Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВАЗ. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА

В ПЕРВОЙ ЧАСТИ ПРЕЗЕНТАЦИИ ИЗЛОЖЕНЫ РАЗДЕЛЫ:

§1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА

§1. Линейные ОДУ n-го порядка. Основные понятия.

§2. Линейные однородные ОДУ n-го порядка.

§3. Линейные однородные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений (Ф.С.Р.)

§4. Методы построения частных решений неоднородного ОДУ (метод подбора; метод вариации постоянных).

§§5-8. Аналогично для линейных систем ОДУ

§1. Линейные ОДУ n-го порядка. Основные понятия

Пусть функции $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$, $f(t)$ непрерывны на мн-ве M (здесь M – (a,b), либо $[a,\infty)$, либо R^1) **(1)**

Определение 1 Линейным <u>неоднородным</u> ОДУ n-го порядка называется уравнение вида

$$Ly = y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t) \quad (2)$$

где $t \in M$, $f(t) \not\equiv 0$ на M.

или, в сокращенном виде, $Ly(t) = f(t)$ **(2')**

Определение 2 Линейным <u>однородным</u> ОДУ n-го порядка называется уравнение вида

$$Ly = y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0 \quad (3)$$

Замечание В главе 2 было установлено, что задача Коши для ОДУ n-го порядка при непрерывных $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$, $f(t)$

$$\begin{cases} Ly(t) = f(t), \ t \in M \\ y(t_0) = y_{0,0};\ y'(t_0) = y_{0,1}, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n-1} \end{cases} \quad (4)$$

(здесь $t_0 \in M$) имеет, и притом ед. решение на M.

Этим св-вом мы будем польз. в дальнейшем

Утверждение 1 Любые 2 решения неоднородного уравнения (2) различаются между собой на решение однородного уравнения (3).

Доказательство Пусть

$$Ly_1(t) = y_1^{(n)}(t) + a_1(t)\,y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,y_1(t) = f(t),\ t\in M \quad (5)$$

$$Ly_2(t) = y_2^{(n)}(t) + a_1(t)\,y_2^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\,y_2(t) = f(t),\ t\in M \quad (6)$$

Вычитая (6) из (5), получим:

$$Ly_1(t) - Ly_2(t) = \left(y_1(t) - y_2(t)\right)^{(n)} + a_1(t)\left(y_1^{(n-1)}(t) - y_2^{(n-1)}(t)\right) + \ldots$$

$$+\, a_n(t)\left(y_1(t) - y_2(t)\right) = L\left(y_1(t) - y_2(t)\right) = 0 \quad (7)$$

утверждение доказано

Равенство (7) означает, что, во-первых, L – линейный оператор. Во-вторых, из (7) следует что задачу исследования множества решений уравнения (1) сводится к последовательному решению двух более простых задач:

1) нахождение множества решений однородного ур-ния (3);
2) построение какого-либо (частного) решения неодн. ур-ния (1),

то есть:

$$y_{общ,неодн}(t) = y_{общ,одн}(t) + y_{част,неодн}(t) \quad (8)$$

Мы будем последовательно решать эти две задачи.

§2. Линейные однородные ОДУ n-го порядка

Утверждение 2 Множество решений уравнения (3) представляет собой линейное пространство.

Доказательство Пусть функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями уравнения (3) на множестве M. Докажем, что любая их линейная комбинация $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ также является решением уравнения (3):

$$L\big(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\big) = \big(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\big)^{(n)} + a_1(t)\big(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\big)^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + a_n(t)\big(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\big) = \alpha\big(y_1^{(n)}(t) + a_1(t)\, y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\, y_1(t)\big) +$$

$$+ \beta\big(y_2^{(n)}(t) + a_1(t)\, y_2^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)\, y_2(t)\big) = \alpha L y_1(t) + \beta L y_2(t) = 0.$$

Утверждение доказано.

Итак, мн-во решений однородного ОДУ n-го порядка (3) – линейное пр-во. Остается найти его размерность и построить базис.

Определение 3 Функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t)$ называются <u>линейно зависимыми на мн-ве M</u>, если $\exists$ числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные 0 и такие, что

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_k y_k(t) \equiv 0 \text{ на мн-ве } M \quad (9)$$

Определение 4 Функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_k(t)$ называются линейно независимыми на мн-ве M, если тождество (9) возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$

Так как мы имеем дело с решениями ур-ния (3), то существуют методы определения их лин. зависимости и незав., с учетом специфики

Определение 5 Пусть функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ имеют $n-1$ непрерывную производную на M. <u>Матрицей Вронского</u> называется матрица вида:

$$W(y_1(t), \ldots, y_n(t)) = W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$\det W(t)$ – <u>определитель</u> матрицы Вронского

Теорема 1 Если функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ имеют $n-1$ непрерывную производную на M и линейно зависимы на M, то $\det W(t) \equiv 0$ на M.

Доказательство Пусть $y_1(t), \dots, y_n(t)$ лин. зависимы на M. Согласно определению, $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n$ не все равные 0 и такие, что $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \equiv 0$ на M **(11)**

Продифференцируем тождество (11) $n-1$ раз:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 \cdot y_2(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) \equiv 0 \\ \alpha_1 y_1'(t) + \alpha_2 \cdot y_2'(t) + \dots + \alpha_n y_n'(t) \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(t) \equiv 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow W(t) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{(12)}$$

Равенство (12) означает, что при $\forall$ фиксированном $t \in M$ однородная система линейных алгебраических уравнений (12) имеет ненулевое решение. Но такое возможно, только если $\det W(t) \equiv 0$ на M.

Теорема доказана

Справедлива также теорема, являющаяся в некотором смысле обратной к теореме 1.

Теорема 2 Пусть $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ являются решениями уравнения (3) и пусть в некоторой внутренней точке $t_0 \in M$ $\det W(t_0) = 0$. Тогда:

1) Функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ линейно зависимы на M;

2) $\det W(t) \equiv 0$ на M.

Доказательство $\det W(t_0) = 0 \Rightarrow$ система линейных алг. ур-ний $W(t_0)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ **(13)** Имеет нетривиальное (ненулевое) решение. Пусть $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0$ – одно из таких решений, то есть выполнено

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \ldots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \ldots & y_n'(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) & y_2^{n-1}(t_0) \ldots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1^0\\ \alpha_2^0\\ \vdots\\ \alpha_n^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix} \quad \textbf{(14)}$$

Возьмем функцию $Z(t) = \alpha_1^0 y_1(t) + \ldots + \alpha_n^0 y_n(t)$ (15) $\boxed{\text{стр.7}}$

Так как все функции $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ являются решениями задачи (3), то и функция $Z(t)$ также является решением задачи (3), причем:

$$
\begin{cases}
LZ(t) = 0, \quad t \in M \\
Z(t_0) = \alpha_1^0 y_1(t_0) + \ldots + \alpha_n^0 y_n(t_0) = 0 \ (\text{в силу } (14)) \\
Z'(t_0) = \alpha_1^0 y_1'(t_0) + \ldots + \alpha_n^0 y_n'(t_0) = 0; \\
\ldots\ldots\ldots \\
Z^{(n-1)}(t_0) = \alpha_1^0 y_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + \alpha_n^0 y_n^{(n-1)}(t_0) = 0
\end{cases}
\qquad (16)
$$

Решение задачи (16), как следует из главы 2, единственно. Но и $h(t) \equiv 0$ также является решением (16). Поэтому

$Z(t) = h(t) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1^0 y_1(t) + \alpha_2^0 y_2(t) + \ldots + \alpha_n^0 y_n(t) \equiv 0$ на $M \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1(t), \ldots, y_n(t)$ линейно зав. на $M \xrightarrow{th1} \det W(t) \equiv 0$ на M

Теорема доказана.

Замечание Условие, что $y_1(t), \dots, y_n(t)$ являются решениями уравнения (3) на $\mathcal{M}$, обязательно.

Например, функции $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t^3$ являются линейно независимыми на $(-1;1)$, однако $\det W(0) = \det \begin{pmatrix} t^2 & t^3 \\ 2t & 3t^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = 3t^4 - 2t^4 = t^4\Big|_{t=0} = 0$

Теорема 3 (следствие из th1 и th2) Пусть функции $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ являются решениями ур-ния (3) на $\mathcal{M}$.

Существуют 2 взаимно исключающие друг друга возможности (альтернатива):

1) ф-ции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ лин. незав. на $\mathcal{M}$ и $\det W(t) \neq 0$ ни при каких $t \in \mathcal{M}$;
2) функции $y_1(t), \dots, y_n(t)$ лин. зав. на $\mathcal{M}$ и $\det W(t) \equiv 0$ на $\mathcal{M}$.

Определение 5 Систему функций $\{y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t)\}$ линейно независимых являющимися решениями (3), называют фундаментальной системой решений (ФСР) **Стр 9**

Теорема 4 ФСР существует.

Доказательство Построим ФСР: (Пусть t_0 - внутр. точка M)

$$\begin{cases} Ly_1(t)=0, \ t\in M \\ y_1(t_0)=1; \\ y_1'(t_0)=y_1''(t_0)=\dots=y^{(n-1)}(t_0)=0 \end{cases} (17.1); \quad \begin{cases} Ly_2=0, \ t\in M \\ y_2'(t_0)=1 \\ \text{ост. нач. усл}=0 \end{cases} (17.2); \dots \begin{cases} Ly_n=0, \ t\in M \\ y_n^{(n-1)}(t_0)=1 \\ \text{остальн. нач. усл.}=0 \end{cases} (17.n)$$

Решения задач (17.1)-(17.n), в силу результатов главы 2, существуют и единственные. В то же время

$$\det\left(y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det E = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1(t), \dots, y_n(t)$ лин. нез. на $M \Rightarrow$ теорема доказана

Докажем, наконец, теорему, о том что ФСР – это базис в лин. пр-ве решений (3)

$\boxed{\text{стр. 10}}$

Теорема 5 Пусть $y_1(t), \dots, y_n(t)$ – Ф.С.Р. для ур-ния (3) и пусть $Z(t)$ – произвольное решение сист. (3). Тогда $\exists, !$ набор чисел таких, что $Z(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_n y_n(t)$ (18)

Доказательство Рассм. ф-цию $h(t) = Z(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(t)$, где числа $\alpha_1, \dots \alpha_n$ пока еще не определены и рассм. СЛАУ:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(t_0) + \alpha_2 y_2(t_0) + \dots + \alpha_n y_n(t_0) = Z(t_0) \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1'(t_0) + \alpha_2 y_2'(t_0) + \dots + \alpha_n y_n'(t_0) = Z'(t_0) \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(t_0) = Z^{(n-1)}(t_0) \end{cases} \quad (19)$$

(t_0 - внутр. точка M)

Так как $\det W(t_0) \neq 0$, то решение системы (19) $\exists$ и единственно

Обозначим это решение $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0$ и рассм $h_0(t) = Z(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 y_k(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} L h_0(t) = 0 \\ h_0(t_0) = 0 \\ h_0'(t_0) = 0 \\ h_0^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} (\text{из } (19)) \Longrightarrow h_0(t) \equiv 0 \text{ на } M \Rightarrow Z(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 y_k(t)$$

из th единств.

теорема доказана