 Лекция 15.10.20

Продолжение: Задача Коши для ур-ия тепло-проводности. (после построения решения и примеров).

Задача Коши:

$$(1)\ \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \underbrace{f(x,t)}_{\text{внеш. источники тепла}}, & -\infty < x < +\infty;\ t > 0 \\ (2)\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) & \text{- нач. } t^\circ \\ |u(x,t)| < M & \text{- условие ограниченности} \end{cases}$$

(это естественное физическое ограничение, если u - температура)

Решение: $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cdot G(x,\xi,t)\,d\xi +$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\cdot G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau, \text{ где}$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

→ (она одинаковая для всех задач - для ур-ия теплопровод. на прямой)

Докажем $\boxed{\text{Т. единств.}}$, $\boxed{\text{Т. устойчив.}}$ и $\boxed{\text{Т. сущест.}}$ - по построению решения

тем самым - имеем: что наша задача - корректно поставлена!

Сначала - определение классического решения.

Обозначение: открытая область $Q = \{(x,t): x \in R^1,\ t > 0\}$

замк. обл. $\overline{Q} = \{(x,t): x \in R^1,\ t \geq 0\}$

Опр: Классическим решением задачи (1)-(2) называется ф-ия $u(x,t)$, определённая и непрерывная в замкнутой обл-ти $\overline{Q}$, вместе с непрерывными производными u_t и u_{xx} в открытой области Q,

$$\boxed{\text{т.е. кратко: } u(x,t)\in C(\overline{Q})\cap C^{2,1}(Q)},$$

удовлетворяющая ур-ию теплопров. (1) в откр. обл-ти Q и удовлетворяющая начальному условию (2) при $t=0$ всюду в R^1

заметим, что:
Для задачи (1)-(2) пользоваться принципом максимума нельзя, т.к. область неограниченная.

Докажем теорему.

$\boxed{\text{Т. единств.}}$ Задача (1)-(2) может иметь только одно классическое решение, ограниченное в обл-ти $\overline{Q}$.

Док-во: Предположим противное: существует 2 ограниченных решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$.

$$|u_1(x,t)|<M \quad \text{и} \quad |u_2(x,t)|<M.$$

Введём ф-ию $v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$.
В силу линейности задачи, ф-ия $v(x,t)$ будет удовлетворять однородному ур-ию и нулевому начальному условию:

$$\begin{cases} v_t=a^2v_{xx}, & (x,t)\in Q \\ v|_{t=0}=0 \end{cases}$$

А условие ограниченности для ф-ии $v(x,t)$ даётся условиями ограниченности для ф-ий $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$:

$$|v(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \le 2M,$$

где $|u_1(x,t)| \le M$ и $|u_2(x,t)| \le M$.

Таким образом, ф-ия $v(x,t)$ является решением однородной задачи и ограничена в $\overline{Q}$. Покажем, что $\boxed{v(x,t) \equiv 0}$, $(x,t) \in \overline{Q}$. [сложность заключается в том, что область – неограничена! поэтому сначала - искусственно - вводим "рамки" - ограничиваем обл-ть, а потом "устремляем ограничитель" к бесконечности!]

Делаем так: выберем в Q линии: $|x| = L$ и $t = T$ и рассмотрим ограниченную обл-ть Q_{LT}:

$$Q_{LT} = [-L, L] \times (0, T] \quad \text{– открытая}$$

и $$\overline{Q}_{LT} = [-L, L] \times [0, T] \quad \text{– замкнутая}$$

Введём вспомогательную ф-ию:

$$\boxed{W(x,t) = \frac{4M}{L^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right)}$$

ф-ия $W(x,t)$ удовл. ур-ию теплопров. $W_t = a^2 W_{xx}$ (проверим: $W_t = \frac{4Ma^2}{L^2}$; $W_{xx} = \frac{4M}{L^2}$ и умножим на a^2).

при $t=0$: $W|_{t=0} = \frac{2Mx^2}{L^2} \geqslant |v(x,0)| = 0$

Пусть $|x| = L$, тогда $W(\pm L, t) = 2M + \frac{4Ma^2t}{L^2} \geq 2M \geq$

$\geq |v(\pm L, t)|$.

Т.к. область Q_{LT} - ограниченная, внутри этой области $v(x,t)$ и $W(x,t)$ удовлетворяют однородному ур-ию теплопроводности, а на границе - по t и по x - выполняются условия:

$|v(x,0)| \leq W(x,0)$ и $|v(\pm L, t)| \leq W(\pm L, t)$; то

к ф-ям $v(x,t)$ и $W(x,t)$ можно применить следствие из принципа максимума:

$$|v(x,t)| \leq W(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_{LT}$$

или:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2t\right) \leq v(x,t) \leq \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2t\right)$$

Зафиксируем точку $(x,t) \in \overline{Q}_{LT}$ и перейдём к пределу при $L \to \infty$: получим: $\lim\limits_{L\to\infty} v(x,t) = 0$

В силу независимости $v(x,t)$ от L и от произвольности выбора т. (x,t) получим, что всюду в обл-ти $\overline{Q}$: $v(x,t) \equiv 0$

следовательно: $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ в $\overline{Q}$ $\Rightarrow$ решение задачи единственно.

$\boxed{\text{Т.}}$ доказана!

Замечание: Требование ограниченности искомой ф-ии является естественным физ. ограничением, если $\rightarrow$

$U(x,t)$ имеет смысл температуры.

Для существования решения – построение.

$\Rightarrow$ оно классическое. Нужно показать равномерную сходимость интегралов: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(x,\xi,t)\cdot\varphi(\xi)\,d\xi$

и $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot G_{xx}(x,\xi,t)\,d\xi$; (опускаем это док-во).

и тогда ф-ия $U(x,t)$ - непрерывна в $\overline{Q}$ и непрерывно примыкает к $\varphi(x)$.

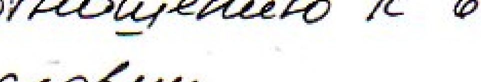
Замечание. (это устойчивость!)

Если две ф-ии $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$: $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\varepsilon$, то отвечающие им решения $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ удовлетворяют неравенству: $|U_1(x,t)-U_2(x,t)|<\varepsilon$,

при всех $(x,t)\in\overline{Q}$.

Т.е. иными словами: решение задачи устойчиво по отношению к возмущению в начальном условии.

Теперь полубесконечная прямая - это луч от 0 до $+\infty$.



Когда получается задача на луче? Когда гран. условие на левом конце сказывается на температуру рассматриваемого участка стержня, а гран. условие на правом конце - нет.

$\Rightarrow$ поставим гран. условие при $x=0$.

либо $U|_{x=0}=0$ (это гр. усл. 1-ого р.), либо $\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$ (это гр. усл. 2-ого р.); либо

$(u_x + hu)\Big|_{x=0} = 0$ – это гр. усл. $3^{\text{его}}$ рода.

Поставим задачу на полубесконечной прямой:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x>0,\ t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \text{ – нач. } t^o \\ \text{либо } u\big|_{x=0} = 0, \\ \text{либо } u_x\big|_{x=0} = 0, \\ \text{либо } (u_x + hu)\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

как решить?

→ цель: свести задачу на полу∞ прямой к задаче на ∞ прямой, решение которой известно!

на ∞ прямой:

$$(*)\ u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$$

сформулируем две леммы.

$\boxed{\text{Л.1}}$ Если ф-ия $\varphi(x)$ является нечётной относит. $x=0$,

т.е. $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, то

$u(x,t)\Big|_{x=0} = 0$, где $u(x,t)$ даётся формулой $(*)$ (на ∞ прямой)

(а это гр. усл. $1^{\text{ого}}$ р.)

$\int_{-\infty}^{\infty}$ в симметричных пределах от нечётной ф-ии равен 0:

$$(*):\ u(x,t)\Big|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underset{(\text{нечёт})}{\varphi(\xi)}\ ;\ \underset{(\text{чётная})}{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\Big|_{x=0}}}_{\text{нечётная}} d\xi = 0$$

$\boxed{1.2}$. Если ф-ия $\varphi(x)$ - чётная относительно $x=0$, т.е.

$\varphi(x)=\varphi(-x)$, тогда $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$, где

u даётся формулой (*). (а это гр.усл. 2ого р.)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\underbrace{\varphi(\xi)}_{(\text{чётная})}\cdot \underbrace{\left.\left[-\frac{2(x-\xi)}{4a^2t}\right]\right|_{x=0}}_{(\text{нечётная})}}_{\text{нечётная}} \cdot \underbrace{\left.e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right|_{x=0}}_{(\text{чётная})} d\xi = 0$$

(нечётная) - интеграл от неё в симметр. пределах равен 0.

Как использовать $\boxed{1.1}$ или $\boxed{1.2}$?

Если в задаче на полу∞ прямой гр.усл. 1ого рода то ф-ию $\varphi(x)$ по $\boxed{1.1}$ продолжать нечётно на всю ∞ прямую,

а если гр.усл. 2ого рода, то $\varphi(x)$ по $\boxed{1.2}$ нужно продолжить чётно на всю ∞ прямую.

Например, построим решение для 1ой краевой зад. Доопределим ф-ию $\varphi(x)$ на всю ∞ прямую нечётно: т.е. введем ф-ию $\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x); & x>0 \\ -\varphi(-x); & x<0 \end{cases}$

Решим задачу Коши для всей оси с начальной ф-ей $\Psi(x)$: $\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}; & -\infty<x<+\infty; \ t>0 \\ U|_{t=0} = \Psi(x) \end{cases}$

Её решение: $V(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$

по $\boxed{1.1}$ $V(0,t)=0$

$V|_{t=0}=\psi(x)=\varphi(x)$ при $x>0$, т.е.

при $x>0$ $V(x,t)\equiv u(x,t)$

Значит: $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\left\{\int\limits_0^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\right.$

$\left.+\int\limits_{-\infty}^{0}[-\varphi(-\xi)]\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\right\}=[\xi\xrightarrow{\text{замена}}-\xi]=$

$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int\limits_0^{\infty}\varphi(\xi)\cdot\underbrace{\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]}_{\text{обозначим } G_1(x,\xi,t)}d\xi$, тогда

$u(x,t)=\int\limits_0^{\infty}\varphi(\xi)\cdot G_1(x,\xi,t)d\xi$, где $G_1(x,\xi,t)$ - ф-ия Грина на полупрямой и гр. усл. 1ого р.

$G_1(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]$

Это решение задачи для ур-ия теплопроводности на полупрямой с гр. условиями 1ого рода.

Аналогично, $u(x,t)=\int\limits_0^{\infty}\varphi(\xi)\cdot G_2(x,\xi,t)d\xi$, где $G_2(x,\xi,t)$ ф-ия Грина на полупрямой и гр. усл. 2ого р.

$G_2(x,\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]$

Это решение задачи для ур-ия теплопров. на полупрямой с гр. условиями 2ого рода.

Запишем решение и для гр. условий 3-его рода, хотя и не будем их рассматривать!

$$U(x,t) = \int_0^\infty \varphi(\xi)\cdot G_3(x,\xi,t)\,d\xi$$, где $G_3(x,\xi,t)$ – ф-ия Грина на полупрямой и гр. усл. 3-его р.

$$G_3(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} - 2h\int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi+\eta)}{4a^2t}-h\eta}\,d\eta\right].$$

Дальше → материал под (*) – самая общая задача для ур-ия теплопроводности: с неоднородным ур-ием, с неоднородным граничным условием и заданным начальным!

$$\begin{cases} U_t = a^2U_{xx} + \underbrace{f(x,t)}_{\text{неоднородность в ур-ии}}, & x>0,\ t>0 \\ U|_{t=0} = \varphi(x) & \text{– нач. }t^\circ \\ U|_{x=0} = \mu(t) & \text{– неоднородное гр. условие → это самая большая сложность!} \end{cases}$$

Разобьём эту задачу на три: $U^{(1)}, U^{(2)}$ и $U^{(3)}$, поочерёдно перебирая все неоднородности.

По принципу линейной суперпозиции:

$$U(x,t) = U^{(1)}(x,t) + U^{(2)}(x,t) + U^{(3)}(x,t).$$

(1)
$$\begin{cases} U_t = a^2U_{xx} + f(x,t) \\ U|_{t=0} = 0 \\ U|_{x=0} = 0 \end{cases};$$

(2)
$$\begin{cases} U_t = a^2U_{xx} \\ U|_{t=0} = \varphi(x) \\ U|_{x=0} = 0 \end{cases};$$

(3)
$$\begin{cases} U_t = a^2U_{xx} \\ U|_{t=0} = 0 \\ U|_{x=0} = \mu(t) \end{cases}\quad !$$

реш. (1) + (2): умеем.

решение (1) + (2):

$$u(x,t)=\int_0^\infty \varphi(\xi)\cdot G_1(x,\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\cdot G_1(x,\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $G_1(x,\xi,t)$ – ф-ие Грина на полу∞ прямой для гр. усл. 1ого рода.

Чтобы решить (3) задачу – воспользуемся (справочно) интегральным преобразованием Лапласа:

образ: $F(p) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$

оригинал: $f(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$

тогда задача для образа:

$$\begin{cases} a^2\tilde{u}(x,p)-p\tilde{u}=0 \\ \tilde{u}\big|_{x=0}=\tilde{\mu}(p) \end{cases}$$

задача для оригинала:

$$\begin{cases} a^2 v_{xx}-v_t=0 \\ v\big|_{t=0}=0 \\ v\big|_{x=0}=1 \end{cases}$$

(это и есть ур-ие теплопр)

: задачу с „1" в гр. усл. решим легко! и сформулируем принцип Дюамеля – его частный случай – для ур-ие теплопр. с неоднор. гр. усл. на полу∞ прямой!

принцип Дюамеля: (для нашего случая)

Для того, чтобы решить задачу с произвольной граничной ф-ией $\mu(t)$, нужно решить задачу с „1" в граничном условии, и тогда решение исходной задачи запишется через интеграл от этого реш. с „1" и неоднородности $\mu(t)$:

$$\boxed{u(x,t)=\int_0^t \mu(\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial t}U(x,t-\tau)\,d\tau}$$; найдём реш. с „1":

$$\begin{cases} U_t=a^2U_{xx};\ x>0;\ t>0 \\ U|_{t=0}=0 \\ U|_{x=0}=1 \end{cases}$$; Будем искать решение этой задачи в виде суммы двух ф-ций:

$$U(x,t)=\underbrace{1}_{\substack{\text{это}\\\text{частн.}\\\text{реш.}}}+v(x,t)$$ – так удобно!

Тогда $\boxed{v(x,t)=U(x,t)-1}$, найдем $v(x,t)$:

для $v(x,t)$ получается задача:

$$\begin{cases} v_t=a^2v_{xx};\ x>0;\ t>0 \\ v|_{x=0}=\underset{(\text{дано})}{U|_{x=0}}-1=1-1=0 \\ v|_{t=0}=\underset{(\text{дано})}{U|_{t=0}}-1=0-1=-1. \end{cases}$$

сразу ответ: $v(x,t)=\int_0^\infty(-1)\cdot G_1(x,\xi,t)\,d\xi \overset{\text{если}}{\underset{\text{посчитать}}{=}} \dots =$

$=-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ – ф-ция ошибок.

Значит $\boxed{U(x,t)=1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)}$. (это и есть решение задачи с „1" в гр. усл.)

замечено:

→ так оказалось (если посчитать), что

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \ldots = 2a^2 \frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0}$$, где $G(x,\xi,t)$ – ф-ия Грина задачи для ур-ия теплопров. на всей ∞ прямой.

$$\underset{\text{на } \infty \text{ прямой}}{G(x,\xi,t)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}.$$

Тогда формула: $u(x,t) = \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial}{\partial t} U(x,t-\tau)\, d\tau$

превратится в $\qquad \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,0,t-\tau)$

более универсальную, т.к.

можно вообще „забыть" о решении с „1" → $U(x,t)$!

а использовать только

ф-ию Грина $G(x,\xi,t)$, вернее её производную по ξ!

Итак, можно решить любую задачу по формуле:

$$\boxed{u(x,t) = 2a^2 \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x,0,t-\tau)\, d\tau}$$

Всё: закончили первую тему нашего курса – „ур-ие параболического типа" (по классификации ур-ий математической физики.) (Пр. – ур-ие теплопроводности)

В следующий раз (22.10): вторая тема: „ур-ие эллиптического типа" (Пр. – ур-ие Лапласа)

ур-ие Лапласа ; ур-ие в задаче Штурма-Лиувилля:
$\Delta u = 0$; $\Delta u + \lambda u = 0$.
- это ур-ия эллиптического типа.
ф-ия u в этих ур-иях - пространственная,
т.е. ф-ия координат точки M.
Физические процессы, которые описываются
ур-иями эллиптич. типа, не зависят от времени t: это стационарные процессы ; а также
установившиеся со временем процессы.

В следующий раз будем решать задачи для
ур-ия Лапласа: $\Delta u = 0$ в ограниченных областях,
начиная с прямоугольника. (а в одномерной
области - на отрезке $[0, l]$ - решение ур-ия Лапласа
$u''(x) = 0$ - простейшее: это линейная ф-ия
$u(x) = Ax + B$.)

Опр. Дважды непрерывно дифференцируемая
ф-ия в обл-ти D и удовлетворяющая в D
ур-ию Лапласа - называется гармонической.

(D1) $u(M)$ - гармоническая: $\Delta u(M) = 0$.

см. лист -13а-

Есть ещё замечание
по ур-иям параболического типа - о
связи метода разделения переменных и
методе ф-ий Грина →

Замечание:

можно ввести ф-ию Грина, (формально!) решая задачу методом разделения переменных в ограниченной области – на конечном отрезке:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

Решение этой задачи запишем в виде бесконечного ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \underset{(\text{с.ф.})}{\sin\frac{\pi n}{l}x} \cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}, \text{ где}$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cdot \underset{(\text{с.ф.})}{\sin\frac{\pi n}{l}\xi}\, d\xi$$, подставим A_n в решение:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\right]\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} =$$

$$= \int_0^l \varphi(\xi)\cdot \underbrace{\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right]}_{G(x,\xi,t)} d\xi$$

т.е. $$\boxed{u(x,t) = \int_0^l \varphi(\xi)\cdot G(x,\xi,t)\, d\xi}$$; где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi$$ – ф-ия Грина первой краевой задачи для ур-ия теплопроводности на конечном отрезке $[0, l]$.