Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

# ГЛАВА4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ n-го ПОРЯДКА

В ПЕРВОЙ ЧАСТИ ПРЕЗЕНТАЦИИ ИЗЛОЖЕНЫ РАЗДЕЛЫ:

§1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ОДУ

# ВМК МГУ

## ОТДЕЛЕНИЕ "ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ"

## ONLINE КУРС "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ"

# ГЛАВА 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ

АВТОР ONLINE КУРСА
ПРОФЕССОР СЫЧУГОВ Д.Ю.

# §1. Основные понятия

Пусть ф-ции $a_{ik}(t)$, $1 \le i \le n$, $1 \le k \le n$, $f_i(t)$, $1 \le i \le n$ определены и непрерывны на мн-ве $M$ (либо интервал $(a,b)$, либо $[0;\infty)$, либо $(-\infty;\infty)$. (1)

**Определение 1** Нормальной линейной системой ОДУ называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)\,y_1(t) + a_{12}(t)\,y_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)\,y_n(t) + f_1(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)\,y_1(t) + a_{22}(t)\,y_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)\,y_n(t) + f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)\,y_1(t) + a_{n2}(t)\,y_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)\,y_n(t) + f_n(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $t \in M$

Систему (2) можно переписать в матрично-векторном виде:

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = A(t)\vec{Y}(t) + \vec{F}(t), \quad t \in M \quad (2')$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{n1}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$; $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$; $\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ (3)

**Определение 2** Нормальной однородной линейной системой ОДУ называется система вида (сразу в матрично-вект.):

$$\frac{d\vec{Y}_{одн}}{dt} = A(t)\vec{Y}_{одн}(t) \quad (4)$$

**Замечание 1** Возможны системы ОДУ, в которых слева стоят производные более высоких порядков, чем первая. Однако они с помощью замены переменных сводятся к нормальной системе ОДУ (тем же способом, каким ОДУ n-го порядка свод. к норм.сист.)

**Замечание 2** Поскольку $A(t)$ и $\vec{F}(t)$ непрерывны на $M$, то задача Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = A(t)\vec{r}(t) + \vec{F}(t), \quad t \in M \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \end{cases}, \text{(где } t_0 - \forall \text{ внутр. точка } M)$$

(4)

будет при $\forall\ \vec{r}_0$ иметь, и притом единств., решение.

Это обстоятельство будет существенно при дальнейших теор. построениях.

Точно также, как и для линейных ОДУ $n$-го порядка, справедливо:

**Утверждение 1** Любые два решения системы (2) различаются между собой на решение однородной системы (3).

Доказательство

$$\frac{d\vec{Y}_1}{dt} = A(t)\vec{Y}_1(t) + \vec{F}(t)$$
$$\frac{d\vec{Y}_2}{dt} = A(t)Y_2(t) + \vec{F}(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{Y}_1(t) - \vec{Y}_2(t)\right) = A(t)\left(\vec{Y}_1(t) - \vec{Y}_2(t)\right)$$

утв доказано

Поэтому точно так же, как и для ОДУ n-го порядка, справедливо соотношение

$$\vec{Y}_{\text{общ, неодн}}(t) = \vec{Y}_{\text{общ, одн}}(t) + \vec{Y}_{\text{част, неодн}}(t) \quad (5)$$

которое позволяет свести задачу нахождения $\vec{Y}_{\text{общ, неодн}}(t)$ к двум этапам.

# §2. Линейные однородные нормальные системы ОДУ

**Утверждение 2** Множество решений системы (3) представляет собой линейное пространство.

**Доказательство** Пусть $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t)$ - $\forall$ реш (4), $\alpha_1, \alpha_2$ - $\forall$ числа.

$$\frac{d\vec{Y}_1}{dt} = A(t)\vec{Y}_1(t)$$
$$\frac{d\vec{Y}_2}{dt} = A(t)\vec{Y}_2(t) \qquad (6)$$

Умножаем соотн. (6) на $\alpha_1$ и $\alpha_2$ и складываем, используя линейн. $\frac{d}{dt}$ и умн. на матр:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\vec{Y}_1(t) + \alpha_2\vec{Y}_2(t)\right) = A(t)\left(\alpha_1\vec{Y}_1(t) + \alpha_2\vec{Y}_2(t)\right),$$

откуда следует, что $\vec{Z}(t) = \alpha_1\vec{Y}_1(t) + \alpha_2\vec{Y}_2(t)$ - также реш (4).

Выясним структуру этого пр-ва

**Определение 3.** Рассм. векторные ф-ции $\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \\ \dots \\ y_{n1}(t) \end{pmatrix}, \vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \\ \dots \\ y_{n2}(t) \end{pmatrix} \dots$

$\vec{Y}_k(t) = \begin{pmatrix} y_{k1}(t) \\ y_{k2}(t) \\ \vdots \\ y_{kn}(t) \end{pmatrix}$, определенные на M.

Функции $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \dots, \vec{Y}_k(t)$ называются линейно зависимыми на мн-ве $M$, если $\exists$ такие $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные 0, и при этом

$$\alpha_1 \vec{Y}_1(t) + \alpha_2 \vec{Y}_2(t) + \dots + \alpha_k \vec{Y}_k(t) \equiv 0 \text{ на } M \quad (7)$$

**Определение 4** Функции $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \dots, \vec{Y}_k(t)$ называются линейно независимыми на $M$, если тождество (7) возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

**Определение 5** Пусть $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \dots, \vec{Y}_n(t)$ – n-мерные вектор-функции, определенные на $M$, то есть:

$$\vec{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{21}(t) \\ \dots \\ y_{n1}(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \\ \dots \\ y_{n2}(t) \end{pmatrix}; \dots \vec{Y}_n(t) = \begin{pmatrix} y_{1n}(t) \\ y_{2n}(t) \\ \dots \\ y_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Матрицей Вронского функций $\vec{Y}_1(t), \ldots, \vec{Y}_n(t)$ называется матрица вида:

$$W(\vec{Y}_1(t), \ldots, \vec{Y}_n(t)) = W(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \cdots & y_{1n}(t) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) & \cdots & y_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Соответственно, вводится понятие $\det W(t)$

**Теорема 1** Пусть $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \ldots, \vec{Y}_n(t)$ линейно зависимы на $M$. Тогда $\det W(t) \equiv 0$ на $M$.

**Доказательство** полностью аналогично док-ву теоремы 1 из главы 3, §2 (см.)

Как мы убедимся, теория линейных систем ОДУ во многом аналогична теории ОДУ n-го порядка.

**Теорема 2** Пусть $\vec{Y}_1(t),\dots,\vec{Y}_n(t)$ - решения норм. однородной системы ОДУ (4) и пусть для некоторой точки $t_0 \in M$ верно $\det W(\vec{Y}_1(t_0), \vec{Y}_2(t_0),\dots,\vec{Y}_n(t_0)) = \det W(t_0)=0$. Тогда:

1) $\vec{Y}_1(t),\dots,\vec{Y}_n(t)$ лин. зависимы на $M$;
2) $\det W(t) \equiv 0$ на $M$.

*Доказательство.* Рассмотрим СЛАУ:

$$c_1\vec{Y}_1(t_0)+c_2\vec{Y}_2(t_0)+\dots+c_n\vec{Y}_n(t_0) = W(t_0)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad (10)$$

Так как $\det W(t_0)=0$, то система (10) имеет, по крайней мере, одно неоднородное (ненулевое) решение. (на самом деле таких решений бесконечно много). Обозначим одно из таких решений $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ и построим функцию:

$\vec{Z}(t) = C_1^0 \vec{Y}_1(t) + \ldots + C_n^0 \vec{Y}_n(t)$.

Так как каждая из функций $\vec{Y}_1(t), \ldots, \vec{Y}_n(t)$ является решением одн. системы ОДУ (4), то $\vec{Z}(t)$ также является решением (4). В то же время $\vec{Z}(t_0) = 0$, поэтому $\vec{Z}(t)$ — решение задачи Коши.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Z}}{dt} = A(t)\vec{Z}(t), \quad t \in M \\ \vec{Z}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

В силу результатов, полученных в главе 2, решение задачи (11) — единственное. В то же время, тождественный на M нуль, $\vec{H}(t) \equiv 0$, также, очевидно, является решением (11).

Поэтому $\vec{Z}(t) \equiv 0$ на M $\Rightarrow$ функции $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \ldots, \vec{Y}_n(t)$ линейно зависимы на M $\Rightarrow \det W(t) \equiv 0$ на M.

Теорема доказана.

Замечание Без выполнения условия, что $\vec{Y}_1(t), \dots, \vec{Y}_n(t)$ являются решением системы (4), утверждение теоремы 2 становится неверным. Постройте контрпример.

Как следствие теорем 1 и 2, возникает:

**Теорема 3** Для решений $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \dots, \vec{Y}_n(t)$ существуют 2 взаимно исключающие друг друга возможности (альтернатива):

1) $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \dots, \vec{Y}_n(t)$ линейно зависимы на $M$ и $\det W(t) \equiv 0$ на $M$;

2) $\vec{Y}_1(t), \dots, \vec{Y}_n(t)$ линейно независимы на $M$ и $\det W(t) \neq 0$ ни при каких $t \in M$

Сформулируем определение фундаментальной системы решений (ФСР) системы (4), которая, как мы увидим, полностью соответсвует понятию базиса в линейном пространстве.

**Определение 6** Н Любые $n$ линейно независимых решений системы (4) $\{\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \dots \vec{Y}_n(t)\}$ называют ФСР.

**Теорема 4** ФСР существует.

Доказательство. Построим ФСР ($t_0$ - произв. точка $M$):

1) $\vec{Y}_1(t)$:
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}_1(t)}{dt} = A(t)\vec{Y}_1(t),\ t\in M, \\ \vec{Y}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

2) $\vec{Y}_2(t)$:
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}_2(t)}{dt} = A(t)\vec{Y}_2(t),\ t\in M \\ \vec{Y}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \ldots,$$

n) $\vec{Y}_n(t)$:
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}_n(t)}{dt} = A(t)\vec{Y}_n(t),\ t\in M \\ \vec{Y}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Функции $\vec{Y}_1(t),\ldots,\vec{Y}_n(t)$, в силу th. о решении задачи Коши (глава 2), $\exists$ и единственные. В то же время $W(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$ и поэтому, так как $\det W(t_0) = 1 \neq 0$, функции $\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \ldots, \vec{Y}_n(t)$ линейно независимы на $M$. Теорема доказана.

Нам осталось доказать, что ФСР и базис в нашем случае - понятия тождественные.

**Теорема 5** Пусть $\vec{Z}(t)$ – произвольное решение системы (4) и пусть $\{\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \ldots, \vec{Y}_n(t)\}$ – ФСР системы (4). Тогда $\exists$, и притом единственный, набор коэффициентов $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, таких, что $\vec{Z}(t) \equiv C_1^0 \vec{Y}_1(t) + C_2^0 \vec{Y}_2(t) + \ldots + C_n^0 \vec{Y}_n(t)$ на $M$.

стр. 12

**Доказательство** Рассмотрим функцию

$\vec{H}(t) = \vec{Z}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \vec{Y}_k(t)$, $t \in M$ и потребуем, чтобы $\vec{H}(t_0) = \vec{0}$:

$$C_1 \vec{Y}_1(t_0) + C_2 \vec{Y}_2(t_0) + \ldots + C_n \vec{Y}_n(t_0) = \vec{Z}(t_0) \Leftrightarrow W(t_0) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \vec{Z}(t_0) \quad (12)$$

Так как $\det W(t_0) \neq 0$, то система (12) имеет, и притом единственное решение. Обозначим его $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ и рассмотрим функцию

$$\vec{H}^0(t) = \vec{Z}(t) - C_1^0 \vec{Y}_1(t) - C_2^0 \vec{Y}_2(t) - \ldots - C_n^0 \vec{Y}_n(t) \quad (13)$$

Функция $\vec{H}^0(t)$ является решением системы (4) и удовлетворяет условию $\vec{H}^0(t_0) = 0$. Поэтому, в силу th единственности, $\vec{H}^0(t) \equiv 0$ на $M \Rightarrow \vec{Z}(t) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} C_k^0 \vec{Y}_k(t)$ Теорема доказана.