Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА

ВО ВТОРОЙ ЧАСТИ ПРЕЗЕНТАЦИИ ИЗЛОЖЕНЫ РАЗДЕЛЫ:

§3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§1. Линейные ОДУ n-го порядка. Основные понятия.

§2. Линейные однородные ОДУ n-го порядка.

§3. Линейные однородные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений (Ф.С.Р.)

§4. Методы построения частных решений неоднородного ОДУ (метод подбора; метод вариации постоянных).

§§ 5-8. Аналогично для линейных систем ОДУ

§3. Линейные однородные ОДУ с постоянными коэффициентами. Построение ФСР.

В этом параграфе будем исследовать уравнение вида:

$$Ly = y^{n}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0, \quad (20)$$

или $Ly = 0$, где $a_1, \dots, a_n$ – постоянные

Решения уравнения (20) будем искать в виде

$y(t) = e^{\lambda t}$ (21). Здесь λ – неизвестна.

Тогда $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \dots, y^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$ (22)

Подставив (21)-(22) в уравнение (20), и, сократив на $e^{\lambda t}$, получим:

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (23)$$

Уравнение (23) называется характеристическим. Оно является алгебраическим уравнением n-го порядка, и для него справедлива следующая теорема

Теорема6 (Основная теорема алгебры) Уравнение (23) имеет ровно n корней (с учетом их кратности), вообще говоря, комплексных.

В зависимости от типа корней мы будем различать 4 случая.

Случай 1 Все корни уравнения (23) простые (то есть кратности, равной 1) и вещественные, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Тогда ФСР решений уравнения (20) строится из функций

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \; y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \dots, y_n(t) = e^{\lambda_n t} \quad (24)$$

Докажем, что система функций (24) образует ФСР. Прежде всего, все $y_k(t)$ являются решениями уравнения (20). Далее, матрица Вронского для этих функций имеет вид

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \dots, & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

и ее определитель

$$\det W(t) = e^{n(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (25)$$

Второй сомножитель в (25) представляет собой определитель Вандермонда, который $\neq 0$, если все λ_i попарно не равны друг другу. Итак $\det W(y_1(t), \dots, y_n(t)) \neq 0$, и согласно теореме 2, функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ линейно независимы $\Longrightarrow$

$$y_{общ,однор}(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t) =$$
$$= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (26)$$

Замечание Аналогично, с помощью преобразования $\det W(y_1(t), \dots, y_n(t))$ к определителям, для которых из лин. алгебры известно, что они $\neq 0$, доказываются и остальные случаи

Пример 1
Филиппов, 511

$y''+y'-2y=0 \Rightarrow L(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-2\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-2t}}$

Пример 2
Филиппов, 513

$y''-2y'=0 \Rightarrow L(\lambda)=\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=2\end{array}\right.$

$\Rightarrow y(t)=C_1+C_2e^{2t}$

Случай 2 Уравнение (23) содержит комплексный корень $\lambda=\alpha+i\beta$. Принципиально это случай ничем не отличается от случая 1 и функция $y(t)=e^{\lambda t}=e^{(\alpha+i\beta)t}=$
$=e^{\alpha t}\cos\beta t+ie^{\alpha t}\sin\beta t$ **(26)** (формула Эйлера) является решением уравнения (20). Однако, если <u>коэффициенты</u> уравнения (20) $a_1, a_2, \dots a_n$ являются <u>вещественными</u>

то есть возможность построить ФСР только из вещественных функций. Объясним, почему это так.

Лемма Если коэф-ты $a_1, \dots, a_n$ уравнения (23) являются вещественными и $\lambda = \alpha + i\beta$ является корнем уравнения (23), то и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ также является корнем уравнения (23), причем той же кратности.

Доказательство Докажем, что $\bar{\lambda}$ - корень уравнения (23). Пользуясь свойствами комплексных чисел, получим:

$$L(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^n + a_1 \bar{\lambda}_1^{n-1} + \dots + a_{n-1}\bar{\lambda} + a_n = \overline{(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n)} =$$
$$= \overline{L(\lambda)} = 0.$$ Докажем равенство кратностей корней.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ - корни уравнения (23)

Тогда $L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\dots+a_{n-1}\lambda+a_n=P_n(\lambda)=$ стр16

(то есть многочлен степени n, причем с вещественными коэффициентами) $=(\lambda-\alpha-i\beta)(\lambda-\alpha+i\beta)P_{n-2}(\lambda)=$

$=(\lambda^2-2\alpha\lambda+\beta^2)P_{n-2}(\lambda)$ (27) вещественные

Из (27) следует, что $P_{n-2}(\lambda)$ – многочлен с вещественными коэффициентами. Так как $\lambda=\alpha+i\beta$ является корнем уравнения (23) кратности >1, то $P_{n-2}(\lambda)=0$ (28)

Следовательно, $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ также является корнем уравнения (28), так как коэффициенты многочлена $P_{n-2}(\lambda)$ – вещественные. Продолжая таким же образом, приходим к выводу, что кратность корней $\lambda=\alpha+i\beta$ и $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ одинакова.

Итак, функции

$$\begin{cases} z_1(t)=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t) & (29)\\ z_2(t)=e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t) & (30)\end{cases}$$

– решения уравнения (20).

Так как множество решений (20) – линейное пространство, то функции

$$\left[\begin{array}{l} y_1(t) = \dfrac{z_1(t)+z_2(t)}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad (31) \\ y_2(t) = \dfrac{z_1(t)-z_2(t)}{2i} = e^{\alpha t}\sin\beta t \quad (32) \end{array}\right.$$

также являются решениями ур-ния (20). Их и надо занести в ФСР

Пример 3 (Филиппов, 515)

$y'' - 4y' + 5y = 0 \Rightarrow L(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm i \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1(t) = e^{2t}\cos t,\ y_2(t) = e^{2t}\sin t \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{y(t) = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 e^{2t}\sin t}$

Пример 4 Филиппов, 517

$y'' + 4y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

$e^{2it} = \cos 2t + i\sin 2t \Rightarrow \underline{y(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t}$

Пример 5
Филиппов, 519

$$y^{IV} - y = 0 \Rightarrow L(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1, \ \lambda_{3,4} = \pm i, \ e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

Случай 3 λ_0 - вещественный корень уравнения (23) кратности $k \geq 1$. Докажем, что функции $e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ являются в этом случае решениями уравнения (20).

Доказательство. Ограничимся доказательством для функции $te^{\lambda_0 t}$. Дифференцируя по t, получим:

$$(te^{\lambda_0 t})' = \lambda_0 t e^{\lambda_0 t} + e^{\lambda_0 t};$$

$$(te^{\lambda_0 t})'' = (\lambda_0 t e^{\lambda_0 t} + e^{\lambda_0 t})' = \lambda_0^2 t e^{\lambda_0 t} + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 t};$$

$$(te^{\lambda_0 t})''' = (\lambda_0^2 t e^{\lambda_0 t} + 2\lambda_0 e^{\lambda_0 t})' = \lambda_0^3 t e^{\lambda_0 t} + 3\lambda_0^2 e^{\lambda_0 t}; \quad (33)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$(te^{\lambda_0 t})^{(n)} = \lambda_0^n t e^{\lambda_0 t} + n\lambda_0^{n-1} e^{\lambda_0 t}$$

Подставим формулы (33) в оператор $L(y)$:

$$L(te^{\lambda_0 t}) = (te^{\lambda_0 t})^{(n)} + (a_1 t e^{\lambda_0 t})^{(n-1)} + \ldots (a_{n-1} t e^{\lambda_0 t})' + a_n t e^{\lambda_0 t} =$$

$$= (t\lambda_0^n e^{\lambda_0 t} + n\lambda_0^{n-1} e^{\lambda_0 t}) + a_1(t\lambda_0^{n-1} e^{\lambda_0 t} + (n-1)\lambda_0^{n-2} e^{\lambda_0 t}) + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}(t\lambda_0 e^{\lambda_0 t} + e^{\lambda_0 t}) + a_n t e^{\lambda_0 t} =$$

$$= e^{\lambda_0 t} \cdot t \underbrace{(\lambda_0^n + a_1\lambda_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n)}_{0 =} + e^{\lambda_0 t} \underbrace{(n\lambda_0^{n-1} + a_1\lambda^{n-2}(n-1) + \ldots + a_{n-1})}_{=0} = 0$$

$L(\lambda_0) = 0$, т.к. λ_0 – корень хар. ур-ния

$$\frac{d}{d\lambda}(L(\lambda))\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0,$$

так как кратность корня λ_0 равна k, $k>1$ поэтому $L(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k P_{n-k}(\lambda)$

утверждение доказано

Пример 6
Филиппов 522

$$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow L(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$, кратность 2 $\Rightarrow$

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

Пример 7 (Филиппов, 524)

$$y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0 \Rightarrow L(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 =$$
$$= \lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^3(\lambda-3)^2 = 0 \Rightarrow$$

1) корень $\lambda = 0$, кратность 3 $\Rightarrow$ ему соотв. реш. $1, t, t^2$
2) корень $\lambda = 3$, кратность 2 $\Rightarrow$ ему соотв реш. e^{3t}, te^{3t}.

$$\Rightarrow \underline{y(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 e^{3t} + C_5 \cdot t e^{3t}}$$

Случай 4 Число $\lambda = \alpha + i\beta$ является корнем уравнения (23) кратности k. Этот случай является комбинацией двух предыдущих. Если все коэф-ты (23) вещественные, то в ФСР следует занести функции:

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t}\cos\beta t;\ te^{\alpha t}\cos\beta t;\ \dots;\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ &e^{\alpha t}\sin\beta t;\ te^{\alpha t}\sin\beta t;\ \dots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned} \qquad (34)$$

Пример 8
Филиппов, 530

$$y^{V} + 8y^{III} + 16y' = 0 \Rightarrow L(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda =$$
$$= \lambda(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = \lambda(\lambda^2+4)^2 = \lambda(\lambda+2i)^2(\lambda-2i)^2 = 0$$

корень $\lambda = 0$ – кратность 1 $\Rightarrow$ соотв. $1 = e^{0t}$

корни $\lambda = \pm 2i$, кратность 2 $\Rightarrow$ соотв: $\cos 2t$, $\sin 2t$, $t\cos 2t$, $t\sin 2t$

$$\Rightarrow \underline{y(t) = C_1 + C_2\cos 2t + C_3 \sin 2t + C_4 t\cos 2t + C_5 t\sin 2t}$$

<u>На дом</u> 514, 516, 518, 520, 523, 525, 527, 528