Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА1. ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ

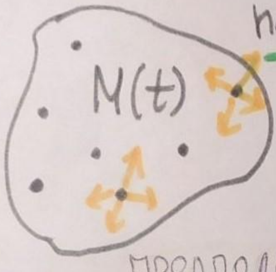
§1. Примеры задач, приводящих к ОДУ и системам ОДУ

§2. Основные понятия теории ОДУ.

§3. Сведение ОДУ n-го порядка к нормальной системе

§1. Примеры задач, приводящих к ОДУ и системам ОДУ

1. Задача о радиоактивном распаде вещества.



перем.: t - время; $M(t)$ - уцелевшая к моменту t масса рад. в-ва; M_0 - масса в-ва в начале проц.; k - коэф-т распада в-ва.

Предположение: скорость убывания частиц в-ва пропорциональна массе оставшегося в-ва.

Вывод уравнения: t, $t+\Delta t$ - 2 последовательных момента времени

$$M(t+\Delta t)-M(t)=-kM(t)\Delta t+\bar{o}(\Delta t) \Longrightarrow \frac{M(t+\Delta t)-M(t)}{\Delta t}=-kM(t)+\bar{o}(1)$$

$$\xrightarrow{\Delta t\to 0} \boxed{\frac{dM}{dt}=-kM(t) \quad (1)}$$

Уравнение радиоактивного распада в-ва

По классификации теории ОДУ:

(1) - уравнение 1 порядка (произв. 1 пор.);

(1) - линейное ур-ние, с пост. коэф-тами;

(в правой части $-kM(t)$ - лин. ф-ция относительно неизв., $k=\mathrm{const}$)

Для выделения единственного решения уравнение (1) должно быть дополнено начальным условием ($t=0$ - начало процесса):

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = -kM(t),\ t>0 \\ M(0) = M_0 \end{cases} \quad (2)$$

По классификации теории ОДУ:

(2) - задача с начальным условием, или ЗАДАЧА Коши:

Коши - франц. МАТЕМАТИК, ПЕРВЫЙ НАЧАВШИЙ РАССМ. ТАКИЕ ЗАДАЧИ

Решение задачи (2):

(формально должен быть модуль, но $M(t)>0$)

$$\frac{dM(t)}{M(t)} = -k\,dt \Rightarrow \ln M(t) = -kt + \ln C \Rightarrow$$

(имеем право const обозначать, как нам удобно)

ТИП: УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (ближ. сем.)

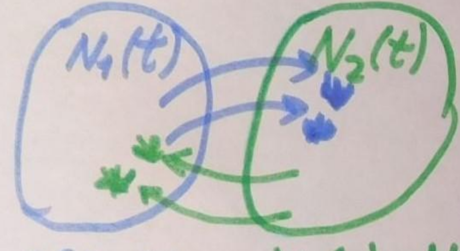
$$\Rightarrow M(t) = C e^{-kt} \quad (3)$$

(множество всех решений ур-ния (1))

Подставим $t=0$ в (3) $\Rightarrow M(0) = M_0 = Ce^{-0t} \Rightarrow C = M_0$ (4)

Получаем решение задачи (2) $\boxed{M(t) = M_0 e^{-kt}}$ (5)

2. МОДЕЛЬ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ (ЛАНЧЕСТЕР, 1916)



$N_1(0)=N_{1,0}$ $N_2(0)=N_{2,0}$

Характеристики: λ_1, p_1 – скорострельность 1 боевой ед. "синих" и вероятность поражения одним выстрелом; λ_2, p_2 – аналогично, "зеленые"

$N_1(t), N_2(t)$ – число уцелевших к моменту t единиц.

Допущения модели: 1) $N_1(t) \gg 1$, $N_2(t) \gg 1$ $\Rightarrow$ действует закон больших чисел $\Rightarrow$ реальный ущерб = его матем. ожиданию;

2) огонь сосредотачивается на уцелевших единицах.

Вывод модели:
$$\begin{cases} N_1(t+\Delta t)-N_1(t) = -\lambda_2 \cdot p_2 \cdot N_2(t) + \bar{o}(\Delta t), \; t>0 \\ N_2(t+\Delta t)-N_2(t) = -\lambda_1 p_1 \cdot N_1(t) + \bar{o}(\Delta t) \\ N_1(0)=N_{1,0}\;;\; N_2(0)=N_2(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 p_1 = \Lambda_1 \\ \lambda_2 p_2 = \Lambda_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_1(t+\Delta t)-N_1(t)}{\Delta t} = -\Lambda_2 N_2(t) + \bar{o}(1) \quad \Delta t \to 0$$
$$\frac{N_2(t+\Delta t)-N_2(t)}{\Delta t} = -\Lambda_1 N_1(t) + \bar{o}(1) \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = -\Lambda_2 N_2(t), \; t>0 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\Lambda_1 N_1(t), \\ N_1(0)=N_{1,0}\;;\; N_2(0)=N_{2,0} \end{cases} \quad (6)}$$

Классификация: Задача Коши для системы 2 лин. ОДУ 1 порядка, с пост. коэф-тами

МЫ ТАКИЕ ЗАДАЧИ НАУЧИМСЯ РЕШАТЬ

3. МОДЕЛЬ "ХИЩНИК-ЖЕРТВА"

(МОДЕЛЬ ЛОТКИ И ВОЛЬТЕРРА, нач. 20в)

(цикличность хищных и мирных рыб в Ср. море)

Допущения модели: $X(t)$ - "караси", жертва
$Y(t)$ - "щуки", хищник

1) Для "жертвы" всегда хватает ресурсов водоема (корм, пространство)
2) Единств. поддерж. источником для "щук" являются "караси", при нехватке они вымирают;
3) экологическая система - замкнутая;
4) рассматр. характерные времена, ≫ года (десятки лет) ⇒ позволяет делить на Δt и $\Delta t \to 0$. (то есть год - малая величина)
5) прирост "карасей" пропорционален их числу;
6) прирост "щук" пропорционален числу съеденных карасей, убыль - пропорц. числу "щук"

Вывод модели:

$$\begin{cases} X(t+\Delta t) - X(t) = aX(t)\Delta t - bX(t)Y(t)\Delta t + \bar{o}(\Delta t) \\ Y(t+\Delta t) - Y(t) = -cY(t)\Delta t + hX(t)Y(t)\Delta t + \bar{o}(\Delta t) \end{cases} \Rightarrow$$

делим на Δt, $\Delta t \to 0$

a, b, c, h - коэф-ты (параметры) модели.
Их можно оценить, опираясь на результаты наблюдений.

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = aX(t) - bX(t)Y(t) \\ \dfrac{dY}{dt} = -cY(t) + hX(t)Y(t) \end{cases} \quad (7)$$

Классификация: система 2 нелинейных ОДУ 1 порядка

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТ. МОДЕЛИ

Качественный анализ функционирования экосистем:

$$(7) \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y(-c+hX)}{X(a-bY)} \Rightarrow \frac{a-bY}{Y}dY = \frac{-c+hX}{X}dX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{Y}\right)dY + \left(h - \frac{c}{X}\right)dX = 0 \Rightarrow d(bY - a\ln Y) + d(hX - c\ln X) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F(X,Y) = (bY - a\ln Y) + (hX - c\ln X) = const} \quad (8)$$

Классификация: Мы нашли решение системы (7) в виде соотношения $F(X,Y) = const$ (неявная функция)

Иными словами, нашли интеграл системы (7).

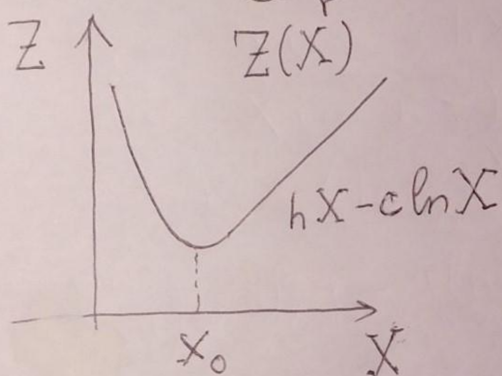
Далее, любое решение системы (7)

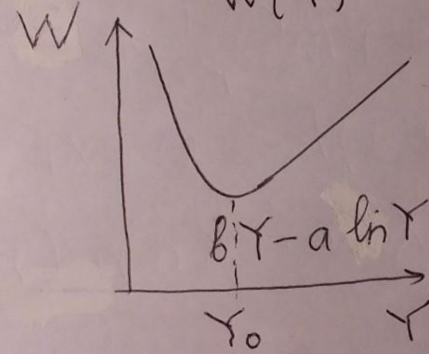
$$\begin{cases} X = X(t) \\ Y = Y(t) \end{cases} \quad (9)$$

можно интерпретировать как траекторию на плоскости X, Y (фазовая плоскость)

Как выглядят линии уровня $F(X,Y)=\mathrm{const}$ на фазовой плоскости?

$$F(X,Y) = \underbrace{(hX - c\ln X)}_{Z(X)} + \underbrace{(bY - a\ln Y)}_{W(Y)}$$





$Z'(X) = h - \frac{c}{X} \Rightarrow X_0 = \frac{c}{h}$; $W'(Y) = b - \frac{a}{Y} \Rightarrow Y_0 = \frac{a}{b}$

Этапы цикла:

0-1. Мало "щук" и "карасей" ⇒ у "карасей" мало врагов ⇒ бурный их рост;

1-2. Появились благоприятные условия для "щук" ⇒ "щ." размнож. ⇒ рост "карасей" прекратился;

2-3. Кризис роста "щук" в связи с нехваткой ресурса ("карасей");

3-0. Щуки доедают карасей и сами чуть не вымирают;

ВСЕ НАЧИНАЕТСЯ СНАЧАЛА

§2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ (ОБЪЕКТЫ) ТЕОРИИ ОДУ

1) $F(x, y, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))$ (1) – ОДУ n-го порядка

2) $y^{(n)}(x) = G(x, y, y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ (2) – уравнение n-го порядка разрешенное относительно старшей производной;

3) $y^{(n)}(x) = a_1(x)\cdot y^{(n-1)}(x) + a_2(x)\cdot y^{(n-2)}(x) + \dots + a_n(x)\cdot y(x) + b(x)$ (3)

– линейное уравнение n-го порядка;

–(будем изучать структуру мн-ва решений)

4) $y^{(n)}(x) = a_1 y^{(n-1)}(x) + a_2 \cdot y^{(n-2)}(x) + \dots + a_n y(x) + b(x)$ (4)

– линейное уравнение n-го порядка с пост. коэф-тами – (будем строить мн-во решений)

---

5) $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad x \in X \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$ (5)

нормальная система ОДУ 1 порядка.

(n-ур-ний, n-ф-ций)

Систему (5) можно переписать в векторном виде:

$$\vec{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \ (6); \quad \vec{F}(x, \vec{Y}(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ f_2(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \cdots \\ f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{pmatrix} \ (7)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{Y}}{dx} = \vec{F}(x, \vec{Y}(x)), \quad x \in X \quad (5')$$

$$6) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x) y_1(x) + \ldots + a_{1n}(x) y_n(x) + b_1(x), \quad x \in X \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x) + \ldots a_{nn}(x) y_n(x) + b_n(x) \end{cases} \quad (8)$$

НОРМ. ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ОДУ 1 ПОРЯДКА

В МАТРИЧНО-ВЕКТОРНОМ ВИДЕ: (8) $\Rightarrow \frac{d\vec{Y}}{dx} = A(x)\vec{Y}(x) + \vec{B}(x)$, (8') где:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} (9); \quad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} (10)$$

– будем изучать структуру мн-ва решений

7) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (11) $\Rightarrow \dfrac{d\vec{Y}}{dx} = A\vec{Y}(x) + B(x)$ (12)

$a_{ik} = const_{ik}$

СИСТЕМА ОДУ с ПОСТ. КОЭФ-ТАМИ (будем строить мн-во РЕШЕНИЙ)

ЧТО ЕЩЕ БУДЕТ ИЗУЧАТЬСЯ В КУРСЕ?

8) Задачи с начальными условиями (задача Коши)
- условия, гарант. существ. и единств. решения;

9) Условия, при которых малое изменение начальных условий приводит к малому изменению решений
- непрерывная зависим. реш. он нач. усл. и параметров;
- теория устойчивости по Ляпунову

10) Все типы уравнений, допускающих аналитическое реш. - СЕМИНАР.

§3. Сведение ОДУ n-го порядка к нормальной системе

Обилие материала? Как упорядочить теорию? Сократить изложение?

— ВВЕДЕНИЕ НЕК. СТАНДАРТНОГО ОБЪЕКТА, К ИЗУЧЕНИЮ КОТОРОГО ВСЕ СВОДИТСЯ.

Нормальная система ОДУ:

$$y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \quad (1) \Rightarrow \Big(\text{Замена: } z_1(x) = y(x),$$

$$z_2(x) = y'(x), \ldots, z_n(x) = y^{(n-1)}(x)\Big) \quad (2) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2(x) \\ \dfrac{dz_2}{dx} = z_3(x) \\ \ldots \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dx} = z_n(x) \\ \dfrac{dz_n}{dx} = F(x, z_1(x), \ldots, z_n(x)) \end{cases} \quad (3)$$

Получается, что число теорем, которые нужно доказывать, сокращается вдвое