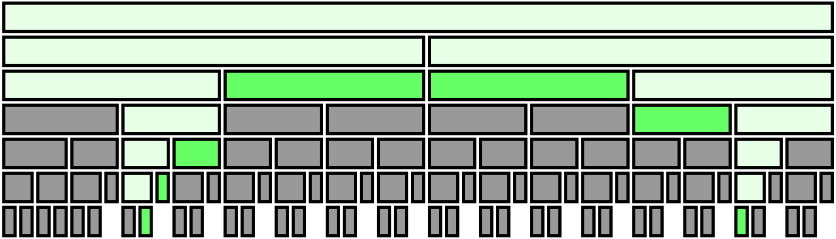


Figure: $N = 49$，區間查詢 $[9, 44]$（Source：2024 基礎資結投影片）

很多很多線段樹 – 前言

你一定寫過線段樹！

線段樹普及，大家都會用線段樹砸區間操作
你都用線段樹做過什麼事情？

很多很多線段樹 – 前言

- 區間求和、極值、最大公因數 (一般線段樹)
- 單點修改、區間加值 (懶人標記)
- 歷史版本的區間和 (持久化)
- 區間最大連續和 (分治)
- 區間 MEX、矩形覆蓋面積 (離線、掃描線)
- 靜態區間和 (拜託不要)

很多很多線段樹 – 前言

不只是區間詢問，線段樹可以有更多花樣！

- 李超線段樹
- 時間線段樹
- 線段樹優化建圖

很多很多線段樹

李超線段樹

李超線段樹

題目 (動態凸包)

現在有 Q 個操作，每個操作會是以下兩種中的一種：

- 加入一條直線 $y = mx + k$
- 詢問在 $x = t$ 處最大的 y 值

- $1 \le Q \le 10^5$
- $|m|, |k| \le 10^9$
- $1 \le t \le 10^5$

李超線段樹

用 set 維護上凸包上的線段，維護線段控制的左右界，每次加入直線先搜他控制的區間，往左右殺掉其他線段，查詢的時候二分搜是哪條線段代值進去。注意 iterator 使用、全整求線交點……

太麻煩了，而且常數不小 ~~，而且我沒寫過~~
有沒有簡單一點的辦法？

李超線段樹

李超線段樹：

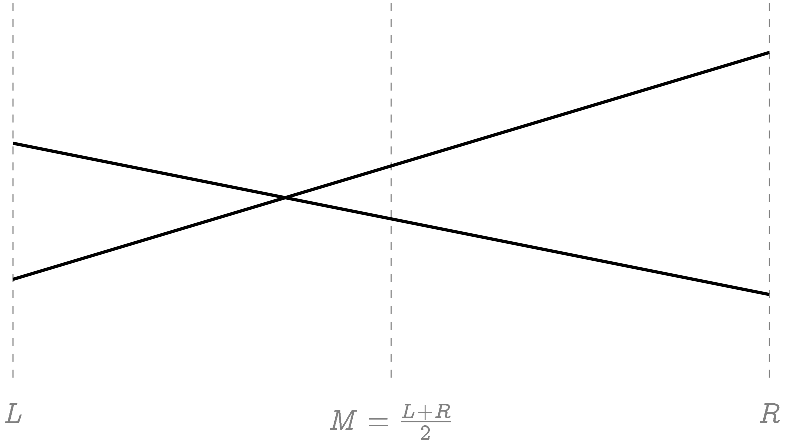
- 對要查詢的**值域**開線段樹，葉子代表單一一個 x 的值
- 每個節點存**一條**對**中點**來說 y 最大的直線
  - 對中點一定是有用的
  - 可能還對這個區間的其他一部分有用

李超線段樹 – 插入直線

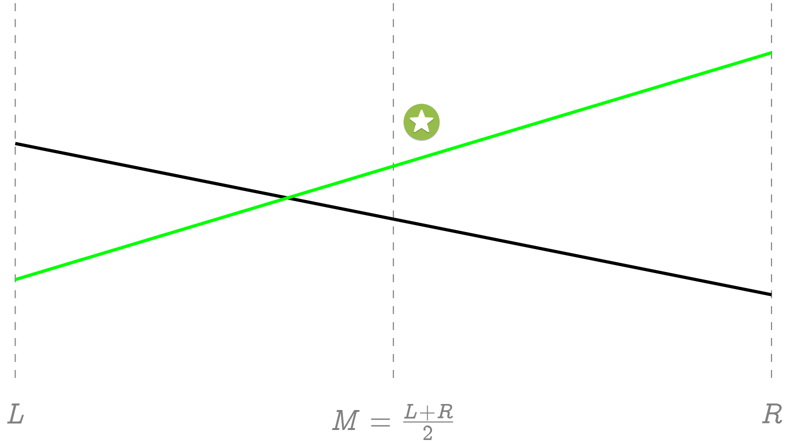
原本節點上有一條直線
這次詢問想插入另外一條直線

一個節點只能存一條線誰要留下來？另一條線要去哪裡？

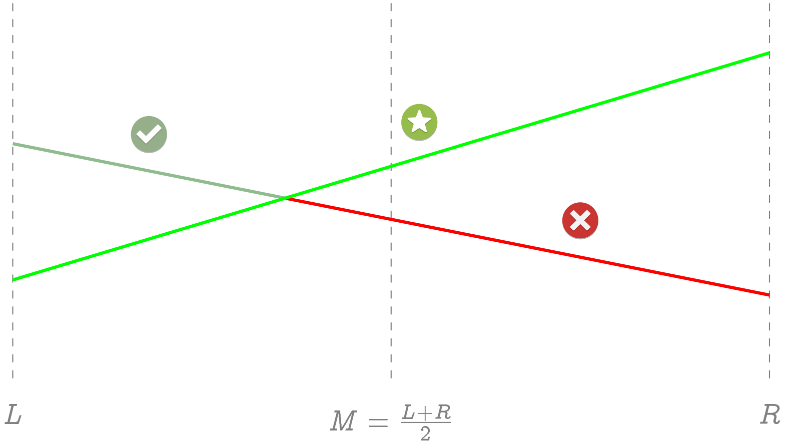
李超線段樹 – 插入直線



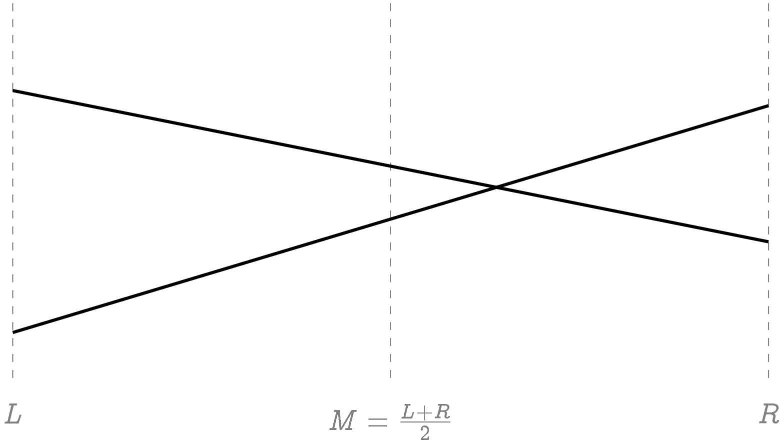
李超線段樹 – 插入直線



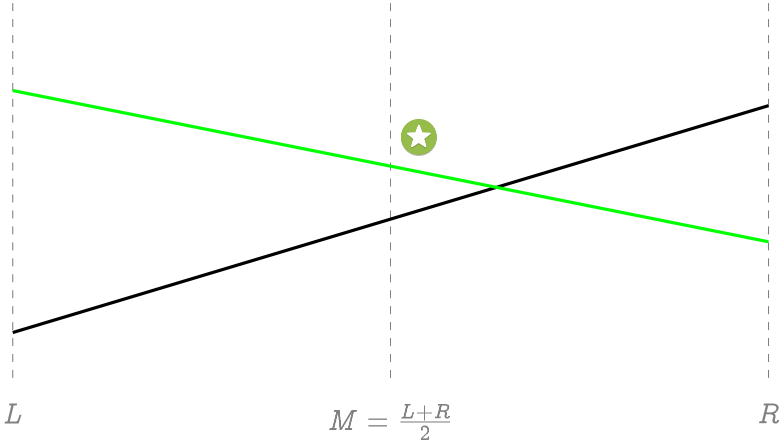
李超線段樹 – 插入直線



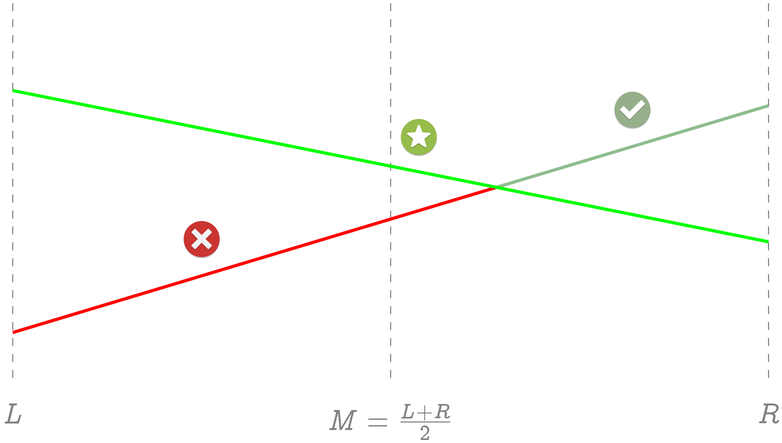
李超線段樹 – 插入直線



李超線段樹 – 插入直線



李超線段樹 – 插入直線



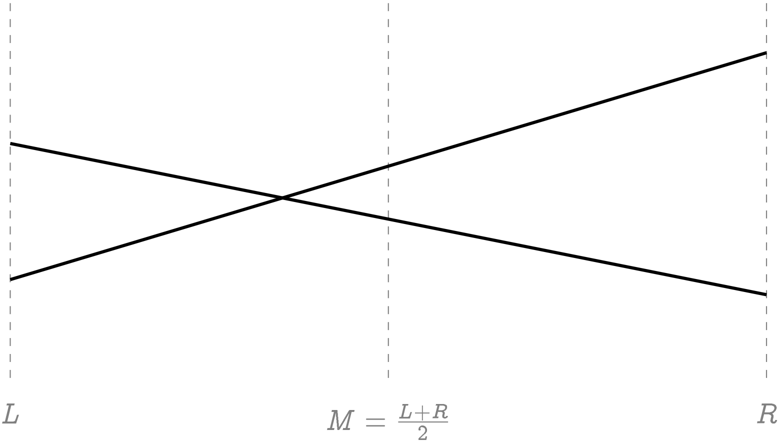
李超線段樹 – 插入直線

一條直線在中點輸掉之後不能直接扔掉，因為他還沒輸光，區間內某些 x 的範圍可能還需要他

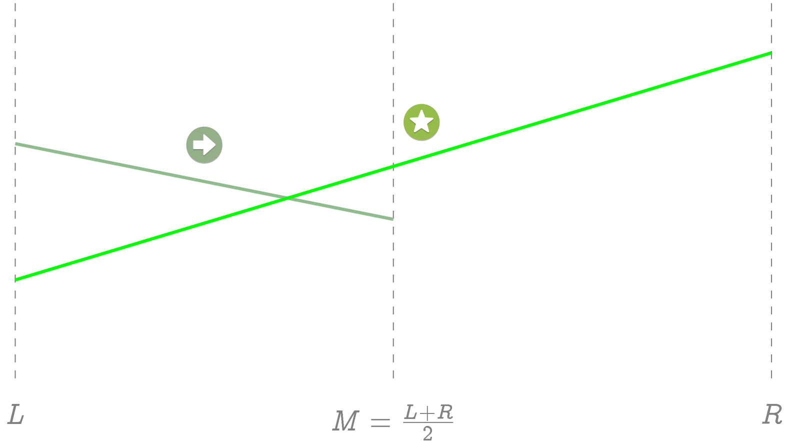
在中點輸掉的話，一定也會在左右其中一邊輸光
只有其中一邊可能還會需要用到這條直線，遞迴把他交給線段樹上那半邊的子樹處置，另外半邊已經不需要他了

到葉子還輸的話那這條線徹底不會被任何人需要

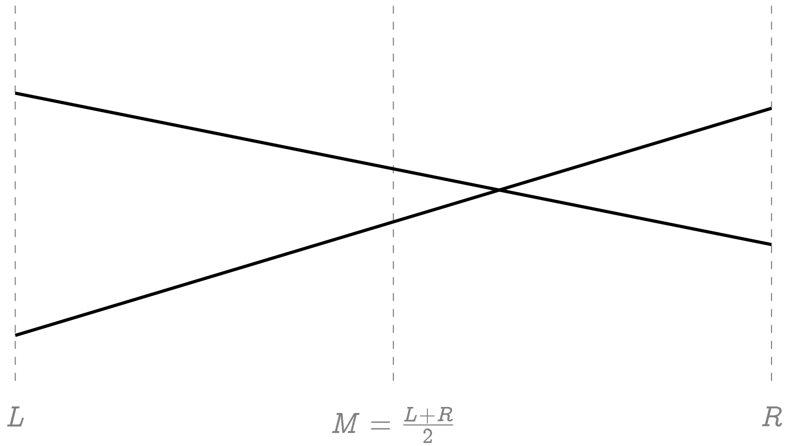
李超線段樹 – 插入直線



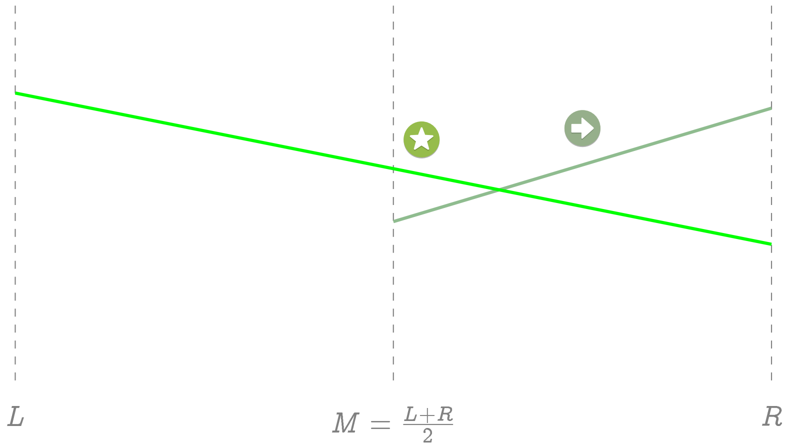
李超線段樹 – 插入直線



李超線段樹 – 插入直線



李超線段樹 – 插入直線



李超線段樹 – 插入直線

從根節點出發，到葉節點為止：

- 代中點 x 座標比較兩條直線，贏家留在節點上
- 比較兩條直線的斜率
  - 如果贏家的斜率比較**大**，輸家往**左**子樹遞迴插入
  - 如果贏家的斜率比較**小**，輸家往**右**子樹遞迴插入

一直往子樹丟包直線
時間複雜度 $O(\text{線段樹高}) = O(\log N)$

李超線段樹 – 單點查詢

直線被扔到隔壁節點，代表這個範圍的 x 全都用不到這條直線一個 x 可能用到的直線，都存在他的祖先們身上

- 找到代表這個 x 值的葉子
- 檢查所有祖先存的直線，每個都代一次，回答最大的 y

時間複雜度 $O(\text{線段樹高}) = O(\log N)$

李超線段樹 – 實做

包裝直線作為函數使用

```
struct Line {
    int a, b;  // y = ax + b
    Line(int _a = 0, int _b = 0): a(_a), b(_b) {}
    int operator()(int x) { return a * x + b; }
};
```

李超線段樹 – 實做

插入直線

- 代中點 x 座標比較兩條直線，贏家留在節點上
- 比較兩條直線的斜率
- 遞迴插入

```
void insert(int id, int l, int r, Line ln) {
    int m = (l + r) / 2;
    if(lns[id](m) < ln(m)) swap(lns[id], ln);
    if(l == r) return;
    if(lns[id].a > ln.a) insert(L(id), l, m, ln);
    else insert(R(id), m + 1, r, ln);
}
```

李超線段樹 – 實做

單點查詢

- 找到代表這個 x 值的葉子
- 檢查所有祖先存的直線，每個都代一次，回答最大的 y

```
int qry(int id, int l, int r, int x) {
    int m = (l + r) / 2;
    int res = lns[id](x);
    if(l == r) return res;
    if(x <= m) res = max(res, qry(L(id), l, m, x));
    else res = max(res, qry(R(id), m + 1, r, x));
    return res;
}
```

李超線段樹 – 座標壓縮

題目 (Line Add Get Min，Library Checker)

你有 N 條直線 $y = a_i x + b_i$。請你處理 Q 個詢問：

- 加入一條直線 $y = ax + b$
- 詢問 $x = p$ 處最小的 y 值

- $1 \le N, Q \le 2 \times 10^5$
- $|a_i|, |p| \le 10^9$
- $|b_i| \le 10^{18}$

李超線段樹 – 座標壓縮

剛剛對 x 的值域 $1, 2, \ldots, 10^5$ 開線段樹

現在事先收集會被詢問到的 x 座標
對會被問到的 x 開線段樹

詢問是浮點數的時候也可以

李超線段樹 – 座標壓縮

如果事先不知道詢問位置呢？

李超線段樹 – 座標壓縮

如果事先不知道詢問位置呢？

動態開點，用不到的節點不要理他

李超線段樹 – 插入線段

如果插入的不是直線，而是有左右範圍限制的線段呢？

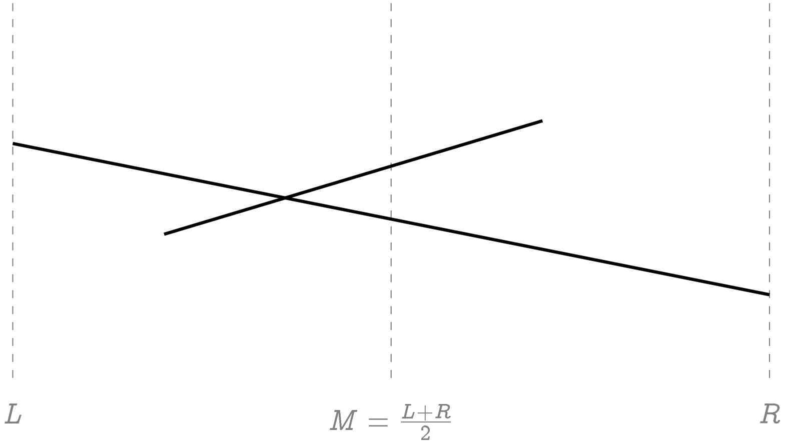
題目 (Segment Add Get Min，Library Checker)

你有 N 段**線段** $y = a_i x + b_i$ $(x \in [l_i, r_i))$。請你處理 Q 個詢問：

- 加入一段**線段** $y = ax + b$ $(x \in [l, r))$
- 詢問 $x = p$ 處最小的 y 值

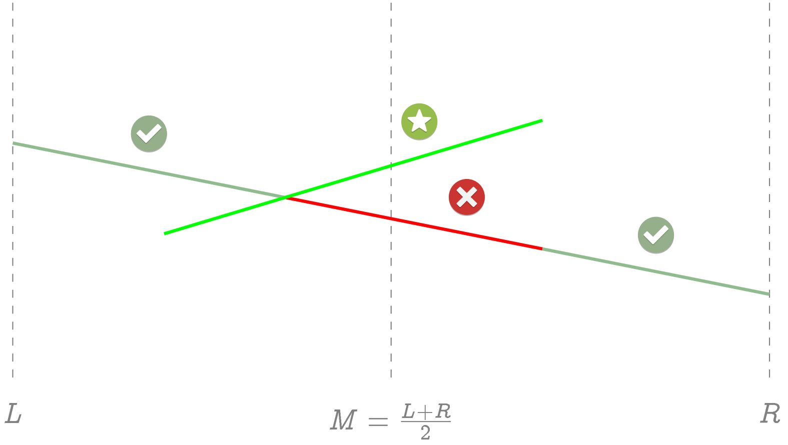
- $1 \leq N, Q \leq 2 \times 10^5$
- $-10^9 \leq l_i < r_i \leq 10^9$
- $|a_i|, |p| \leq 10^9$
- $|b_i| \leq 10^{18}$

李超線段樹 – 插入線段



李超線段樹 – 插入線段

(往左右子樹都丟包線段一定是不行的)



李超線段樹 – 插入線段

一般線段樹是怎麼做區間修改的？

李超線段樹 – 插入線段

一般線段樹是怎麼做區間修改的？
找 $O(\log N)$ 個節點覆蓋詢問的區間，修改那些節點

李超線段樹 – 插入線段

一般線段樹是怎麼做區間修改的？
找 $O(\log N)$ 個節點覆蓋詢問的區間，修改那些節點

找 $O(\log N)$ 個節點覆蓋線段範圍，對那些節點插入直線

李超線段樹 – 插入線段

一般線段樹是怎麼做區間修改的？
找 $O(\log N)$ 個節點覆蓋詢問的區間，修改那些節點

找 $O(\log N)$ 個節點覆蓋線段範圍，對那些節點插入直線

時間複雜度：插入一次 $O(\log N)$，總共 $O(\log^2 N)$

李超線段樹 – 應用

- 斜率優化 ✅

李超線段樹 – 應用

- 斜率優化 ✅
- 四邊形優化 ✅

不只是直線，有**優超性**的函數都可以

線段樹優化建圖

線段樹優化建圖

題目 (Legacy，Codeforces 786B)

給定一張 N 個點的有向圖，接下來有 Q 次加邊的操作，每次操作會是以下三種中的一種：

- $1\ v\ u\ w$：從 v 到 u 建一條權重為 w 的邊。
- $2\ v\ l\ r\ w$：從 v 到 $[l, r]$ 區間內所有點分別都建一條權重為 w 的邊。
- $3\ v\ l\ r\ w$：從 $[l, r]$ 區間內所有點到 v 分別都建一條權重為 w 的邊。

請你輸出給定的源點 s 到所有點的最短路徑長。

- $1 \leq N, Q \leq 10^5$。

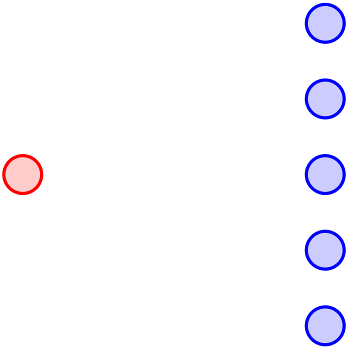
線段樹優化建圖

怎麼看起來跟線段樹沒什麼關係

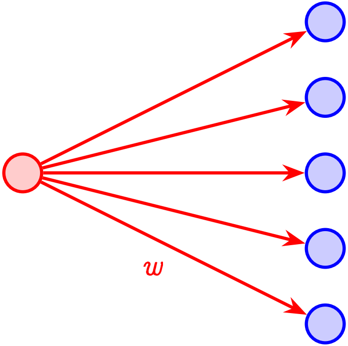
不急著砸是好事，我們先遺忘世界上所有資料結構

線段樹優化建圖

如果每次詢問都是「一個點對所有點，分別都建一條權重為 w 的邊」要怎麼辦？

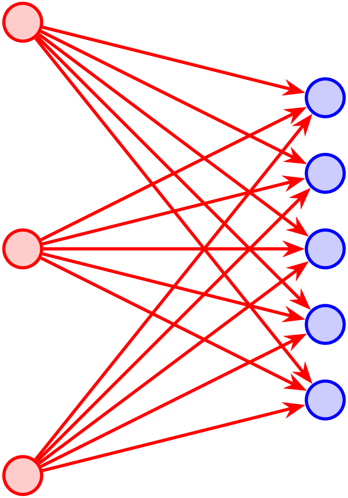


線段樹優化建圖 – 「代理人」



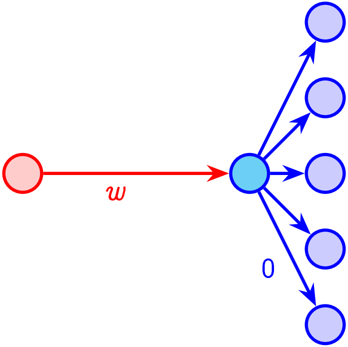
注意到，建出來每一條邊都長得一模一樣

線段樹優化建圖 – 「代理人」



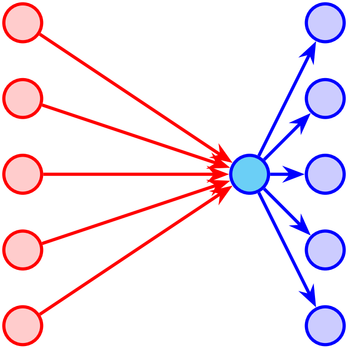
線段樹優化建圖 – 「代理人」

一次詢問建出太多邊了



先建一個中間點，中間點再連藍色點
詢問的時候，紅色點連**一條邊**到中間點

線段樹優化建圖 – 「代理人」



線段樹優化建圖 – 「代理人」

以鬆弛的角度來說，連 (a, b) 邊權 w，造成 $d(a) + w \geq d(b)$

a 連中間人 c，$d(a) + w \geq d(c)$
中間人 c 連 b_i，$d(c) + 0 \geq d(b_i)$
$\implies$ 實質上等同 a 連 b_i，$d(a) + w \geq d(b_i)$

線段樹優化建圖

回到原本的問題，每次詢問要連邊的區間不一樣，每次開新的中間點的話問題沒有半點解決

如果可以預先決定少少的中間點，每個中間點連到一個區間？
如果可以預先決定一些區間，讓每個詢問都可以被這些區間拆分成少少段？

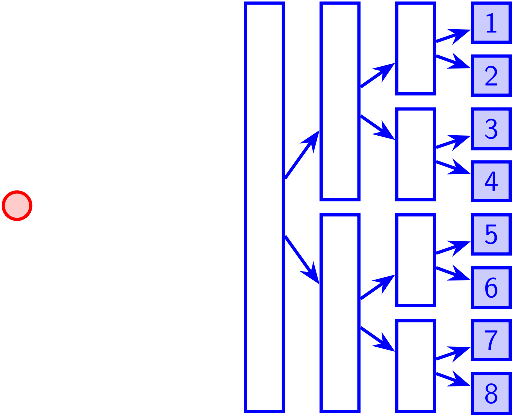
線段樹優化建圖

回到原本的問題，每次詢問要連邊的區間不一樣，每次開新的中間點的話問題沒有半點解決

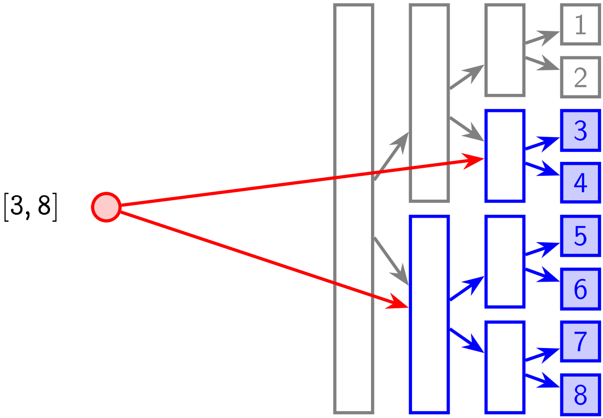
如果可以預先決定少少的中間點，每個中間點連到一個區間？
如果可以預先決定一些區間，讓每個詢問都可以被這些區間拆分成少少段？

把中間點開成**線段樹**的樣子

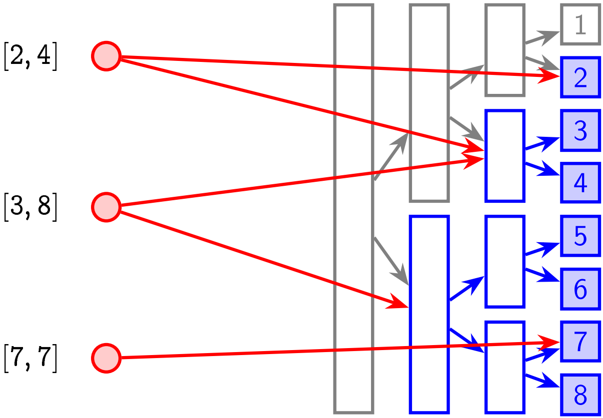
線段樹優化建圖



線段樹優化建圖



線段樹優化建圖

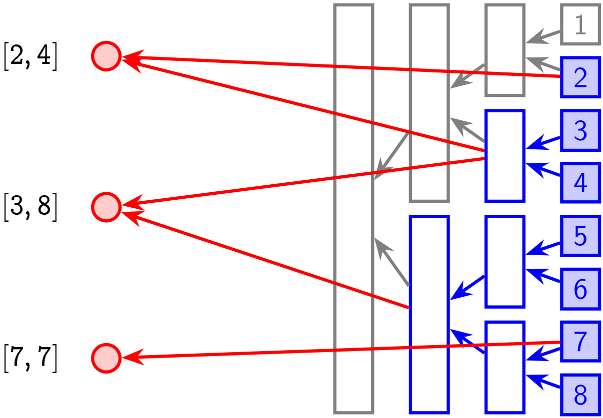


線段樹優化建圖

對一個線段樹節點連一條邊，等同於對區間內所有點分別連邊

如果把整張圖反過來：從線段樹節點連出來，等同於從區間內所有點分別連出來

線段樹優化建圖



線段樹優化建圖

預先建兩棵線段樹，一棵從根往葉子連邊，一棵從葉子往根連邊
每次詢問根據方向在對應的樹上連 $O(\log N)$ 條邊，就可以建出一樣的圖（在最短路的意義上一樣）

單源最短路？dijkstra 就好

線段樹優化建圖

最後建出來的圖上：

- 一棵線段樹有 $2N$ 個節點，但是兩棵線段樹葉節點可以共用，總共 $3N$ 個點
- 兩棵線段樹各建 $O(N)$ 條邊，之後每個詢問建 $O(\log N)$ 條邊，總共 $O(N + Q \log N)$ 條邊

時間複雜度 $O((N + Q \log N) \log N)$

線段樹優化建圖

線段樹本身和我們是怎麼建圖的並**沒有**關係
我們甚至可以用 sparse table 建類似的圖

線段樹在這裡發揮的最大價值是**把詢問區間拆解**成一些特別的小區間

Pattern

Pattern

資料結構往往不會赤裸出現

不是「我要用這個資結砸掉這題」
而是「這題需要這樣做，所以可以拿這個資結砸掉」
永遠都先想怎麼做，再尋找合適的資結幫助你

– 2024 基礎資結

Pattern

資料結構往往不會赤裸出現

不是「我要用這個資結砸掉這題」
而是「這題需要這樣做，所以可以拿這個資結砸掉」
永遠都先想怎麼做，再尋找合適的資結幫助你

– 2024 基礎資結

有時候，題目要你維護的東西實在是太荒謬了，你需要自己創造可以維護的東西去維護

Pattern – Taxis

題目 (Taxis，POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$，其中 d 為里程數。
給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出恰好是這個排列（當收費價格一樣，順序可以任意安排），若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。
接著會有 q 筆修改，每筆修改會有 a_i, b_i，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字，每次交換後皆須輸出先前問題的答案。

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$。
- $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$。

Pattern – Taxis

題目 (Taxis，POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$，其中 d 為里程數。
給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出恰好是這個排列（當收費價格一樣，順序可以任意安排），若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。
接著會有 q 筆修改，每筆修改會有 a_i, b_i，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字，每次交換後皆須輸出先前問題的答案。 **???**

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$。
- $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$。

Pattern – Taxis

題目 (Taxis，POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$，其中 d 為里程數。給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出恰好是這個排列（當收費價格一樣，順序可以任意安排），若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$。
- $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$。

Pattern – Taxis

題目 (Taxis，POI 2018)

現在有 n 台計程車編號 $1 \sim n$，對於第 i 台計程車，給定 s_i, c_i，代表該台計程車的收費方式為 $s_i + d \times c_i$，其中 d 為里程數。給定一個 $1 \sim n$ 的排列，請問是否存在一個里程數 x/y，使得把所有計程車的編號照著收費由小到大列出**恰好是這個排列 ???** (當收費價格一樣，順序可以任意安排)，若存在的話請輸出任意一組解，否則輸出「NIE」。

- $1 \leq n \leq 5 \times 10^5$。
- $1 \leq q \leq 5 \times 10^5$。

Pattern – Taxis

什麼時候......

- 計程車照收費排序剛好是 $1, 2, \ldots, n$

Pattern – Taxis

什麼時候……

- 🤮 ~~計程車照收費排序剛好是$1, 2, \ldots, n$~~

Pattern – Taxis

什麼時候……

- 🤮 ~~計程車照收費排序剛好是~~ $\cancel{1, 2, \ldots, n}$
- 1 號車收費 $\leq$ 2 號，而且
- 2 號車收費 $\leq$ 3 號，而且
- ……
- $n - 1$ 號車收費 $\leq n$ 號

Pattern – Taxis

什麼時候……

- 🤮 ~~計程車照收費排序剛好是~~$\cancel{1, 2, \ldots, n}$
- 🥰 1 號車收費 $\leq$ 2 號，而且
- 🥰 2 號車收費 $\leq$ 3 號，而且
- ……
- 🥰 $n - 1$ 號車收費 $\leq n$ 號

$n = 2$ 我們總會做了吧？

Pattern – Taxis

只考慮 i 號車和 $i+1$ 號車，可以滿足「i 在 $i+1$ 前面」的距離 d 是一個 $d \leq \square$ 或 $d \geq \square$ 的限制

當每一組相鄰計程車的順序都滿足，所有車就會照順序排好

Pattern – Taxis

只考慮 i 號車和 $i+1$ 號車，可以滿足「i 在 $i+1$ 前面」的距離 d 是一個 $d \leq \square$ 或 $d \geq \square$ 的限制

當每一組相鄰計程車的順序都滿足，所有車就會照順序排好

維護一坨射線有沒有交集
可以用兩個 multiset 維護

Pattern – Taxis

帶修改？

「每筆修改會有 a_i, b_i，代表交換排列在 a_i 和 b_i 的數字」

Pattern – Taxis

帶修改？

~~「每筆修改會有a_i, b_i，代表交換排列在a_i 和b_i 的數字」~~

每次都做兩個單點修改

Pattern – Taxis

帶修改？

~~「每筆修改會有a_i, b_i，代表交換排列在a_i 和b_i 的數字」~~

每次都做兩個單點修改

時間複雜度：一次詢問 $O(1)$ 次 multiset 操作，總共 $O((n+q)\log n)$

Pattern – Grades

題目 (Grades，POI 2017)

有 n 位學生編號 $1 \sim n$ 以任意順序由左到右排成一列，現在你要派給這 n 位學生成績，成績必須是一個介於 $1 \sim n$ 之間的數字，且必須滿足以下條件：

- 若學生 u 的編號比學生 v 大，則學生 u 的成績不可以小於學生 v。
- 若學生 v 排在學生 u 右邊一位，則學生 v 的成績不可以小於學生 u，不然他會很傷心。

請問最多可以有多少不同的成績種類被派送出去？
接著會有 z 筆修改，每筆修改會有 p_i, q_i，代表交換排在位置 p_i 和 q_i 的學生編號，每次交換後皆須輸出先前問題的答案。

- $1 \leq n \leq 10^6$。
- $1 \leq z \leq 3 \times 10^5$。

Pattern – Grades

TL;DR

有 n 個學生從左到右排成一列，編號大的、排左邊的，成績要比較高。最多能派出幾種不同的成績？

Pattern – Grades

TL;DR

有 n 個學生從左到右排成一列，編號大的、排左邊的，成績要比較高。最多能派出幾種不同的成績？

z 次修改，每次交換隊伍裡兩個學生的位置

Pattern – Grades

TL;DR

有 n 個學生從左到右排成一列，編號大的、排左邊的，成績要比較高。最多能派出幾種不同的成績？

🙈 ~~z 次修改，每次交換隊伍裡兩個學生的位置~~

Pattern – Grades

$n = 2$......

- $[2, 1]$：兩種
- $[1, 2]$：一種

Pattern – Grades

有兩個人 $u < v$……

- v 排 u 左邊
- u 排 v 左邊

Pattern – Grades

有兩個人 $u < v$……

- v 排 u 左邊：v 的分數本來就該比較高
- u 排 v 左邊：$u, u+1, \ldots, v-1, v$ 的分數全都要一樣！

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多）$n-1$ 條限制「$u_i, u_i+1, \ldots, v_i-1, v_i$ 的分數要一樣」

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多）$n-1$ 條限制「$u_i, u_i+1, \ldots, v_i-1, v_i$ 的分數要一樣」

要怎麼詢問「最多能派出幾種不同的成績」？

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多）$n-1$ 條限制
「$u_i, u_i+1, \ldots, v_i-1, v_i$ 的分數要一樣」

每條限制都是「$u_i+1, \ldots, v_i-1, v_i$ 的分數都固定了，只有 u_i 的分數可以自由決定」
最後數數看有幾個人的分數可以自由決定

Pattern – Grades

看兩兩相鄰學生的編號關係，獲得（最多）$n-1$ 條限制
「$u_i, u_i+1, \ldots, v_i-1, v_i$ 的分數要一樣」

每條限制都是「$u_i+1, \ldots, v_i-1, v_i$ 的分數都固定了，只有 u_i 的分數可以自由決定」
最後數數看有幾個人的分數可以自由決定

區間加值（±1），數數看全域有幾個 0

Pattern – Grades

帶修改（交換兩人位置）？

依然可以是兩次單點修改

Pattern – Grades

區間加值、單點修改、數全域有幾個 0

拿你最喜歡的資料結構砸掉
時間複雜度 $O((n+z)\log n)$

Pattern

我們是怎麼做完前面兩題的？

- 題目要維護的東西難以維護（整個排列的長相）
- 找到小小的特徵點，用小特徵湊出題目要的條件（排列中相鄰元素關係）
- 小特徵足夠單純可以維護（multiset、線段樹）

Pattern – Seats

題目 (Seats，IOI 2018)

(完整敘述請見講義)

有 $H \times W$ 個位子排成一個矩形，還有 HW 位選手每人分別佔一個位置。有幾個 $r \times c$ **矩形區域**內坐的選手的編號恰好是 $0, 1, \ldots, rc - 1$？

支援 Q 次修改，每次交換兩位選手的位置，每次交換完輸出以上問題的答案。

- $1 \leq H \times W \leq 10^6$
- $1 \leq Q \leq 5 \times 10^4$

Pattern – Seats

題目 (Seats，IOI 2018)

Subtasks

- (5) $HW \le 100$，$Q \le 5000$
- (6) $HW \le 10^4$，$Q \le 5000$
- (20) $H \le 1000$，$W \le 1000$，$Q \le 5000$
- (6) $Q \le 5000$，對於每次交換 $|a - b| \le 10^4$
- (33) $H = 1$
- (30) 無額外限制

拿零分還可以金牌的難題 !?

Pattern – Seats

選手一個一個坐進去，檢查他們是不是坐成矩形的樣子

躲不開的障礙：
要怎麼檢查一個矩形範圍是不是好的？
要怎麼檢查 $0, \ldots, rc - 1$ 的範圍是不是好的？

Pattern – Seats

題目 (Seats，IOI 2018)

Subtasks

- (5) $HW \leq 100$，$Q \leq 5000$
- (6) $HW \leq 10^4$，$Q \leq 5000$
- (20) $H \leq 1000$，$W \leq 1000$，$Q \leq 5000$
- (6) $Q \leq 5000$，對於每次交換 $|a - b| \leq 10^4$
- **(33) $H = 1$**
- (30) 無額外限制

二維太荒謬了，先想辦法搞定一維

Pattern – Seats

選手一個一個坐進去，檢查他們是不是坐成連續區間的樣子

躲不開的障礙：
要怎麼檢查一個區間是不是好的？
要怎麼檢查 $0, \ldots, rc-1$ 的範圍是不是好的？

Pattern – Seats

٩(´ᗜ`*)و插圖

Pattern – Seats

把 $0, \ldots, rc-1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好在一個連續區間的**充要條件**是……

Pattern – Seats

把 $0, \ldots, rc-1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好在一個連續區間的**充要條件**是……

對於每一組相鄰的格子，**恰好有兩組是一黑一白**

Pattern – Seats

٩(ˊᗜˋ*)و插圖

Pattern – Seats

把 $0, 1, \ldots, HW - 1$ 一個一個塗黑，每個時間點檢查是不是恰好兩組格子是一黑一白

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在哪些時間是一黑一白？

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑一白

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑一白的格子有幾組，數數看全域有幾個 2

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑一白

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑一白的格子有幾組，**數數看全域有幾個 2 ???**

Pattern – Seats

對於每一組相鄰的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑一白

只要有格子是黑的，一黑一白的格子就至少有兩組

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑一白的格子有幾組，**檢查全域最小值是不是** 2、**數數看最小值有幾個**

Pattern – Seats

修改？還是可以兩次單點修改

時間複雜度：$O((W+Q)\log W)$

Pattern – Seats

題目 (Seats，IOI 2018)

Subtasks

- (5) $HW \leq 100$，$Q \leq 5000$
- (6) $HW \leq 10^4$，$Q \leq 5000$
- (20) $H \leq 1000$，$W \leq 1000$，$Q \leq 5000$
- (6) $Q \leq 5000$，對於每次交換 $|a - b| \leq 10^4$
- (33) $H = 1$
- **(30) 無額外限制**

Pattern – Seats

٩(ˊᗜˋ*)و插圖

Pattern – Seats

把 $0, \ldots, rc-1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好形成一個矩形的**充要條件**是……

Pattern – Seats

把 $0, \ldots, rc-1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好形成一個矩形的**充要條件**是......

對於每一塊 2×2 相鄰的格子，

- 恰好四塊是一黑三白

Pattern – Seats

٩(ˊᗜˋ*)و插圖：甜甜圈

Pattern – Seats

把 $0, \ldots, rc-1$ 塗黑色，其他格子和界外留白。他們剛好形成一個矩形的**充要條件**是……

對於每一塊 2×2 相鄰的格子，

- 恰好 4 塊是一黑三白
- **沒有任何一塊是三黑一白**

Pattern – Seats

٩(ˊᗜˋ*)و插圖

Pattern – Seats

對於每一組 2×2 的格子，他們在哪些時間是一黑三白、或是三黑一白？

Pattern – Seats

對於每一組 2×2 的格子，他們在**某個連續的時間區間**是一黑三白、或是三黑一白

只要有格子是黑的，一黑三白的格子就至少有 4 組

拿出你最喜歡的資料結構，維護每個時間點一黑三白、三黑一白的格子有幾組，**檢查全域最小值是不是 4、數數看最小值有幾個**

Pattern – Seats

修改？還是可以兩次單點修改

時間複雜度：$O((HW+Q)\log HW)$
(多花點力氣 $O(HW+Q\log HW)$)

Pattern – Seats

修改？還是可以兩次單點修改

時間複雜度：$O(HW + \mathbf{16}Q \log HW)$
常數巨大！

Pattern – 好的連續子序列

題目 (好的連續子序列，台大演算法設計與分析（ADA）作業)

給定一個 $1, 2, \ldots, N$ 的排列，試求有多少子區間 $[l, r]$，滿足該子區間是一個連續正整數的排列？

- $1 \leq N \leq 5 \times 10^5$

在 NEOJ 788 有可以傳的 Judge

Pattern – 好的連續子序列

跟一維的 Seats 比起來，少了修改，多了不是 1 開頭的區間也要數數看

Pattern – 好的連續子序列

跟一維的 Seats 比起來，少了修改，多了不是 1 開頭的區間也要數數看

- 用 Seats 作法找出 1 開頭的好區間有幾個
- 把 1 拿掉（讓他永遠是白色），找出 2 開頭的好區間有幾個
- ......
- 把 $1, 2, \ldots, N-1$ 拿掉（讓他們永遠是白色），找出 N 開頭的好區間有幾個

Pattern – 好的連續子序列

跟一維的 Seats 比起來，少了修改，多了不是 1 開頭的區間也要數數看

- 用 Seats 作法找出 1 開頭的好區間有幾個
- 把 1 拿掉（讓他永遠是白色），找出 2 開頭的好區間有幾個
- ......
- 把 $1, 2, \ldots, N-1$ 拿掉（讓他們永遠是白色），找出 N 開頭的好區間有幾個

題目沒叫你修改，但是你自己把「枚舉排列的開頭」當成 N 次修改

Pattern – 好的連續子序列

時間複雜度：$O(N \log N)$

Pattern – 好的連續子序列

時間複雜度：**至少** $O(4N \log N)$

常數巨大！我在 NEOJ 吃 TLE

Pattern – 好的連續子序列：番外

本題官方作法是分治，也有其他使用大資料結構但可以時限內通過的作法

你能想到幾種不同的作法？

Pattern

- 題目要維護的東西難以維護
- 找到小小的特徵點，用小特徵湊出題目要的條件
- 小特徵足夠單純可以維護

資結不是重點，重點是發現精妙的轉換和觀察

線段樹的暴力與懶人標記

線段樹的暴力與懶人標記

Change my mind：均攤分析就是玄學

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號

題目 (帶修改區間和，Zerojudge c652)

給你一段 N 個正整數的序列 $a_1, \cdots, a_N$，請你執行 Q 筆操作。

- 0 l r：代表詢問 $[l, r]$ 區間的和。
- 1 l r：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 改成 $\lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$。
- $1 \leq N, Q \leq 3 \times 10^5$。
- $1 \leq a_i \leq 10^{12}$。

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號

如果想在線段樹維護區間和
區間開根號的時候區間和會如何變化？

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號

如果想在線段樹維護區間和
區間開根號的時候區間和會如何變化？

我也不知道 😭

區間開根號沒有**可預測性**，不能打懶人標記

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號

觀察：一個數字被開 $\log\log C$ 次根號之後就不會再動了，永遠都會是 1

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號

觀察：一個數字被開 $\log\log C$ 次根號之後就不會再動了，永遠都會是 1

- 如果區間內有人不是 1，暴力往下修改
- 如果區間內所有人都是 1，什麼事都不需要做

一個數字只會被暴力改 $\log\log C$ 次，每次 $O(\log N)$ 時間
總時間複雜度 $O(Q\log N + N\log N\log\log C)$

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號・其二

題目 (帶修改區間和 Ex.，波路自編題)

給你一段 N 個正整數的序列 $a_1, \cdots, a_N$，請你執行 Q 筆操作。

- **1 l r c：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 加上 c。**
- 2 l r：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 改成 $\lfloor \sqrt{a_i} \rfloor$。
- 3 l r：代表詢問 $[l, r]$ 區間的和。

- $1 \leq N, Q \leq 10^5$。
- $0 \leq a_i, c \leq 10^9$。

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號・其二

開完根號再加值，一個數字只會被暴力改……$O(Q)$ 次（???）

剛剛的作法壞掉了

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號・其二

觀察：區間全距被開幾次根號之後就幾乎不動了

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號・其二

觀察：區間全距被開 $O(\log\log C)$ 次根號之後就會一直是 0 **或** 1

對全距是 1 的區間開根號可以打懶人標記嗎？
可以，多紀錄最小值和最小值個數就知道區間裡有哪些數字

線段樹修改時，只要全距還不是 1 就暴力往下修改

線段樹的暴力與懶人標記 – 區間開根號・其二

一開始，每個節點的全距都是 $O(C)$，暴力往下次數 $O(N \log\log C)$

每次區間加值讓 $O(\log N)$ 個節點的全距增加 $O(C)$，暴力往下次數增加 $O(\log N \log\log C)$

總時間複雜度 $O(Q \log N + N \log\log C + Q \log N \log\log C)$

線段樹的暴力與懶人標記

```
void modify(int node, int l, int r, int ql, int qr) {
    if(l >= ql && r <= qr) {
        give_tag(node); return;
    }
    push(node);
    int m = (l + r) / 2;
    if(ql <= m) modify(L(node), l, m, ql, qr);
    if(qr > m)  modify(R(node), m + 1, r, ql, qr);
    pull(node);
}
```

線段樹的暴力與懶人標記

```
void modify(int node, int l, int r, int ql, int qr) {
    if(全距 <= 1) {
        give_tag(node); return;
    }
    push(node);
    int m = (l + r) / 2;
    if(ql <= m) modify(L(node), l, m, ql, qr);
    if(qr > m)  modify(R(node), m + 1, r, ql, qr);
    pull(node);
}
```

線段樹的暴力與懶人標記

```cpp
void modify(int node, int l, int r, int ql, int qr) {
    if(tag_condition(node)) {
        give_tag(node); return;
    }
    push(node);
    int m = (l + r) / 2;
    if(ql <= m) modify(L(node), l, m, ql, qr);
    if(qr > m)  modify(R(node), m + 1, r, ql, qr);
    pull(node);
}
```

線段樹的暴力與懶人標記

也許......`tag_condition` 還可以是......？

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats

題目 (Gorgeous Sequence，HDU 5306)

T 筆測資，每筆測資給你一段 N 個整數的序列 $a_1, \cdots, a_N$，請你執行 Q 筆操作。

- $0\ l\ r\ t$：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 改成 $\min(a_i, t)$。
- $1\ l\ r$：代表詢問 $[l, r]$ 區間的最大值。
- $2\ l\ r$：代表詢問 $[l, r]$ 區間的和。

- $1 \leq T \leq 100$。
- $1 \leq \sum N, \sum Q \leq 10^6$。
- $0 \leq a_i, t < 2^{31}$。

區間取 min 對區間和同樣不能預測，不能直接打懶人標記

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats

每個節點維護**區間嚴格次大值**和最大值個數

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats

每個節點維護**區間嚴格次大值** ‼ 和最大值個數

- 如果 $t \leq$ 次大值，暴力往下修改
- 如果 $t >$ 次大值，等同於把所有最大值都改成 t，可以打懶人標記

時間複雜度：$O((N+Q)\log N)$

每個節點維護**區間嚴格次大值**和最大值個數

- 如果 $t \leq$ 次大值，暴力往下修改
- 如果 $t >$ 次大值，等同於把所有最大值都改成 t，可以打懶人標記

時間複雜度：$O((N+Q)\log N)$???
憑什麼這麼快？

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats

考慮每個節點的數字種類數
每次往下暴力修改，額外花 $O(1)$ 時間，區間內的數字一定會少至少一種

比一般線段樹多付出的時間
最多是每個節點暴力往下修改的總次數
也就是 $O(N \log N)$

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats

考慮每個節點的數字種類數
每次往下暴力修改，額外花 $O(1)$ 時間，區間內的數字一定會少至少一種

比一般線段樹多付出的時間
最多是每個節點暴力往下修改的總次數
也就是 $O(N \log N)$

總時間複雜度 $O((N+Q) \log N)$

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

題目

給你一段 N 個整數的序列 $a_1, \cdots, a_N$，請你執行 Q 筆操作。

- 0 l r t：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 改成 $\min(a_i, t)$。
- **1 l r c：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字加上 c。**
- 2 l r：代表詢問 $[l, r]$ 區間的最大值。
- 3 l r：代表詢問 $[l, r]$ 區間的和。
- $1 \leq N, Q \leq 3 \times 10^5$。
- $-10^6 \leq c, a_i, t \leq 10^6$。

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats · 其二

嘗試跟前一題用一樣的作法

區間加值後，節點的數字種類數會變多……

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

嘗試跟前一題用一樣的作法

區間加值後，節點的數字種類數會變多……
O(區間長度)

沿用相同的證明想法，暴力修改的次數最多是……

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

嘗試跟前一題用一樣的作法

區間加值後，節點的數字種類數會變多……
O(區間長度)

沿用相同的證明想法，暴力修改的次數最多是……
$O(NQ)$？

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

嘗試跟前一題用一樣的作法

區間加值後，節點的數字種類數會變多……
O(區間長度)

沿用相同的證明想法，暴力修改的次數最多是……
$O(NQ)$？

換一種證明思路，可以證明總複雜度是 $O((N+Q)\log^2 N)$ 的

٩(ˊᗜˋ*)و插圖

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

「$t \leq$ 區間次小值時，往下暴力」
實際上等同往下 DFS 移除子樹內 $\geq t$ 的標記

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

「$t \leq$ 區間次小值時，往下暴力」
實際上等同往下 DFS 移除子樹內 $\geq t$ 的標記

移除一個標記要花 $O(\text{樹高}) = O(\log N)$ 時間

一開始最多有 N 個標記
什麼時候標記會變多？

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

在線段樹上區間操作的時候，可以把節點分成四種

- A 被操作區間完全包含
- B 跟操作區間部份重疊
- C 跟操作區間不重疊，但是 B 的子節點
- D 跟操作區間不重疊的其他節點

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

٩(ˊᗜˋ*)و插圖

標記變多例：A 類節點獲得標記（被操作區間完全包含）

標記變多例：B 類節點獲得標記（跟操作區間部份重疊）

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

標記變多例：C 類節點獲得標記（跟操作區間不重疊，但是 B 的子節點）

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

標記變多例：D 類節點獲得標記（跟操作區間不重疊的其他節點）

並不會，因為節點和父節點內的最大值都沒有變

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

場合 1：區間 chmin

- A 被操作區間完全包含
  - 減少若干個標記
  - 增加至多 $O(\log N)$ 個標記
- B 跟操作區間部份重疊
  - 至多 $O(\log N)$ 個節點
- C 跟操作區間不重疊，但是 B 的子節點
  - 至多 $O(\log N)$ 個節點
- D 跟操作區間不重疊的其他節點
  - 標記維持原狀

標記最多增加 $O(\log N)$ 個

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

場合 2：區間加值

- **A** 被操作區間完全包含
  - 標記維持原狀
- **B** 跟操作區間部份重疊
  - 至多 $O(\log N)$ 個節點
- **C** 跟操作區間不重疊，但是 B 的子節點
  - 至多 $O(\log N)$ 個節點
- **D** 跟操作區間不重疊的其他節點
  - 標記維持原狀

標記最多增加 $O(\log N)$ 個

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

- 「暴力往下」實際上是在 DFS 刪除標記
- 「暴力往下」刪除一個標記花 $O(\log N)$ 時間
- 總共只有 $O(N + Q\log N)$ 個標記可以刪

所以，吉如一線段樹和一般線段樹相比，額外花的時間頂多只有 $O((N + Q)\log^2 N)$

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其二

吉如一本人給的證明和網路上流傳的證明都說可以 $O((N+Q)\log^2 N)$

實際上執行飛快，被懷疑其實只有一個 $\log$

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其三

題目 (Range Chmin Chmax Add Range Sum，Library Checker)

給你一段 N 個整數的序列 $a_1, \cdots, a_N$，請你執行 Q 筆操作。

- 0 l r t：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 改成 $\min(a_i, t)$。
- 1 l r t：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 改成 $\max(a_i, t)$。
- 2 l r c：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字加上 c。
- 3 l r：代表詢問 $[l, r]$ 區間的和。

- $1 \leq N, Q \leq 3 \times 10^5$。
- $-10^6 \leq c, a_i, t \leq 10^6$。

線段樹的暴力與懶人標記 – Segment Tree Beats・其三

加上了區間取 max 操作

沿用同樣的作法同樣的證明，維護

- 區間最大、最小值
- 區間最大、最小值個數
- 區間**嚴格**次大、次小值

時間複雜度 $O((N+Q)\log^2 N)$

線段樹的暴力與懶人標記 – Bear and Bad Powers of 42

題目 (Bear and Bad Powers of 42，Codeforces 679E)

給你一段 N 個正整數的序列 $a_1, \cdots, a_N$，一個數字是好的若且唯若他不是 42 的冪次，請你執行 Q 筆操作。

- $1\ i$：輸出 a_i。
- $2\ l\ r\ x$：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字 a_i 改成 x，保證 x 是好的。
- $3\ l\ r\ c$：代表將 $[l, r]$ 區間的每個數字加上 c，並重複該操作直到 $[l, r]$ 區間的每個數字都是好的為止。

注意到每次操作後，所有數字都會是好的。

- $1 \leq N, Q \leq 10^5$。
- $2 \leq a_i, x \leq 10^9$。
- $1 \leq c \leq 10^9$。

線段樹的暴力與懶人標記 – Bear and Bad Powers of 42

如果沒有區間改值，

- 一個數字頂多被加到 $NQ = 10^{14}$ 左右，而 10^{14} 以內的 42 冪次只有 $\log_{42} 10^{14}$ 不到十個
- 維護每個數字離下一個 42 冪次還有多遠
- 時間複雜度 $O((N+Q)\log N \log_{42} NQ)$

線段樹的暴力與懶人標記 – Bear and Bad Powers of 42

如果加上區間改值，

- 不能暴力到底？暴力到什麼時候為止？

線段樹的暴力與懶人標記 – Bear and Bad Powers of 42

如果加上區間改值，

- 暴力到**區間內數字都一樣**為止
- 參考吉如一線段樹的證明，需要暴力很多次的節點不會增加很多
- 時間複雜度 $O((N+Q)\log N \log_{42} NQ)$

線段樹的暴力與懶人標記 – Bear and Bad Powers of 42

如果加上區間改值，

- 暴力到**區間內數字都一樣**為止
- 參考吉如一線段樹的證明，需要暴力很多次的節點不會增加很多
- 時間複雜度 $O((N+Q)\log N \log_{42} NQ)$???

線段樹的暴力與懶人標記 – Bear and Bad Powers of 42

題外話：官解

- 被區間改值的那段數字視為「一坨」
- 區間操作的時候可能把一坨切成兩坨
- 一整坨可以一起加值
- 時間複雜度 $O((N+Q)\log N \log_{42} NQ)$

線段樹的暴力與懶人標記

Change my mind：均攤分析就是玄學

線段樹的暴力與懶人標記 – 總結

這不是一堂資料結構課，這是一堂**均攤分析**課
資料結構不是重點，重點是均攤的思路、直覺、證明手法

也許你此生沒機會真的砸吉如一線段樹，但均攤分析值得你學習