Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс семинаров для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕМА 5.

ОДУ, не разрешенные относительно производной

СЕМИНАРЫ:

ТЕМА ЗАНЯТИЯ №5:

УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ стр.1

Опр 1 Уравнение вида $\varphi(x, y, y')=0$ (1) называется не разрешенным относительно производной.

1. Как решать?

Надо разрешить хотя бы относительно чего-нибудь

$$\varphi(x,y,y')=0 \to \begin{cases} y'=f(x,y) \quad (2) \\ y=g(x,y') \quad (3) \\ x=h(y,y') \quad (4) \end{cases}$$

(2) — здесь все ясно

(3), (4) — эти задачи решаются методом задания функций в параметрическом виде:

$$\boxed{\begin{cases} x=x(p) \\ y=y(p) \\ p=\frac{dy}{dx} \end{cases}} \quad (5)$$

2. Уравнение типа (3)

$y=g(x,y')$, введем параметр $p=\frac{dy}{dx}$

тогда $dy=p\,dx$; $dx=\frac{dy}{p}$ (6), получим:

$$y=g(x,p) \Rightarrow dy=p\,dx=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial p}dp \Rightarrow \left(p-\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx=\frac{\partial g}{\partial p}dp$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp}=\frac{\frac{\partial g}{\partial p}}{p-\frac{\partial g}{\partial x}} \Rightarrow x=x(p,c) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x(p,c) \\ y=g(x,y')=g(x(p,c),p) \end{cases}}$$

← решаем это ур-ние

Ответ

Пример 1

Фил 271

$y = y'^2 + 2y'^3 \Rightarrow y' = p$, тогда

$y = p^2 + 2p^3 \Rightarrow dy = 2p\,dp + 6p^2 dp \Rightarrow$

$\Rightarrow (dy = p\,dx) \Rightarrow p\,dx = 2p\,dp + 6p^2 dp \Rightarrow$

$dx = 2dp + 6p \Rightarrow x = 2p + 3p^2 + C$

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C \\ y = p^2 + 2p^3 \end{cases}}$

Можно сделать проверку:

$dx = (2 + 6p)dp$

$dy = (2p + 6p^2)dp \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p$, все верно

3. Уравнение типа (4)

$x = h(y, y') \Rightarrow$ $\left(y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx \quad dx = \frac{dy}{p} \right)$

$\Rightarrow x = h(y, p) \Rightarrow$ берем дифференциал $\Rightarrow$

$\Rightarrow d\cancel{y} = \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp \Rightarrow d\cancel{x} = \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp \Rightarrow$

$\frac{dy}{p} = \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial p} dp \Rightarrow \left(\frac{1}{p} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial h}{\partial p} dp \Rightarrow$ $\boxed{\frac{dy}{dp} = \frac{\frac{\partial h}{\partial p}}{\frac{1}{p} - \frac{\partial h}{\partial y}}}$ решаем это уравнение $\Rightarrow y = y(p, C)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = h(y, p) \\ y = y(p, C) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = h(y(p, C), p) \\ y = y(p, C) \end{cases}}$ ← ответ

Пример 2
Фил. 267

$x = y'^3 + y' \Rightarrow \left(y' = p,\ \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p\,dx \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = p^3 + p \Rightarrow dx = (3p^2+1)\,dp \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dy}{p} = (3p^2+1)\,dp \Rightarrow dy = 3p^3 + p\,dp \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{p^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{p^2}{2} + C \end{cases}}$ ← ответ

Comment: Проверка вычислений состоит в том, чтобы убедиться $\frac{dy}{dx} = p$, в нашем случае $\begin{matrix} dy = 3p^3 + p \\ dx = 3p^2 + 1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p$, все верно

Пример 3
Фил. 272

$y = \ln(1+y'^2)$, $y' = p \Rightarrow y = \ln(1+p^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow dy = \frac{2p\,dp}{1+p^2} \Rightarrow p\,dx = \frac{2p\,dp}{1+p^2} \Rightarrow dx = \frac{2\,dp}{1+p^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\,\mathrm{arctg}\,p + C \\ y = \ln(1+p^2) \end{cases}$ Проверим: $\begin{cases} dy = \frac{2p\,dp}{1+p^2} \\ dx = \frac{2\,dp}{1+p^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p$, все верно

На дом: 269, 270, 274