Разбор домашней работы

Задача 5. Из множества **S** = {1, 2, …, N} случайно и независимо выбираются два подмножества: **A** и **B** так, что каждый элемент из **S** независимо от других элементов с вероятностью p включается в подмножество **A** и с вероятностью $q = 1 - p$ не включается.
Какова вероятность события { **A** и **B** не пересекаются}?

Множеству **A** поставим в соответствие вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$, где $a_i = \boldsymbol{I}\{\text{число } i \text{ включено в } \mathbf{A}\}$, т.е.

$a_i = 1$, если число i вошло в **A** и $a_i = 0$, если не вошло.

B поставим в соответствие вектор $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $b_i = \boldsymbol{I}\{\text{число } i \text{ включено в } \mathbf{B}\}$.

Если $\exists\, i\colon a_i = b_i = 1$, то $i \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

Множества не пересекаются, если $\forall\, i = 1,2, \ldots, N$ $\left[\begin{array}{l} a_i \neq 1 \\ b_i \neq 1 \end{array}\right.$.

$$\boldsymbol{P}\{a_i = 1, b_i = 1\} = \boldsymbol{P}\{a_i = 1\} \cdot \boldsymbol{P}\{\, b_i = 1\} = p \cdot p = p^2.$$

$$\boldsymbol{P}\{\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset\} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{p}^2)^N.$$

Разбор домашней работы

Задача 6. Из множества **S** = {1, 2, …, N} случайно и независимо выбираются $\boldsymbol{r}$ подмножеств: $\boldsymbol{A_1}, \dots, \boldsymbol{A_r}$, по той же схеме выбора подмножеств, что и в задаче 5. Найти вероятность того, что выбранные подмножества попарно не пересекаются.

a_1^1	a_2^1	…	…	…	a_N^1
0	**1**				
0	**0**				
…	…				
0	**0**				
a_1^r	a_2^r	…	…	…	a_N^r

Идея та же. Множеству $\mathbf{A}_i$ поставим в соответствие вектор $(a_1^i, a_2^i, \dots, a_N^i)$, где $a_j^i = \boldsymbol{I}\{j \text{ включено в } \boldsymbol{A_i}\}$. Множества попарно не пересекаются, если в каждом столбце нет двух «1». Например, в **первом** столбце все нули, значит числа 1 нет ни в одном множестве (вероятность q^r).

Во **втором** столбце ровно одна «1», значит число 2 только в одном множестве (вероятность $p \cdot q^{r-1}$).

Для каждого элемента вероятность войти не более, чем в одно множество равна $\boldsymbol{q^r + r \cdot q^{r-1} \cdot p}$.

Каждый элемент включается в множество независимо, поэтому $\boldsymbol{P = \left(q^r + r \cdot q^{r-1} \cdot p\right)^N}$.

Разбор домашней работы

Задача 7. Из множества **S** = {1, 2, …, N} случайно и независимо выбираются $\boldsymbol{r}$ подмножеств: $A_1, \dots, A_r$, по той же схеме выбора подмножеств, что и в задаче 5.
Найти: а) $P\{|A_1 \cap \dots \cap A_r| = k\}$;

В ходе эксперимента проводится N испытаний Бернулли по включению или не включению каждого элемента из **S** в подмножества $A_1, \dots, A_r$. «Успехом» назовем событие, когда какой либо элемент попадает во все подмножества $A_1, \dots, A_r$. Вероятность «Успеха» равна $\boldsymbol{p^r}$.

Значит вероятность того, что произойдет **ровно** $\boldsymbol{k}$ «успехов» вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{P\{|A_1 \cap \dots \cap A_r| = k\} = C_N^k\,(p^r)^k(1-p^r)^{N-k}}.$$

Разбор домашней работы

Задача 7. Из множества **S** = {1, 2, …, N} случайно и независимо выбираются $\boldsymbol{r}$ подмножеств: $A_1, \dots, A_r$, по той же схеме выбора подмножеств, что и в задаче 5.
Найти: б) $P\{|\,A_1 \cup \dots \cup \, A_r| = k\}$.

Используя принцип двойственности, можно свести задачу к пункту а) следующим образом.

В объединение $A_1 \cup \dots \cup \, A_r$ входит k различных элементов, значит в дополнение входит $N - k$ элементов. $\left|\overline{\cup A_m}\right| = \left|\cap \overline{A_m}\right| = N - k$. «Успех» $=$ {элемент не вошел ни в одно из r множеств}.

Вероятность «Успеха» равна $\boldsymbol{P}\left(\overline{A_1}\right) \cdot \dots \cdot \boldsymbol{P}\left(\overline{A_r}\right) = \boldsymbol{q}^r$.

Значит вероятность того, что произойдет **ровно** $\boldsymbol{N - k}$ «успехов» вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{P\{|\,A_1 \cup \dots \cup A_r| = k\} = C_N^k\,(q^r)^{N-k}(1 - q^r)^k}.$$