Св-ва гармонических ф-ий:

1. Теорема Гаусса: Если U - гармоническая в обл. D ф-ия, то $\boxed{\iint\limits_{S'} \frac{\partial u}{\partial n}(p)\,dS' = 0}$, где S' - достаточно гладкая замкнутая поверхность.

Док-во: по I формуле Грина:

$$\iiint\limits_{D} \underset{1}{v}\cdot \underset{0}{\Delta u}\,dV = \iint\limits_{S'} \underset{1}{v}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,dS' - \iiint\limits_{D} \underset{0}{\overset{\nabla u \cdot \nabla v}{\operatorname{grad} u\cdot \operatorname{grad} v}}\,dV,$$ возьмём

$v\equiv 1$, а U - гармоническая, т.е. $\Delta u = 0$, тогда

$$\boxed{\iint\limits_{S'} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS' = 0}$$ → эту формулу можно интерпретировать как отсутствие источников внутри ограниченной обл-ти D.

Замеч. Если рассматривать ур-ие Пуассона: $\Delta u = -f(M)$ (это неоднородное ур-ие Лапласа), то

$$\boxed{\iint\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = -\iiint\limits_{D} f(M)\,dV}$$ → это поток через границу области при наличии источников внутри.

Физ. смысл: Для стационарного режима теплопроводности → если $U(M)$ - стационарная температура, а $K(M)$ - коэфф. теплопроводности, то для того, чтобы существовало стационарное решение, необходимо, чтобы количество тепла, образующееся в обл-ти D за ед. времени, было равно полному потоку тепла, уходящему через границу области.

Ещё и так: Стационарный поток тепла (или несжимаемой жидкости, или напряжённости электр. поле и т. п.) через замкнутую поверхность S равен суммарной величине всех источников (зарядов и т. п.), находящихся внутри S.

Из этого св-ва следует необходимое условие существование решения внутр. задачи Неймана для ур-ия Лапласа: решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u(M)=0; \ M\in D \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{p\in S}=V(p); \ p\in S \end{cases}$$

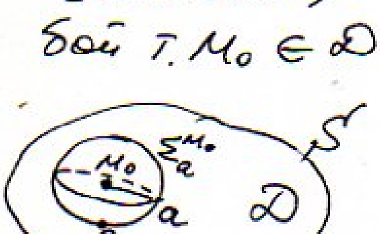
может существовать только если $\boxed{\iint\limits_S V(p)\,dS=0}$

это условие разрешимости.

② ---

Теорема о среднем (или формула среднего значение)

Если $u(M)$ - гармоническая в D ф-ия, то для любой т. $M_0\in D$ имеет место представление:



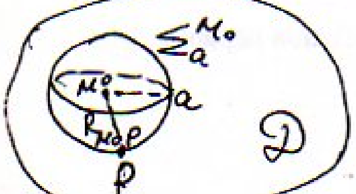
$$\boxed{u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(p)\,d_pS}$$

где $\Sigma_a^{M_0}$ - сфера радиуса a с центром в т. M_0, целиком лежащая в обл. D.

Док-во: по III формуле Грина для шара $K_a^{M_0}$ с поверхностью $\Sigma_a^{M_0}$:

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}}\Big[\underbrace{\frac{1}{R_{M_0P}}}_{=\frac{1}{a}}\cdot\frac{\partial u}{\partial n}(P)-u(P)\cdot\underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{R_{M_0P}}\Big)}_{=-\frac{1}{a^2}}\Big]d_PS\,,$$ т.к.

$\frac{1}{R_{M_0P}}=\frac{1}{a}$; $\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{R_{M_0P}}\Big)=-\frac{1}{a^2}$; и учитывая, что $\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$



$$\Rightarrow \boxed{u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}}u(P)\,d_PS}$$

т.е. значение гарм. ф-ии в т. M_0 равно среднему значению этой ф-ии на $\forall$ сфере $\Sigma_a^{M_0}$ с центром в т. M_0, если эта сфера не выходит из обл-ти гармоничности u. (Эта формула ещё справедлива и когда сфера $\Sigma_a^{M_0}$ касается границы S обл-ти D).

Замеч: В случае $2^х$ переменных, обл. D в R^2:

$$\boxed{u(M_0)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{L_a^{M_0}}u(P)\,dl}$$

$L_a^{M_0}$ окружность рад. a с центром M_0

---

(3) Гармоническая ф-ия бесконечно дифференцируема (или: гармоническая в обл. D ф-ия имеет внутри обл. D производные всех порядков.)

Док-во: следует из III формулы Грина: при $M_0\in D$ поверхностные интегралы являются собственными и их можно дифф. по координатам т. M_0 $\forall$ число раз.

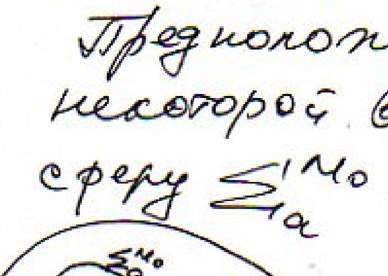
(Ещё: гарм. ф-ия <u>аналитична</u> во всех внутр. точках, т.е. в окрестности $\forall$ т. $M_0 \in D$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд. При этом радиус сходимости ряда не меньше, чем расстояние до границы S)

---

④. <u>Принцип максимума</u> $\boxed{T}$ (и минимума): $\forall$ гармоническая в обл. D ф-ия $u(M)$, непрерывная в замкнутой обл. $\bar{D}$ (обязательная добавка!) достигает своего максимального (и минимального) значения на границе S обл-ти D.

<u>Док-во</u>: 1)ый шаг: Т.к. ф-ия непрерывна в замк. обл. $\bar{D}$, то по т. <u>Вейерштрасса</u> она достигает своего максимального значения в этой обл-ти $\bar{D}$.
Обозначим этот максимум $\max\limits_{M \in \bar{D}} u(M) = A$.

2)ой шаг: Дальше - <u>от противного</u>:
Предположим, что это значение достигается в некоторой внутренней т. $M_0 \in D$. Рассмотрим сферу $\Sigma_a^{M_0}$ целиком лежащую в D.



Для этой сферы напишем формулу среднего значения:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(P)\, dS_P \le \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} \overbrace{\underbrace{u(M_0)}_{\text{const}}}^{\text{это max}} dS_P = u(M_0) = A$$

$\Rightarrow$ возможно только равенство!

→ Это значит, что в каждой точке p сферы $\Sigma_a^{M_0}$ значение ф-ии равно A: $u(p)\Big|_{p\in\Sigma_a^{M_0}} = u(M_0) = A$.

Дальше → рассмотрим сферу $\Sigma_{a_1}^{M_1}$ радиуса a_1 с центром в т. M_1, который помещён на предыдущую сферу $\Sigma_a^{M_0}$; т. $M_1 \in \Sigma_a^{M_0}$, сфера $\Sigma_{a_1}^{M_1}$ также целиком лежит в обл. D.
Аналогично предыдущему → $u(p)\Big|_{p\in\Sigma_{a_1}^{M_1}} = u(M_1) = u(M_0) = A$.

Можно построить такую последовательность сфер $\Sigma_{a_n}^{M_n}$ с центрами в т. $M_n \in D$ и радиусов a_n, целиком лежащих в D, что последовательность точек $\{M_n\}$ будет сходиться к т. $\bar{M} \in S$. В силу нашего построения $u(M_n) = u(M_0) = A$ для $\forall n$.
Т.к. ф-ия $u(M)$ непрерывна в $\bar{D}$, последовательность $\{u(M_n)\}$ будет сходиться к $u(\bar{M})$, откуда следует, что $u(\bar{M}) = A$.

Для док-ва утверждения о минимальном значении гармонической ф-ии → вместо ф-ии $u(M)$ надо рассмотреть ф-ию $\tilde{u}(M) = -u(M)$.

Замеч: Формулировку принципа max можно усилить: Если непрерывная в $\bar{D}$ гармоническая ф-ия $u(M)$ достигает своего максимального значения (или минимального значения) в некоторой внутр. точке M_0, то она равна постоянной.

ещё формулировка принципа максимума: Гармоническая в D ф-ия, отличная от постоянной, непрерывная в $\bar{D}$, достигает своего макс. и мин. значений на границе S обл-ти D.

Следствие: Принцип сравнения:

Если $u(M)$ и $v(M)$ две гармонические в D ф-ии, непрерывные в $\bar{D}$ и: $u(P)\Big|_{P\in S} \le v(P)\Big|_{P\in S}$; то всюду в D: $u(M) \le v(M)$; $M\in D$.

Док-во: Возьмём ф-ию $\omega(M) = v(M) - u(M)$

$\omega(M)$ - гармоническая в обл. D и непрерывная в $\bar{D}$.

Т.к. $u(P)\Big|_{P\in S} \le v(P)\Big|_{P\in S}$, то $\omega(P)\Big|_{P\in S} \ge 0$.

В силу принципа минимального значения

$$\omega(M)\Big|_{M\in D} \ge 0.$$

$$\text{т.е. } u(M) \le v(M),\ M\in D$$

Устойчивость.

Задача называется устойчивой, если малым изменениям входных данных соответствует также малое изменение решения.

Рассмотрим две задачи Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u_1(M) = 0; & M\in D \\ u_1(P)\Big|_{P\in S} = \mu_1(P); & P\in S \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta u_2(M) = 0, & M\in D \\ u_2(P)\Big|_{P\in S} = \mu_2(P); & P\in S. \end{cases}$$

Введём расстояние между ф-иями μ_1 и μ_2, u_1 и u_2:

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \| \mu_1 - \mu_2 \|_{C(S)} = \max_{P \in S} | \mu_1(P) - \mu_2(P) |$$

$$\rho(u_1, u_2) = \| u_1 - u_2 \|_{C(\bar{D})} = \max_{M \in \bar{D}} | u_1(M) - u_2(M) |$$

используя $\rho(\mu_1, \mu_2)$ и $\rho(u_1, u_2)$ дадим определение понятия устойчивости для задачи Дирихле.

Опр: Решение задачи Дирихле называется *устойчивым*, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(\mu_1, \mu_2) < \delta(\varepsilon)$ следует $\rho(u_1, u_2) < \varepsilon$.

$\boxed{\text{T.}}$ устойчивости: для внутренней задачи Дирихле если $\rho(\mu_1, \mu_2) \le \varepsilon$, то $\rho(u_1, u_2) \le \varepsilon$.

Док-во: Сначала заметим, что ф-ия $u(M) \equiv \varepsilon$ - гармоническая и всюду положительная.

Рассмотрим ф-ию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$.

Из принципа максимума $\Rightarrow$ что если на границе области ~~[illegible]~~ $|v(P)| \le \varepsilon$, то $|v(M)| \le \varepsilon$ всюду в $\bar{D}$.

$\boxed{\text{T}}$ единственности (зад. Дирихле): Внутренняя задача Дирихле не может иметь более одного классического решения.

Док-во: От противного: Пусть $\exists$ 2 решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$.

Введём ф-ию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$.

$v(M)$ – будет гармонической в D: $\Delta v(M)=0$, непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет однородному гран. условию: $v(P)\big|_{P\in S} = 0$.

1). В силу принципа $\underline{\max}$ $v(M) \le 0$ в D (её максимальное значение достигается на S)

2) В силу принципа $\underline{\min}$ $v(M) \ge 0$ в D (её минимальное значение достигается на S)

$\Rightarrow$ $v(M) \equiv 0$ в D, т.е. $u_1(M) = u_2(M)$ в D.

$\Rightarrow$ решение внутр. задачи Дирихле единственно.

Замет. Доказанная $\boxed{T}$ ед. справедлива и для задачи Дирихле для ур-ия Пуассона:
$$\begin{cases} \Delta u = -f(M), & M\in D \\ u\big|_S = \mu(P), & P\in S \end{cases}$$

Док-во: такое же!

Внутр. задача Неймана:
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M\in D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(P)\Big|_{P\in S} = V(P), & P\in S \end{cases}$$

Класс реш.
$u(M)\in C^1(\bar{D})\cap C^{(2)}(D)$
и $V(P)\in C(S)$.

Решение задачи Неймана отличается от решения задачи Дирихле тем, что оно определяется с точностью до $\underline{const}$.

Если $u(M)$ – решение задачи Неймана то и $v(M) = u(M) + C$ тоже решение задачи Неймана.

$\boxed{T}$ ед: Классическое решение внутр. задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной. $\longrightarrow$

Т.е. если $U_1(M)$ и $U_2(M)$ — решения одной и той же задачи Неймана, то $U_1(M) - U_2(M) = const$.

Док-во: здесь нельзя воспользоваться принципом max, т.к. значение ф-ии $U(M)$ на границе неизвестно! Поэтому используем формулы Грина:

пусть $\exists$ 2 решения задачи Неймана: $U_1(M)$ и $U_2(M)$.

Рассмотрим ф-ию $v(M) = U_1(M) - U_2(M)$

$v(M)$ уд. задаче: $\begin{cases} \Delta v(M) = 0; & M \in D \\ \frac{\partial v}{\partial n}(P) = 0; & P \in S \end{cases}$

Она: $v(M) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$

$\downarrow$

очевидно, что решение этой задачи: $v(M) = const$.

Докажем, что других решений нет:

I формула Грина: (возьмем не U и v — а только ф-ию v два раза!)

$$\underset{D}{\iiint} v \cdot \underbrace{\Delta v}_{0}\, dV = \underset{S}{\iint} v \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{0}\, dS - \underset{D}{\iiint} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v\, dV \Rightarrow$$

$$\underset{D}{\iiint} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v\, dV = 0, \quad \text{т.е. } \underbrace{\operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} v}_{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = 0$$

$\rightarrow$ Т.к. сумма неотрицат. слагаемых равна 0, то

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ всюду в D. $\Rightarrow$ $v(M) = const$

[иногда говорят: имеет место единственность решения с точностью до произвольного постоянного слагаемого]. Т.е. реш. задачи Неймана не единств.!

- -

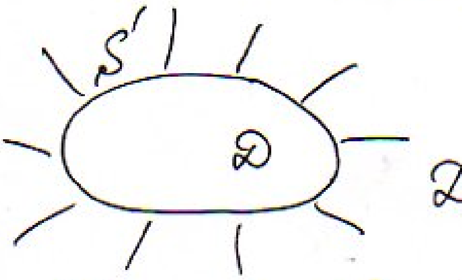
Внешние задачи.

Гармоническая ф-ия регулярна на ∞.

Опр. ($3^х$ мер. случай.)
Ф-ия $u(M)$, $M \in R^3$, называется регулярной на ∞, если при всех достаточно больших r выполнены неравенства:

$$|u| \le \frac{A}{r};\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2},\ \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2},\ \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{A}{r^2};$$

где $A = const$.



Всё пр-во $R^3 = D \cup S \cup D'$

обозн. $\bar{D}' = D' \cup S$.

(Без док-ва:)

$\boxed{T}$. Для регулярных на ∞ ф-ий $u(M)$ и $v(M)$ справедливы I и II формулы Грина:

I ф. Грина:
$$\boxed{\iiint\limits_{D'} u \cdot \Delta v \, dV = \iint\limits_{S} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint\limits_{D'} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dV}$$

II ф. Грина:
$$\boxed{\iiint\limits_{D'} [u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u] dV = \iint\limits_{S} \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right] dS}$$

$\boxed{T}$. Гармоническая во внешней обл-ти в R^3 ф-ия, равномерно стремящаяся к 0 на ∞, является регулярной на ∞. ($u \rightrightarrows 0$ при $r \to \infty$)

(На пл-ти в R^2 требование $\rightrightarrows 0$ на ∞ является жёстким: такого решения может не $\exists$!)

$\boxed{T}$ (В R^2):
Ф-ия двух переменных $u(x,y)$ называется регулярной

на бесконечности, если она имеет конечный предел на ∞.

Дальше: постановка внешних задач Дирихле и Неймана в R^2 и R^3; примеры; усл. на ∞ и $\boxed{\text{Т. ед}}$.

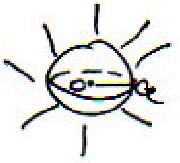
① Внешняя задача Дирихле в пр-ве R^3.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0; \ M \in D' \\ u(P) = \mu(P); \ P \in S' \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to \infty \end{cases}$$

Классическое решение: $u(M) \in C(\bar{D}') \cap C^2(D')$ и $\mu(P) \in C(S')$

Пр. Вне шара: радиально-симметр. задача:

$$\begin{cases} \Delta u(r) = 0; \ r > a \\ u|_{r=a} = 1 \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to \infty \end{cases}$$



$\to$ Две ф-ии удовл. ур-ию и гран. условием! $\begin{cases} u_1(r) = 1 \\ u_2(r) = \frac{a}{r} \end{cases}$

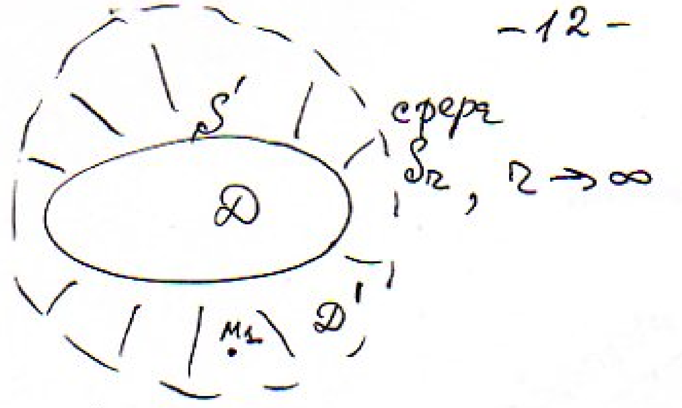
Но! $u_1(r) = 1$ не подходит для выполнения усл. на ∞

ф-ия $u_2(r) = \frac{a}{r}$: $u_2(r) \rightrightarrows 0$ при $r \to \infty$: подходит!

$\Rightarrow$ это условие позволяет выделить единств. решение!

$\boxed{\text{Т}}$ ед. Внешняя задача Дирихле в R^3 может иметь только одно классическое решение

(без док-ва!) В неогр. обл-ти нельзя применять принцип max! $\to$ сначала ограничить обл-ть сферой S_r' - большого радиуса. Тогда в обл-ти между поверхностью S' и S_r



→ от противного:

пусть ∃ два решение $u_1(M)$ и $u_2(M)$ задачи.

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0; & M \in D' \\ u(P) = \mu(P); & P \in S' \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r\to\infty \end{cases}$$

Введём ф-цию

$\omega(M) = u_1(M) - u_2(M)$,

для $\omega(M)$: $$\begin{cases} \Delta \omega(M) = 0; & M \in D' \\ \omega(P) = 0; & P \in S' \\ \omega \rightrightarrows 0 \text{ при } r\to\infty \end{cases}$$

Далее: пусть $\exists$ т. $M_1 \in D'$, в которой $\omega(M_1) \neq 0$ (т.е. $u_1(M_1) \neq u_2(M_1)$)

Выберем шар большого радиуса r с границей S_r так, чтобы т. M_1 лежала между поверхностью S и сферой S_r и на S_r вып. неравенство: $|\omega(M)| < \varepsilon$ для произвольного малого $\varepsilon > 0$.

В замкнутой обл-ти между S и S_r гармоническая ф-ция $\omega(M)$ получилась такая: $\omega(M_1) \neq 0$

$$\omega(M)\Big|_{M\in S} = 0$$

$$|\omega(M)| < \varepsilon, \quad M \in S_r$$

В силу принципа max:

$|\omega(M_1)| < \varepsilon$; в силу произвольности выбора

$\varepsilon \to 0$: $\omega(M_1) = 0 \Rightarrow u_1(M) = u_2(M)$, $M \in D'$

и т. M_1.

→ Решение единственно!

(2) Внешняя задача Неймана в пр-ве R^3

$$\begin{cases}\Delta u=0; \quad M\in D' \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(P)=\nu(P); \quad P\in S \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } \underset{r(M)\to\infty}{r\to\infty}\end{cases}$$

классическое решение: $u(M)\in C^1(\bar{D}')\cap C^2(D')$ и $\nu(P)\in C(S')$

$\boxed{\text{Т.}}$ ед: Внешняя задача Неймана в R^3 имеет единственное классическое решение.

Док-во: От противного: пусть $\exists$ 2 класс. реш. $u_1(M)$ и $u_2(M)$.

Введем $w(M)=u_1(M)-u_2(M)$.

Для $w(M)$: $$\begin{cases}\Delta w(M)=0; \quad M\in D' \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(P)=0; \quad P\in S' \\ w(M)\rightrightarrows 0 \text{ при } M\to\infty\end{cases}$$

Применим I формулу Грина - 2 раза к ф-ии $w(M)$.

$$\iiint\limits_{D'} w(M)\cdot\underset{0}{\underset{\parallel}{\Delta w(M)}}\,dV=\iint\limits_{S'} w(P)\cdot\underset{0}{\underset{\parallel}{\frac{\partial w}{\partial n}}}(P)\,dS-\iiint\limits_{D'}\operatorname{grad}w\cdot\operatorname{grad}w\,dV$$

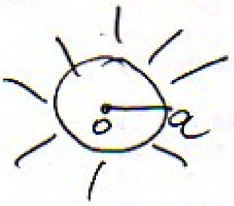
$\Rightarrow \operatorname{grad} w=0$ в D' т.е. $w(M)=\text{const}$ в $\bar{D}'$, но $w(M)\rightrightarrows 0$ при $M\to\infty$, поэтому

$w(M)\equiv 0$ в $\bar{D}'$ $(\text{const}=0)$ $\Rightarrow u_1(M)=u_2(M)$ - решение Внешней задачи Неймана в $R3$ единственно!

Внешние задачи в R^2 - на плоскости.

в R^2 требование $\rightrightarrows 0$ на ∞ является жёстким - такого решение может не существовать!

Пр. радиально-симметр. задача вне круга радиуса a



$$\begin{cases}\Delta u(r)=0; \; r>a\\ u\big|_{r=a}=1\end{cases}$$
и усл. на ∞ ???

рассм. Два решение:

$$\left.\begin{cases}u_1(r)=1\\ u_2(r)=\dfrac{\ln r}{\ln a}\end{cases}\right\}$$ они уд. ур-ию и гр. усл.

Если потребовать: $u \rightrightarrows 0$ на ∞, то ни одно не подходит, значит задача не имеет решение!

а если поставить условие существование конечного $\lim$ на ∞; тогда $u_1=1$ - подходит!

→ классическое решение на пл-ти.

ф-ия $u(M)$, уд. ур-ию Лапласа в D';

$$\boxed{\begin{array}{l} u(M)\in C(\bar{D}')\cap C^2(D') \\ \text{и } \mu(P)\in C(S)\end{array}}$$

$$\begin{cases}\Delta u(M)=0\\ u(P)=\mu(P), \; P\in S\\ \text{усл. ограниченности на } \infty\\ \text{или } \exists \lim\limits_{r\to\infty}=C\end{cases}$$

(в R^2)

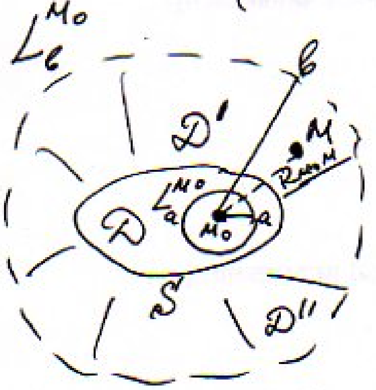
Т ед. Внешняя задача Дирихле на пл-ти может иметь не более одного классического решение, регулярного на ∞.

Док-во: от противного: пусть $\exists$ 2 классич. решение $u_1(M)$ и $u_2(M)$:

$$\begin{cases}\Delta u_i(M)=0; \; M\in D'\\ u_i(P)=\mu(P); \; P\in S\\ |u_i(M)|<\dfrac{N}{2} \; \text{- огр.}\end{cases}, \quad i=1,2; \; N=const.$$

Введём ф-ию $\omega(M) = u_1(M) - u_2(M)$.

$$\omega(M): \begin{cases} \Delta\omega(M) = 0; & M \in D' \\ \omega(P) = 0; & P \in S \\ |\omega(M)| < N; & N = const. \end{cases}$$



Выберем в D т. M_0 и построим окружность $L_a^{M_0}$ радиуса a с центром в т. M_0, целиком лежащую в D. Пусть R_{M_0M} — расстояние между т. M_0 и т. $M \in D'$.

ф-ия $\boxed{u_a(M) = \ln\frac{R_{M_0M}}{a}}$ — гармонична в D' и положительна в D', т.к. $R_{M_0M} > a$.

Дальше: Построим окружность $L_b^{M_0}$ радиуса b с центром в т. M_0, содержащую границу S внутри себя. Введём ф-ию (барьерная) $\boxed{u_b(M) = N \cdot \dfrac{\ln\frac{R_{M_0M}}{a}}{\ln\frac{b}{a}}}$. она уд. условиям:

$\Delta u_b(M) = 0; \quad M \in D''$ (D'' — область между S и $L_b^{M_0}$)

$u_b(M)\big|_{M \in S} > 0$ и $u_b(M)\big|_{M \in L_b^{M_0}} = N$ (это когда $R_{M_0M} = b$)

для $\omega(M)$:

$$\begin{cases} \Delta\omega(M) = 0; & M \in D'' \\ \omega(M)\big|_{M \in S} = 0 \\ |\omega(M)|\big|_{M \in L_b^{M_0}} < N \end{cases}$$

эта обл. ограниченная! ↓ в ней принцип max

$|\omega(M)| \le u_b(M)$ на границе обл-ти D'' => в силу принципа max: $|\omega(M)| \le u_b(M)$ всюду в D''.

Фиксируем т. M и устремляем радиус „в" в ∞.

$\lim\limits_{в\to\infty} U_в(M)=0 \Rightarrow \omega(M)=0$; В силу произвольности выбора т. M получаем $\omega(M)\equiv 0$ в D'

$\Rightarrow U_1(M)=U_2(M)$; решение единственно.

Внешняя задача Неймана на пл-ти (в R^2)

$$\begin{cases} \Delta U=0; \; M\in D' \\ \dfrac{\partial U}{\partial n}(P)=V(P); \; P\in S \\ U\text{ - ограниченная} \to \text{регулярная на } \infty \end{cases};$$

классическое решение $U(M)\in C^1(\bar{D}')\cap C^2(D')$ и $V(p)\in C(S)$

(не ед!) $\int\limits_S V(p)\,dl=0$ усл. разрешимости.

$\boxed{Т}$ ед: классическое решение внешней задачи Неймана на пл-ти, ограниченное и регулярное на ∞, не единственно, а определяется с точн. до постоянного слагаемого.

Док-во: Применим I формулу Грина к регулярной на ∞ гармонической ф-ии $\omega(M)$.

Т.е. от противного: пусть $\exists$ 2 реш: $U_1(M)$ и $U_2(M)$

Введём $\omega(M)=U_1(M)-U_2(M)$:
$$\begin{cases} \Delta\omega(M)=0; \; M\in D \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial n}(P)=0; \; P\in S \\ \omega(M)\text{ - регулярная на } \infty \end{cases}$$

Теперь к $\omega(M)$ - 2 раза!
I фор. Грина.

$$\iint\limits_{D'}\omega(M)\cdot\underbrace{\Delta\omega(M)}_{0}\,dx\,dy=\int\limits_S\omega(p)\cdot\underbrace{\frac{\partial\omega(p)}{\partial n}}_{0}\,dl-\iint\limits_{D'}\operatorname{grad}\omega\cdot\operatorname{grad}\omega\,dx\,dy$$

$\Rightarrow \operatorname{grad}\omega\equiv 0$ в $D' \Rightarrow \omega(M)=\underset{\neq 0}{const}$ в $\bar{D}' \Rightarrow$
решение не единств!