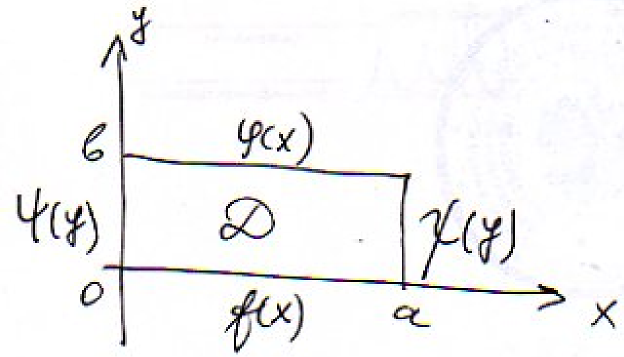
Лекция 22.10.20

Ур-ие Лапласа в прямоугольнике.

№ 93 гл IV
задачник
Будак, Тихонов,
Самарский.

Найти решение общей первой краевой задачи для ур-ия Лапласа внутри прямоугольника.



$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ M \in D \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,b) = \varphi(x) \\ u(0,y) = \psi(y) \\ u(a,y) = \chi(y) \end{cases}$$

Будем считать, что граничные ф-ии непрерывны, т.е. выполняются условия сопряжения:

$$f(0) = \psi(0)$$
$$f(a) = \chi(0)$$
$$\psi(b) = \varphi(0)$$
$$\varphi(a) = \chi(b)$$

Ищем решение в виде:

$$u(x,y) = v(x,y) + u_0(x,y),$$

где $u_0(x,y)$ - гармоническая в D ф-ия, которую подберём так, чтобы ф-ия $v(x,y)$ обращалась в ноль в вершинах прямоугольника.

Проще всего в качестве $u_0(x,y)$ взять гармонический полином:

$$u_0(x,y) = A + Bx + Cy + Dxy$$

Легко проверить, что это гармоническая ф-ия, т.е. она удовлетворяет ур-ию Лапласа.

Для определения коэффициентов A, B, C, D воспользуемся условием обращения $v(x,y)$ в 0 в вершинах прямоугольника: $u(x,y)\Big|_{\text{в верш.}} = u_0\Big|_{\text{в верш.}}$

1) $(0,0)$: $u(0,0) = u_0(0,0) = \boxed{f(0) = A}$

2) $(a,0)$: $u(a,0) = u_0(a,0) = f(a) = \underset{\overset{\|}{f(0)}}{A} + B\cdot a \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{f(a)-f(0)}{a}}$

3) $(0,b)$: $u(0,b) = u_0(0,b) = \psi(b) = \underset{\overset{\|}{\psi(0)}}{A} + C\cdot b \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{\psi(b)-\psi(0)}{b}}$

4) (a,b): $u(a,b) = u_0(a,b) = \underbrace{A + B\cdot a}_{f(a)} + \underbrace{C\cdot b}_{\psi(b)-\psi(0)} + D\cdot ab = \varphi(a) \Rightarrow$

$$\boxed{D = \frac{\varphi(a) - f(a) - \psi(b) + \psi(0)}{ab}}$$

Итак, ф-ия $u_0(x,y)$ построена.

Для ф-ии $v(x,y)$ получается задача:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & M \in D \\ v(x,0) = \bar{f}(x) \\ v(x,b) = \bar{\varphi}(x) \\ v(0,y) = \bar{\psi}(y) \\ v(a,y) = \bar{\chi}(y) \end{cases}$$

, где ф-ии $\bar{f}, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{\chi}$ обращаются в 0 в вершинах прямоугольника.

Будем упрощать эту задачу: ф-ию $v(x,y)$ можно представить в виде суммы четырёх гармонич. ф-ий, каждая из которых принимает заданное значение на одной из сторон и обращается в 0 на остальных трёх сторонах.

$$v(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y) + v_3(x,y) + v_4(x,y).$$

1) Найдём ф-ию $v_1(x,y)$:

$$\begin{cases} v_{1,xx} + v_{1,yy} = 0; \quad M \in D \\ v_1(x,0) = 0 \\ v_1(x,b) = \varphi(x) \\ v_1(0,y) = 0 \\ v_1(a,y) = 0 \end{cases}$$

з.ш-л по x.

Решаем задачу методом разделение переменных:

$$v_1(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \not\equiv 0$$

(!) строгая разделение переменных:

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\substack{const \\ = -\lambda}} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

з. ш-л.

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad 0 < x < a \\ X(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases}$$

с. з. $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$

с. ф: $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{a}x$

$n = 1, 2, \ldots$

$$\|X_n\|^2 = \frac{a}{2}$$

ур-ие для $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y_n''(y) - \underset{\text{изв.}}{\lambda_n} Y_n(y) = 0; \quad 0 < y < b \\ Y_n(0) = 0 \end{cases}$$

$Y(y) = e^{ky}$; $Y'(y) = ke^{k}$, $Y''(y) = k^2 e^{ky}$;

подставим в ур-ие:

хар. ур-ие для опред. к.

$$k^2 \cancel{e^{ky}} - \lambda \cancel{e^{ky}} = 0 \; ; \quad k^2 - \lambda = 0$$

оно квадратное для дифф. ур-ие второго порядка.

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\,;$$

значит, $Y(y) = e^{\pm\sqrt{\lambda}y}$ - распишем с коэффициентами: $\underline{Y(y) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}}$. это решение удобно переписать в виде гиперболических ф-ий:

$$sh\,\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\,; \quad ch\,\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

$$\Rightarrow Y_n(y) = A_n sh\sqrt{\lambda_n}y + B_n ch\sqrt{\lambda_n}y$$

$$\underline{Y_n(y) = A_n sh\frac{\pi n}{a}y + B_n ch\frac{\pi n}{a}y}.$$

из условия $Y_n(0) = 0 \Rightarrow$ оставляем sh, который обращается в 0 при $y = 0$ и отбрасываем ch.

$$Y_n(y) = A_n sh\frac{\pi n}{a}y\,.$$

Общее решение: $\underline{v_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{a}x \cdot sh\frac{\pi n}{a}y}$

коэфф. A_n определим из граничного условия при $y = b$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi n}{a}x}_{\text{с.ф.}} \cdot sh\frac{\pi n}{a}b = \bar{\varphi}(x) \; \Big| \cdot \int_0^a \underbrace{\sin\frac{\pi n'}{a}x}_{\text{1-из с.ф.}}\,dx$$

а умножим.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot sh\frac{\pi n}{a}b \cdot \underbrace{\int_0^a \sin\frac{\pi n}{a}x \cdot \sin\frac{\pi n'}{a}x\,dx}_{\text{считаем по св-ву ортогон. с.ф.}} = \int_0^a \bar{\varphi}(x) \cdot \sin\frac{\pi n'}{a}x\,dx$$

интеграл под знаком суммы:

$$\int_0^a \sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\sin\frac{\pi n'}{a}x\,dx = \begin{cases} 0; & n\neq n' \\ \int_0^a \sin^2\frac{\pi n}{a}x\,dx = \frac{a}{2}, & \text{если } n=n' \end{cases}$$

значит, опуская сумму, для каждого n, имеем:

$$\forall n\ (n=n'):\quad A_n\cdot \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b\cdot\frac{a}{2} = \int_0^a \bar{\varphi}(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx = \varphi_n$$

этот коэфф. обозначим: φ_n

$$\Rightarrow A_n = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b}\cdot\frac{2}{a}\varphi_n$$

и получим ответ для $v_1(x,y)$:

$$\boxed{v_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \varphi_n\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b}\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x}$$

этот же ответ можно получить и другим способом, воспользовавшись разложением в ряд Фурье по синусам:

вернёмся ещё раз к строчке при $y=b$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi n}{a}x}\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b = \bar{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \underbrace{\varphi_n}_{\text{коэф. Фурье}}\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi n}{a}x}$$

приравняем коэффициенты при одинаковых $\sin$:

$$A_n\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b = \varphi_n, \quad \text{где } \underbrace{\varphi_n}_{\text{коэф. Фурье}} = \frac{2}{a}\int_0^a \bar{\varphi}(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx$$

$$A_n = \frac{\varphi_n}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b} \quad \text{и}$$

– справочно.

$$\boxed{v_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b}\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x,}$$

($\forall$ ф-ию $\bar{\varphi}(x)$ - определённую и непрерывную на $[0,a]$, и обращающуюся в 0 при $x=0$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по синусам)

2). Найдем ф-ию $v_2(x,y)$:

$$\begin{cases} v_{2,xx}+v_{2,yy}=0; & M\in D \\ v_2(x,0)=\bar{f}(x) \\ v_2(x,b)=0 \\ v_2(0,y)=0 \\ v_2(a,y)=0 \end{cases} \quad v_2(x,y)=X(x)\cdot Y(y)\neq 0$$

$v_2(0,y)=0$, $v_2(a,y)=0$ → з.Ш-Л по x: с.ф. $\sin\frac{\pi n}{a}x$.

$$Y_n(y)=A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y+B_n\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y.$$

$$\to v_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sin\frac{\pi n}{a}x}_{\text{с.ф.}}\cdot\left[A_n\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y+B_n\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y\right]$$

при $y=b$: $A_n\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b+B_n\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b=0$; выразим B_n через A_n

$$\Rightarrow B_n=-A_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b}$$ → подставим в общее решение для $v_2(x,y)$.

$$v_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b}\underbrace{\left[\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y\cdot\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b-\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b\right]}_{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(y-b)}\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x.$$

при $y=0$: $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b}\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(y-b)\Big|_{y=0}\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x=\bar{f}(x)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b}\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x=\bar{f}(x),$$ раскладываем ф-ию в ряд по sin.

$$A_n=-\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}b}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b}\cdot f_n,$$ где $f_n=\frac{2}{a}\int_0^a\bar{f}(x)\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx$ — коэф. Фурье

(справочно!)

$$v_2(x,y) = - \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a} b}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a} b} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi n}{a} b} \cdot f_n \cdot \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(y-b) \cdot \sin\frac{\pi n}{a} x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}{}' f_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a} b} \cdot \sin\frac{\pi n}{a} x$$

$\Rightarrow$ ответ для $v_2(x;y)$.

$$\boxed{v_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' f_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a} b} \cdot \sin\frac{\pi n}{a} x}, \text{ где}$$

$$\underbrace{f_n}_{\text{коэф. Фурье}} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \sin\frac{\pi n}{a} x \, dx .$$

3). Найдём ф-цию $v_3(x,y)$.

$$\begin{cases} v_{3,xx} + v_{3,yy} = 0, \quad M \in D \\ v_3(x,0) = 0 \\ v_3(x,b) = 0 \quad \xrightarrow{} \text{ будет З. Ш-Л. по } y \\ v_3(0,y) = 0 \\ v_3(a,y) = \chi(y) \end{cases} ; \quad v_3(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \not\equiv 0$$

с.ф.

$$Y_n(y) = \sin\frac{\pi n}{b} y$$

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{b} x + B_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{b} x$$

из усл. при $x=0$ — выбираем $\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b} x$, который обращается в 0 при $x=0$.

$\Rightarrow X_n(x) = B_n \cdot \operatorname{sh}\frac{\pi n}{b} x$ и общее решение

$$v_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' B_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{b} x \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi n}{b} y}_{\text{с.ф.}}$$

при $x=a$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \cdot sh\frac{\pi n}{b}a \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi n}{b}y}_{с.ф.} = \overline{\chi}(y)$, раскладываем непрер. ф-ию $\overline{\chi}(y)$, обращающуюся в 0 при $y=0$, в ряд Фурье по синусам $\overline{\chi}(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underset{\text{коэф. Фурье}}{\chi_n} \cdot \sin\frac{\pi n}{b}y$

Тогда $B_n \cdot sh\frac{\pi n}{b}a = \chi_n$

$B_n = \dfrac{\chi_n}{sh\frac{\pi n}{b}a}$; и ответ для $v_3(x,y)$:

$$\boxed{v_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \frac{sh\frac{\pi n}{b}x}{sh\frac{\pi n}{b}a} \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi n}{b}y}_{с.ф.}}$$, где

$$\chi_n = \frac{2}{b}\int_0^b \overline{\chi}(y)\cdot \sin\frac{\pi n}{b}y\,dy .$$

4) Найдем ф-ию $v_4(x,y)$.

$$\begin{cases} v_{4,xx} + v_{4,yy} = 0; \ M\in D \\ v_4(x,0)=0 \\ v_4(x,b)=0 \\ v_4(0,y)=\overline{\varphi}(y) \\ v_4(a,y)=0 \end{cases}$$

$\to$ будет з.Ш-Л по y: с.ф. $\sin\frac{\pi n}{b}y$; общее реш:

$$\to v_4(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n sh\frac{\pi n}{b}x + B_n ch\frac{\pi n}{b}x\right)\cdot \sin\frac{\pi n}{b}y$$

из усл. при $x=a$: $A_n\, sh\frac{\pi n}{b}a + B_n\, ch\frac{\pi n}{b}a = 0$

и $B_n = -A_n \dfrac{sh\frac{\pi n}{b}a}{ch\frac{\pi n}{b}a}$, подставляем в общее реш. для $v_4(x,y)$:

$$\boxed{\upsilon_4(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}{}' \Psi_n\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}a}\cdot\sin\frac{\pi n}{b}y}$$, где

$$\underset{\text{коэф. Фурье.}}{\Psi_n}=\frac{2}{b}\int_0^b\bar{\Psi}(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy$$

И окончательно, собирая решения всех 3 задач:

$$u(x,y)=\upsilon(x,y)+u_0(x,y)=\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+\upsilon_4+u_0.$$

Ответ:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}{}'\Big\{\Big[\varphi_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b}+f_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}b}\Big]\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x+$$

$$+\Big[\chi_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}x}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}a}+\Psi_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{\pi n}{b}a}\Big]\cdot\sin\frac{\pi n}{b}y\Big\}$$, где

$$\varphi_n=\frac{2}{a}\int_0^a\bar{\varphi}(x)\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx;\quad f_n=\frac{2}{a}\int_0^a\bar{f}(x)\cdot\sin\frac{\pi n}{a}x\,dx,$$

$$\Psi_n=\frac{2}{b}\int_0^b\bar{\Psi}(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy;\quad \chi_n=\frac{2}{b}\int_0^b\bar{\chi}(y)\sin\frac{\pi n}{b}y\,dy$$ – коэфф. Фурье.

$\boxed{\text{Всё}}$

и $\boxed{\text{Д.3. № 8}}$ Решить ур-ие Лапласа в прямоугольнике.

к 29.10.20

$$\begin{cases}\Delta u=0;\ 0<x<2;\ 0<y<1\\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2}\\ u(x,1)=u(0,y)=u(2,y)=0\end{cases}$$