Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК Курс семинаров для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

TEMA 3.

- 1) Линейные ОДУ 1 порядка
- 2) Уравнение Бернулли

CEMUHAPH: TEMA 3AHATUA Nº3

- 1) ПИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА;
- 2) УРАВНЕНИЕ Бернулли.

ABTOP ONLINE KYPCA

ПРОФЕССОР СЫЧУГОВ Д.Ю., ВМК МГУ

1. MUHEUHBIE YPABHEHUA 100 nopAAKA COMP. 1

Определение 1. Линейным уравнением 1-го

порядка называется уравнение вида:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$
 (1)

Замечание! Если a(x) и b(x) непрерывны на всей прямой, то задача Коши для урния (1) имеет, и притом единственное, решение на всей числовой оси (см. лекции).

Задага (1) допускает речение аналитически, с помощью который носит название метода вариации постояни. аналитически, с помощью метода,

2. Метод вариации постоянной состоит из 2 шагов:

1 Решается вспомогательная задага (нужно найти нетрив. решемие)

$$\frac{dV}{dx} + a(x)V(x) = 0$$
 (2) $\Rightarrow \frac{dV}{V(x)} = -a(x)dx \Rightarrow$ (ypabherue c pazder. nepemenhumu) $\Rightarrow \int \frac{dv}{V(x)} = -\int a(x)dx \Rightarrow$

$$| \nabla | \nabla | \nabla | = A(x) + \ln | C|, \quad | (2ge A(x)) = \int | a(x) dx \rangle | = \int | CTp.2 \rangle | (2ge A(x)) = \int | a(x) dx \rangle | = \int | CTp.2 \rangle | (2ge A(x)) = a(x) \rangle | (2ge A(x)) \rangle | (2ge A(x)) = a(x) \rangle | (2ge A(x)) \rangle | (2ge$$

Замечание 2 То сокращение, которое полугено (стр. 3)

у нас при подстановке представления (4) в (1), происходит всегда, поскольку мы показали его в общем виде. Поэтому, несмотря на наличие формулы (7) (решение в окончательном виде), можно при решении задачи (1) каждый раз повторять всю процедуру вариации по стоянной, что дает, по существу, контролем правильности наших вычислений.

Пример1 (Фил., 136)

$$xy' - 2y = 2x^{y}$$

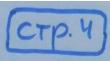
1 Решим вепомогательную задачу:

$$\propto \frac{dV}{dx} - 2V = 0 \Rightarrow$$
 (нам нужно ней ривиальное, то есть не равное тожд. нулю речение)

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow v = C x^{2}.$$

2) Ищем решение исх: ур-ния в вибе $y(x) = C(x) \cdot x^2$. Подетавим: $x \frac{d}{dx}(c(x)x^2) - 2C(x)x^2 = 2x^4 \iff c'(x)x^3 + C(x)x^2 - C(x)x^2 - 2x^4 \iff c'(x) = 2x^2 + C_0 \Rightarrow C'(x) =$

$$y' + y \cdot t_g x = sec x = \frac{1}{cos x}$$



1) Решаем вспомога тельную задачу!

$$\frac{dV}{dx} + V(x) \cdot ty = 0 \implies \frac{dV}{V(x)} = -tyx dx = -\frac{sinx dx}{cosx} = \frac{dcosx}{cosx} = \frac{d}{cosx}$$

2) Ищем решение исходной задачи в виде

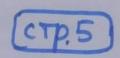
$$(C(x)cos x)' + C(x) \cdot cos x \cdot tg x = \frac{1}{cos x} =)$$

$$\Rightarrow C'(x) \cdot \cos x - C(x) / \sin x + C(x) \cdot \sin x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=) C(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = t_0 x + C_0 \Rightarrow y(x) = (t_0 x + C_0) \cos x = \sin x + C_0 \cos x$$

$$=) C(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = t_0 x + C_0 \Rightarrow y(x) = (t_0 x + C_0) \cos x = \sin x + C_0 \cos x$$

Сделать самостоятельно.



3. Уравнение Бернулли

Определение? Уравнением Бернулли называется

ypabhenue buda $y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \cdot y''(x), \text{ rde } n \neq 0, n \neq 1 \text{ (8)}$

Замечание 3 Если n=0, mo(8) переходит в линейное уравнение 1-го порядка. Если n=1, mo(8) можно преобразовать, вынеся общий множитель y(x), Полугится уравнение с разделянощимися переменными. Поэтому в определении(2) $n\neq 0$ и $n\neq 1$.

Прежде всего, если n > 0, то $y(x) \equiv 0$ (3) является решениет уравнения (8) (тривиальным) Как найти нетривиальное решение? Noderum ypabnemue (8) на y"(x):

(CTP. 6

$$\frac{y'(x)}{y''(x)} + a(x) y^{1-n}(x) = B(x)$$
 (10)

и сделаем замену

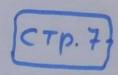
$$Z(x) = y^{1-n}(x)$$
 (11)

morga Z'(x) = (1-n) y(x) y'(x)

$$\Rightarrow \frac{y'(x)}{y''(x)} = \frac{z'(x)}{1-n} (12) \quad \text{uypabrenue} (10) \text{ npume in Bud!}$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{d^2}{dx} + a(x)^2(x) = b(x)(13)$$

Таким образом, замена (11) сводит уравнение Бернуми к линейному уравнению 1-го порядка. Далее для его решения применяется метод вариации постоянной.



Решение

- 1) The stide Boero, y(x) = 0 pellerue.
- 2) Для нажождения нетривиального решения поделим исх. уржие на уг:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x$$
, $u \in \partial e \wedge a \in M$ $\exists a \wedge b \in Y$ $\exists z = y^2 = y^$

$$\Rightarrow -\frac{d^2}{dx} + 22 = e^{\times}$$
 (15)

3) Pewum Benomoratenshyro zadayy dx - 2v=0=> dv = 2dx =>

=> ln |V|=2x+lnC=> V=Ce2x

- 9 Будем искать решение задачи (15) в виде $Z(x) = C(x)e^{2x}$ (16) и подстави М(16) в (15) => $-C'(x)e^{2x}$ 2С(x) $e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = e^{x} =>$ $\Rightarrow C'(x) = -e^{-x} \Rightarrow C(x) = e^{-x} + c_0 \Rightarrow Z(x) = (e^{-x} + c_0)e^{2x} = e^x + c_0e^{2x}$
- 5) Ocmanous вернуться к перьочогольной ф-учи / y(x)= = x+ Coex;

y(x)=0. TO16er

CTP.8 y'-ytyx=+y'·cos(x) (17) Thumes 5 $y'-yt_0x=+y'\cdot cos(x)$ $\phiun,153$ y(x)=0-psewerne2) Noderum (17) Ha y4(x) => \frac{y'}{y'(x)} - \frac{1}{y^3(x)} \tag{ to } x = + cos x (18) u cder aem 3 a Nemy $Z(x) = y^{-3}(x) \Rightarrow Z'(x) = -3y'(x)y'(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y''(x)} = -\frac{1}{3}Z'(x)$ (19) u nodemabum (19) b (18): $-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} = z(x) \cdot ty x = -\cos x \qquad \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{dz}{dx} + z(x)\frac{ty}{dx} = -\cos x \tag{20}$ 3 Pewum Benomorateabhyro zadayy, \frac{1}{3} \frac{dv}{dx} + V(x) \cdot tgx = 0 => $\Rightarrow \frac{dV}{V} = -3 \frac{dx}{dx} = -3 \frac{\sin x}{\cos x} dx = +3 \frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow \ln|V| = +3 \ln|\cos x| + \ln|c| \Rightarrow$ => V(x)=Ccos 3(x) Pewerne zadaru (20) Sydem ucka Tb B Bude $Z(x) = C(x)\cos^3x$ (21)

Rodcmabum (21) b (20) => + $\frac{1}{3}$ C'(x) cos 3x - C(x) cos x sin x + - C(x) cos x · ty x = -cos x $\Rightarrow C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow C(x) = -3t_0 x + C_0 \Rightarrow Z(x) = (-3t_0 x + C_0)\cos^3 x =$

=) $C'(x) = -\frac{3}{3} \Rightarrow C(x) = -3t_0 x + C_0 \Rightarrow Z(x) = (-3t_0 x + C_0) c_0$ = $C_0 c_0 x - 3 c_0 x c_0 x = 1$ $Y(x) = \frac{1}{3 \pi (0c)} = \frac{1}{3 \sqrt{C_0 c_0}^3 x - 3 c_0 x c_0 x} = 0$ The integral $C(x) = \frac{1}{3 \sqrt{C_0 c_0}^3 x - 3 c_0 x} = 0$

137, 142,

145, 154