Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ И СИСТЕМ ОДУ

§5. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И ПАРАМЕТРОВ

§5. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий и параметров

ГЛАВА 2, §5, стр. 41

1. Постановка проблемы

а) "Идеальная" задача

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}_{ид}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}_{ид}(t), \vec{\mu}_{ид}), \quad t>0 \\ \vec{Y}_{ид}(0) = \vec{Y}_{0,ид} \end{cases} \quad (1)$$

б) "Реальная" задача

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}_{реал}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}_{реал}(t), \vec{\mu}_{реал}), \quad t>0 \\ \vec{Y}_{реал}(0) = \vec{Y}_{0,реал} \end{cases} \quad (2)$$

Что мы можем гарантировать?

$$\|\vec{\mu}_{реал} - \vec{\mu}_{ид}\| \le \delta_{\mu} \quad (3)$$

$$\|\vec{Y}_{0,реал} - \vec{Y}_{0,ид}\| \le \delta Y_0, \quad (4)$$

δ_{μ}, δY_0 – зависят от точности измерения; принципиально не могут $= 0$.

Можно ли гарантировать, что при малых δ_{μ}, δY_0 решения $\vec{Y}_{реал}(t)$, $\vec{Y}_{ид}(t)$ будут также мало отличаться, хотя бы на нек. $0 \le t \le T_0$?

2. Сведение задачи к изучению зависимости только от начальных условий.

ГЛАВА 2, §5
стр. 42

С точки зрения математики было бы удобно свести к зависимости только либо от нач. условий, либо от параметров.

Будем формально считать, что $\vec{\mu} = \vec{\mu}(t)$ и введем новую ф-цию $\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} \vec{Y}(t) \\ \vec{\mu}(t) \end{pmatrix}$, тогда задачи (1) и (2) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}(t), \vec{\mu}(t)), \ t > 0 \\ \dfrac{d\vec{\mu}}{dt} = 0 \\ \vec{Y}(0) = \delta\vec{Y}_0 \\ \vec{\mu}(0) = \vec{\mu}_0 \end{cases} \quad (5) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{\Phi}(t, \vec{Z}(t)), \ t > 0 \\ \vec{\Phi}(0) = \vec{\Phi}_0 \end{cases} \quad (6)$$

и вопрос будет стоять так: при каких условиях малое изменение $\vec{\Phi}_0$ приведет к малому изменению $\vec{\Phi}(t)$, хотя бы на нек. $0 \le t \le T_0$?

3. Непрерывная зависимость от начальных условий решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка

ГЛАВА 2, §5
стр. 43

Рассмотрим решения двух задач Коши для ОДУ 1 порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{ug}}{dt} = f(t, y_{ug}(t)), \quad t>0 \\ y_{ug}(0) = y_{ug,0} \end{cases} \quad (7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_p}{dt} = f(t, y_p(t)), \quad t>0 \\ y_p(0) = y_{p,0} \end{cases} \quad (8)$$

Будем считать, что функция f, стоящая в правых частях (7) и (8), непрерывна в R^2 по обоим переменным (т.е $f(\alpha,\beta) \subset C(R^2)$) и удовлетворяет по β условию Липшица (т.е $\exists L>0 : \forall \alpha, \beta_1, \beta_2$ верно нер-во $|f(\alpha,\beta_1) - f(\alpha,\beta_2)| < L \cdot |\beta_1 - \beta_2|$). (9)

Comment: Условия (9) гарантируют $\exists$ и ! решения задачи Коши при $0 < t < +\infty$, см. §3.

Будем также считать, что $\exists\ \delta_0$, такая, что $|y_{ug,0} - y_{real,0}| \leq \delta_0$ (10)

Теорема 1 При условиях (9) и (10) справедлива оценка: **ГЛАВА 2, §5 стр. 44**

$$\max_{0\le t\le T_0} |y_{реал}(t) - y_{ид}(t)| \le \delta_0 \cdot e^{LT_0} \quad (11)$$, где L – константа Липшица.

Доказательство 1) Разобьем отрезок $[0;T_0]$ на n частей (величину n мы зададим позже) и рассмотрим решения задач (7) и (8) на промежутке $0\le t\le \frac{T_0}{n}$. Как уже доказывалось не раз, (7) и (8) эквивалентны задачам с интегральными уравнениями:

$$y_{ид}(t) = y_{0,ид} + \int_0^t f(\tau, y_{ид}(\tau))\,d\tau \quad (12)$$

$$y_{реал}(t) = y_{0,реал} + \int_0^t f(\tau, y_{реал}(\tau))\,d\tau \quad (13)$$

Для разности $y_{ид}(t)$ и $y_{реал}(t)$ построим оценку:

$$\max_{0\le t\le \frac{T_0}{n}} |y_{ид}(t) - y_{реал}(t)| = \max_{0\le t\le \frac{T_0}{n}} \Big| y_{0,ид} + \int_0^t f(\tau, y_{ид}(\tau))\,d\tau -$$

$$- y_{0,реал} - \int_0^t f(\tau, y_{реал}(\tau)\,d\tau\Big| \le |y_{0,ид} - y_{0,реал}| + \Big|\int_0^t (f(\tau, y_{ид}(\tau)) - f(\tau, y_{реал}(\tau))\,d\tau\Big| \le$$

ГЛАВА 2, §5
стр. 45

$$\le \delta_0 + \int_0^{T_0/n} \left| f(\tau, y_{ид}(\tau)) - f(\tau, y_{реал}(\tau)) \right| d\tau \le$$

$$\le \delta_0 + \int_0^{T_0/n} L \cdot \left| y_{ид}(\tau) - y_{реал}(\tau) \right| d\tau \le$$

$$\le \delta_0 + L \cdot \max_{0 \le t \le \frac{T_0}{n}} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| \cdot \int_0^{T_0/n} d\tau = \delta_0 + \frac{LT_0}{n} \max_{0 \le t \le \frac{T_0}{n}} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right|.$$

Итак, $\max\limits_{0 \le t \le \frac{T_0}{n}} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| \le \delta_0 + \frac{T_0}{n} \max\limits_{0 \le t \le \frac{T_0}{n}} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right|$ (14)

откуда следует:

$$\left(1 - \frac{LT_0}{n}\right) \cdot \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| \le \delta_0 \quad (15)$$

Выберем теперь такое n, чтобы выполнялось условие

$$1 - \frac{LT_0}{n} > 0 \quad (16)$$

Тогда из (15) получается

$$\max_{0 \le t \le \frac{T_0}{n}} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| \le \frac{\delta_0}{1 - \frac{LT_0}{n}} = \delta_1 \quad (17)$$

и, в частности, $\left| y_{ид}\left(\frac{T_0}{n}\right) - y_{реал}\left(\frac{T_0}{n}\right) \right| \le \delta_1 = \frac{\delta_0}{1 - \frac{LT_0}{n}}$ (18)

2) Рассмотрим теперь решения задач (7) и (8) на отрезке $\frac{T_0}{n} \le t \le \frac{2T_0}{n}$.

В силу оценки (18), в нач. момент времени $t = \frac{t_0}{n}$ начальные условия для $y_{ид}(t)$ и $y_{реал}(t)$ отличаются не более, чем на величину $\delta_1 = \frac{\delta_0}{1 - \frac{LT_0}{n}}$. Рассуждая аналогично (предыдущему пункту), получаем оценку

$$\max_{\frac{T_0}{n} \le t \le \frac{2T_0}{n}} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| \le \frac{\delta_1}{1 - \frac{T_0}{n}} = \frac{\delta_0}{\left(1 - \frac{LT_0}{n}\right)^2} \qquad (19)$$

3) Далее, поступая аналогично для отреков $\left[\frac{2T_0}{n}, \frac{3T_0}{n}\right]$, $\left[\frac{3T_0}{n}, \frac{4T_0}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n} \cdot T_0, T_0\right]$, получаем оценку

$$\max_{0 \le t \le T_0} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| = \max_{\frac{n-1}{n} T_0 \le t \le T_0} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| = \frac{\delta_0}{\left(1 - \frac{LT_0}{n}\right)^n} \qquad (20)$$

Переходя в (20) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\max_{0 \le t \le T_0} \left| y_{ид}(t) - y_{реал}(t) \right| \le \delta_0 e^{LT_0}$$

Теорема доказана

Замечание Оценка (11) является неулучшаемой, то есть найдется принадлежащая классу Липшица с константой L функция, для которой неравенство (11) перейдет в равенство.

Пример:
$$\begin{cases} \dfrac{dy_{ид}}{dt} = L\cdot y_{ид}(t), t>0 \\ y_{ид}(0) = y_{ид,0} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_{реал}}{dt} = L\cdot y_{реал}(t),\ t>0 \\ y_{реал}(0) = y_{ид,0} + \delta y_0 \end{cases}$$

Тогда: $y_{ид}(t) = y_{ид,0}\cdot e^{Lt}$

$y_{реал}(t) = (y_{ид,0} + \delta y_0)\cdot e^{Lt}$, и для $\forall t>0$ имеем:

$$|y_{ид}(t) - y_{реал}(t)| = |\delta y_0| e^{Lt}$$

Хороша или плоха оценка (11)? Смотря для каких T_0

Можно ли строить более точные оценки? На данном классе нет, а вообще – можно, если более детально учитывать свой-ва f