Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

Глава 6. Краткий обзор численных методов решений ОДУ

§1. Постановка задачи

1. Формулировка проблемы

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \ t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Рассматривается задача Коши (задача с начальными усл. для обыкновенного диф. уравнения (ОДУ) 1 порядка.

Comment: Все что здесь изложено, легко может быть обобщено для нормальной системы ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}(t)), \ t > 0 \\ \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \end{cases}, \quad \vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t, \vec{Y}(t)) \\ f_2(t, \vec{Y}(t)) \\ \cdots \\ f_n(t, \vec{Y}(t)) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Поскольку аналитически может быть решена далеко не каждая задача типа (1), то в общем случае необх. численные методы для ее решения.

2. Общий подход к построению численных методов

Вводится сетка $t_0, t_1, t_2, \dots t_n, \dots$, обозначим ее шаг как $\tau_n = t_n - t_{n-1}$. Необходимо предусмотреть возможность неравномерной сетки, так как существуют процессы, скорость развития которых сильно меняется по времени, и применение равномерной сетки для них не очень подходит (редкая сетка – низкая точность, густая сетка – неэкономичность)

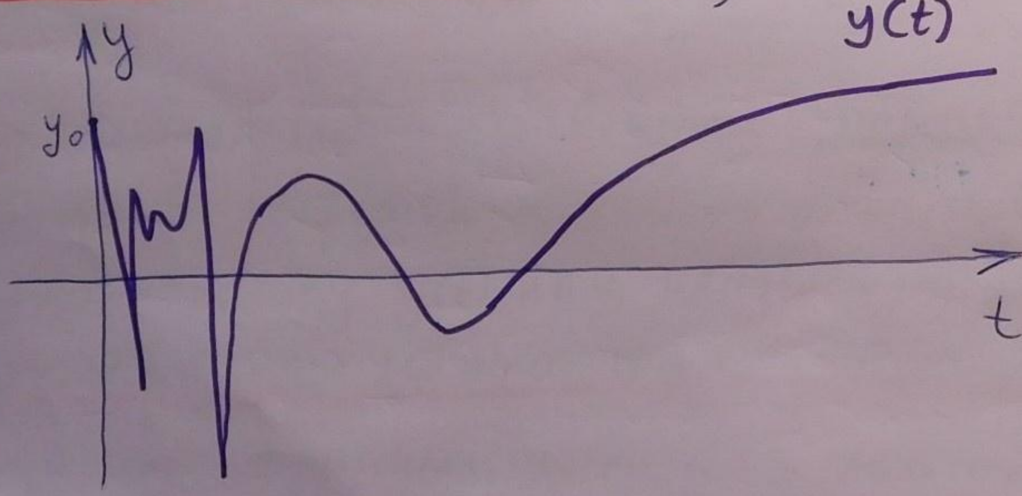


Рис 1 Пример процесса, для расчета которого равномерная сетка не подходит.

В общем случае, все численные методы решения задачи (1) основаны на формулах численного интегрирования. Пусть все значения $y(t_1)=y_1, y(t_2)=y_2, \dots, y(t_n)=y_n$ уже вычислены. Проинтегрируем уравнение (1) отрезку $[t_n, t_{n+1}]$, получим:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dy}{dt}\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \qquad (3)$$

Соотношение (3) называется формулой перехода. Это выражение является абсолютно точным, без всякой погрешности. Однако, поскольку $y(t)$ нам неизвестна, то реализовать переход (3) нам можно только численно, с помощью какой-либо формулы численного интегрирования. Всякая формула численного интерирования порождает свой метод

§2. Методы Эйлера первого порядка

1. Явный метод Эйлера. Понятие устойчивости метода

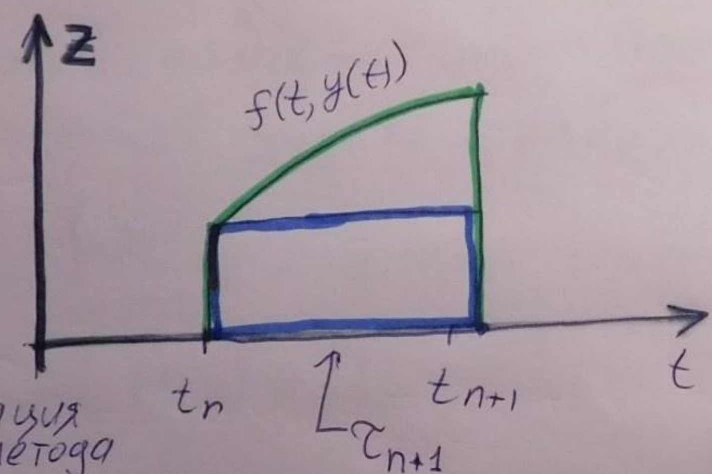


Рис.2
Реализация явного метода Эйлера

Наиболее просто (и, как мы увидим, не слишком удачно) реализовать следующую формулу вычисления интеграла $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \approx \tau_{n+1} \cdot f(t_n, y_n) \quad (4)$$

что порождает формулу перехода:

$$y_{n+1} = y_n + \tau_{n+1} f(t_n, y_n) \quad (5)$$

Метод, основанный на формуле перехода (5) называется явным методом Эйлера первого порядка. Его единственным достоинством является простота реализации. Почему этот метод почти не применяется. Дело в том, что, помимо очевидно низкой точности у него есть еще один, не менее важный, недостаток. Протестируем этот метод на известной задаче о радиоактивном распаде вещества:

$$\begin{cases} \dfrac{dM(t)}{dt} = -k\,M(t), \ t > 0 \\ M(0) = M_0 \end{cases} \quad (6)$$

Comment:
Здесь $M(t)$ – уцелевшая к моменту t масса не распавшегося вещества, M_0 – масса в-ва к началу момента расчета, k – коэффициент распада, t – время

Ее решение, как известно, имеет вид (проверьте!)

$$M(t) = M_0 e^{-kt} \quad (7)$$

Рассмотрим, к чему приведет решение задачи (6) явным методом Эйлера?

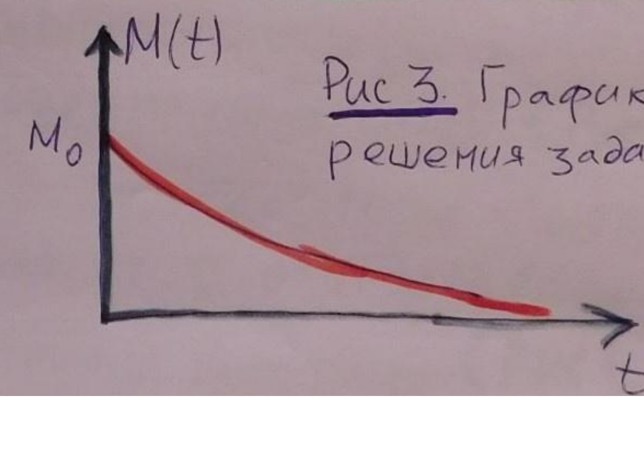


Рис 3. График решения задачи (7)

Рассмотрим, ради простоты, равномерную сетку. Формула перехода (5) при решении задачи (6) примет вид (здесь $M_n = M(t_n)$ – обозначения)

$$M_{n+1} = M_n - \tau k M_n = (1 - \tau k) M_n \quad (8)$$

а) Если шаг по сетке τ такой, что $0 < \tau k < 1$, то численное решение задачи (1) имеет вид убывающей геометрической прогрессии с положительными членами, что соответствует, по крайней мере, качественно, истинному решению (7). (Рис 4,а)

б) Если сетки τ такой, что $\tau k = 1$, то получается заведомо ложный результат, что за один шаг по времени вся радиоактивность исчезнет! (если этому поверить, то последствия будут печальны) (Рис. 4,б)

в) Если $1 < \tau k < 2$, то получится тоже убывающая геометрическая прогрессия, но с отрицательной массой на шагах с нечетными номерами (Рис 4,в) г) при $\tau K=2$ получаются пилообразные колебания (рис 4г)

д) Наконец, если $\tau K>2$, то пилообразные колебания будут иметь нарастающую амплитуду, и компьютер на несколько шагов переполнится. (рис 4д)

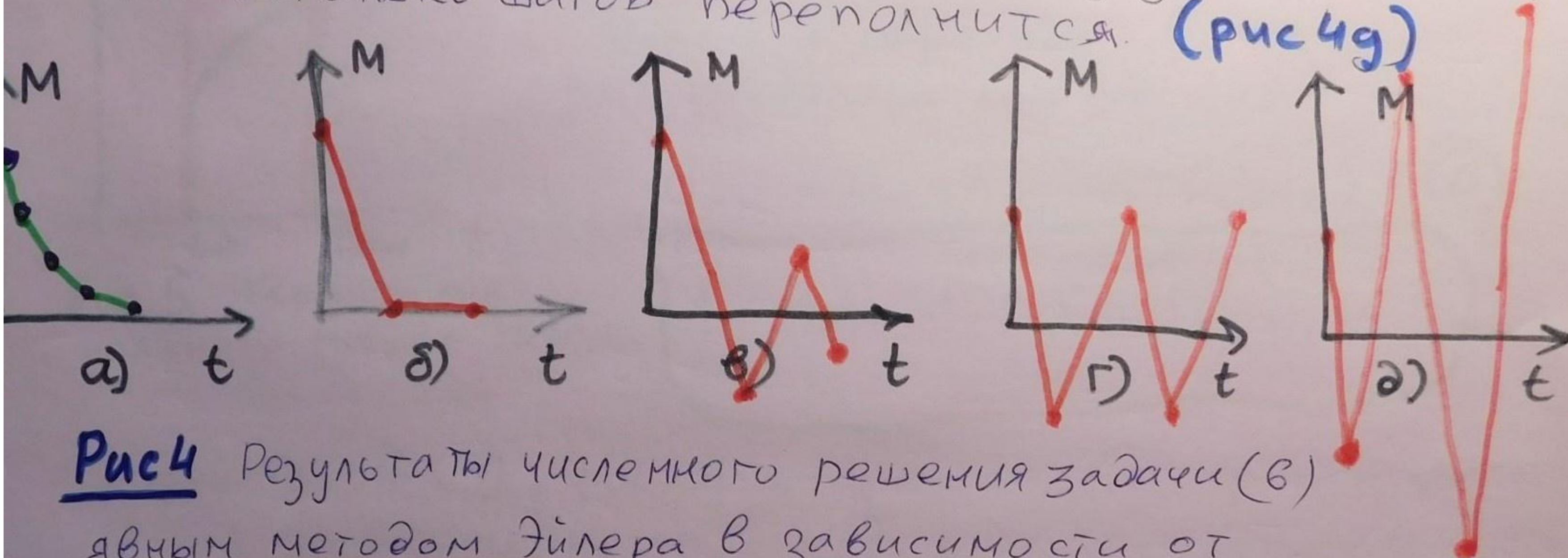


Рис 4 Результаты численного решения задачи (6) явным методом Эйлера в зависимости от шага сетки τ.

Условие $|\tau K|<2$, или $\tau<\frac{2}{K}$ (9)
гарантирует, что явный метод Эйлера не приведет к переполнению компьютера при решении задачи (6)

Говорят, что явный метод Эйлера условно устойчив.

2. Неявный метод Эйлера 1 порядка

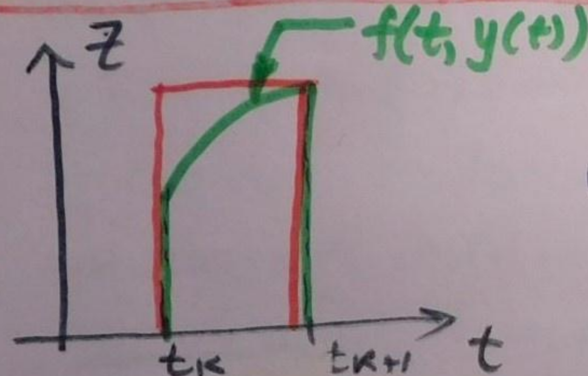


Рис. 5. Реализация неявного метода Эйлера

Формула перехода в неявном методе Эйлера имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + \tau_{n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (10)$$

comment здесь:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, d\tau \approx \tau_{n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

В отличие от (5), формула перехода (10) представляет собой уравнение, которое надо решить относительно y_{n+1}. Казалось бы, еще хуже? Однако обратимся к тестовой задаче (6). При реализации неявного метода Эйлера формула перехода

Говорят, что явный метод Эйлера <u>условно устойчив</u>.

2. Неявный метод Эйлера 1 порядка

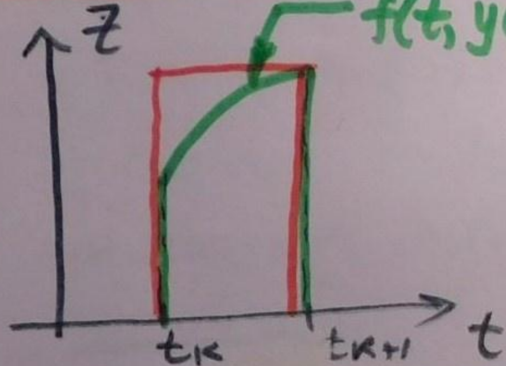


Рис. 5. Реализация неявного метода Эйлера

Формула перехода в неявном методе Эйлера имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + \tau_{n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (10)$$

comment здесь:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\, d\tau \approx \tau_{n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

В отличие от (5), формула перехода (10) представляет собой уравнение, которое надо решить относительно y_{n+1}. Казалось бы, еще хуже? Однако обратимся к тестовой задаче (6). При реализации неявного метода Эйлера формула перехода принимает вид

$$M_{n+1} = M_n - \tau k M_{n+1} \Rightarrow M_{n+1} = \frac{M_n}{1+\tau k} \quad (11),$$

Из (11) видно, что при любом τ численное решение задачи (6) представляет собой убывающую геометрическую прогрессию с всеми $M_n > 0$, переполнения компьютера не может быть, и неявный метод Эйлера безусловно устойчив. Поэтому его часто применяют в вычислениях, где не требуется высокая точность (например, в экологии, где математические модели, как правило, весьма не точны и смысла гнаться за точностью вычислений нет).

Явный и неявный методы Эйлера обладают первым порядком точности. Доказано, что при соблюдении условий устойчивости $\exists C > 0$ такая, что

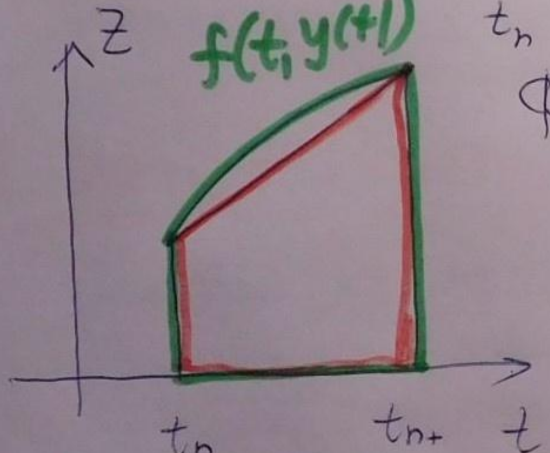
$$\max_n |y_{точн}(t_n) - y_{числ}(t_n)| \le C \cdot \tau \quad (12)$$

§3. Методы 2 порядка

1. Симметричная схема "с весами"

Эта схема основана на формуле трапеций:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt \approx \frac{\tau}{2}\left(f(t_n,y_n)+f(t_{n+1},y_{n+1})\right) \quad (13)$$



Формула перехода имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2}\left(f(t_n,y_n)+f(t_{n+1},y_{n+1})\right) \quad (14)$$

Проверим устойчивость метода на "тестовой" задаче

$$M_{n+1} = M_n - \frac{k\tau}{2}\left(M_n+M_{n+1}\right) \Rightarrow M_{n+1} = \frac{1-\frac{\tau k}{2}}{1+\frac{\tau k}{2}} M_n \quad (15)$$

Так как $\left|\frac{1-\frac{\tau k}{2}}{1+\frac{\tau k}{2}}\right|<1$, то метод безусловно устойчив.

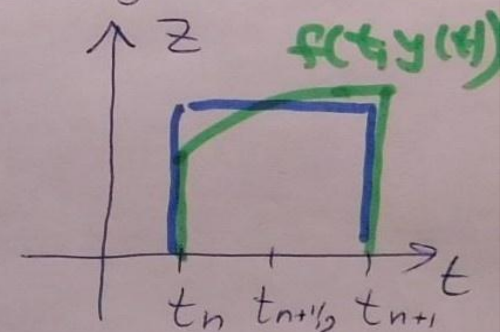
Доказано, что $\exists C>0$ такая, что

$$\max_n \left| y_{числ}(t_n) - y_{точн}(t_n) \right| \le C\tau^2 \quad (16),$$

то есть данный метод обладает 2м порядком точности. Поэтому он широко распространен при решении задач, где требуется средняя точность вычислений (большинство инжен. задач)

. Метод Рунге-Кутта 2 порядка

Основан на применении формулы прямоугольников. Реализуется в 2 этапа:



$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{\tau}{2} f(t_n, y_n) \quad (16)$$

$$y_{n+1} = y_n + \tau f(t_{n+1/2}, y_{n+1/2}) \quad (17)$$

Метод явный, 2 порядка точности, условно устойчив (проверьте на "тестовой" задаче самост)