Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения
«ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

ВМК МГУ

ОТДЕЛЕНИЕ "ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ"

ONLINE КУРС:

"ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

ГЛАВА 5. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

АВТОР ONLINE КУРСА ПРОФ. Сычугов Д.Ю.

§1. Основные понятия

1. Определение устойчив. по Ляпунову

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}(t)), \quad t>0 \\ \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается, что выполнены условия, гарантирующие $\exists$, единств. решения задачи (1) на $0 \le t < \infty$, и непрерывную зависимость решения от нач. усл. на $\forall$ конечном промежутке $0 \le t \le T_0$.

Вопрос: К каким последствиям приводит малое изменение нач. условия $\vec{Y}_0$ на всей полупрямой $0 \le t < \infty$.

Итак,
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}(t)}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}(t)), t>0 \\ \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \end{cases} \quad (1') \qquad \begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}_p(t)}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}_p(t)), t>0 \\ \vec{Y}_p(t_0) = \vec{Y}_0 + \delta\vec{Y}_0 \end{cases} \quad (2)$$

Определение 1 Решение задачи (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех решений задачи (2), для которых $\|\delta\vec{Y}_0\| < \delta(\varepsilon)$ выполняется для всех $0<t<\infty$ нер-во $\|\vec{Y}(t) - \vec{Y}_p(t)\| < \varepsilon$.

Определение 2 Решение задачи (1) назыв. асимптотически устойчивым по Ляпунову, если: **1)** оно уст. по Ляпунову; **2)** $\lim\limits_{t\to\infty} \|\vec{Y}(t) - \vec{Y}_p(t)\| = 0$

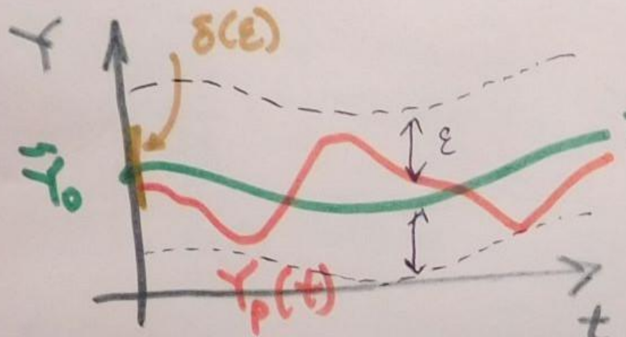


Рис 1, а Иллюстр. к опред. устойчивого решения.

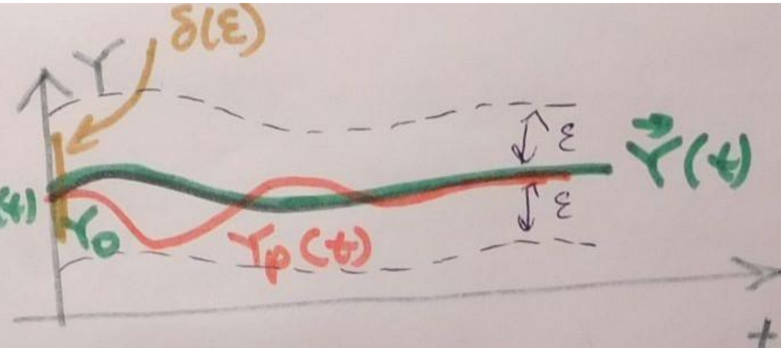


Рис 1, б Иллюстрация к опред. асимпт. устойчивого решения.

2. Сведение задачи к исследованию устойчивости тривиального (нулевого) решения

Процедуру исследования устойчивости решения удобно "стандартизировать". Вычтем из решения задачи (2) решение задачи (1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\vec{Y}_p(t)-\vec{Y}(t)\right)=\vec{F}(t,\vec{Y}_p(t))-\vec{F}(t,Y(t)),\ t>0 \\ \vec{Y}_p(0)-\vec{Y}(0)\ =\delta\vec{Y}_0 \end{cases} \quad (3)$$

Обозначим: $\vec{Z}(t)=\vec{Y}_p(t)-\vec{Y}(t)$, $\vec{\Phi}\left(t,\vec{Z}(t)\right)=\vec{F}\left(t,\vec{Y}_p(t)\right)-\vec{F}\left(t,\vec{Y}(t)\right)$ (4)

получим:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{z}}{dt} = \vec{\Phi}(t, \vec{z}(t)), \ t>0 \\ \vec{z}(0) = \overrightarrow{\delta Y_0} \end{cases} \quad (5)$$

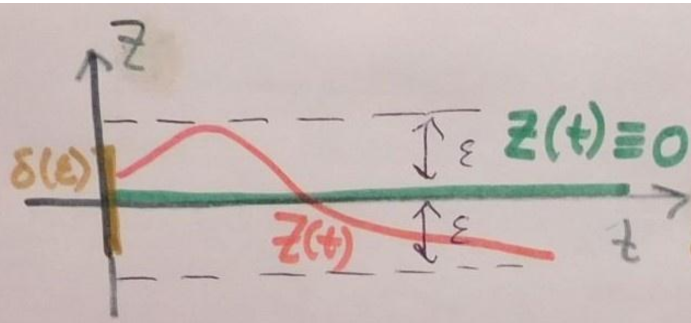
В силу единственности решения задач (1) и (2), решение задачи (5), соответствующее начальному условию $\delta\vec{Y}=0$, тождественно равно 0 на всей полупрямой $0 \le t < \infty$.

Вопрос Как будет вести себя решение задачи (5) при малых (но ненулевых) начальных условиях на $0 \le t < \infty$?

Определение 3 Тривиальное (нулевое) решение задачи (5) называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех нач. условиях задачи (5), удовлетворяющих $\|\delta \vec{Y}_0\| < \varepsilon$ выполняется для всех реш (5) и всех $0 \le t < \infty$ нер-во $\|\vec{z}(t)\| < \varepsilon$.

Определение 4 Тривиальное (нулевое) решение задачи (5) называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если

1) Оно уст. по Ляпунову; 2) $\lim\limits_{t \to \infty} \|\vec{z}(t)\| = 0$



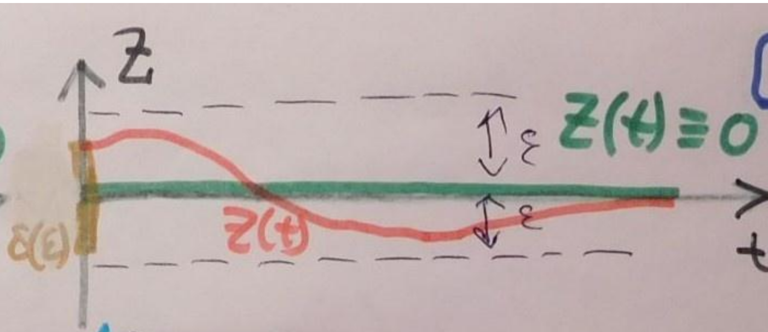


Рис 2,а Иллюстрация к опред. устойчивости тривиального решения

Рис 2,б Иллюстрация к определению асимпт. устойчивости тривиального решения.

Comment: В определениях 1-4 конкретный тип нормы указывать не обязательно, так как в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны.

§2. Исследование устойчивости решения для системы ОДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим задачу Коши для сист. ОДУ с пост. коэф-тами:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}}{dt} = A\vec{Y}(t), & t>0 \\ \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \end{cases}, \text{ где } a_{ik} = const, \quad 1 \le i,k \le n \qquad (5)$$

Ее решение (глава 2) при $\forall$ начальных условиях существует и единственно и задается (глава 3) линейной комбинацией функций из ФСР:

$$\vec{Y}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{Y}_k(t), \quad (6)$$

причем при $\vec{Y}_0 = 0$ верно $\vec{Y}(t) \equiv 0$ (единств. реш).

Сами же функции $\vec{Y}_k(t)$ имеют вид (глава 3)

$$\vec{Y}_k(t) = \left(\vec{P}_m(t)\cos\beta_k t + \vec{Q}_m(t)\sin\beta_k t\right)e^{\alpha_k t} \quad (7),$$

где $\alpha_k + i\beta_k = \lambda_k$ – корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (8),$$

а степень многочленов $\vec{P}_m(t)$ и $\vec{Q}_m(t)$ не выше, чем кратность корня λ_k минус 1 (глава 3). Поэтому:

1) если $Re\,\lambda_k = \alpha_k < 0$, то $\vec{Y}_k(t) \to 0$;

2) Если $Re\,\lambda_k = 0$, и $m = 0$, то $\vec{Y}_k(t)$ не возрастает

3) Если $Re\,\lambda_k > 0$, то $\|\vec{Y}_k(t)\| \to \infty$ при любой степени m.

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 1:

1) Если все вещественные части корней характеристического уравнения (8) отрицательны, то решение задачи (5) (тривиальное или нет, все равно) асимптотически устойчиво.

2) Если найдется λ_j такое, что $Re\,\lambda_j > 0$, то реш. задачи (5) неустойчиво.

Comment: Если все $Re\,\lambda_k \leq 0$ и существует λ_j такое, что $Re\,\lambda_j = 0$, то может быть и устойчивость, и неустойчивость.

§3. Первый метод Ляпунова

Рассмотрим теперь нелинейную задачу Коши для нормальной системы ОДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(\vec{Y}), \quad t>0 \\ \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \end{cases} \qquad (8)$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad t>0 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_1(0) = y_{1,0}; \; y_2(0) = y_{2,0}; \dots \; y_n(0) = y_n(0) \end{cases} \qquad (8')$$

причем потребуем дополнительно:

1) $\vec{F}(Y)$ такова, что выполняются условия $\exists$ и ед. решения задачи Коши; **(9)**

2) все функции $f_k(y_1, \ldots, y_n)$ непрерывно дифференцируемы в R^n; **(10)**

Кроме того, потребуем:

$$\vec{F}(0) = 0 \iff \begin{cases} f_1(0, 0, \ldots, 0) = 0 \\ f_2(0, 0, \ldots, 0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(0, 0, \ldots, 0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Решение системы (8), в силу требований (9) и (11), при $\vec{Y}(0) = 0$ существует, единственно и тождественно равно 0 на $0 \leq t < \infty$. На вопрос о том, устойчиво ли это решение или нет, дает ответ след. теорема

Теорема 2 (Первая теорема Ляпунова)

(без. док-ва)

Составим матрицу A, где

$$a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(0;0,\dots 0) \quad (12)$$

— (то есть коэф-ты, соотв. разложению $\vec{F}$ в ряд Тэйлора до первого порядка)

1) Если все корни λ_k характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_k<0$, то тривиальное решение системы (8) асимптотически устойчиво.

2) Если же найдется λ_j такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j>0$, то тривиальное решение (8) неустойчиво.

Comment В случае, когда все $\operatorname{Re}\lambda_k\le 0$ и существует λ_j такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j=0$, первая теорема Ляпунова не дает ответа на вопрос, устойчиво ли тривиальное решение или нет.

Пример 1
Фил., 899

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y = f_1(x,y) \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y = f_2(x,y) \end{cases}$$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0;0) = -1$; $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 1$; $\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = 2$; $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = -3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) - 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow$$

Ответ: $(0;0)$ - устойчива

$e^\alpha = 1 + \alpha + \bar{o}(\alpha)$

$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$

$(1+z)^p = 1 + pz + \bar{o}(z)$

$\ln(1+\alpha) = \alpha + \bar{o}(\alpha)$

Пример 2
Фил., 903

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x) \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y} \end{cases}$$

$(0;0)$ - решение

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \ln\left(3(1+y+\bar{o}(y)) - 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right)\right) = \ln(1 + 3y + \bar{o}(x) + \bar{o}(y)) \\ \dot{y} = 2(1+x+\bar{o}(x)) - 2\left(1 + \frac{3}{2}y\right)^{1/3} = 2x - y + \bar{o}(x) + \bar{o}(y) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+1) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 \quad \left[\begin{matrix} \lambda_1 = 2 > 0 \text{ неуст!} \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}\right.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - неуст.

Следует отметить, что для исследования устойчивости с помощью первого метода Ляпунова <u>вовсе не обязательно</u> считать корни характеристического уравнения, а достаточно знать, являются ли положительными или отрицательными их вещественные части. Для этого следует применять следующий критерий

Теорема 3 (кратерий Льенара-Шипара) Необходимым и достаточным условием отрицателькости вещественных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (13)$$

являются:

1) все $a_i > 0$

2) все определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ должны быть >0, где

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \quad (14)$$

Comment Числа с индексами $i>n$ и $i>0$ в (14) заменяются нулями

Пример 3
Фил. 905

СТР. 12

$$\begin{cases} \dot{x} = tg(z-y) - 2x = -2x - y + z + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right) \\ \dot{y} = \sqrt{9+12x} - 3e^{y} = 3\left(1+\frac{4}{3}x\right)^{1/2} - 3(1+y) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\right) = \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$$

$$= 3\left(1+\frac{2}{3}x\right) - 3(1+y) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{(\Delta x)^2+\Delta y^2+(\Delta z)^2}\right)$$

Исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} = (\text{по 3й строке}) = 3(0-2) - \lambda((\lambda+2)(\lambda+3)+2) =$$

$$= -6 - \lambda(\lambda^2+5\lambda+8) = -6 - \lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 6 = 0$$

$a_0=1$, $a_1=5$, $a_2=8$, $a_3=6$

1) все $a_i > 0$ — условие выполнено

2) $\Delta_1 = a_1 = 5 > 0$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 10-6 > 0$ выполнено

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: нулевое решение устойчиво}}$

Пример 4
Фил. 906

стр. 13

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x} - e^{-3z} = (1+x) - (1-3z) + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right) \\ \dot{y} = 4z - 3\cdot\sin(x+y) = 4z - 3x - 3y + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right) \\ \dot{z} = \ln(1 + z - 3x) = z - 3x + \bar{\bar{o}}\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & -3-\lambda & 4 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-3-\lambda)(1-\lambda) + 3(-3(3+\lambda)) = (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(-3-\lambda) - 9(\lambda+3) =$$

$$= -3\lambda^2 - \lambda^3 + 6\lambda + 2\lambda^2 - 3 - 3\lambda - 9\lambda - 27 =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda - 30 = 0 \Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 30 = 0$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 6 \quad a_3 = 30$$

1) все $a_i > 0$, это условие выполнено

2) $\Delta_1 = a_1 = 1 > 0$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 24 < 0$ не выполнено

Ответ: нулевое решение неустойчиво

Исследование устойчивости точек покоя

стр 13-А

Определение Точкой покоя системы ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \tilde{f}_1(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = \tilde{f}_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \tilde{f}_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (15)$$

Называется всякое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \tilde{f}_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{f}_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

Пусть $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ - одно из решений системы (16)

Для исследования устойчивости точки покоя следует сделать замену переменных

$y_i = x_i - x_i^0$, $i = 1, \ldots, n$ **(17)**, в результате

система (15) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \tilde{f}_1(y_1 + x_1^0, y_2 + x_2^0, \ldots, y_n + x_n^0) = f_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = \tilde{f}_2(y_1 + x_1^0, y_2 + x_2^0, \ldots, y_n + x_n^0) = f_2(y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} = \tilde{f}_n(y_1 + x_1^0, y_2 + x_2^0, \ldots, y_n + x_n^0) = f_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \quad \textbf{(18)}$$

Система (18) уже имеет нулевое решение, которое можно исслед. на устойчивость.

Пример 5 Фил. 915

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases} \quad (1)$$

1) Найдем положения равновесия системы (1) (то же самое, что точка покоя):

$$\begin{cases} y - x^2 - x = 0 \\ 3x - x^2 - y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 3x^2 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + x = 3x^2 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

2а) Для исслед. $\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$ замена перем. не нужна $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2 - 3 = \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \text{неуст.}$$

2б) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u+1 \\ y = v+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} = (v+2) - (u+1)^2 - (u+1) = v + \cancel{2} - u^2 - 2u - \cancel{1} - u - \cancel{1} \\ \frac{dv}{dt} = 3(u+1) - (u+1)^2 - (v+2) = 3u + \cancel{3} - u^2 - 2u - \cancel{1} - v - \cancel{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2 - 3u + v \\ \frac{dv}{dt} = -u^2 + u - v \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda+1)(\lambda+3) - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0 \quad \text{уст.}$$

Ответ: $\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$ – неуст. $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ – устойч.

Пример 6 Фил. 917

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x+y) \end{cases}$$

1) Равновесие: $\begin{cases} y = 0 \\ \sin(x+y) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x = u + \pi k \\ y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = \sin(u + \pi k + v) = (-1)^k \sin(u+v) = \end{cases}$

$= (-1)^k (u+v) + \bar{o}(\sqrt{u^2+v^2})$

Итак, приходится разделять 2 случая:

3а) к-нечетно $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= \lambda(\lambda+1) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1$, $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$ устойч.

3б) к-четно $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

$= \lambda(\lambda-1) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} > 0$ неуст.

$$\boxed{\text{Ответ: } \begin{cases} 2\pi n \\ 0 \end{cases} - \text{неуст}; \quad \begin{cases} \pi + 2\pi k \\ 0 \end{cases} - \text{устойч.}}$$

§4. Фазовая плоскость

Рассмотрим систему ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (1)$$

Ее решения удобно изображать в виде траекторий на плоскости, координатными осями которой являются x и y. (фазовая плоскость)

Исследуем структуру траекторий в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2)$$

I. Рассмотрим сначала веществ. $\lambda, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

1) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, тогда собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям, линейно независимы, и решение (1) будет иметь вид (рис1). Такая структура траекторий называется неустойчивый узел.

$$\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3)$$

где $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ – собственные векторы соотв λ_1 и λ_2

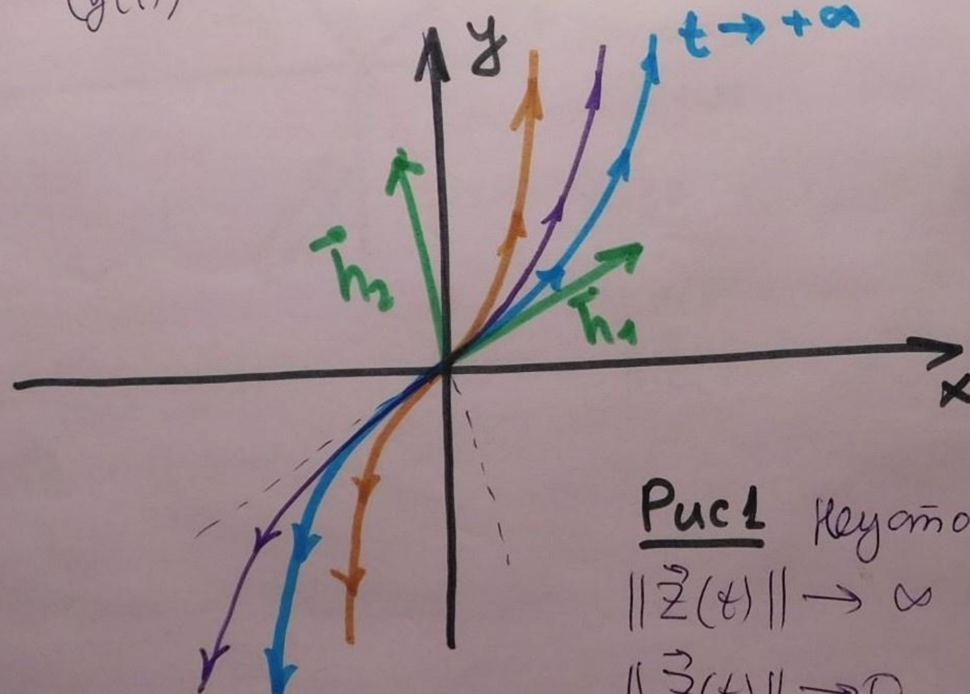


Рис1 Неустойчивый узел,

$\|\vec{Z}(t)\| \to \infty$ при $t \to +\infty$.

$\|\vec{Z}(t)\| \to 0$ при $t \to -\infty$

2) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Такая структура называется устойчивый узел.

Здесь структура аналогична, с той разницей, что

$$\|\vec{z}(t)\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty$$

Мн-во решений описывается ф-лой (3)

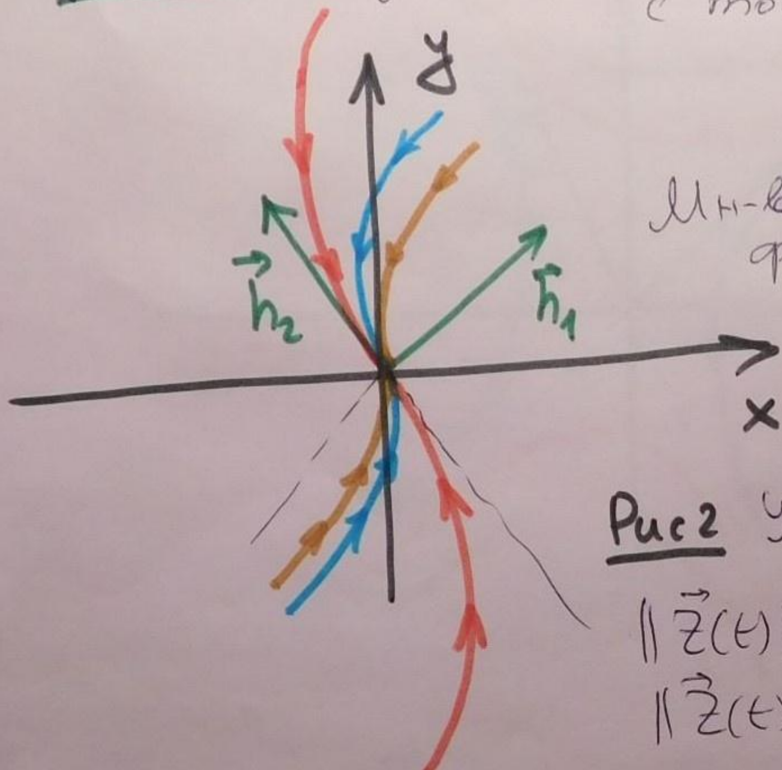


Рис 2 Устойчивый узел.

$$\|\vec{z}(t)\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty$$

$$\|\vec{z}(t)\| \to \infty \text{ при } t \to -\infty$$

3) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ Такая структура называется седло. $\boxed{\text{стр.20}}$

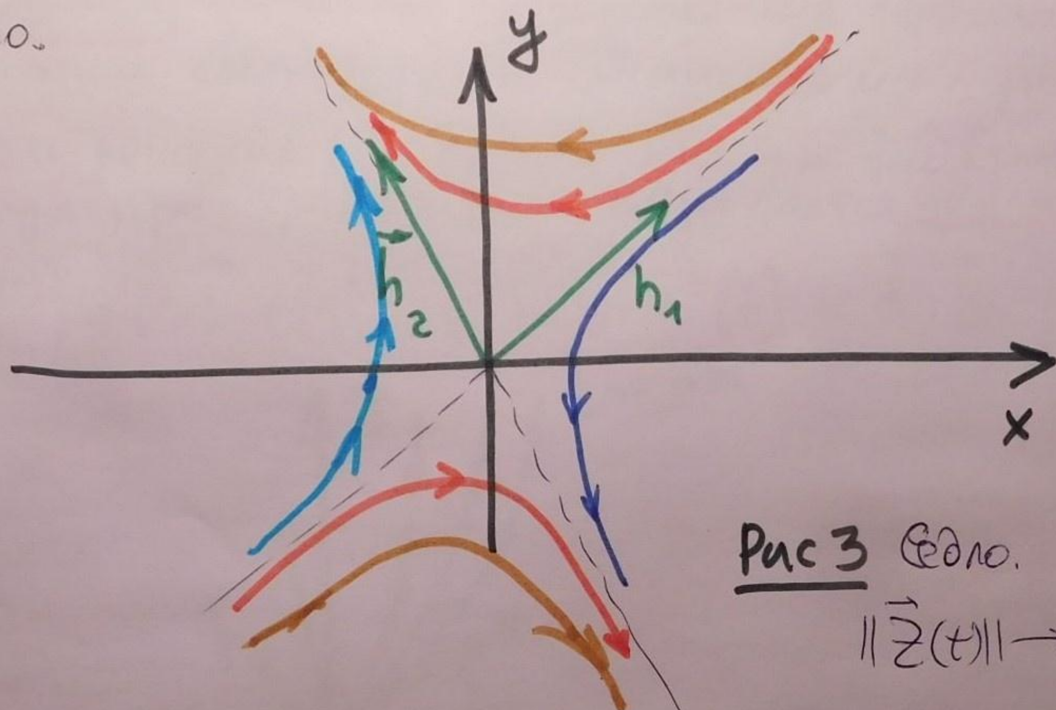


Рис 3 Седло.

$\|\vec{z}(t)\| \to \infty$ при $t \to \pm\infty$

Вырожденные случаи вещ. корней

4) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda\neq 0$

4а) 2 лин. нез. вектора $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$

$$\vec{z} = c_1\vec{h}_1 e^{\lambda t} + c_2\vec{h}_2 e^{\lambda t} = (\underbrace{c_1\vec{h}_1 + c_2\vec{h}_2}_{\vec{p}})e^{\lambda t} = \vec{p}\,e^{\lambda t} \text{ – лучи,} \quad (4)$$

выходящие из начала координат (дикритический узел)

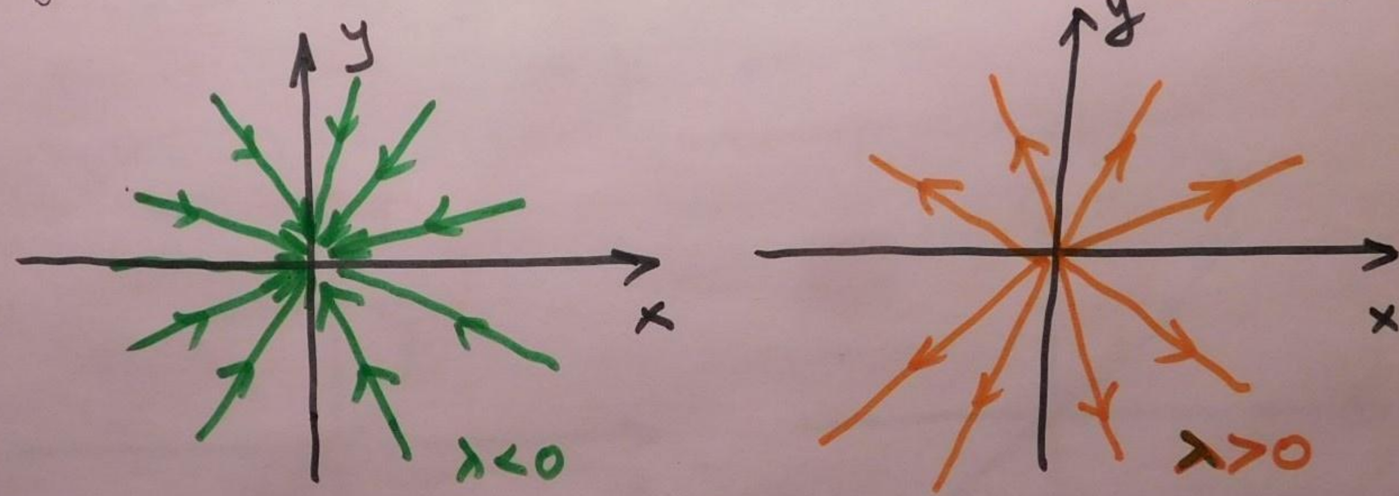


Рис 4 Устойчивый и неуст. дикритические узлы

4б) 1 собств. вектор, соотв собств. знач. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ стр 22

$$\vec{z}(t) = \left(C_1 \vec{h}_1 + C_2 \vec{P}_1(t)\right) e^{\lambda t} \text{ – вырожденный узел}$$

$$= C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda t} + C_2 \begin{pmatrix} p + qt \\ r + st \end{pmatrix} e^{\lambda t} \qquad (5)$$

Для опред. рассм случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

$t \to -\infty \Rightarrow \frac{y}{x} \to \frac{q}{s}$, $\|z\| \to 0$

$t \to +\infty \Rightarrow \frac{y}{x} \to \frac{q}{s}$ $\|z\| \to \infty$

Случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ рассматр. аналогично

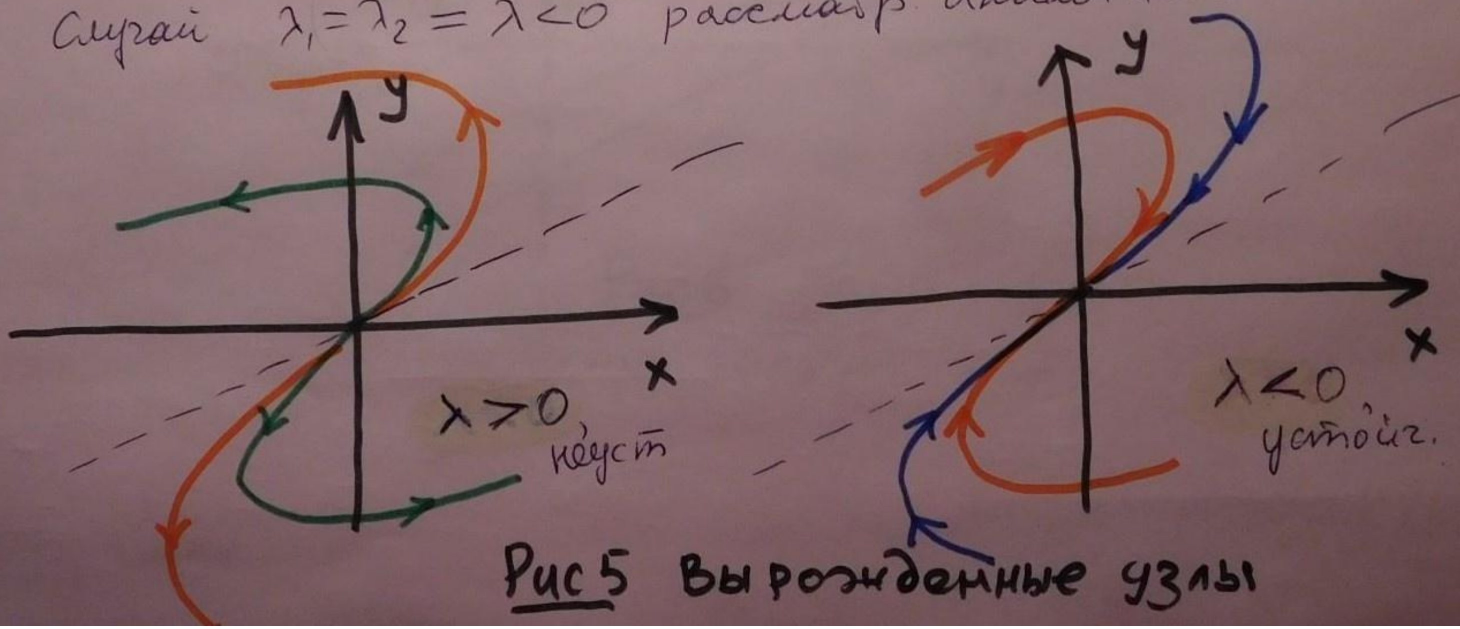


Рис 5 Вырожденные узлы

5) $\lambda_1 = 0$, или $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В этом случае строки матрицы $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ пропорциональны, т.е.

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = kax + kby \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = K \text{ – семейство } \parallel \text{ линий.} \quad (6)$$

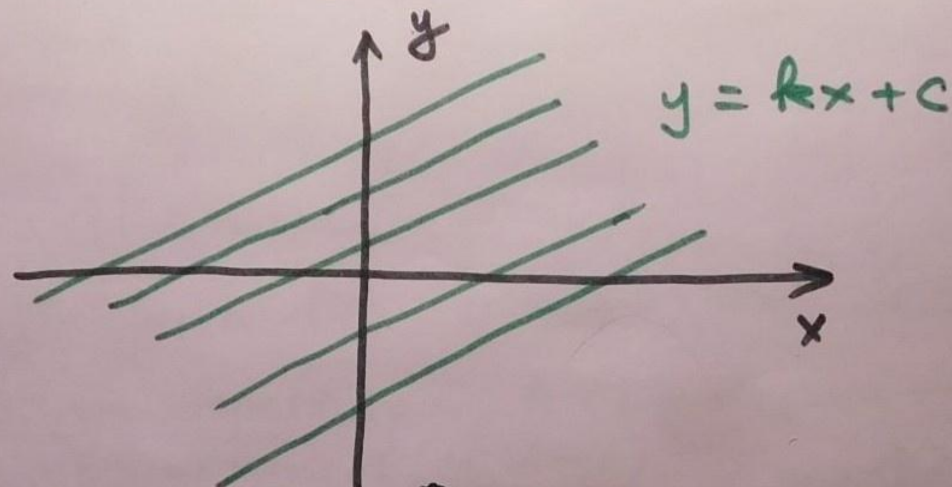


Рис 6 Структура траекторий при наличии $\lambda = 0$

II. Рассмотрим случай комплексных корней

6. Чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$

Постр. реш.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+iq \\ r+is \end{pmatrix}(\cos\omega t + i\sin\omega t) = \begin{pmatrix} p\cos\omega t - q\sin\omega t \\ r\cos\omega t - s\sin\omega t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} p\sin\omega t + q\cos\omega t \\ r\sin\omega t + s\cos\omega t \end{pmatrix}$

$\vec{h} = \begin{pmatrix} p+iq \\ r+is \end{pmatrix}$ - собств. вектор, соотв $\lambda = i\omega$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} p\cos\omega t - q\sin\omega t \\ r\cos\omega t - s\sin\omega t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} p\sin\omega t + q\cos\omega t \\ r\sin\omega t + s\cos\omega t \end{pmatrix} \quad (7)$$

Если в выражении (7) исследовать $x^2(t) + y^2(t)$, то получается, что траектории в этом случае представляют собой семейство эллипсов (центр)

Comment $x^2(t) + y^2(t)$ приводится к квадр. форме

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

Доказывается $D = B^2 - 4AC < 0$ эллипс

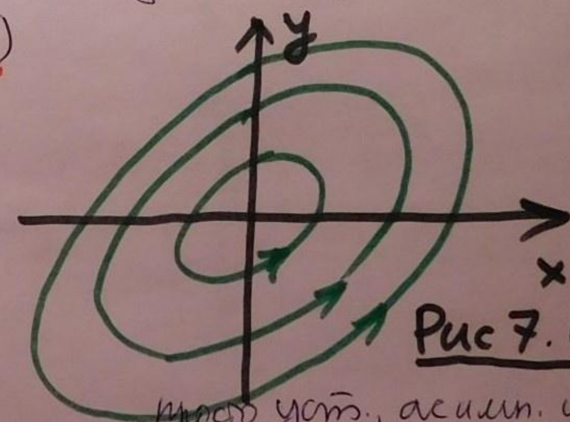


Рис 7. Центр

просто уст., асимп. уст. нет

7. Комлексные корни $\lambda = \alpha \pm i\omega$, где $\alpha \neq 0$

Аналогично (7), получаем

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \left(C_1\begin{pmatrix}p\cos\omega t - q\sin\omega t\\ r\cos\omega t - s\sin\omega t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}p\sin\omega t + q\cos\omega t\\ r\sin\omega t + s\cos\omega t\end{pmatrix}\right)e^{\alpha t} \qquad (8)$$

– спираль (фокус)

$\alpha > 0$ – неуст. фокус

$\alpha < 0$ – устойч. фокус

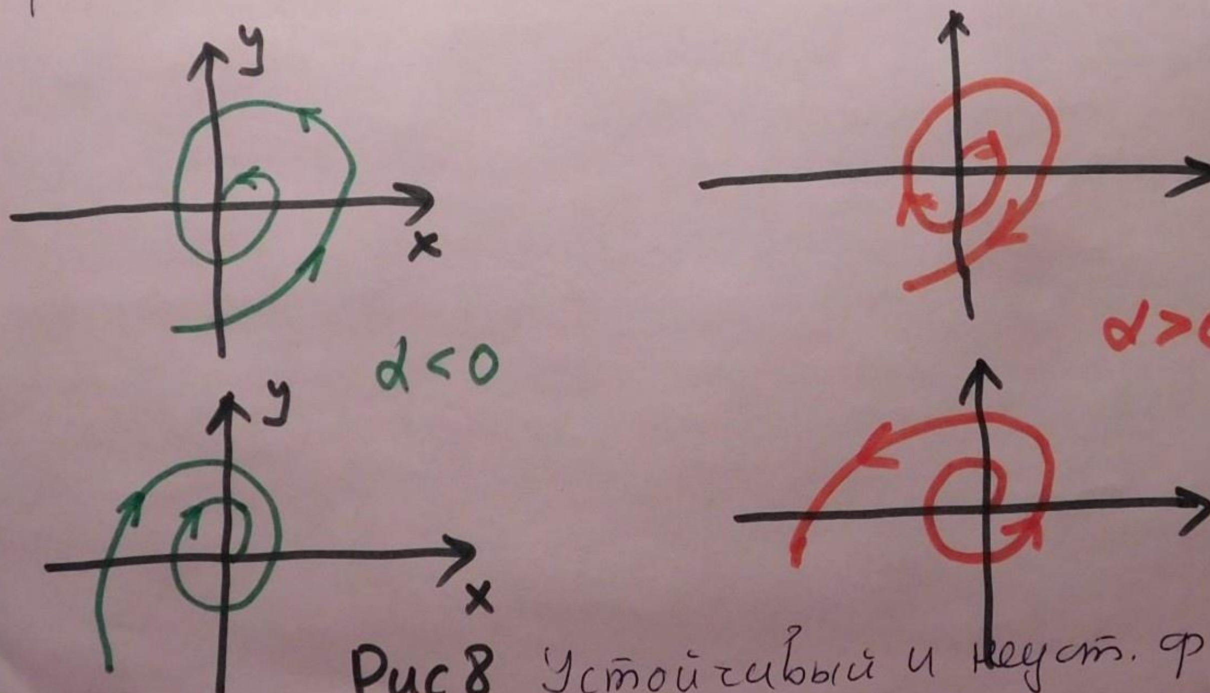


Рис 8 Устойчивый и неуст. фокусы