Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ И СИСТЕМ ОДУ

ВТОРАЯ ЧАСТЬ ПРЕЗЕНТАЦИИ:

§3. ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДУ 1 ПОРЯДКА, ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ОДУ n-ГО ПОРЯДКА

§4. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДУ 1 ПОРЯДКА

§5. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И ПАРАМЕТРОВ

§3. Глобальная теорема существования и единственности решения задачи Коши

1. Задача Коши для ОДУ 1 порядка

Рассмотрим задачу: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \ t>0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ **(1)**

Определение 1 Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу Липшица, если $\exists\, L>0$, такая, что для $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ верно неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \le L \cdot |x_1 - x_2|$ **(2)**

$\boxed{\text{Пример 1}}$ Все функции, непрерывные и с ограниченной первой производной, принадлежат классу Липшица

В самом деле $|f(x_1) - f(x_2)| =$ (теорема Лагранжа) $=$

$= |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \le M_1 |x_1 - x_2|$, здесь $L = M_1 = \max\limits_{x \in \mathcal{D}(f)} |f'(x)|$

Пример 2 $f(x)=|x|$ принадлежит классу Липшица с константой $L=1$, так как $|f(x_1)-f(x_2)|=\big||x_1|-|x_2|\big|\le|x_1-x_2|$

известное числовое нер-во

Получается, что для принадлежности классу Липшица дифференцируемость не обязательна.

Пример 3 $f(x)=x^2$ не принадлежит классу Липшица, так как $|x_1^2-x_2^2|=|x_1+x_2|\cdot|x_1-x_2|$ и величина $|x_1+x_2|$ может быть сколь угодно большой.

это и есть глобальная теорема

Теорема 1 Если функция $f(\alpha,\beta)$ обладает следующими свойствами:

1) Непрерывна при $\forall(\alpha,\beta)$ как функция 2 переменных;

2) Принадлежит классу Липшица по переменной β (то есть $\exists L>0: \forall \alpha_1, \beta_1, \beta_2$ верно $|f(\alpha,\beta_1)-f(\alpha,\beta_2)|\le L\cdot|\beta_1-\beta_2|$

то решение задачи (1) существует и единственно для всех $0\le t<\infty$.

Доказательство Рассмотрим сначала задачу (1) на отрезке $0 < t \leq T_0$ (величину T_0 мы определим позже).

1) Проинтегрируем (1) с учетом начального условия $y(0) = y_0$ по переменной τ, $0 < \tau \leq t \leq T_0$, получим

$$\int_0^t \frac{dy}{dt} = \int_0^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau \Rightarrow y(t) - y_0 = \int_0^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau \Rightarrow$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau \ (3), \quad 0 \leq t \leq T_0 \quad (3)$$

Комментарий:
Уравнение (3) называется интегральным уравнением Фредгольма 2 рода. Инт. ур-ние — неизв. ф-ция $y(t)$ находится под интегралом, 2 рода — $y(t)$ есть еще и вне интеграла, Интегр. ур-ния, где $y(t)$ только под интегралом — 1 рода.

Интегральное уравнение (3) эквивалентно задаче (1). Действительно, оно получено из (1) интегрированием, а, если продифференцировать (3) по t, то получим (1).

2) Докажем, что при определенном выборе T_0 задача (3) имеет единственное решение.

Введем пространство функций $\bar{C}[0,T_0]$, состоящее из непрерывных на $[0;T_0]$ и удовлетворяющих условию $y(0)=y_0$. Как следует из доказанных выше теорем, это - полное метрическое пространство.

Далее, введем на $\bar{C}[0,T_0]$ интегральный оператор вида:

$$Ay(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))\,d\tau \quad (4)$$

Так как образом, задача (3) свелась к поиску неподвижной точки оператора A:

$$y(t) = Ay(t) \quad (5)$$

3) Так как $f(\alpha,\beta)$ непрерывна по 2 переменным, то оператор A переводит непрерывную функцию в непрерывную.

Далее, так как $Ay(0) = y_0 + \int_0^0 f(\tau, y(\tau))\,d\tau = y_0$ то оператор A переводит функции из $\bar{C}[0;T]$ в $\bar{C}[0,T]$

Пространство $\bar{C}[0,T]$, как уже говорилось, полное.

Осталось выяснить, при каких условиях A-сжимающий

Построим оценку для оператора A:

$$\rho(Ay_1(t), Ay_2(t)) = \max_{0\le t\le T_0} |Ay_1(t) - Ay_2(t)| =$$

$$= \max_{0\le t\le T_0} \left| y_0 + \int_0^t f(\tau, y_1(\tau))\,d\tau - y_0 - \int_0^t f(\tau, y_2(\tau))\,d\tau \right| =$$

$$= \max_{0\le t\le T_0} \left| \int_0^t (f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau)) \,d\tau \right| \le$$

$$\le \max_{0\le t\le T_0} \int_0^t | f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau) |\,d\tau \le$$

подинтегралом функция ≥ 0

$$\le \int_0^{T_0} | f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau) |\,d\tau \le$$

условие Липшица

$$\le L \int_0^{T_0} |y_1(\tau) - y_2(\tau)|\,d\tau \le L \cdot \max_{0\le t\le T} |y_1(t) - y_2(t)| \cdot \int_0^{T_0} d\tau =$$

$$= LT_0 \cdot \max_{0\le t\le T} |y_1(t) - y_2(t)| = LT_0 \cdot \rho(y_1(t), y_2(t)).$$

Итак, мы получили неравенство

$$\rho(Ay_1(t), Ay_2(t)) \le LT_0 \cdot \rho(y_1(t), y_2(t)) \quad (6)$$

откуда следует, что если $LT_0 = \alpha < 1$, то A - сжимающий.

Таким образом, если $LT_0 = \alpha < 1$, то оператор A (5) имеет единственную неподвижную точку $\Rightarrow$ интегральное уравнение (3) имеет, и притом единственное решение $\Rightarrow$ решение задачи (1) на промежутке $[0, T_0]$ существует и единственно (принцип сжимающих отображений)

4) Докажем, что решение задачи (1) существует и единственно для всех $0 < t < \infty$. Обозначим $y(T_0) = y_{10}$ и рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y(t)), & T_0 < t \le 2T_0 \\ y(T_0) = y_{10} \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку $f(\alpha, \beta)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица при всех (α, β), то решение задачи (7) также $\exists$ и ед. Далее, рассматривается отрезок $[2T_0; 3T_0]$, и т.д. Теорема доказана

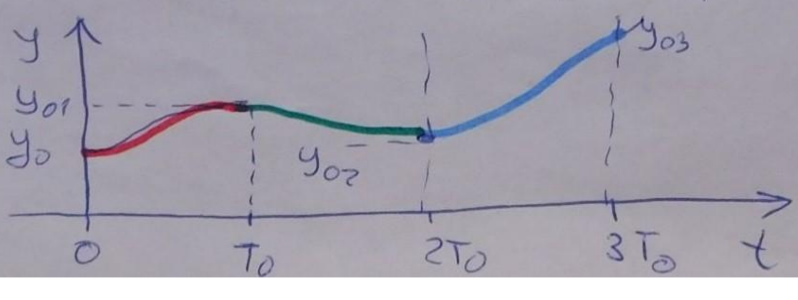

Рисунок 3. Продолжение решения на всю прямую

ГЛАВА 2, СТР. 28

Замечание 1 Поскольку при доказательстве теоремы 1 предполагается непрерывность функции $f(\alpha,\beta)$ на всей плоскости R^2, то точно также можно рассмотреть задачу (1) на отрезке $[-T_0, 0]$, далее на $[-2T_0, -T_0]$, ..., (все полностью аналогично), и, тем самым, установить существование и единственность решения задачи Коши (1) на всей числовой прямой, $-\infty < t < \infty$.

2. Следствие из теоремы 1

Если рассмотреть задачу Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = a(t)\cdot y(t) + b(t), & t>0 \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad (8)$$

при условии, что функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны при всех $-\infty<t<\infty$, то ее решение будет существовать и будет единственно при $0<t<\infty$.

Доказательство В самом деле, пусть сначала $-R \le t \le R$.

Обозначим $f(t,y) = a(t)\,y(t) + b(t)$, получим:

$$|f(\alpha,\beta_1) - f(\alpha,\beta_2)| = |a(\alpha)\beta_1 + b(\alpha) - a(\alpha)\beta_2 - b(\alpha)| = |a(\alpha)|\cdot|\beta_1-\beta_2| \le$$
$$\le \max_{t\in[-R;R]} |a(\alpha)|\cdot|\beta_1-\beta_2|, \text{ то есть } L = \max_{-R\le t\le R} |a(t)| \qquad (9)$$

Тем самым, функция $f(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию Липшица на $\forall$ конечном отрезке и, следовательно, решение задачи (8) будет существовать и будет единственным при $t \in [-R; R]$. Устремляя $R \to \infty$, получаем требуемое.

Следствие доказано.

3. Глобальная теорема для нормальной системы

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы ОДУ:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)), \quad t>0 \\
\dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \\
y_1(0) = y_{1,0}; \quad y_2(0) = y_{2,0}; \dots, y_n(0) = y_{n,0}
\end{cases}
\quad (10)
$$

или, в векторном виде:

$$
\frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{Y}(t)), \; t>0
$$

$$
\vec{Y}(0) = \vec{Y}_0, \quad (10'),
$$

где:

$$
\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}; \quad (11)
$$

$$
\vec{Y}_0 = \begin{pmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \dots \\ y_{n,0} \end{pmatrix}
$$

Теорема 2 (глобальная теорема для нормальной системы)

Если все функции $f_k(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ непрерывны в R^{n+1} и удовлетворяют условию Липшица по переменным $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$

(то есть, $\exists L>0$ такая, что $\forall\ \alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ и $\forall\ 1 \le k \le n$ верно нер-во $|f(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) - f(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)| \le L \cdot (|\beta_1 - \gamma_1| + |\beta_2 - \gamma_2| + \dots + |\beta_n - \gamma_n|)$),

то решение задачи (10) существует и единственно при $0 \le t < \infty$.

Замечание 1 Доказательство теоремы 2 полностью повторяет доказательство теоремы 1, с только той разницей, что пространство $C[a,b]$ заменяется на пространство n-мерных вектор-функций, непрерывных на $[a,b]$, с метрикой $\rho(\vec{x}(t), \vec{y}(t)) = \max\limits_{a \le t \le b} |x_1(t) - y_1(t)| + \dots + \max\limits_{a \le t \le b} |x_n(t) - y_n(t)|$, поэтому приводить его не будем (в билет входит только формулировка)

Замечание 2 Точно так же можно установить существование и единственность решения (10) на всей числовой прямой.

Следствие Решение задачи Коши для системы линейных ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)\, y_1(t) + a_{12}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{1n}(t) y_1(t) + b_1(t) \quad , t>0 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)\, y_1(t) + a_{22}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{2n}(t)\, y_n(t) + b_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)\, y_1(t) + a_{22}(t)\, y_2(t) + \dots + a_{nn}(t)\, y_n(t) + b_n(t) \\ y_1(0) = y_{1,0}; \; y_2(0) = y_{2,0}; \; \dots \; y_n(0) = y_{n,0} \end{cases} \quad (12)$$

Здесь:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1n}(t) \\ \dots\dots \\ a_{n1}(t) \dots a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\vec{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \; \vec{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

или, в матричном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}}{dt} = A(t)\vec{Y}(t) + \vec{B}(t), \; t>0 \\ \vec{Y}(0) = \vec{Y}_0 \end{cases} \quad (12')$$

при условии, что все $a_{ik}(t)$ и $b_k(t)$ непрерывны на всей числовой прямой, существует и единственно для всех $-\infty < t < \infty$

4. Глобальная теорема для ОДУ n-го порядка

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ n-го порядка:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \quad t>0 \\ y(0)=y_0; \\ y'(0)=y_1; \\ \ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}. \end{cases} \qquad (14)$$

Теорема 3 Если функция $f(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ непрерывна в R^{n+1} и по переменным $\beta_1, \ldots, \beta_n$ удовлетворяет условию Липшица (то есть $\exists L>0$ такая, что $\forall \alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$) верно нер-во $|f(\alpha, \beta_1, \ldots \beta_n) - f(\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)| \le L(|\beta_1-\gamma_1| + \ldots + |\beta_n-\gamma_n|)$) то решение задачи (14) существует и единственно для всех $0 \le t < \infty$ (Замечание: можно док-ть и для $-\infty < t < \infty$)

<u>Доказательство</u> Введем вектор-функцию

$$\vec{Z}(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_n(t)\end{pmatrix}, \text{ где } z_1(t)=y(t),\ z_2(t)=y'(t), \dots,\ z_n(t)=y^{(n-1)}(t). \quad (15)$$

и с ее помощью поставим задачу, эквивалентную (14):

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt}=z_2(t)=\underline{f_1(t,z_1,\dots,z_n)}, \quad t>0 \\ \dfrac{dz_2}{dt}=z_3(t)=f_2(t,z_1,\dots,z_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dt}=z_n(t)=f_{n-1}(t,z_1,\dots,z_n); \\ \dfrac{dz_n}{dt}=f(t,z_1(t),\dots,z_n(t))=f_n(t,z_1,\dots,z_n); \\ z_1(0)=y_0,\ z_2(0)=y_1,\dots,z_n(0)=y_n. \end{cases} \quad (16)$$

(обозначим z_2 так)

Функции $f_1(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_n),\dots,f_n(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_n)$ являются очевидно, непрерывными в R^{n+1} и по переменным $\beta_1,\dots,\beta_n$ удовлетворяют условиям Липшица. Тем самым, выполнены условия теоремы 2 и решение задачи (16) существует и единственно. Так как задачи (14) и (16) эквивалентны, то существует и единств. реш. задачи (14) (на мн-ве $-\infty<t<\infty$).

<u>Теорема доказана</u>

Следствие Решение задачи Коши для линейного уравнения n-го порядка

$$\begin{cases} y^{n}(t) = a_1(t)\, y^{(n-1)}(t) + a_2(t)\, y^{(n-2)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\, y'(t) + a_n(t)\, y(t) + b(t), \ t>0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)} = y_{n-1} \end{cases} \quad (17)$$

При условии, что функции $a_1(t), \dots, a_n(t), b(t)$ определены и непрерывны на всей числовой прямой, существует и единственно для всех $-\infty < t < \infty$.

Доказательство: Точно так же введем $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = y'(t), \dots, z_n(t) = y^{(n-1)}(t)$. Тогда получается задача, аналогичная задаче (16), где $f(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = a_1(t)\, y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)\, y(t) + b(t)$, которая, в силу непрерывности $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t), b(t)$ непрерывна как функция $f(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n)$ в R^{n+1} и удовлетворяет на $\forall$ конечном $-R \le t \le R$ усл. Липшица $\Rightarrow$ реш. $\exists$ и ! на $[-R; R]$. Далее переходим к пределу при $R \to \infty$. Следствие доказано.