Общая постановка начально-краевой задачи для ур-ия колебаний струны:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t); \quad 0<x<l,\ t>0 \\ (\alpha_1 u_x - \beta_1 u)\big|_{x=0} = \mu_1(t) \quad \text{гр.} \\ (\alpha_2 u_x + \beta_2 u)\big|_{x=l} = \mu_2(t) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \text{ - нач. отклонение} \quad \text{нач.} \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \text{ - нач. скорость} \end{cases}$$

Граничные условия взяты в самом общем виде!

1) Если $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$ то получатся гр. условия 1ого рода; а задача → Дирихле

$$\begin{cases} u\big|_{x=0} = \mu_1(t) \\ u\big|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

2) Если $\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases}$, то получится задача с гр. условиями 2ого рода → задача Неймана:

$$\begin{cases} u_x\big|_{x=0} = \mu_1(t) \\ u_x\big|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

3) Если ввести

$h_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ и $h_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$; то получатся граничные условия 3его рода:

(!) Задачу с гр. усл. 3-его рода не рассматриваем!

$$\begin{cases} (u_x - h_1 u)\big|_{x=0} = \mu_1(t) \\ (u_x + h_2 u)\big|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

Опр. классического решения: $u(x,t) \in C\{x\in[0,l]; t\geq 0\} \cap C^2\{x\in(0,l); t>0\}$

Классическим решением поставленной задачи называется ф-ия $u(x,t)$, непрерывная в замкнутой обл-ти: $\{x\in[0,l]$ и $t\geq 0\}$, имеющая непрерывные производные $2^{\underline{ого}}$ порядка в открытой обл-ти: $\{x\in(0,l)$ и $t>0\}$, удовлетворяющая ур-ию колебаний в откр. обл-ти; удовлетворяющая гр. условиям при всех $t\geq 0$ и удовлетворяющая начальным условиям при $x\in[0,l]$.

(!) Для $\exists$ классического решения необходима непрерывность ф-ий $f(x,t)$; $\mu_1(t)$; $\mu_2(t)$; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и согласование начальных и граничных условий: например, для задачи Дирихле:

$$\mu_1(0)=\varphi(0) \qquad \frac{\partial\mu_1(0)}{\partial t}=\psi(0)$$
$$\mu_2(0)=\varphi(l) \quad , \quad \frac{\partial\mu_2(0)}{\partial t}=\psi(l)$$

Теорема единственности решения задачи на отрезке.

$\boxed{T}$: общая задача может иметь только одно классическое решение.

Докажем $\boxed{T}$ для гр. усл. $1^{\underline{ого}}$ рода (для задачи Дирихле) и для гр. усл. $2^{\underline{ого}}$ рода (зад. Неймана).

(!) Для доказательства единственности решения используем интеграл энергии: это сумма кинетической и потенциальной энергии механической системы в некоторый момент времени.

В отсутствии внешних сил полная энергия колеблющейся системы не меняется — выполнен закон сохранения энергии!

Док-во: (от противного): пусть $\exists$ два классических решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ общей задачи. Введём ф-ию $\omega(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ - она удовлетворяет однородной задаче:

$$\begin{cases} \omega_{tt}=a^2\omega_{xx}\ ; \quad 0<x<l,\ t>0 \\ \text{либо: (зад. Дирихле)} \quad \omega|_{x=0}=0, \ \ \omega|_{x=l}=0 \qquad \text{либо: (зад. Нейм.)} \quad \omega_x|_{x=0}=0, \ \ \omega_x|_{x=l}=0 \\ \text{нач. усл.} \quad \omega|_{t=0}=0, \ \ \omega_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

Введём функционал $E(t)$:

$$\boxed{E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[W_t^2(x,t)+a^2W_x^2(x,t)\right]dx}$$

с точностью до постоянного множителя (плотности массы) величина $E(t)$ является полной энергией колеблющейся струны в момент времени t. Из определения $E(t)$ и из нач. усл.: $E(t)\geqslant 0$ и $E(0)=0$.

Докажем, что

$$\boxed{E(t)=\text{const}}$$

а с учётом $E(0)=0$:

$$\Rightarrow \boxed{E(t)=0}$$

Найдём производную функционала $E(t)$ по времени:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l [\underbrace{\omega_t(x,t)}_{\text{вынесем}} \cdot \omega_{tt}(x,t) + \underbrace{a^2\omega_x(x,t)\cdot\omega_{xt}(x,t)}_{\text{по частям}}]\,dx =$$

по частям

$$a^2\omega_x\cdot\omega_t\Big|_{x=0}^{x=l} - a^2\int_0^l \omega_{xx}\cdot\underbrace{\omega_t}_{\text{вынесем}}\,dx$$

$$= \int_0^l \omega_t(x,t)\cdot[\underbrace{\omega_{tt}(x,t) - a^2\omega_{xx}(x,t)}_{=0}]\,dx + a^2\omega_x\cdot\omega_t\Big|_{x=0}^{x=l}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = a^2\omega_x(x,t)\cdot\omega_t(x,t)\Big|_{x=0}^{x=l}$$: рассмотрим зад. Дир. и зад. Нейм.:

1) В случае задачи Дирихле $\underbrace{\omega|_{x=0}=0 \text{ и } \omega|_{x=l}=0}$ во все моменты времени $t\geq 0$, поэтому $\omega_t(0,t)=0$, $\omega_t(l,t)=0$

$\Leftarrow$ $\frac{dE}{dt}=0 \Rightarrow \boxed{E(t)=\mathrm{const}}$,

но $E(0)=0 \Rightarrow E(t)\equiv 0$

2) В случае задачи Неймана - сразу, т.к. $\omega_x|_{x=0}=0$ и $\omega_x|_{x=l}=0$

$\Leftarrow$ $\frac{dE}{dt}=0$;

$\boxed{E(t)=\mathrm{const}}$, из $E(0)=0 \Rightarrow \boxed{E(t)\equiv 0}$

$\Rightarrow$ получим, что для обеих краевых задач - Дирихле и Неймана: $E(t)\equiv 0$; отсюда: $\omega_t(x,t)=0$; $\omega_x(x,t)=0$ для $0<x<l$ и $t>0$

$\rightarrow$ поэтому $\boxed{\omega(x,t) = const}$, а т.к. для $\omega(x,t)$ выполнены начальные усл.: $\omega|_{t=0} = 0$ и $\omega_t|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\omega(x,t) \equiv 0}$

$\downarrow$

$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ $\Rightarrow$ решение исходной общей задачи единственно!

Дальше: Задача Коши для ур-ия колебаний бесконечной струны. Формула Даламбера

Если нас интересуют колебания струны на участке вдали от её концов и в таком промежутке времени, когда влияние концов не успевает ещё сказаться на выбранном участке, то струну можно считать бесконечной.

Итак: начальная задача Коши: $\longrightarrow x$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad -\infty < x < +\infty; \; t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \text{ - нач. отклонение} \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \text{ - нач. скорость} \end{cases}$$

Опр. Классическим решением этой задачи называется ф-ия $u(x,t)$, определённая и непрерывная вместе с 1-ой производной $u_t(x,t)$ в замкнутой обл-ти: $\{-\infty < x < +\infty; \; t \geq 0\}$, имеющая непрерывные 2-ые производные $u_{tt}(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в откр. обл-ти: $\{-\infty < x < +\infty; \; t > 0\}$:

удовлетворяющая ур-нию колебаний и заданным начальным условием:

$$\boxed{u(x,t) \in C^{0,1}(-\infty < x < +\infty;\ t \geq 0) \cap C^{2,2}(-\infty < x < +\infty;\ t > 0)}$$

Вывод формулы Даламбера.

Преобразуем ур-не колебаний (или волновое ур-не) $\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}}$ к каноническому виду ур-ие гиперболического типа, содержащую смешанную производную.

Для этого нужно записать дифференциальное ур-ие характеристик:

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$$

[подробнее см. (*) → для самого общего ур-ия]

оно распадается на два:

~~[illegible]~~

$dx - a\,dt = 0$ и $dx + a\,dt = 0$

$\boxed{x - at = C_1}$ $\boxed{x + at = C_2}$

интегралы (решения) этих ур-ий и есть характеристики!

- это получились два семейства прямых!

Характеристики играют важную роль при построении решений. Это объясняется тем, что значения решения ур-ие колебаний вида $u = v(x-at)$ сохраняются постоянными вдоль характеристики $x - at = C_1$; а значение

решения вида $u = \mathcal{V}(x+at)$ сохраняются постоянными вдоль характеристики $x+at = C_2$.
Такие решения называются <u>волнами</u>, распространяющимися вдоль оси X со скоростью a соответственно вправо и влево.

По виду характеристик введём новые переменные вместо $(x,t) \to (\xi, \eta)$, где

$$\boxed{\begin{aligned}\xi &= x-at\\ \eta &= x+at\end{aligned}}\;;\quad \left.\begin{aligned}\xi &= \xi(x,t)\\ \eta &= \eta(x,t)\end{aligned}\right\}$$

т.е. это „подсказка“! о замене переменных!

- -

Теперь пояснение (*) о дифф. ур-ии характеристик (из курса дифф. ур-ий) - а потом - продолжим.

- -

(*) Рассмотрим линейное относительно старших производных дифф. ур-ие в частных производных 2<u>ого</u> порядка для ф-ии 2<u>х</u> независимых переменных:

$$(1):\; a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$$

$$u = u(x,y).$$

<u>Опр</u>: Пусть кривая γ на пл-ти (x,y) задана ур-ием: $\omega(x,y) = 0$, где ω - непр. дифференцируемая ф-ия, причём, $\omega_x^2 + \omega_y^2 \neq 0$.

<u>Кривая γ</u> называется <u>характеристикой ур-ия (1)</u>, если ф-ия $\omega(x,y)$ удовлетворяет <u>характе-</u>

ристическому ур-нию: $a_{11}\omega_x^2 + 2a_{12}\omega_x\cdot\omega_y + a_{22}\omega_y^2 = 0$

В курсе обыкновенных дифф. ур-ний доказана $\boxed{T}$:
ф-ия $\omega(x,y)$ является частным решением хар. ур-ия тогда и только тогда, когда равенство $\omega(x,y) = const$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифф. ур-ия:

$$\boxed{a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\cdot dy + a_{22}(dx)^2 = 0}$$

Это ур-ие называется дифф. ур-ием характеристик, а его решения - два независимых первых интеграла - называются характеристиками исходного ур-ия (1):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\cdot a_{22}}}{a_{11}}$$

Знание характеристик позволяет привести ур-ие (1) к каноническому виду (более удобному!)

Теперь вернёмся к нашему ур-ию колебаний $\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx}}$ и приведём его к виду $\boxed{u_{\xi\eta} = 0}$ с помощью замены переменных: вместо $(x,t) \to (\xi,\eta)$: $\boxed{\begin{matrix}\xi = x - at \\ \eta = x + at\end{matrix}}$ которая получилась из характеристик!

нужно выразить производные u_{xx} и u_{tt} через производные по новым переменным ξ и η и подставить в ур-ние: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

Итак:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} =$$

$$= u_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\cdot\eta_x\cdot\xi_x + u_\xi\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + u_{\eta\eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + u_\eta\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}; =$$

$$= u_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + 2u_{\xi\eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_{\eta\eta}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + u_\eta\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}.$$

подставим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ в ур-ние:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}:$$

$$u_{\xi\xi}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2+2u_{\xi\eta}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}+u_{\eta\eta}\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+u_\eta\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=$$

$$=a^2\cdot u_{\xi\xi}\cdot\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+a^2\cdot 2u_{\xi\eta}\cdot\eta_x\cdot\xi_x+a^2\cdot u_\xi\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+a^2u_{\eta\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+$$

$$+a^2u_\eta\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}.$$

Теперь посчитаем производные от ξ и η по x и t: $\boxed{\begin{aligned}\xi&=x-at\\ \eta&=x+at\end{aligned}}$:

$\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=1;\quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=0$

$\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=1;\quad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=0$

$\dfrac{\partial\xi}{\partial t}=-a;\quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=0$

$\dfrac{\partial\eta}{\partial t}=a;\quad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=0$

подставим в ур-ие:

получим:

$$u_{\xi\xi}\cdot(-a)^2+2u_{\xi\eta}\cdot a\cdot(-a)+u_{\eta\eta}\cdot a^2+u_\xi\cdot 0+u_\eta\cdot 0=$$

$$=a^2u_{\xi\xi}+2a^2u_{\xi\eta}+a^2\cdot u_{\eta\eta}+a^2u_\xi\cdot 0+a^2u_\eta\cdot 0$$

$$\to \cancel{a^2u_{\xi\xi}}-2a^2u_{\xi\eta}+\cancel{a^2u_{\eta\eta}}=\cancel{a^2u_{\xi\xi}}+2a^2u_{\xi\eta}+\cancel{a^2u_{\eta\eta}}$$

$$4a^2u_{\xi\eta}=0;\ \text{или}\ \boxed{u_{\xi\eta}=0}\quad !$$

Итог: В результате перехода к новым переменным (ξ,η) вместо ур-ие: $u_{tt}=a^2u_{xx}\longrightarrow$ получим ур-ие: $u_{\xi\eta}=0$.

Решим это ур-ие!

Общий интеграл этого ур-ия имеет вид:

$u_\eta(\xi,\eta) = \bar{f}(\xi,\eta)$; интегрируем теперь по η:

$$u(\xi,\eta) = \int \bar{f}(\xi,\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$ где

f_1 и f_2 - произвольные дважды непрерывно дифф. ф-ии.

$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$; переходим к старым переменным (x,t):

$$\boxed{u(x,t) = f_1(\underbrace{x-at}_{\longrightarrow \text{„}a\text{"}}) + f_2(\underbrace{x+at}_{\text{„}a\text{"}\longleftarrow})}$$

т.е. решение ур-ия колебаний бесконечной струны есть суперпозиция двух волн, бегущих в положительном и отрицательном направлении оси X со скоростью a.

Теперь осталось найти конкретный вид ф-ий f_1 и f_2 $\rightarrow$ из начальных условий: $\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x); \\ u_t|_{t=0} = u_t(x,0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x); \end{cases}$$ где

штрих „ $'$ " означает производную по полному аргументу, и после дифференцирования положили $t=0$!

Обозначим аргументы функций f_1 и f_2 абстрактной буквой ζ (дзета), чтобы не запутаться дальше!

$$-\begin{cases} f_1(\zeta)+f_2(\zeta)=\varphi(\zeta) & (1) \\ -f_1'(\zeta)+f_2'(\zeta)=\frac{1}{a}\psi(\zeta) & (2) \to \text{это ур-ие проинтегрируем:} \\ -f_1(\zeta)+f_2(\zeta)=\frac{1}{a}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz+\bar{C} & (2) \end{cases}$$

1) вычтем из (1) (2):

$$2f_1(\zeta)=\varphi(\zeta)-\frac{1}{a}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz-\bar{C}$$

; или, разделив на 2:

$$\boxed{f_1(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)-\frac{1}{2a}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz-\frac{\bar{C}}{2}}$$

это вид ф-ии f_1!

2) сложим (1) и (2):

$$2f_2(\zeta)=\varphi(\zeta)+\frac{1}{a}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz+\bar{C}$$

; или, разделив на 2:

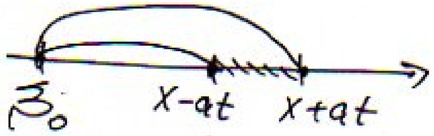
$$\boxed{f_2(\zeta)=\frac{1}{2}\varphi(\zeta)+\frac{1}{2a}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\psi(z)\,dz+\frac{\bar{C}}{2}}$$

это вид ф-ии f_2!

Дальше: подставим найденный вид ф-ий f_1 и f_2 в формулу: $u(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at)$, взяв аргумент $\zeta=x-at$ для ф-ии f_1, и $\zeta=x+at$ для ф-ии f_2:

и получим окончательно:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{\xi_0}^{x+at}\psi(z)\,dz - \frac{1}{2a}\int_{\xi_0}^{x-at}\psi(z)\,dz +$$



$$+\cancel{\frac{C}{2}} - \cancel{\frac{C}{2}} =$$

$$= \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz.$$

ф-ия $u(x,t)$ представляет собой процесс распространения начальных отклонений и начальных скоростей!

Итак, получим решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}; \ -\infty < x < +\infty;\ t>0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz}$$

это и есть формула Даламбера!

Разберём: 1) Если фиксировать момент времени $t=t_0$, то $u(x,t_0)$ - есть профиль струны в момент времени t_0;

2) Если фиксировать точку $x=x_0$, то мы получим ф-ию $u(x_0,t)$, которая описывает процесс движения

точки x_0 (или закон движения т. x_0).

еще: Пусть наблюдатель, который находится в т. 0 в момент $t=0$, движется со скоростью a в положительном направлении оси X, тогда, в системе координат, связанной с ним: (x', t'):

$$\begin{cases} x' = x - at \\ t' = t \end{cases}; \quad \text{ф-ия } u(x,t) = f(x-at) = f(x')$$

т.е. наблюдатель видит всё время один и тот же профиль, что и в начальный момент!

$\Rightarrow$ ф-ия $f(x-at)$ представляет собой неизменный профиль, перемещающийся вправо со скоростью a. А ф-ия $f(x+at)$ – неизменный профиль, перемещающийся влево со скоростью a.

$\Rightarrow$ Общее решение задачи Коши, описываемое формулой Даламбера, есть суперпозиция двух бегущих волн – правой и левой (т.е. распространяющихся со скоростью a вправо и влево) вдоль оси X.

Замечание: Для неоднородного ур-ия: $\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)}$

$\rightarrow$ Формула Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz\,d\tau$$

Пр. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x\sin t; & -\infty < x < +\infty; \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin x \\ u_t|_{t=0} = \cos x \end{cases}$$

Ф. Даламбера: $u(x,t) = \dfrac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\,dz +$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\,dz$$

$\downarrow$

для общей задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t); & (a^2 = 1); \quad f(x,t) = x\sin t \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & \longrightarrow \quad \varphi(x) = \sin x \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) & \longrightarrow \quad \psi(x) = \cos x \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos z\,dz + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} z\sin\tau\,dz =$$

$$= \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\sin z\Big|_{x-t}^{x+t} + \frac{1}{2}\int_0^t \sin\tau\,d\tau \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} =$$

$$= \frac{\cancel{\sin(x-t)} + \sin(x+t)}{\cancel{2}} + \frac{1}{2}\left[\sin(x+t) - \cancel{\sin(x-t)}\right] + \frac{1}{4}\int_0^t \sin\tau \left\{\left[x+(t-\tau)\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left[x-(t-\tau)\right]^2\right\} d\tau = \sin(x+t) + \frac{1}{4}\int_0^t \sin\tau \left\{\left[\cancel{x} + (t-\tau) - (\cancel{x} - (t-\tau))\right] \cdot \left[x + \cancel{(t-\tau)} + (x - \cancel{(t-\tau)})\right]\right\} d\tau =$$

$$(\underbrace{t-\tau+t-\tau}_{2t-2\tau}) \qquad \underbrace{\quad}_{2x}$$

$$= \sin(x+t) + \frac{1}{\cancel{4}}\int_0^t \sin\tau \cdot \cancel{4}(t-\tau)\cdot x\,d\tau =$$

$$= \sin(x+t) + xt\int_0^t \sin\tau\,d\tau - x\int_0^t \tau\sin\tau\,d\tau = \sin(x+t) - xt\cos\tau\Big|_0^t +$$

$$+ x\cdot\int_0^t \tau\, d(\cos\tau) = \sin(x+t) - xt\cdot[\cos t - 1] + x\cdot\Big[\tau\cdot\cos\tau\Big|_0^t -$$

$$-\int_0^t \cos\tau\, d\tau\Big] = \sin(x+t) - \cancel{xt\cdot\cos t} + xt + \cancel{xt\cos t} - x\sin\tau\Big|_0^t =$$

$$= \sin(x+t) + xt - x\cdot\sin t = \sin(x+t) + x\cdot[t - \sin t].$$

Ответ: $u(x,t) = \sin(x+t) + x\cdot[t - \sin t]$.

T Теорема $\exists$ и единственности решения задачи Коши:

Пусть ф-ия $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а ф-ия $\psi(x)$ — непрер. дифф.-ма на ∞ прямой. Тогда классическое решение задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad -\infty < x < +\infty, \; t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

существует, единственно и определяется формулой Даламбера.

Док-во: непосредственной проверкой устанавливаем, что ф-ия $u(x,t)$, представимая формулой Даламбера, является классическим решением задачи.

Теперь докажем, что решение единственно:

Если решение $\exists$, то оно представимо формулой Даламбера. Если есть второе решение, то оно так же представимо формулой Даламбера.

Разность двух решений:

$\omega(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет:

$$\begin{cases} \omega_{tt} = a^2 \omega_{xx}; & -\infty < x < +\infty; \ t > 0 \\ \omega|_{t=0} = 0 \\ \omega_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

и так же представима формулой Даламбера. Подставляя в формулу Даламбера нулевые начальные условия, получаем: $\omega(x,t) \equiv 0$ и $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. Решение единственно.

Формула Даламбера даёт возможность доказать устойчивость решения задачи Коши по начальным данным.

$\boxed{\text{Т.}}$ устойчивости: пусть ф-ии $\varphi(x)$; $\tilde{\varphi}(x)$; $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ - начальные данные двух задач Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{u}_{tt} = a^2 \tilde{u}_{xx}; & -\infty < x < +\infty; \ t > 0 \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

При $\forall$ конечном $T > 0$ для $\forall$ числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon, T) > 0$, что если ф-ии $\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}$ удовлетворяют неравенствам:

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \delta,$$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |\psi(x) - \tilde{\psi}(x)| < \delta,$$ то решения

$u(x,t)$ и $\tilde{u}(x,t)$ уд. неравенству: $\sup\limits_{-\infty < x < +\infty} |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \varepsilon$; $0 \le t \le T$!

Док-во → в сл. р93!