Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения

«ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ n-го ПОРЯДКА

ВО ВТОРОЙ ЧАСТИ ПРЕЗЕНТАЦИИ ИЗЛОЖЕНЫ РАЗДЕЛЫ:

§3. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ПОСТРОЕНИЕ ФСР

§4. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОДУ

§3. Линейные однородные системы ОДУ с постоянными коэффициентами. Построение ФСР

$a_{ik} = const$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Рассмотрим системы ОДУ вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11} y_1(t) + a_{12}(t) y_2(t) + \dots + a_{1n} y_n(t) \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21} y_1(t) + a_{22}(t) y_2(t) + \dots + a_{2n} y_n(t) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1} y_1(t) + a_{n2}(t) y_2(t) + \dots + a_{nn} y_n(t) \end{cases} \quad t \in R \quad (15)$$

, или, в матричном виде

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = A\vec{Y}(t), \ t \in R, \quad (15')$$

Будем искать решение системы в виде

$$\vec{Y}(t) = \vec{h} e^{\lambda t} \quad (16)$$

($\vec{h}$ и λ надо найти)

Подставим (16) в (15'), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{h} e^{\lambda t}\right) = A\vec{h} e^{\lambda t} \Longleftrightarrow \lambda \vec{h} e^{\lambda t} = A\vec{h} e^{\lambda t} \Longleftrightarrow e^{\lambda t}\left(A\vec{h} - \lambda \vec{h}\right) = 0$$

$$\Rightarrow A\vec{h} = \lambda \vec{h} \quad (17)$$

Получилась алгебраическая задача на собственные значения и собственные векторы матрицы A.
Чтобы ее решить, перепишем (17) в виде:

$$(17) \Rightarrow (A - \lambda E)\vec{h} = 0 \quad (18)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (18) имеет ненулевые решения, тогда и только тогда, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что (19) — алгебраическое ур-ние n-го порядка. Уравнение (19) называется характеристическим. Как известно (основная теорема алгебры), оно имеет ровно n корней (с учетом их кратности), вообще говоря, комплексных. Также, как и для ОДУ n-го порядка, рассмотрим различные случаи:

Случай 1 Все корни уравнения (19) простые (то есть кратности, равной 1), и вещественные. В этом случае мы для каждого $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ имеем ровно 1 собственный вектор (с точностью до множителя) $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_n$.

Эти векторы, как следует из курса линейной алгебры, линейно независимы, поэтому линейно независимы и функции $\vec{Y}_1(t) = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}$; $\vec{Y}_2(t) = \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t}$; …, $\vec{Y}_n(t) = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$.

(Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $\det W(0) \neq 0$, далее th 3.)

Поэтому общее решение системы (15) в этом случае имеет вид:

$$\vec{Y}_{\text{общ,одн}}(t) = C_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{h}_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (20)$$

Пример 1
Фил., 786

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}.$$ В матричном виде:

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\vec{Z}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \vec{Z}.$$

1) $$\det(A - \lambda E) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$\lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = 5$

2) $$\lambda_1 = 1; \quad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{h}_1 = \vec{h}_1 \Leftrightarrow (A - E)\vec{h}_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

3) $$\lambda_2 = 5; \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} \Rightarrow A\vec{h}_2 = 5\vec{h}_2 \Leftrightarrow (A - 5E)\vec{h}_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3p + q = 0 \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

4) Решение: $$\underline{\vec{Z} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}},$$ или $$\underline{\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}}$$

Случай 2 Имеется вещественный корень λ_0, его кратность равна $K>1$.

1) Прежде всего, надо определить размерность пространства собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0:

$$S = \dim X_{\lambda_0} = n - rang(A - \lambda_0 E) \quad (21)$$

Comment: $\dim X_{\lambda_0} \leq K$.

2а) Если $S=K$, то у нас фактически предыдущий случай, т.к. $\exists$ K лин. нез. векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_K$, соотв. с.зн. λ_0

2б) Если $S<K$, то $m = K - S$ (22), и

$$\vec{y}(t) = \vec{P}_m(t)\, e^{\lambda_0 t} \quad (23)$$

, где $\vec{P}_m(t)$ - вектор, каждая компонента которого - многочлен степени m с неопред. коэф-тами. Выражение (23) подставляется в (15), в рез-те находятся K линейно незав. решений.

Пример 2
Фил., 794

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \Rightarrow$$

$\lambda = 1$, кратность $= 2$

1) $\mathrm{rang}(A - \lambda E) = \mathrm{rang}(A + E) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1$

$\dim X_\lambda = n - \mathrm{rang}(A - \lambda E) = 2 - 1 = 1 = S$

$m = k - \dim X_\lambda = k - S = 2 - 1 = 1$

2) $\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{P}_1(t) e^{-t} = \begin{pmatrix} a + bt \\ g + ht \end{pmatrix} e^{-t} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (a + bt)e^{-t} \\ y(t) = (g + ht)e^{-t} \end{cases} \Rightarrow$ (в систему)

$$\Rightarrow \begin{cases} (-a - bt)e^{-t} + be^{-t} = -3(a + bt)e^{-t} + 2(g + ht)e^{-t} \\ (-g - ht)e^{-t} + he^{-t} = -2(a + bt)e^{-t} + (g + ht)e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - bt + b - 3a - 3bt + 2g + 2ht \\ -g - ht + h = -2a - 2bt + g + ht \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b = -3b + 2h \\ -a + b = -3a + 2g \\ -h = -b + h \\ -g + h = -2a + g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = b \\ 2g = 2a + b \\ h = b \\ 2g + 2a + b \end{cases} \Rightarrow \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} a + bt \\ a + \frac{b}{2} + bt \end{pmatrix} e^{-t} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + b\begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2} + t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Случай 3 Существует комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$

$\vec{h} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$ ← соответвующий ему собственный вектор; Тогда, если матрица A – вещественная, то ∃ также комплексно сопр. корень хар. ур-ния $\bar{\lambda} = \underline{\alpha} - i\beta$, причем собственный вектор, соотв. ему, равен $\bar{\vec{h}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$

При этом вещественная и мнимая части:

$$\vec{h} e^{\lambda t} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \right) e^{\alpha t} (\cos\beta t + i \sin\beta t) =$$

$$\underbrace{\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cos\beta t - \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \sin\beta t \right) e^{\alpha t}}_{\vec{Y}_1(t)} + i \underbrace{\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sin\beta t + \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \cos\beta t \right) e^{\alpha t}}_{\vec{Y}_2(t)}$$

являются по отдельности решениями (15) ⇒

$$\vec{Z}(t) = C_1 \vec{Y}_1(t) + C_2 \vec{Y}_2(t) \quad (24)$$

Пример 3
Фил., 789

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \pm i$$

2) $\lambda = 2+i$ $\quad \vec{h} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$; (компл)

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-2-i & 1 \\ -2 & 3-2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -p - ip + q = 0 \\ -2p + q - iq = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = p(i+1) \\ q = \dfrac{2p}{1-i} = \dfrac{2p(1+i)}{(1+i)(1-i)} = p(i+1) \end{cases} \Rightarrow \vec{h} = p\begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 \\ \text{[redacted]} \end{pmatrix} + ip\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h} e^{\lambda t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \text{[redacted]} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) e^{2t}(\cos t + i \sin t) =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \text{[redacted]} \end{pmatrix} e^{2t}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \sin t}_{\vec{r}_1(t)} + i\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \text{[redacted]} \end{pmatrix} e^{2t} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \cos t}_{\vec{r}_2(t)}\Bigg) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Z}(t) = C_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t\right)e^{2t} + C_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t\right)e^{2t}}$$

Случай 4 $\lambda = \alpha + i\beta$, кратность K.

Действуем также как и в случае 2, получаем $\vec{P}_m(t)e^{\lambda t}$, а затем выделяем веществ. и мнимую части.

Comment $\vec{P}_m(t)$ – многочлен с компл. коэф-тами

§4. Построение решения неоднородной нормальной линейной системы ОДУ.

Для построения частного решения неоднородной линейной нормальной системы ОДУ существ. 2 метода.

1. Метод неопределенных коэффициентов

Метод применим, если A - матрица с постоянными коэф-тами, и правая часть - квазимногочлен:

$$\frac{d\vec{Y}}{dA} = A\vec{Y} + \vec{P}_m(t)e^{\alpha t}, \qquad (25)$$

где $a_{ik} = const$, $\vec{P}_m(t)$ - вектор, каждая компонента которого представляет собой многочлен степени m.

а) **нет резонанса,** для всех корней характ. ур-ния $\det(A-\lambda E)$ верно $\lambda \neq \alpha$.

Тогда частное решение ищется в виде

$$\vec{Y}_{част, неодн}(t) = \vec{Q}_m(t)\, e^{\alpha t} \quad (26)$$

б) **резонанс** $\alpha = \lambda_0$, причем степень корня λ_0 равна K. Тогда частное решение ищется в виде

$$\vec{Y}_{част, неод}(t) = \vec{Q}_{m+k}(t)\, e^{\lambda_0 t} \quad (27)$$

Выражения (26), либо (27) подставляются в исходную систему (15), находятся коэф-ты многочлена Q.

Пример 4
фил., 828

$$\begin{cases}\dot x = 3x+2y+4e^{5t}\\ \dot y = x+2y\end{cases};$$

1) $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$; $\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{pmatrix}=$

$=(\lambda-2)(\lambda-3)-2=\lambda^2-5\lambda+4=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=1\neq5\\ \lambda_2=4\neq5\end{cases}$ – нерезонансный случай

2) $\vec Z_{одн}(t)$? **а)** $\lambda=1\Rightarrow (A-E)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow a+b=0\Rightarrow \vec h_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

б) $\lambda=4 \Rightarrow (A-4E)\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow g-2h=0\Rightarrow \vec h_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec Z_{одн}(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t}$;

3) $\vec F(t)=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}e^{5t}=\vec P_0(t)e^{5t}$, не резонанс $\Rightarrow \vec Z_{част,неодн}(t)=\vec Q_0(t)e^{5t}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}e^{5t}$

$\Rightarrow$ в систему $\Rightarrow \begin{cases}5pe^{5t}=3pe^{5t}+2qe^{5t}+4e^{5t}\\ 5qe^{5t}=pe^{5t}+2qe^{5t}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5p=3p+2q+4\\ 5q=p+2q\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}p-q=2\\ p=3q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=3\\ q=1\end{cases}\Rightarrow \vec Z_{част,неод}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}$

$$\boxed{\underline{\text{Ответ}}\ \ \vec Z_{общ,одн}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}}$$

Пример 5
Фил. 830

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda E) =$

$$= \det\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-1) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$ – резонанс

$\lambda = 2$, кратность 1

2) Правая часть: $\begin{cases} \vec{P}_0(t)e^{2t} \\ \text{резонанс, кр} = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{Z}(t)_{\text{част, неод}} = \vec{Q}_1(t)e^{2t} = \begin{pmatrix} a+bt \\ g+ht \end{pmatrix} e^{2t}$; (1)

Подставим (1) в исходное уравнение, сократив на e^{2t}

$$\begin{cases} 2(a+bt) + b = 4(a+bt) + (g+ht) - 1 \\ 2(g+ht) + h = -2(a+bt) + (g+ht) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = 4b + h \\ 2a + b = 4a + g - 1 \\ 2h = -2b + h \\ 2g + h = -2a + g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -2b \\ g = -2a + b + 1 \\ h = -2b \\ g = -2a - h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} h = -2b \\ -\cancel{2}a + b + 1 = -\cancel{2}a - h \Rightarrow h = -b - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2b = -b - 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow h = -2, \\ g = -2a + b + 1 = -2a + 2 \\ g = -2a - h = -2a + 2 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{ll} a \text{ – своб.} & b = 1 \\ g = -2a + 2, & h = -2 \end{array}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (a+t)e^{2t} \\ y = ((-2a+2)t - 2)e^{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{неод}} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix} t \\ 2t-2 \end{pmatrix}e^{2t}$$

3) $\lambda = 3$? $(A - 3E)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow p + q = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4) $\vec{Z}_{\text{общ, неод}}(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3t} + \begin{pmatrix} t \\ -2t+2 \end{pmatrix}e^{2t}$ ← Ответ

сравнить с 830 – экв

2. Метод вариации постоянных

Также, как и для линейных ОДУ, метод вариации постоянных состоит из 2 этапов:

1) Решение однородной системы ОДУ и построение ФСР.

$$\frac{d\vec{Y}_{одн}}{dt} = A(t)\,\vec{Y}_{одн}(t) \Longrightarrow ФСР = \left\{ \vec{Y}_{1,од}(t), \vec{Y}_{2,од}(t), \dots, \vec{Y}_{n,од}(t) \right\} \quad (28)$$

Comment: Также как и для , метод вариации постоянных применим не только, когда элементы матрицы A $a_{ik} = const$, а и в более общем случае, $a_{ik} = a_{ik}(t)$, $A = A(t)$

Общее решение системы (28) имеет вид

$$\vec{Y}_{общ,одн}(t) = C_1 \vec{Y}_{1,од}(t) + C_2 \vec{Y}_{2,од}(t) + \dots + C_n \vec{Y}_{n,од}(t) = W(t)\cdot\vec{C}, \quad (29)$$

где $\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$; $W(t) = \begin{pmatrix} \vec{Y}_{1,од}(t) & \vec{Y}_{2,од}(t) & \dots & \vec{Y}_{n,од}(t) \end{pmatrix}$ – матрица Вронского, столбцами которой являются функции из ФСР (30)

2) Обратимся теперь к неоднородной системе:

$$\frac{d\vec{Y}_{\text{неод}}(t)}{dt} = A(t)\,\vec{Y}_{\text{неод}}(t) + \vec{F}(t) \quad (31)$$

и будем искать ее решение в виде:

$$\vec{Y}_{\text{неод}}(t) = C_1(t)\,\vec{Y}_{1,\text{од}}(t) + C_2(t)\,\vec{Y}_{2,\text{од}}(t) + \ldots + C_n(t)\,\vec{Y}_{n,\text{од}}(t) = W(t)\,\vec{C}(t), \quad (32)$$

где $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ - неизв. ф-ции, $\vec{C}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \cdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$. Чтобы

найти эти функции, подставим (32) в (31):

$$\frac{d}{dt}\left(W(t)\,\vec{C}(t)\right) = \vec{A}(t)\,W(t)\,\vec{C}(t) + \vec{F}(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dW}{dt}(t)\cdot\vec{C}(t) + \vec{W}(t)\,\frac{d\vec{C}(t)}{dt} - A(t)\,W(t)\,\vec{C}(t) = \vec{F}(t) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{dW(t)}{dt} - A(t)\,W(t)\right)\vec{C}(t) + \vec{W}(t)\,\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = \vec{F}(t) \quad (33)$$

Так как матрица $W(t)$ состоит из решений однородной системы, то для каждого ее столбца $\vec{Y}_k(t)$ верно

$$\frac{d\vec{Y}_{k,од}(t)}{dt} = A(t)\vec{Y}_{k,од}(t), \quad k=1,\dots,n \qquad (34)$$

Сложим равенства (34) как столбцы (т.е. составив из них матрицу), получим

$$\frac{dW}{dt} = A(t)W(t),$$ и поэтому выражение в скобках в соотн.(33) обращается в нуль:

$$\underbrace{\left(\frac{dW(t)}{dt} - A(t)W(t)\right)}_{=0}\vec{C}(t) + \vec{W}(t)\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = \vec{F}(t) \qquad (35) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(t)\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = \vec{F}(t) \qquad (36)$$

Заметим, что для всех $t \in M$ матрица $W(t)$ является невырожденной (т.к. составлена из линейно нез. решений одн. системы, см теоремы 2 и 3) и поэтому при всех $t \in M$ систему (36) можно разрешить, и притом единственным образом, относительно $\frac{d\vec{C}(t)}{dt}$. Запишем это решение через обратную матрицу $W^{-1}(t)$:

$$\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = W^{-1}(t)\vec{F}(t) \quad (37)$$

Пусть t_0 - некоторая внутренняя точка M. Проинтегрировав (37) от t_0 до t, получим

$$\vec{C}(t) = \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau + \vec{C_0} \quad (38)$$

Здесь $\vec{C_0}$ – произвольный вектор. Внесение его в (38) означает, что мы сразу ищем общее решение задачи (31). Подставив (38) в (30), получим:

$$\vec{Y}_{общ,неод}(t) = W(t)\left(\vec{C}_0 + \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= W(t)\vec{C}_0 + \int_{t_0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau =$$

$$= W(t)\vec{C}_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{W(t)W^{-1}(\tau)}_{K(t,\tau)}\vec{F}(\tau)\,d\tau = \underbrace{W(t)\vec{C}_0}_{\vec{Y}_{общ,одн}(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau}_{\vec{Y}_{частн,неод}(t)} \quad (39)$$

Выражение $K(t,\tau) = W(t)W^{-1}(\tau)$ **(40)** называется __импульсной матрицей__.

Нетрудно видеть, что первое слагаемое в (39) представляет собой общее решение однородной системы (28), а второе – частное решение неоднородной системы (31), удовлетворяющее условию $\vec{Y}_{неод}(t_0) = 0$

Формула (39) позволяет нам написать в виде явной формулы решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{Y}(t)}{dt} = A(t)\vec{Y}(t) + \vec{F}(t), \quad t \in \mathcal{M} \\ \vec{Y}(t_0) = \vec{Y}_0 \end{cases} \quad (41)$$

Подставив в (39) $t = t_0$, получим
$\vec{Y}(t_0) = \vec{W}(t_0)\vec{C}_0 = \vec{Y}_0$, откуда $\vec{C}_0 = W^{-1}(t_0)\vec{Y}_0$ (42)

и мы получаем решение задачи (41):

$$\vec{Y}(t) = W(t)W^{-1}(t_0)\vec{Y}_0 + \int_{t_0}^{t} W(t)W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau =$$

$$= K(t,t_0)\vec{Y}_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau \quad (43)$$

Пример 6
Фил. 846

$$\begin{cases} \dot{x} = y + tg^2 t - 1 \\ \dot{y} = -x + tg\, t \end{cases} \quad (1)$$

Сист. (1) можно решить только методом вар. пост., так как правая часть — не квазимногочлен!

1) Решение одн. системы

$$\begin{cases} \dot{x}_{од} = y_{од} \\ \dot{y}_{од} = -x_{од} \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda + \pm i$$

$$A\vec{h} = i\vec{h} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q = ip \\ -p = iq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = ip \\ -ip = -q \end{cases} \Rightarrow q = ip \Rightarrow \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{Z}_{одн} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{Z}_{одн} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases} \quad (2)$$

2) $$\begin{cases} x_{неод} = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\ y_{неод} = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t \end{cases} \quad (3)$$ Подставим (3) в (1), получим

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) \cos t - \cancel{C_1(t) \sin t} + C_2'(t) \sin t + \cancel{C_2(t) \cos t} = -\cancel{C_1(t) \sin t} + \cancel{C_2(t) \cos t} + tg^2 t - 1 \\ -C_1'(t) \sin t - \cancel{C_1(t) \cos t} + C_2'(t) \cos t - \cancel{C_2(t) \sin t} = -\cancel{C_1(t) \cos t} - \cancel{C_2(t) \sin t} + tg\, t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = tg^2 t - 1 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = tg\, t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) \cos^2 t + C_2'(t) \cos t \sin t = \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} - \cos t \\ C_1'(t) \sin^2 t - C_2'(t) \cos t \sin t = -\dfrac{\sin^2 t}{\cos t} \end{cases}$$

Складывая, получаем $C_1'(t) = -\cos t$, подставляем во 2-е ур-ние $+\cos t \sin t + C_2'(t)\cos t = \operatorname{tg} t \Rightarrow C_2'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) = -\cos t \\ C_2'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(t) = -\sin t + C_{1,0} \\ C_2(t) = \frac{1}{\cos t} + \cos t + C_{2,0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = (-\sin t + C_{1,0})\cos t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t + C_{2,0}\right)\sin t \\ y(t) = -(-\sin t + C_{1,0})\sin t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t + C_{2,0}\right)\cos t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_{1,0}\cdot\cos t + C_{2,0}\sin t \cancel{- \sin t \cos t} + \cancel{\sin t \cos t} + \operatorname{tg} t \\ y(t) = -C_{1,0}\sin t + C_{2,0}\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = -C_{1,0}\sin t + C_{2,0}\sin t + 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \begin{cases} x(t) = C_{1,0}\cos t + C_{2,0}\sin t + \operatorname{tg} t \\ y(t) = -C_{1,0}\sin t + C_{2,0}\cos t + 2 \end{cases}}$$