Ур-ие гиперболического типа по классификации ур-ий математической физики.

Пр. ур-ие, описывающее процесс колебаний малых поперечных — струны длиной "l" — однородной, с линейной плотностью ρ; с силой натяжение T_0.

В невозмущённом состоянии — она „лежит" на отрезке $0 \le x \le l$ оси X.

Для описание процесса колебаний струны достаточно ввести одну ф-цию: $u(x,t)$ — поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t по отношению к её невозмущённому состоянию.

Итак, ур-ие: $\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx},}$ $0 < x < l$, $t > 0$

это ур-ие колебаний, или волновое ур-ие,

точнее: одномерное волновое ур-ие.

$\boxed{a^2 = \frac{T_0}{\rho}}$, где T_0 - сила натяжение струны, ρ - линейная плотность струны.

Теперь граничные условия: они отражают способ закрепления струны.

1) концы струны $x=0$ и $x=l$ жёстко закреплены — значит смещение в этих точках $=0$!

т.е. $u|_{x=0} = 0$ и $u|_{x=l} = 0$ → это гр. усл. 1$^{\text{ого}}$ рода.

2) Свободные концы, т.е. сила действующая на концы струны $= 0$! т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \rightarrow$$ это гр. усл. 2$^{\text{ого}}$ рода

3) упруго закреплённые концы (они закреплены не жёстко, а на пружинах (с силой упругости — возвращающей):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u\right)\Big|_{x=0} = 0, \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h_2 u\right)\Big|_{x=l} = 0$$

это гр. усл. 3-его рода

И начальные условия: их два — для дифф. ур-ия 2-ого порядка:

$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ — начальное отклонение

$u_t\big|_{t=0} = \psi(x)$ — начальная скорость.

Итак: начально-краевая задача, описывающая процесс колебаний струны с закреплёнными концами, т.е. с гр. усл. 1-ого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0<x<l,\ t>0 \\ u\big|_{x=0} = 0 \\ u\big|_{x=l} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

решаем методом разделения переменных:

$u(x,t) = v(x)\cdot T(t) \not\equiv 0$

подставляем в ур-ие.

(!) $$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$$

это з.Ш-Л на отрезке с нулевыми гр. усл.

1) $$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0, \quad 0<x<l \\ v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \end{cases}$$

2) с.з. $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $v_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$, $n = 1, 2, \ldots$ $\|v_n\|^2 = \frac{l}{2}$

2) для $T(t)$: $T_n''(t) + a^2 \underbrace{\lambda_n}_{\text{изв.}} T_n(t) = 0$

$$T_n(t) = A_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t + B_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t.$$

Общее решение ур-ия колебаний:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}x}_{\text{с.ф.}} \cdot \left[A_n \sin \underbrace{a\sqrt{\lambda_n}}_{\omega_c} t + B_n \cos \underbrace{a\sqrt{\lambda_n}}_{\omega_c} t\right]}$$

коэфф. A_n и B_n найдём из начальных условий:

$\omega_c = a\sqrt{\lambda_n} = a\frac{\pi n}{l}$, где $n = 1, 2, \ldots$ это набор собственных частот струны с закреплёнными концами!

$t=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}x}_{\text{с.ф.}} \cdot B_n = \varphi(x)$ разложим

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx;$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}x}_{\text{с.ф.}} \cdot \left[A_n \cdot \frac{a\pi n}{l} \underbrace{\cos a\frac{\pi n}{l}t}_{1}\Big|_{t=0} - B_n \cdot \frac{a\pi n}{l} \underbrace{\sin a\frac{\pi n}{l}t}_{0}\right]\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}x}_{\text{с.ф.}} \cdot A_n \cdot \frac{a\pi n}{l} = \psi(x)$$ разложим

$$A_n = \frac{l}{a\pi n} \cdot \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx;$$

подставив коэфф. A_n и B_n в общее решение, получим ответ.

$\Rightarrow u(x,t)$ это смещение точек струны от положения равновесия!