Это продолжение лекции 1 октября 2020. - после док-ва Теорем; в конце - домашнее задание!

Рассмотрим общую первую начально-краевую задачу для ур-ие теплопроводности с неоднородным ур-ием и неоднородными граничными условиями.

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t); \quad 0<x<l,\ t>0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \quad \text{- нач. усл.} \\ U(0,t) = \mu_1(t) \\ U(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \text{гран. усл.}$$

В силу линейности исходной задачи - представим её решение в виде суммы трёх ф-ий:

(1)
$$\begin{cases} U_t^{(1)} = a^2 U_{xx}^{(1)} \\ U^{(1)}(x,0) = \varphi(x) \quad \text{- заданное начальн усл.} \\ U^{(1)}(0,t) = 0 \\ U^{(1)}(l,t) = 0 \quad \text{гр. усл.} \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} U_t^{(2)} = a^2 U_{xx}^{(2)} + f(x,t) \quad \text{неоднородность в ур-ии} \\ U^{(2)}(x,0) = 0 \\ U^{(2)}(0,t) = 0 \\ U^{(2)}(l,t) = 0 \quad \text{гр. усл.} \end{cases};$$

(3)
$$\begin{cases} U_t^{(3)} = a^2 U_{xx}^{(3)} \\ U^{(3)}(x,0) = 0 \\ U^{(3)}(0,t) = \mu_1(t) \\ U^{(3)}(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \text{неоднородные гран. условие! [это плохо!]}$$

т.е. переберём все неоднородности поочерёдно.

$$\boxed{U(x,t) = U^{(1)}(x,t) + U^{(2)}(x,t) + U^{(3)}(x,t)}$$

(1)-ую задачу с нулевыми гр. усл. и заданным начальным условием - умеем решать Методом разделения перем.

$$U^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\varphi_n}_{\text{коэф. Фурье}} \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x \cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}, \text{ где } \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

(2)-ую задачу - с неоднородным ур-ием (это не страшно! научимся решать из курса „дифф. ур-ий") главное, что и в этой задаче нулевые гран. условие! Поэтому эту задачу можно решать методом разделения переменных.

раскладывая неоднородность в ур-ии в ряд по с.ф. задачи Штурма-Лиувилля на отрезке.

Т.е. представляя $f(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\text{коэф. Фурье}}{f_n(t)}\cdot\underset{\text{с.ф.}}{\sin\frac{\pi n}{l}x}$, где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx.$$

Также и $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\text{коэф. Фурье}}{\varphi_n}\cdot\underset{\text{с.ф.}}{\sin\frac{\pi n}{l}x}$, где $\varphi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$,

поэтому (1) и (2) задачи можно объединить в одну - для них принципиально важно, что граничные усл. нулевые. - Т.е. можем строить решение в виде ряда по с.ф. задачи Штурма-Лиувилля.

И искомое решение $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\underset{\text{неизв. ф-ия}}{T_n(t)}\cdot\underset{\text{(с.ф.)}}{\sin\frac{\pi n}{l}x}$

подлежащая определению для неоднородного ур-ия.

Подставляя все эти разложения в ур-ие, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x=a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\underbrace{\left(\sin\frac{\pi n}{l}x\right)''}_{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cdot\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

переносим влево, под один знак $\sum$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{T_n'(t)+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right\}\cdot\underset{\text{т.к.}\ \neq 0}{\sin\frac{\pi n}{l}x}=0;$$

опуская $\sum$, для каждого n, получаем: это обыкновенное дифференциальное ур-ие для ф-ии одной переменной $T_n(t)$, но неоднородное!

$$\begin{cases}T_n'(t)+a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t)=\underset{\text{изв.}}{f_n(t)}\\ T_n(0)=\varphi_n\text{ - изв. коэф. Фурье начальной ф-ии }\varphi(x).\end{cases}$$

Такое дифф. ур-ие решается в курсе обыкновенных дифф. ур-ий! (есть разные способы - в зависимости от вида ф-ии $f(x,t)$: метод подбора или универсальный метод вариации постоянных).

А сложность представляет задача (3) - из-за ненулевых граничных условий! → Нельзя применить метод разделения переменных!

Что делать? - Либо решать каким-либо другим методом, либо свести задачу с неоднородными гр. условиями к задаче с однородными, т.е. нулевыми гр. условиями. И тогда - можно применять метод разделения переменных!

Как это сделать? В каждой конкретной задаче нужна догадка! Но можно дать совет: например, так:

Рассмотрим задачу (3): (или более общую задачу с заданной начальной ф-ией $\varphi(x)$)
(индекс (3) опустим)

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx};\ 0<x<l;\ t>0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U(0,t) = \mu_1(t) \\ U(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

гр. усл.

Будем искать решение в виде суммы двух ф-ий, одну из которых подберём так, чтобы для другой получилась задача с нулевыми граничными условиями.

$$U(x,t) = \underbrace{v(x,t)}_{\text{с 0 гр. усл.}} + \underbrace{w(x,t)}_{\text{подберём так}}$$

!

т.е. $\omega(x,t)\Big|_{\text{на границе}} = u(x,t)\Big|_{\text{на границе}}$, тогда

$v(x,t) = u(x,t) - \omega(x,t)$, на границе будет равна 0.

Положим $\boxed{\omega(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{\ell}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]}$

это совет!

(видно, что при $x=0$: $\omega(0,t) = \mu_1(t)$,
а при $x=\ell$: $\omega(\ell,t) = \mu_2(t)$).

Тогда для $v(x,t)$ получится задача:

$$\begin{cases} v_t + \omega_t = a^2 \cdot v_{xx} + a^2 \cdot \omega_{xx} \quad \text{или:} \\ v_t = a^2 v_{xx} + \underbrace{(a^2 \omega_{xx} - \omega_t)}_{f(x,t)} \text{: ур-ие стало неоднородным!} \\ v(0,t) = 0 \\ v(\ell,t) = 0 \quad \text{гр. условия нулевые!} \\ v(x,0) = u(x,0) - \omega(x,0) = \varphi(x) - \omega(x,0) = \tilde{\varphi}(x) \end{cases}$$

новая заданная начальная ф-ия.

Такую задачу сможем решить методом разделения переменных!

<u>Примеры:</u> (1) Решить ур-ие теплопроводности на отрезке $[0,1]$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}; \quad 0<x<1, \; t>0 \\ u(0,t) = 1 \\ u(1,t) = 2 \\ u(x,0) = x+1, \end{cases}$$ неоднородные гран. условия!

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t);$$

где $w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]$

Здесь: $\begin{cases} \mu_1(t) = 1 \\ \mu_2(t) = 2 \\ l = 1 \end{cases}$; тогда $\boxed{w(x,t) = 1 + x}$

а для $v(x,t)$ получается задача:

$$v_t + w_t = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} \quad \text{или}$$

$$v_t = a^2 v_{xx} + (a^2 \underset{0}{\underset{\parallel}{w_{xx}}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{w_t}})$$

$\Rightarrow$ при таком выборе $w(x,t)$ ур-ие для $v(x,t)$ осталось однородным:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \quad 0<x<1, \; t>0 \\ v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - \underset{\text{не зав. от } t!}{w(x,0)} = x + \cancel{1} - \cancel{1} - x = 0 \end{cases}$$ нулевые гран. усл.!

при такой начальной ф-ии $v(x,t) \equiv 0$!

(или так: как ноль ни разлагай в ряд Фурье – все коэфф. получатся равными нулю!)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } u(x,t) = 1+x}$

Пр. 2. Решить ур-ие теплопроводности на отрезке $[0,1]$.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + x\,; & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=0 & \\ u(1,t)=t & \\ u(x,0)=x & \end{cases}$$

ненулевые гр. усл. (одно!)

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$,

где

$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right]$

здесь $\begin{cases} \mu_1(t)=0 \\ \mu_2(t)=t \\ l=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{w(x,t) = xt}$

тогда для $v(x,t)$ получается задача:

$$v_t + w_t = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + x$$

$$v_t = a^2 v_{xx} + (\underset{0}{a^2 w_{xx}} - \underset{x}{w_t} + x)$$ - ур-ие получилось однородное!

$$\Rightarrow \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}\,; & 0<x<1,\ t>0 \\ v(0,t)=0 & \\ v(1,t)=0 & \\ v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = x - 0 = x & \end{cases}$$

нулевые гр. усл.

общее решение $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \underset{\text{с.ф.}}{\sin \pi n x} \cdot e^{-a^2(\pi n)^2 t}$

при $t=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \pi n x = x$, где $A_n = 2\int_0^1 x \cdot \sin \pi n x\, dx =$ (по частям)

$$= \ominus\frac{2}{\pi n}\int_0^1 x\, d(\cos\pi n x) = -\frac{2}{\pi n}\Big[x\cdot\cos\pi n x\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos\pi n x\, dx\Big] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\Big[\underbrace{\cos\pi n}_{(-1)^n} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{\pi n}\sin\pi n x\Big|_0^1}}_{0}\Big] = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\pi n x\cdot e^{-a^2(\pi n)^2 t}$$

и ответ для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = xt + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\pi n x\cdot e^{-a^2(\pi n)^2 t}$$

Задаю домашнее задание к четвергу, 8 окт. (присылайте по почте!)

$\boxed{Д.3.6}$

Решить ур-ие теплопроводности на отрезке $[0,1]$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + x, & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(1,t)=t \\ u(x,0) = 3\sin 10\pi x \end{cases}$$