Метод ф-ий Грина для решения краевых задач для оператора Лапласа: ур-ия Пуассона и ур-ие Лапласа.

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для неоднородного ур-ия Лапласа, т.е. для ур-ия Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), & M \in D \\ u|_S = f(P); & P \in S \end{cases}$$

т. M - произвольная точка D

т. M_0 - фиксир. точка D

т. P - произв. т. границы S

Будем искать решение, непрерывное вместе с 1ыми производными в $\bar{D}$ и непрер. вторыми произв. в D.

Цель: получить интегральное представление решения.

III формула Грина ($3^х$ мер. случай): $u(M_0)$ может быть представлена в виде:

$$\boxed{u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] dS -} $$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{1}{R_{M_0M}} \cdot \Delta u(M)\, dV$$

$\oplus$ II формула Грина для u и v-гарм: $\Delta v = 0$

$$\iiint_D [v \cdot \Delta u - u \cdot \underbrace{\Delta v}_{0}]\, dV = \iint_S \left[v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right] dS$$ → перепишем её в виде (чтобы сложить с видом III ф. Грина!)

$$\boxed{0 = \iint_S \left[v(P) \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial v}{\partial n}(P)\right] dS - \iiint_D v(M) \cdot \Delta u(M)\, dV}$$

; и ввели обозначение $G(M_0, M)$ →

$$u(M_0) = \iint_S \left[G(M_0,P) \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(P) - u(P) \frac{\partial G(M_0P)}{\partial n}\right] dS - \iiint_D G(M_0M) \cdot \Delta u(M)\, dV,$$ где

введем обозначение: (ф-ия Грина) $\boxed{G(M_0,M)=\frac{1}{4\pi R_{M_0M}}+v(M)}$; где $\boxed{\Delta v(M)=0}$

Заметим, что ф-ия $G(M_0,M)$ в т. M_0 имеет особенность, т.к. $R_{M_0M_0}=0$,

и еще: т.к. $u(P)$ - известна в задаче Дирихле, а $\frac{\partial u}{\partial n}(P)$ - неизвестна, то наложим на G - дополнительное условие:

$$\boxed{G(M_0,P)\Big|_{P\in S}=0} \to$$ оно повторяет вид условие Дирихле исходной задачи!

Тогда: еще раз перепишем:

$$u(M_0)=\iint\limits_S\Big[\underset{\substack{\parallel\\0}}{G(M_0,P)}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(P)}_{\text{неизв.}}-\overset{\text{изв.}}{\underset{f(P)}{u(P)}}\cdot\frac{\partial G(M_0,P)}{\partial n}\Big]dS-$$

$$-\iiint\limits_D G(M_0,M)\cdot\underbrace{\Delta u(M)}_{\text{изв.}=-F(M)}dV$$

Дадим определение:

Опр. ф-ия $G(M_0M)$ называется ф-ией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, если

1) $G(M_0,M)=\frac{1}{4\pi R_{M_0M}}+v(M)$, где $v(M)$ - гармоническая в D ф-ия

2) $G(M_0,P)\Big|_{P\in S}=0$

1) условие: $G(M_0,M)$ с точностью до гарм. ф-ии v - это фундаментальное реш. ур-ия Лап. в $3^х$ мер. случае.

2) условие: отражает тип гран. условий задачи.

Если ф-ия Грина $\exists$, то решение задачи Дирихле для ур-ия Пуассона можно записать формулой:

$$\boxed{u(M_0)=-\iint\limits_S f(P)\cdot\frac{\partial G(M_0,P)}{\partial n}dS+\iiint\limits_D G(M_0,M)\cdot F(M)dV}$$

Эта формула даёт классическое решение исходной задачи при выполнении: $f(P)\in C(S)$

$F(M)\in C^1(\bar{D})$.

Для построения ф-ии Грина $G(M_0, M)$ достаточно найти ф-ию $v(M)$, которая является решением следующей краевой задачи (специальной!).

$$v\text{-гарм} \leftarrow \begin{cases} \Delta v(M) = 0, & M\in D \\ v(P) = -\dfrac{1}{4\pi R_{M_0P}}; & P\in S \end{cases}$$

чтобы вып. 2ое усл. в определении G (для задачи Дирихле)

Для достаточно широкого класса поверхностей (S – поверхность Ляпунова) эта задача разрешима $\Rightarrow \exists$ ф-ия Грина.

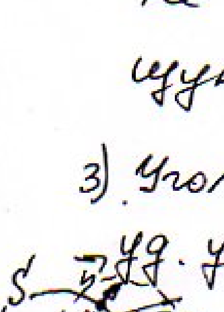
Опр: Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если выполнены условия:

1) в каждой точке поверхности S $\exists$ определённая нормаль (или касательная пл-ть)

2) $\exists$ такое число $d>0$, что прямые, параллельные нормали в т. P поверхности S, пересекают не более одного раза часть поверх-ти S, лежащую внутри шара радиуса „d" с центром в т. P

3) Угол $\gamma(M,P)$ – между нормалями в точках M и P – уд. условию: $\gamma(M,P)\le A R_{MP}^{\delta}$, где A, δ – const

$A>0$; $0<\delta\le 1$



при этом т. M принадлежит части поверхности S, находящейся внутри сферы радиуса d с центром в т. P.

Ещё замечание: В терминах обобщённых ф-ий ф-ию Грина $G(M_0, M)$ можно определить как решение краевой задачи для ур-ия Пуассона с правой частью → δ-ф-ей – сосредоточенной в т. M_0:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M_0, M) = -\delta(M_0, M), & \text{т. } M, M_0 \in D \\ G(M_0, P)\Big|_{P \in S} = 0 \end{cases}$$

(!) это опять: принцип Дюамеля → к этой задаче!

Вывод:

→ и тогда, чтобы решить задачу для ур-ия Пуассона с произвольной ф-ей $F(M)$ в правой части и $f(P)$ – в граничном условии,

$$\begin{cases} \Delta u(M) = -F(M), & M \in D \\ u(P) = f(P); & P \in S \end{cases}$$

→ нужно решить „специальную" задачу для $G(M_0, M)$ (а она $\exists$!); после → этого решение исходной задачи запишется в виде:

$$\boxed{u(M_0) = -\iint_S f(P) \cdot \frac{\partial G(M_0, P)}{\partial n} dS + \iiint_D F(M) \cdot G(M_0, M)\, dV}$$

а для построения ф-ии Грина $G(M_0, M)$ необходимо найти ф-ию $v(M)$, удовлетворяющую задаче:

эта зад. разрешима! ⇒ ф-ия $G(M_0 M)$ $\exists$!

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, & M \in D \\ v(P) = -\dfrac{1}{4\pi R_{M_0 P}}, & P \in S \end{cases}; \quad G(M_0, M) = \frac{1}{4\pi R_{M_0 M}} + v(M)$$

Св-ва ф-ии Грина внутр. задачи Дирихле.

1) $G(M_0, M) > 0$

2) т.к. $v(M) < 0$ в D, то $G(M_0, M) < \dfrac{1}{4\pi R_{M_0 M}}$ (из принципа max)

⇒ границы изменения G: (причем $G = 0$, в т. $P \in S$)

$$\boxed{0 \le G(M_0, M) < \frac{1}{4\pi R_{M_0 M}}}$$

3). Ф-ия G - ф-ия Грина симметрична относит. точек M_0 и M: $\boxed{G(M_0,M) = G(M,M_0)}$ это св-во называется принципом взаимности.

→ Симметрия ф-ии $G(M_0,M)$ по точкам M и M_0 представляет собой математическое отражение известного в физике принципа взаимности: „источник, помещённый в т. M_0, производит в т. M такое же действие, какое производит в т. M_0 тот же источник, помещённый в точку M."

или кратко: „источник и точку наблюдения можно менять местами."

Физическая интерпретация ф-ии Грина – электростатическая: если вспомнить, что электростатический потенциал удовлетворяет ур-ию Лапласа, то становится очевидно, что первое слагаемое в представлении ф-ии Грина: $\boxed{G(M_0,M) = \frac{1}{4\pi R_{M_0M}} + v(M)}$

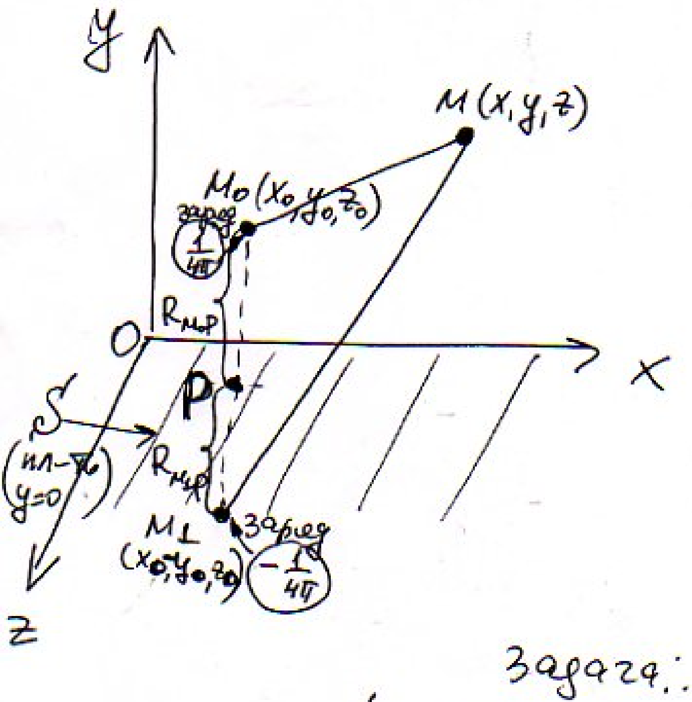
↓

представляет собой потенциал, создаваемый в т. M электрическим зарядом, величиной $\frac{1}{4\pi}$, расположенным в т. M_0. А второе слагаемое → потенциал поле зарядов, индуцированных на заземлённой проводящей поверхности S.

или кратко: Ф-ия Грина представляет собой потенциал точечного электрического заряда в т. M_0 в присутствии заземлённой проводящей поверхности S.

Если мысленно убрать индуцированные на S' заряды, то для сохранения прежнего потенциала G в обл-ти D придётся разместить точечный заряд вне поверхности S, который создаст поле с потенциалом v. Этот заряд является зеркальным относительно S изображением заряда, помещённого в т. M_0. Такой приём - зеркальных изображений - позволяет найти $v(M)$ и построить ф-цию Грина!

Пр. для верхнего полупространства $y>0$: (или методом электростатических изобр.) методом зеркальных изображений найти:



1) ф-цию Грина задачи Дирихле

2) записать интегральное представление решения.

3) найти это решение.

Задача: (однородное ур-ие - а в общем случае: $\Delta u=-F(M)$ ур-ие Пуассона)

$$\begin{cases} \Delta u=0; \quad -\infty<x<+\infty; \quad y>0; \quad -\infty<z<+\infty \\ u\big|_{y=0}=f(x,z) \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r\to\infty \ (\text{или } \sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty) \end{cases}$$

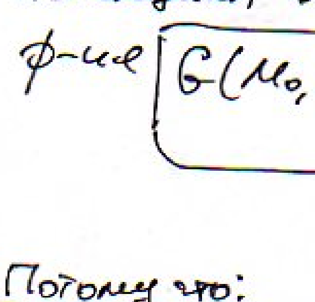
1). пусть в т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ помещён заряд величины $\frac{1}{4\pi}$.

Он создаст в произвольной т. $M(x,y,z)$ верхнего полупространства $y>0$ потенциал $\frac{1}{4\pi R_{M_0 M}}$, если бы не было границы S' – поверхности $y=0$, на которой индуцируются заряды.
Заменим эти индуцированные на S заряды на зеркальное изображение нашего заряда в т. M_0.
→ Для этого в симметричной точке относительно плоскости $y=0$ – в точке $M_1(x_0,-y_0,z_0)$ → поместим заряд такой же величины и противоположного знака: $-\frac{1}{4\pi}$.

Потенциал в т. $M(x,y,z)$ поля этих зарядов – это ф-ия $\boxed{G(M_0,M)=\frac{1}{4\pi R_{M_0 M}}+v(M)}$, где $v(M)$: $\begin{cases} \Delta v(M)=0, & M\in D \\ v\big|_S=-\dfrac{1}{4\pi R_{M_0 P}}; & \underbrace{}_{P\in S} \end{cases}$

Потому что:
ф-ия $v(M)$ - подбирается так, чтобы ← почему так?
на границе → в точках P (у нас в точках пл-ти $y=0$)
→ $G(M_0 P)\big|_{P\in S}=0$!

Нетрудно проанализировать (или подобрать!), что решением задачи для v будет ф-ия



$\boxed{v(M)=-\frac{1}{4\pi R_{M_1 M}}}$, т.к. она гармоническая ($\Delta v=0$) и $R_{M_0 P}=R_{M_1 P}$ → это симметричные точки, относит. пл-ти $y=0$ по построению!

→ Проверкой убеждаемся, что взяв такую ф-ию v, получим $G(M_0,P)\big|_{P\in S}=0$ на пл-ти $y=0$!

итак: нашли ф-ию Грина!

$$G(M_0,M)=\underbrace{\frac{1}{4\pi R_{M_0M}}}_{\text{это потенциал заряда „}\frac{1}{4\pi}\text{" в т. }M_0}-\underbrace{\frac{1}{4\pi R_{M_1M}}}_{\text{это потенциал заряда „}-\frac{1}{4\pi}\text{" в т. }M_1\text{, симм. т. }M_0}$$

(проверка: если вместо т. M в этой формуле будет т. P, то $G(M_0,P)=\dfrac{1}{4R_{M_0P}}-\dfrac{1}{4\pi R_{M_1P}}=0$; т.к. $R_{M_0P}=R_{M_1P}$!)

$G(M_0,M)$ – гармоническая ф-ия всюду, кроме точек M_0 и M_1 (где имеет особенность – неограничена),

и равная 0 на пл-ти $y=0$.

Теперь:

2) интегральное представление решения задачи!

Распишем подробно: $R_{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$;

$$R_{M_1M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

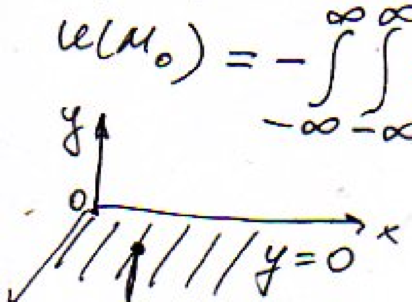
общая формула:

$$u(M_0)=-\iint\limits_S \underbrace{f(P)}_{\text{задано}}\cdot\underbrace{\frac{\partial G(M_0,P)}{\partial n_P}}_{=\,?\ \text{посчитаем}}dS+\iiint\limits_D G(M_0,M)\cdot\underbrace{F(M)}_{=\,0\ \text{(в нашей задаче)}}dV$$

(x,y,z)
В декартовой системе:

$$u(M_0)=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\cdot\frac{\partial G}{\partial n_P}\bigg|_{y=0}dx\,dz$$

$$\boxed{G(M_0,M)=\frac{1}{4\pi R_{M_0M}}-\frac{1}{4\pi R_{M_1M}}}$$



$$\frac{\partial}{\partial n_P}\bigg|_{y=0}=-\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{y=0};$$ посчитаем

$$\frac{\partial G}{\partial n_P}\bigg|_{P\in S,\ \text{т.е. на пл-ти } y=0}\rightarrow$$

$$\to \frac{\partial G}{\partial n_P}\Big|_{\substack{\text{т.}P\text{ и }q\\ y=0}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial(-y)}\Big|_{y=0}\frac{1}{R_{M_0P}} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial(-y)}\Big|_{y=0}\frac{1}{R_{M_1P}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{y=0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right] + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{y=0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(\overset{0}{y}-y_0)}{[(x-x_0)^2+(\underset{0}{y}-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\right] - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(\overset{0}{y}+y_0)}{[(x-x_0)^2+(\underset{0}{y}+y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{y_0}{[(x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{y_0}{[(x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{y_0}{[(x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}.$$ всё!

т.е. получили: $$\frac{\partial G}{\partial n_P}\Big|_{y=0} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{y_0}{[(x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}$$ и →

Ответ:

тогда $$u(M_0) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\cdot\frac{\partial G}{\partial n_P}\Big|_{y=0} dS =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\frac{y_0}{[(x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\cdot dx\,dz.$$

Замечание: Дополним ответ задачи - для ур-ние Пуассона: $\Delta u(M) = \underbrace{-F(M)}$, $M\in D$.

(у нас было $F(M)=0$!) →

Тогда общая формула:

$$u(M_0) = -\iint\limits_{S} f(P)\cdot\frac{\partial G(M_0,P)}{\partial n_p}\,dS + \iiint\limits_{D} G(M_0,M)F(M)\,dV =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,z)\cdot\frac{y_0}{[(x-x_0)^2+y_0^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}\,dx\,dz\ +$$

$$+\ \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{R_{M_0M}}-\frac{1}{R_{M_1M}}\right]\cdot F(M)\,dx\,dy\,dz}_{\shortparallel}\ .$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right]\cdot$$

$$\cdot F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

<u>ещё раз</u>: физ. интерпретация ур-ие Пуассона.

$$\begin{cases}\Delta u(M) = -F(M),\ M\in D\\ u|_S = f(P),\ P\in S\end{cases} \to$$

<u>Электростатическая интерпретация</u>:

$\boxed{\Delta u = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$, где

u - потенциал поля

ρ - плотность зарядов

ε_0 - диэлектрическая проницаемость.