Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс семинаров для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕМА 2.

1) **Физические и геометрические задачи**

СЕМИНАРЫ:
ТЕМА ЗАНЯТИЯ №2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

АВТОР ONLINE КУРСА
ПРОФЕССОР СЫЧУГОВ Д.Ю.,
ВМК МГУ

1. ЗАДАЧА ОБ ОСТЫВАНИИ ЧАЙНИКА (Ф., №80)

Тело охладилось за 10 минут от 100° до 60°. Температура окружающей среды поддерживается равной 20°. Когда тело остынет до 25°?

Основы модели: 1) Эмпирический закон, согласно которому теплообмен пропорционален разности температур (Закон Фурье)

2) t-время, $T(t)$ - температура чайника, k - коэф-т пропорциональности, $T_c=2$ - температура окружающей среды, $t_{кон}$ - искомое время, когда чайник остынет до 25°.

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-20),\ t>0. \\ T(0)=100 \\ T(10)=60 \\ T(t_{кон})=25 \\ t_{кон}=? \end{cases}$$

(1) Особенности задачи (1): коэффициент k неизвестен, зато есть 2 дополнительных условия, исходя из которых можно определить k.

Уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dT}{T-20} = -k\,dt \Rightarrow \ln(T-20) = -kt + \ln C \Rightarrow$$

(модуль раскрывается, исходя из физ. условий $T(t) > 20$, $C > 0$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{T - 20 = Ce^{-kt}} \Rightarrow \begin{cases} T(t) = 20 + Ce^{-kt} \\ T(0) = 100 \end{cases} \quad (2) \quad \Rightarrow \underline{C = 80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(t) = 20 + 80e^{-kt}, \ t > 0 \\ T(10) = 60 \end{cases}, \ k = ? \quad (3) \quad \Rightarrow 60 = 20 + 80e^{-10k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{k = \ln 2/10} \ (4)$$

$\Rightarrow$ получаем окончательный закон остывания

$$\boxed{T(t) = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{10}t} = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \quad (5)}$$

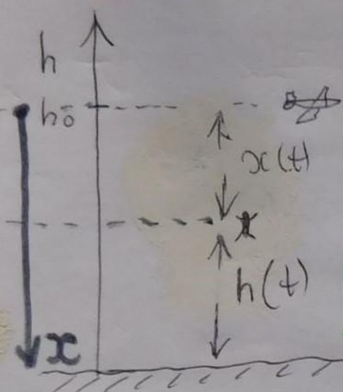
Осталось найти $t_{кон}$

$$\Rightarrow 25 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_{кон}}{10}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_{кон}}{10}} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_{кон}}{10} = 4 \Rightarrow t_{кон} = 40$$

Ответ: за 40 минут

2. Задача о свободном падении тела с учетом сопротивления воздуха (сб. Филиппов, задача №88)



Постановка задачи: 1) с высоты h_0 с самолета спрыгнул парашютист, но пока еще парашют не раскрыл. Вывести формулу, как со временем будет меняться расстояние от него до земли. 2) Сколько ему лететь времени, если он раскроет парашют на высоте 500м?

$$\boxed{h(t)+x(t)=h_0}$$

Основы модели: 1) 2й закон Ньютона;

2) эмпирический закон, согласно которому сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости падения тела (будем считать, что коэф-т пропорциональности не зависит от высоты);

3) будем считать, что сила тяжести не зависит от высоты;

$x(t)$ – расстояние, которое пролетел вниз парашютист к моменту t.

$h(t)$ – высота, т.е расстояние в момент t от парашютиста до земли;

M – масса парашютиста; g – константа силы тяжести, $g = 9{,}8$ м/сек^2 (далее будем приближенно считать $g \approx 10$ м/сек^2)

k – коэффициент сопротивления воздуха при падении.

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg - k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (6)$$

Знаки? $x(t)$ увеличивается, $\frac{dx}{dt} > 0$

сила тяжести увеличив. $x(t) \Rightarrow$ "+"

сила сопр. противодействует увеличению абс. величины скорости $\Rightarrow$ "−"

По классификации ОДУ:

(6): ОДУ 2-порядка, т.к $\frac{d^2x}{dt^2}$ (вообще говоря, если ввести основную переменную $v=\frac{dx}{dt}$, то порядок можно понизить до 1-го, но мы это делать пока не будем)

(6): нелинейное уравнение, т.к. в правой части $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$.

Для выделения единственного решения требуется задание дополнительных условий (мы в дальнейшем выясним, что обычно их требуется столько, каков порядок уравнения)

$$\begin{cases} M\frac{d^2x}{dt^2}=-Mg+k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \quad t>0; & (7)\\ x(0)=0 & (8)\\ \frac{dx}{dt}(0)=0. & (9)\end{cases}$$

Классификация: (7)-(9) - задача с начальными условиями (задача Коши) для нелинейного ОДУ

Комментарий к условию (9): Будем считать, что самолет летел строго горизонтально, в момент прыжка парашютиста так что никакой вертикальной составляющей скорости у парашютиста в начальный момент не было.

Как <u>определить</u> коэффициент k?
("Известно, что в воздухе нормальной плотности предельная скорость падения человека составляет <u>50 м/сек.</u>") Это означает, что при $\frac{dx}{dt}=50$ левая часть уравнения (7) обращается в ноль:

$$\Rightarrow 0=-Mg+k(50)^2 \Rightarrow \underline{k=Mg/(50)^2} \quad (10)$$

Подставим (10) в (7), получим:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=Mg-\frac{Mg}{(50)^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \Rightarrow$$ (после сокращения на M)

$$\frac{d^2x}{(dt)^2}=g-\frac{g}{(50)^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (7')$$

Окончательная постановка задачи примет вид ($g = 10$ м/сек^2)

стр. 6

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 10 - \dfrac{1}{250}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2, \ t>0 & (7') \\ x(0) = 0 & (8') \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 & (9') \end{cases}$$

КЛАССИФИКАЦИЯ: УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Решение: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow (7') \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = 10 - \dfrac{v^2}{250} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dv}{10 - \frac{v^2}{250}} = dt \Rightarrow \frac{dv}{2500 - v^2} = \frac{1}{250}dt \Rightarrow \frac{dv}{(50-v)(50+v)} = \frac{dt}{250}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100}\left(\frac{dv}{50+v} + \frac{dv}{50-v}\right) = \frac{dt}{250} \Rightarrow \frac{dv}{50+v} + \frac{dv}{50-v} = \frac{2}{5}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(50+v) - \ln(50-v) = \frac{2}{5}t + \ln C \Rightarrow \ln\frac{50+v}{50-v} = C_1 e^{\frac{2}{5}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{50+v}{50-v} = C_1 e^{\frac{2}{5}t} \quad (10)$$

Подставим в (10) условие $v(0) = 0$, получим $C_1 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{50+v}{50-v} = e^{\frac{2}{5}t} \Rightarrow 50 + v = (50 - v)e^{\frac{2}{5}t} \Rightarrow \boxed{v(t) = 50\frac{e^{\frac{2}{5}t} - 1}{e^{\frac{2}{5}t} + 1}} \quad (11)$$

$$\Rightarrow x(t) = 50\int \frac{e^{\frac{2}{5}t}-1}{e^{\frac{2}{5}t}+1}\,dt + C_2 = 50\int \frac{(e^{\frac{2}{5}t}-1)\,e^{\frac{2}{5}t}}{e^{\frac{2}{5}t}(e^{\frac{2}{5}t}+1)}\,dt =$$

$$= \boxed{\begin{array}{l} e^{\frac{2}{5}t} = y \\ dy = \frac{2}{5}e^{\frac{2}{5}t}dt \end{array}} = \frac{50}{2/5}\int \frac{y-1}{y(y+1)}\,dy + C_2 = 125\int \frac{(y-1)\,dy}{y(y+1)} + C_2 =$$

$$\boxed{\frac{y-1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases}} =$$

$$= 125\left(2\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y}\right) + C_2 = 125\ln\frac{(y+1)^2}{y} + C_2 =$$

$$= 125\ln\left(y+2+y^{-1}\right) + C_2 = 125\ln\left(e^{\frac{2}{5}t}+2+e^{-\frac{2}{5}t}\right) + C_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t) = 125\ln\left(e^{\frac{2}{5}t}+2+e^{-\frac{2}{5}t}\right) + C_2 \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = -125\ln 4$$

Получаем окончательный закон падения парашютиста:

$$\boxed{x(t) = 125\ln\frac{e^{\frac{2}{5}t}+2+e^{-\frac{2}{5}t}}{4}} \quad (12)$$

Осталось определить время, которое прошло, прежде чем он раскрыл парашют. Из условия задачи следует, что он за это время пролетел вниз 1000 м. Даже если бы он летел со скоростью 50 м/сек, то и тогда он затратил бы 20 сек $\Rightarrow t_{иск} > 20$ сек

$\Rightarrow e^{\frac{2}{5}t_{иск}} = e^{8} \gg 1$, поэтому в формуле (12) при подсчете $t_{иск}$ можно при $t > 20$ учитывать только первое слагаемое $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1000 = \ln \frac{e^{\frac{2}{5}t_{иск}}}{4} = 125\left(\ln e^{\frac{2}{5}t_{иск}} - \ln 4\right) =$$

$$125\left(\frac{2}{5}t_{иск} - 2\ln 2\right) = 50\,t_{иск} - 250\ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{иск} = \frac{1000 + 250\ln 2}{50} = 20 + 5\ln 2 \approx 23.$$

$\boxed{\text{Ответ: } \approx 23 \text{ сек}}$

3. Задача об определении возраста горной породы (Ф., №86)

В исследуемом куске породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет, и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г свинца. Определить возраст горной породы.

Допущения модели: 1) Считаем, что поначалу в породе содержался только уран (?); 2) Промежуточными продуктами распада пренебрегаем, так как они распадаются много быстрее урана.

Вывод основного уравнения: Проще всего вывести закон, описывающий долю свинца в породе. Возьмем за образец кусок породы, содержащий вначале 238 г урана. 1) Вывод формулы для определения оставшейся массы урана уже был (см. лекцию 1):

$$\begin{cases} M_U(t) = 238 e^{-\alpha t} \\ M_U(4{,}5 \cdot 10^9) = 119 \end{cases} \Rightarrow e^{-\alpha \cdot 4{,}5 \cdot 10^9} = \frac{1}{2} = e^{-\ln 2} \Rightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_U(t) = 238 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9} t} \Rightarrow \boxed{238 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4{,}5 \cdot 10^9}} = M_U(t) \quad (1)}$$

2) Масса погибшего к моменту t урана равна $238-238\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4,5\cdot10^9}}$, и, соответственно, доля погибшего урана равна $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4.5\cdot10^9}}$, при этом распавшийся уран заменяется свинцом, и его масса равна $\boxed{206\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4,5\cdot10^9}}\right)=M_{Pb}(t)}$ **(2)**

3) Осталось написать формулу для $\frac{M_{Pb}(t)}{M_U(t)}$ и определить возраст

$$\frac{M_{Pb}(t)}{M_U(t)}=p(t)=\frac{206\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4,5\cdot10^9}}\right)}{238\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4,5\cdot10^9}}}=$$

$$=\frac{103}{119}\left(2^{\frac{t}{4,5\cdot10^9}}-1\right)=\frac{M_{Pb}(t)}{M_U(t)} \quad \textbf{(3)}$$

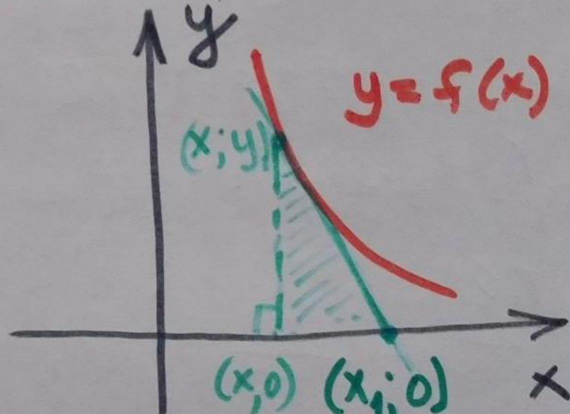
4) Подставим в (3) данные задачи $\Rightarrow \frac{103}{119}\cdot\left(2^{\frac{t}{4.5\cdot10^9}}-1\right)=\frac{14}{100}$

$$\Rightarrow 2^{\frac{t}{4,5\cdot10^9}}=1+\frac{119}{103}\cdot\frac{14}{100}\approx1,16 \Rightarrow \frac{t}{4,5\cdot10^9}=\log_2 1,16=\frac{\ln 1,16}{\ln 2}\approx\frac{0,15}{0,69}\approx$$

$$\approx0,22 \Rightarrow t=4,5\cdot10^9\cdot0,22\approx \boxed{990\ 000\ 000 \text{ млн. лет} \leftarrow \text{Ответ}}$$

Пример вывода уравнения кривой (Ф., №71)

Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс есть величина, равная a^2.



1) Уравнение касательной:

$$y_1 = y + y'(x)(x_1 - x) \quad (1)$$

Нам нужна точка пересечения касательной с осью x, поэтому $y_1 = 0$:

$$(1) \Rightarrow 0 = y + y'(x)(x_1 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - x = -\frac{y(x)}{y'(x)} \Rightarrow 2)\ S_\Delta = \frac{1}{2}(x_1 - x)\cdot y(x) = \frac{-1}{2}\frac{y(x)}{y'(x)}\cdot y(x) = a^2$$

$$\Rightarrow -\frac{y^2(x)}{y'(x)} = 2a^2 \Rightarrow -\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2a^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{2a^2} + C \Rightarrow \boxed{(x + C)y = 2a^2 \leftarrow \text{Ответ:}}$$

Ha дом: 73, 76, 85, 89, 97, 100.