Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс семинаров для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

# ТЕМА 4.

## ОДУ в полных дифференциалах

# СЕМИНАРЫ:

## ТЕМА ЗАНЯТИЯ №4

1) УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ;
2) интегрирующий множитель

АВТОР ONLINE КУРСА

ПРОФЕССОР СЫЧУГОВ Д.Ю.,
ВМК МГУ

# 1. Уравнение в полных дифференциалах

стр.1

**Определение 1** Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

, где $M(x,y), N(x,y)$ - дифференцируемые ф-ции 2 переменных, и выполнено условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (2)$$

В этом случае $\exists$ $F(x,y)$, дважды дифференцируемая, и такая, что:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = N(x,y) \end{cases} \quad (3)$$

Подставив соотношения (3) в (1), получим:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy = d(F(x,y)) = 0 \quad (4),$$

откуда следует решение (1) в виде

$$F(x,y) = C = const \quad (5)$$

Таким образом, уравнение в полных дифференциалах решается в 2 этапа

**а)** проверка условие (2) и, в случае его выполнения

**б)** нахождение $F(x,y)$, т.е. решение системы (3).

---

**Пример 1 (Фил., 186)**

$$2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xy\;;\; N(x,y) = x^2-y^2$$

**1)** Проверка: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x\;;\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ уравнение в полных дифференциалах;

**2)** $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow F(x,y) = \int \frac{\partial F}{\partial x}dx = \int 2xy\,dx = x^2y + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y).$

получаем $x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = -y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} + C$

$\Rightarrow$ получаем окончательное решение

$$F(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3} + C \Rightarrow \boxed{\text{Ответ } x^2y - \frac{y^3}{3} = C}$$

---

**Пример 2 (Фил., 188)**

$$\underbrace{e^{-y}}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(-2y - xe^{-y})}_{N(x,y)}\,dy = 0.$$

**1)** $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,? \Rightarrow -e^{-y} = -e^{-y}$ – да

**2)** $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = e^{-y} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2y - xe^{-y} \end{cases} \Longrightarrow F(x,y) = xe^{-y} + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{-y} + \varphi'(y) = -2y - xe^{-y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(y) = -2y \Rightarrow \qquad \Rightarrow$ Ответ: $\boxed{F(x,y) = xe^{-y} - y^2 = C}$

# интегрирующий множитель



**Определение 2** Пусть в уравнении $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (6) условие (2) не выполнено, т.е. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Интегрирующим множителем для уравнения (6) называется такой множитель $\varphi(x,y)$, после умножения на который уравнение

$$\underbrace{M(x,y)\varphi(x,y)}_{M_1(x,y)}dx+\underbrace{N(x,y)\varphi(x,y)}_{N_1(x,y)}\cdot dy=0 \quad (7)$$

становится уравнением в полных дифференциалах, то есть выполняются условия

$$\frac{\partial M_1(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} \quad (8)$$

Можно доказать теорему, что если у уравнения (6) есть решение, то можно найти и интегрирующий множитель, однако общего метода нахождения его решения нет. Частный случай: $\varphi(x,y)=x^p y^q$ (9)
$p,q$ - неизв. коэф-ты

# 3. Выделение полных дифференциалов



В ряде случаев ОДУ можно решить, выделяя в отдельные фрагменты полные дифференциалы:

$$d(xy) = x\,dy + y\,dx;$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

(9)

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2};$$

$$\frac{1}{2} d(x^2+y^2) = x\,dx + y\,dy, \text{ и.т.п.}$$

---

**Пример 3**
**Фил., 195**

$$(x^2+y^2+x)\,dx + y\,dy = 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2)\,dx + (x\,dx + y\,dy) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)\,dx + \frac{1}{2} d(x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = -2dx \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2+y^2) = -2x + \ln C \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = Ce^{-2x} \leftarrow \text{Ответ}}$$

---

**Пример 4**
**Фил., 197**

$$y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}d(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}} = d(xy) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sqrt{y^2+1} = xy + C \leftarrow \text{Ответ}}$$

На дом: 187, 189, 191, 196, 198, 200