это лекция 1 октября ~~[illegible]~~ - 4 - (это начало!)

Докажем основную теорему, из которой вытекают важнейшие следствия, описывающие св-ва реш. ур-ия теплопроводности.

(1) $D|_1$ D - огр. обл-ть с границей S

$\bar{D} = D \cup S$

Фиксируем произв. $T > 0$.

Теорема (принцип максимума).

→ Классическое решение ур-ия теплопров.
$$u_t = a^2 \Delta u \,, \quad (M,t) \in Q_T \,, \text{ непрер.}$$
в замк. цил. $\bar{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может прин. значения, бо́льшие, чем значение при $t = 0$ или на границе S обл-ти D. ←

Док-во

Введем обозначение $A = \max_t \left\{ \underset{M \in \bar{D}}{u(M,0)};\ \underset{P \in S;\ t \in [0,T]}{u(P,t)} \right\}$

Надо доказать, что $u(M,t) \le A$ для всех точек $(M,t) \in \bar{Q}_T$.

Это утв. будем док-ть от противного.

Пусть в т. $(M_0, t_0) \in Q_T$ (т.е. внутри) ф-ия $u(M,t)$ достигает max значения, бо́льшего A, т.е. $u(M_0,t_0) = A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Рассм. вспомогат. ф-цию $\boxed{v(M,t) = u(M,t) + \alpha(t_0 - t)}$, $\alpha > 0$ (выберем позже)

очевидно, что $v(M_0,t_0) = u(M_0,t_0) = A + \varepsilon$.

Теперь оценим max значение $v(M,t)$ на границе S обл. D или в нач. момент времени.

$$\max\left\{ \underset{M\in\bar{D}}{v(M,0)};\ \underset{\substack{P\in S\\ t\in[0,T]}}{v(P,t)} \right\} \le A+\alpha T < A+\frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } \alpha<\frac{\varepsilon}{2T}.$$

Таким образом, max значение ф-ции $v(M,t)$ на границе цилиндра меньше, чем некоторое её значение внутри. Следовательно, $\exists$ точка (M_1,t_1) внутри цилиндра, в которой ф-ция $v(M,t)$ должна достигать своего max:

$(M_1,t_1)\in Q_T$, $v(M_1,t_1)\ge v(M_0,t_0)=A+\varepsilon$.

Т.к. (M_1,t_1) - точка max (для v), то должны выполняться условие для первых производных:

$$\operatorname{grad}_M v(M_1,t_1)=0;\quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\ M=M_1}}\ge 0$$

и для вторых производных: $\Delta_M v(M_1,t_1)\le 0$.

Посмотрим, что это дает для ф-ции $u(M,t)$:

$$u(M,t)=v(M,t)-\alpha(t_0-t),\ \alpha>0$$

$$\operatorname{grad}_M u(M_1,t_1)=\operatorname{grad}_M v(M_1,t_1)=0$$

$$\Delta_M u(M_1,t_1)=\Delta_M v(M_1,t_1)\le 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\ t=t_1}}=\left\{\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1\\ t=t_1}}+\alpha\right\}\ge\alpha>0.$$

Таким образом, в т. (M_1,t_1), лежащей внутри обл Q_T, $\Delta_M u\le 0$; $u_t>0$, т.е. не выполняется ур-ие теплопр. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

Замеч. Пр. max является выражением того очевидного факта, что теплота перемещается от мест с большей t^{o} к местам с меньшей t^{o}, т.е. „растекается". При отсутствии источников и стоков тепла это приводит к доказанному утверждению.

• для однородного ур-ия справедлив и „принцип минимума" пр. min.

$\boxed{\text{Т. пр. min}}$ Класс. реш. ур. тепл. $U_t = a^2 \Delta U$, $(M,t) \in Q_T$, непрерывное в замк. цил. $\overline{Q}_T$, внутри этого цил. не может принимать значения, меньшие, чем значения при $t=0$ или на гр. S обл. D.

Док-во: ф-ия $U_1(M,t) = -U(M,t)$ – также решение ур-ия теплопров. (максимальное) max значение для $U_1(M,t)$ явл. (минимальным) min для ф-ии $U(M,t)$. ⇒ справедливость этой теоремы следует из предыдущей.

(следствие)

$\boxed{\text{Сл.}}$ из $\boxed{\text{Т}}$ пр. max и $\boxed{\text{Т}}$ пр. min ⇒ пр. экстремума.

Значения ф-ии $U(M,t)$ для всех точек $(M,t) \in \overline{Q}_T$ лежат между max и min её значений на границе.

$$\min_{\substack{M \in \overline{D} \\ P \in S \\ t \in [0,T]}} \{ U(M,0);\ U(P,t) \} \le U(M,t) \le \max_{\substack{M \in \overline{D} \\ P \in S \\ t \in [0,T]}} \{ U(M,0);\ U(P,t) \}$$

Замеч. 1 $U(M,t) = \mathrm{const}$ явл. реш. ур-ия $U_t = a^2 \Delta U$ и не противоречит пр. max и пр. min.

Замеч. 2 Справедлив сильный пр. max и min: за исключением случая $U = \mathrm{const}$, ф-ия $U(M,t)$, удовлетворяющая условиям пр. min и пр. max не может принимать своих максимума и минимума в $\overline{Q}_T$ в точках – внутри, т. е. $D \times \{0 < t \le T\}$ (внутри).

Т. сравнения 1 : Пусть ф-ии $U_i(M,t)$, $i=1,2$ удовлетворяют однородному ур-ию теплопров. $U_t = a^2 \Delta U$, в Q_T, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовл. условиям $U_1(M,0) \geq U_2(M,0)$, $M \in \overline{D}$ и
$U_1(P,t) \geq U_2(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,T]$.
Тогда $U_1(M,t) \geq U_2(M,t)$ во всех точках замк. цилиндра $\overline{Q}_T$.

Док-во: введем ф-ию $v(M,t) = U_1(M,t) - U_2(M,t)$. Пусть ф-ия $v(M,t) \not\equiv 0$, в противном случае, утвержд. теоремы очевидно. Т.к. ур-ие $U_t = a^2 \Delta U$ линейно и однородно, то линей. комбинации решений также будут решением этого ур-я.
$\Rightarrow$ ф-ия $v(M,t)$ явл. реш. ур-ия $v_t = a^2 \Delta v$ и $v(M,t) \in C(\overline{Q}_T)$
Т.е. ф-ия $v(M,t)$ - класс. реш. ур-ия $v_t = a^2 \Delta v$ и выполнены неравенства $v(M,0) \geq 0$, $M \in \overline{D}$
и $v(P,t) \geq 0$, $P \in S$, $t \in [0,T]$
Для ф-ии $v(M,t)$ выполняется пр. ~~max~~ min
$\Rightarrow v(M,t) \geq 0$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$, и $U_1(M,t) \geq U_2(M,t)$
$(M,t) \in \overline{Q}_T$.

Т. срав. 2 Пусть ф-ии $U_i(M,t)$, $i=1,2$, удовлетворяют однород. ур-ию тепл. $U_t = a^2 \Delta U$ в Q_T, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и уд. условиям $|U_1(M,0) - U_2(M,0)| \leq \varepsilon$, $M \in \overline{D}$
и $|U_1(P,t) - U_2(P,t)| \leq \varepsilon$, $P \in S$, $t \in [0,T]$.
Тогда $|U_1(M,t) - U_2(M,t)| \leq \varepsilon$ во всех т. замк. цил. $\overline{Q}_T$.

Док-во: рассм. 3 ф-ции: $v_1(M,t) = -\varepsilon$; $v_3(M,t) = \varepsilon$
$v_2(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$. Все ф-ции $v_i(M,t)$, $i = 1,2,3$.
уд. ур. $v_t = a^2 \Delta v$, $v_i \in C(\bar{Q}_T)$ и уд. условиям:

$v_1(M,0) \le v_2(M,0) \le v_3(M,0)$, $M \in \bar{D}$
и $v_1(P,t) \le v_2(P,t) \le v_3(P,t)$, $P \in S$ и $t \in [0,T]$.
из принципов максимума минимума макс и min следует, что

$$v_1(M,t) \le v_2(M,t) \le v_3(M,t), \quad (M,t) \in \bar{Q}_T.$$

теорема единственности (постановка):

Т. ед. первой н.-кр. задачи.

Первая нач.-краевая зад. для ур. ~~те~~ теплопровод.

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(M,t) ; & (M,t) \in Q \\ u(M,0) = \varphi(M), & M \in \bar{D} \\ u(P,t) = \mu(P,t), & P \in S;\ t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

$Q = Q_{T=+\infty} = D \times (0,+\infty)$.

! Для $\exists$ класс. реш. ф-ии φ и μ должны быть согласованы, т.е. $\varphi(0) = \mu(P,S)$, $P \in S$.

$\boxed{\text{Т}}$ ед: Задача может иметь только одно класс. решение.

Док-во: Допустим, что $\exists$ две ф-ции $u_i(M,t)$, $i=1,2$, являющиеся класс-ми решениями задачи.
Пусть $T > 0$. Ф-ции $u_i(M,t) \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$.
Тогда ф-ция $v(M,t) = u_1(M,t) - u_2(M,t)$ явл. класс. решением задачи:
$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, & (M,t) \in Q_T \\ v(M,0) = 0 ; & M \in \bar{D} \\ v(P,t) = 0, & P \in S,\ t \in [0,T] \end{cases}$$
Для $v(M,t)$ — справедливы пр. max и пр. min.
(а для $u_i(M,t)$ — они неприменимы, т.к. они уд. неодн. ур.) $v \in C(\bar{Q}_T)$;
$\Rightarrow v$ уд. пр. экстремума:
$0 \le v(M,t) \le 0$; т.е. $v(M,t) \equiv 0$. Т. доказана.

из пр. max (при $\forall T > 0$) также следует теорема:

$\boxed{\text{I}}$ Устойчивость: Класс. реш. зад (неоднородной) устойчиво по нач. и граничным данным.

"Реш. зд. наз. уст., если малым изм. нач. и гр. усл. соотв. малое изм. реш."

Док-во: пусть ф-ии $U_i(M,t)$, $i=1,2$ являются решениями задач:

$$\begin{cases} U_t = a^2 \Delta U + f(M,t), & (M,t) \in Q_T \\ U(M,0) = \varphi_i(M), & M \in \bar{D} \\ U(P,t) = \mu_i(P,t); & P \in S, t \in [0,T] \end{cases} \quad i=1,2.$$

Предположим, что $|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| \le \varepsilon$, $M \in \bar{D}$ и

и $|\mu_1(P,t) - \mu_2(P,t)| \le \varepsilon$, $P \in S$, $t \in [0,T]$.

Надо доказать, что $|U_1(M,t) - U_2(M,t)| \le \varepsilon$ для всех $(M,t) \in \bar{Q}_T$.

Рассмотрим ф-ию $v(M,t) = U_1(M,t) - U_2(M,t)$, которая явл. решением задачи $v_t = a^2 \Delta v$, $(M,t) \in Q_T$

$v(M,0) = \varphi_1(M) - \varphi_2(M)$, $M \in \bar{D}$

$v(P,t) = \mu_1(P,t) - \mu_2(P,t)$, $P \in S$, $t \in [0,T]$

Т.к. ф-ия $v(M,t)$ в граничных и начальных точках уд. условиям $|v(M,0)| \le \varepsilon$, $M \in \bar{D}$.

и $|v(P,t)| \le \varepsilon$, $P \in S$; $t \in [0,T]$, то из

Т. срав. 2 следует, что $|v(M,t)| \le \varepsilon$, $(M,t) \in \bar{Q}_T$.

~~—~~ не надо

Замеч. Класс. реш. задачи (неодн.) устойчиво и по отношению к возмущениям ф-ии $f(M,t)$ в это следует из $\boxed{\text{I}}$; определённым образом обобщающих пр. max на случай неоднор. ур-ия (но — непосредственно пр. max не переносится!) и т. срав. часа

не будем!