Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения
«ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ И СИСТЕМ ОДУ

§4. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДУ 1 ПОРЯДКА

§4. Локальная теорема ∃ и ! решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка

Результаты, полученные нами в предыдущем параграфе, оказались слишком хорошими вследствие того, что мы потребовали от правой части непрерывности и принадлежности по второй переменной классу Липшица на всей R^2. Для ряда важных с точки зрения практик задач мы такие свойства функции $f(t, y(t))$ гарантировать не можем и результаты получаются гораздо более скромными. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), & t>0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

, в которой функция $f(\alpha, \beta)$ непрерывна как функция 2 переменных и принадлежит по β классу Липшица не всюду, а лишь в некоторой области G, включая ее границы: $0 \le \alpha \le a, |\beta - y_0| \le b$ (2)

ГЛАВА 2, §4, стр. 35

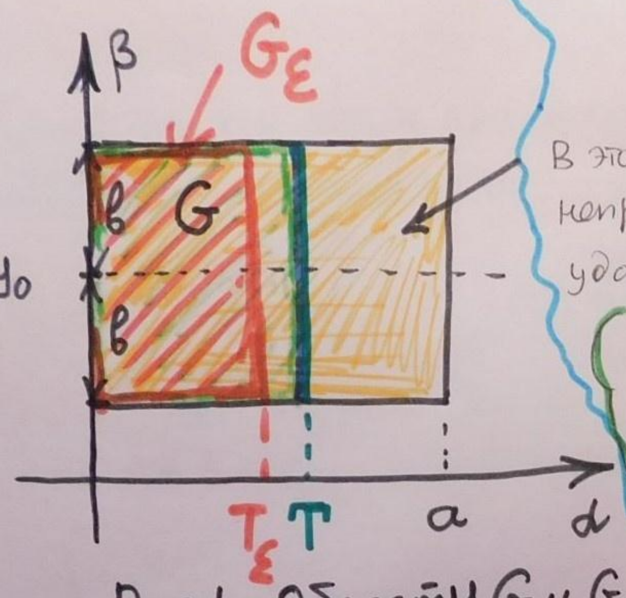


Рис.1 Области G и G_ε.

В этой области G, включая ее границу, $f(\alpha,\beta)$ непрерывна как функция 2 переменных и удовл. по β условию Липшица

то есть $\exists\, L:\ \forall\, (\alpha,\beta_1)\in G,\ (\alpha,\beta_2)\in G$

верно $|f(\alpha,\beta_1)-f(\alpha,\beta_2)| < L\,|\beta_1-\beta_2|$

Обозначим $$M=\max_{(\alpha,\beta)\in G}|f(\alpha,\beta)| \qquad (3)$$

Теорема 1 (Локальная теорема о существовании и единственности решения задачи Коши). Решение задачи Коши (1) при условиях (2) $\exists$ и единственно на интервале $0\le t<T$, где $$T=\min\left(a,\frac{b}{M},\frac{1}{L}\right) \qquad (4)$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое число $\varepsilon>0$ и докажем сначала $\exists$ и единственность решения задачи Коши на отрезке $$T_\varepsilon=\min\left(a,\frac{b}{M},\frac{1-\varepsilon}{L}\right) \qquad (5)$$

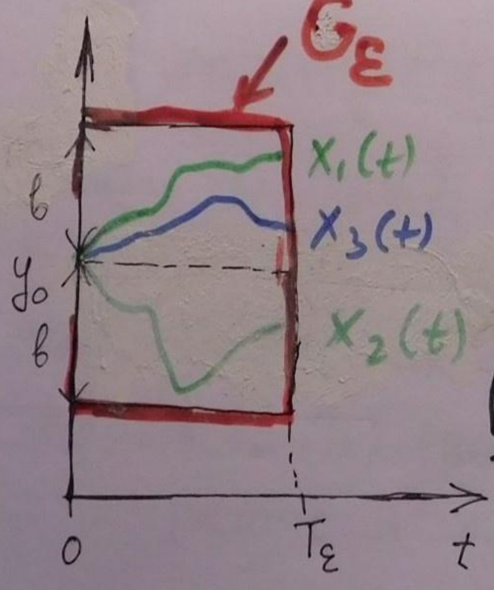
Точно так же, как и при доказательсте глобальной теоремы, построим интегральное уравнение, эквивалентное решению задачи (1) при $0 \le t \le T_\varepsilon$:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))\, d\tau, \quad 0 \le t \le T_\varepsilon \qquad (7)$$

Далее, рассмотрим мн-во функций, определемных и непрерывных при $0 \le t \le T_\varepsilon$, и удовлетворяющих дополнительным условиям:

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ |y(t) - y_0| \le b \text{ при всех } 0 \le t \le T_\varepsilon \end{cases} \qquad (8)$$

, обозначим это мн-во $\bar{C}[0; T_\varepsilon]$.



и введем на $\bar{C}[0, T_\varepsilon]$ метрику:

$$\rho(x(t), y(t)) = \max_{0 \le t \le T_\varepsilon} |x(t) - y(t)| \qquad (9)$$

Как доказывалось в §1, $\bar{C}[0; T_\varepsilon]$ – полное метрическое пространство.

Рис 2. Мн-во функций $\bar{C}[0; T_\varepsilon]$.

Рассмотрим на $\bar{C}[0;T_\varepsilon]$ интегральный оператор A,

$$Ay(t) = y_0 + \int_0^t f(\tau, y(\tau))\,d\tau \quad (10)$$

и докажем, что оператор A действует из $\bar{C}[0;T_\varepsilon]$ в $\bar{C}[0;T_\varepsilon]$ и что он является сжимающим.

1) Докажем, что оператор A действует из $\bar{C}[0,T_\varepsilon]$ в $\bar{C}[0,T_\varepsilon]$. Прежде всего, $|Ay(t)-y_0| \le b$. В самом деле, $|Ay(t)-y_0| = \left|\int_0^t f(\tau,y(\tau))d\tau\right| \le$

$$\le \int_0^t |f(\tau,y(\tau))|d\tau \le \int_0^{T_\varepsilon} |f(\tau,y(\tau))|\,d\tau \le \int_0^{T_\varepsilon} M d\tau = MT_\varepsilon \le b,$$ так как

в силу (5) $T_\varepsilon \le \frac{b}{M}$. Следовательно, график функции $Ay(t)$ лежит в области G_ε, кроме того $Ay(t)\big|_{t=0} = y_0$, и $Ay(t)$ – непрерывная функция, так как, в силу $T_\varepsilon \le a$ (5), подынтегральная функция в (10) существует и непрерывна. Итак, оператор A действует из $\bar{C}[0,T_\varepsilon]$ в $\bar{C}[0;T_\varepsilon]$.

2) Докажем, что A – сжимающий. В самом деле,

$$\rho(Ay_1(t), Ay_2(t)) = \max_{0 \le t \le T_\varepsilon} |Ay_1(t) - Ay_2(t)| =$$

$$= \max_{0 \le t \le T_\varepsilon} \left| \cancel{y_0} + \int_0^t f(\tau, y_1(\tau))\,d\tau - \cancel{y_0} - \int_0^t f(\tau, y_2(t))\,d\tau \right| =$$

$$= \max_{0 \le t \le T_\varepsilon} \left| \int_0^t (f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau)) \right| d\tau \le \int_0^{T_\varepsilon} | f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau)| \,d\tau$$

нер-во (5)

$$\le L \int_0^{T_\varepsilon} | y_1(\tau) - y_2(\tau)|\,d\tau \le L \cdot T_\varepsilon \cdot \max_{0 \le t \le T_\varepsilon} |y_1(t) - y_2(t)| \le (1-\varepsilon)\,\rho(y_1(t), y_2(t))$$

3) Итак, оператор A действует из $\bar{C}[0, T_\varepsilon]$ в $\bar{C}[0, T_\varepsilon]$ и является сжимающим. Следовательно, $\exists$ и ! неподвижная точка оператора A и, следовательно, $\exists$ и ! решение уравнения (7). Поскольку задача (1) эквивалентна уравнению (7), то ее решение также $\exists$ и!

4) Мы доказали $\exists$ и ! решения задачи (1) на $[0, T_\varepsilon]$. Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем $\exists$ и ! решения на $[0; T)$. Теорема доказана.

Пример

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=y^2, & t>0\\ y(0)=1\end{cases} \qquad (11)$$

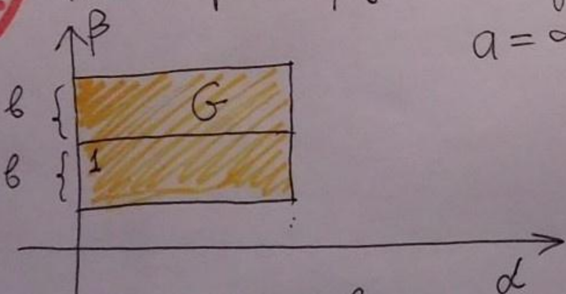
Рассмотрим на модельном примере, что может гарантировать теорема 1?

1) $$\frac{dy}{y^2}=dt \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2}=t+c \Rightarrow -\frac{1}{y}=t-c \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{\;\;}\\ y(0)=1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{1-t} \qquad (12)$$

Итак, решение (11) $\exists$ и ! на $0\le t<1$ (13)

2) Что гарантирует теорема? $f(\alpha,\beta)=\beta^2$



$a=\infty$, $M=\max\limits_{G}\beta^2=(b+1)^2$

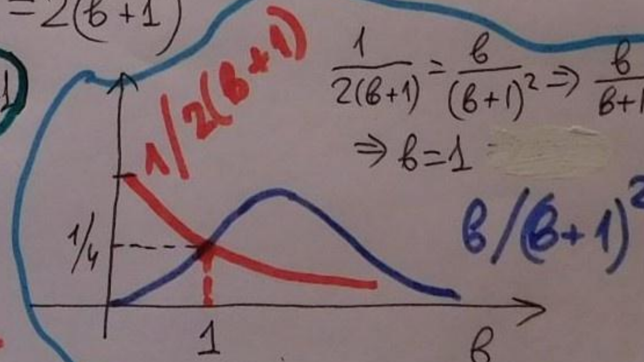
L? $|\beta_1^2-\beta_2^2|=|\beta_1+\beta_2|\cdot|\beta_1-\beta_2|\le 2(b+1)|\beta_1-\beta_2|$

$\Rightarrow L=2(b+1)$

$$T=\min\left(\overset{a}{\overset{\shortparallel}{\infty}},\ \frac{b}{(b+1)^2};\ \frac{1}{2(b+1)}\right)=\frac{1}{4} \text{ (при } b=1)$$

$$\frac{1}{2(b+1)}=\frac{b}{(b+1)^2}\Rightarrow\frac{b}{b+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow b=1$



Итак, теорема дала вчетверо худший результат. Почему? Используется не вся инф. о функции f