Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

# ГЛАВА3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА

## §5. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

# §5. Уравнение Эйлера



Уравнение Эйлера имеет вид:

$$Ly(x) = x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} x \cdot y'(x) + a_n y(x) = f(x) \quad (1)$$

где $a_k = const_k$, $k = 1, \dots, n$.

Поскольку методы построения частного решения неоднородного уравнения уже рассматривались, то будет достаточно построить ФСР однородного уравнения

$$Ly(x) = x^n y^{(n)}(x) + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \quad (2)$$

Сделаем замену переменной:

$$x = e^t, \text{ тогда } \frac{dx}{dt} = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}. \quad (3)$$

Получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = e^t \cdot e^{-t} \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = e^{-t} \frac{d}{dt}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt}\right) = e^{-t}\left(-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2y}{dt^2}\right) =$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt} \quad (5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right)$$

$$= e^{-t}\left(-2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) + e^{-2t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\right) = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^2} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \quad (6)$$

Действуя аналогично, получаем, что уравнение (2) заменой (3) переводится в уравнение с постоянными коэффициентами, причем коэф-ты при выражениях для $y', y'', y''', \ldots$ соответствуют следующим выражениям для характер. уравнения:

$$\left.\begin{aligned} & x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \lambda \\ & x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \Rightarrow \lambda(\lambda-1) \\ & x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} \Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}\right\} (7)$$

и. т. д. (можно доказать по индукции):

$$x^k\frac{d^ky}{dx^k} \Longrightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1) \quad (8)$$

В результате получаем после замены (3) из уравнения (2) уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение для которого имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (9)$$

**Пример 1**
**Фил., 589**

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x = e^t \Rightarrow (x^n = e^{nt}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \Rightarrow \underline{y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3}$$

---

**Пример 2**
**Фил., 591**

$$x^3y''' + xy' - y = 0, \quad x = e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t \Rightarrow (t = \ln|x|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x^2 \ln|x|}$$

---

**Пример 3**
**Фил., 594**

$$x^2y'' + xy' + 4y = 10x, \quad \text{1)}\ x = e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} + 4y = 10e^t \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 10e^t}$$

2) $y(t)_{одн} \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i \Rightarrow \underline{y_{одн}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t}$

3) $y_{неод}(t)$, не резонанс $\Rightarrow y_{ч,неод} = Ae^t \Rightarrow Ae^t + 4Ae^t = 10e^t \Rightarrow A = 2 \Rightarrow \underline{y_{ч,неод} = 2e^t}$

4) $y_{общ}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 2e^t \Rightarrow \boxed{y_{общ}(x) = C_1 \cos(2\ln|x|) + C_2 \sin(2\ln|x|) + 2x}$