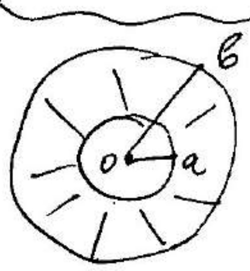
Продолжение:

Уравнение Лапласа в кольце:



Запишем сразу общее решение:

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0(?)}^{\infty}{}'\underbrace{\left(r^n+\frac{C_n}{r^n}\right)}\cdot\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)$$

взяли оба радиальные решения ур-ие Эйлера!

(?)

Что будет происходить по этой формуле при $n=0$?

$\Rightarrow \boxed{n=0}$ – нет зависимости от φ! $\rightarrow$ это особый случай: $u(r,\varphi)\equiv u(r)$, записываем ур-ие Лапласа: $\Delta u=0$; $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}}}_{=0}=0$

0 т.к. нет завис. от φ!

$\Rightarrow$ получим обыкновенное дифф. ур-ие ф-ии одной переменной $\rightarrow r$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du(r)}{dr}\right)=0$$, умножим на r.

$$\frac{d}{dr}\underbrace{\left(r\frac{du}{dr}\right)}_{=\text{const}}=0 \Rightarrow r\frac{du}{dr}=D_1$$; делим на r и интегрируем: $\int\frac{du}{dr}=\int\frac{D_1}{r}\Rightarrow$

получим $\leftarrow$ $\boxed{u(r)=D_1\ln r+D_2}$

особое решение ур-ие Лапласа в кольце в случае $\boxed{n=0}$ – отсутствие зависимости от φ!

Таким образом, общее решение ур-ия Лапласа в кольце – дополненное!

$$\boxed{U(r,\varphi)=\underbrace{D_1\ln r+D_2}_{(n=0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(r^n+\frac{C_n}{r^n}\right)\cdot\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)}$$

Как понимать эту общую формулу? Если есть зависимость от φ – а это видно из заданного вида граничной ф-ии – значит нужно взять ту часть формулы, где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dots$; если же нет завис. от φ $\Rightarrow$ нужно взять только часть формулы с логарифмом!

Разберем задачу: $\boxed{№17\ гл\ IV}$

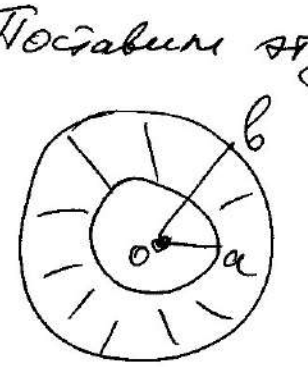
задачник Будак, Тихонов, Самарский.

Найти ф-ию $U(r,\varphi)$, гармоническую внутри кольца $a<r<b$ и удовлетворяющую граничным условиям:

$$\begin{cases}U(a,\varphi)=U_1\\ U(b,\varphi)=U_2\end{cases} - \text{const}$$

Пользуясь решением задачи найти ёмкость цилиндрического конденсатора, рассчитанную на единицу длины.

Поставим эту задачу:



$$\begin{cases}\Delta U=0; \quad a<r<b; \quad 0\le\varphi\le 2\pi\\ \left.\begin{aligned}U(a,\varphi)&=U_1\\ U(b,\varphi)&=U_2\end{aligned}\right\}\to\text{const}\\ U(r,\varphi)=U(r,\varphi+2\pi)\ \text{- усл. периодичности}\end{cases}$$

Т.к. на границах $r=a$ и $r=b$ заданы константы $\Rightarrow$ нет зависимости от φ: $U=U(r)$.

Ур-ие Лапласа: $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dU(r)}{dr}\right)=0 \Rightarrow r\cdot\dfrac{dU}{dr}=C_1$

$\displaystyle\int\frac{dU}{dr}=\int\frac{C_1}{r}$; $\boxed{U(r)=C_1\ln r+C_2}$ это общее реш.!

Коэфф. C_1 и C_2 найдём из гр. условий:

$$\begin{cases} r=a: & C_1\ln a + C_2 = u_1 \\ r=b: & C_1 \ln b + C_2 = u_2 \end{cases} \Rightarrow C_2 = u_1 - C_1 \ln a \text{ и подставим}$$

$$C_1 \ln b + u_1 - C_1 \ln a = u_2, \quad C_1[\ln b - \ln a] = u_2 - u_1,$$

$$C_1 \cdot \ln\frac{b}{a} = u_2 - u_1 \Rightarrow C_1 = \frac{u_2-u_1}{\ln\frac{b}{a}}, \text{ тогда}$$

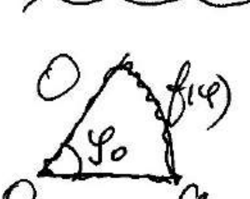
$$C_2 = u_1 - \frac{u_2-u_1}{\ln\frac{b}{a}}\cdot \ln a; \quad u(r) = C_1 \ln r + C_2 =$$

$$= \frac{u_2-u_1}{\ln\frac{b}{a}}\cdot \ln r + u_1 - \frac{u_2-u_1}{\ln\frac{b}{a}}\cdot \ln a =$$

$$= u_1 + \frac{u_2-u_1}{\ln\frac{b}{a}}\cdot[\ln r - \ln a] = u_1 + (u_2-u_1)\frac{\ln r/a}{\ln b/a}.$$

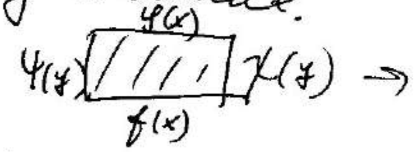
$$\Rightarrow \boxed{\text{Ответ: } u(r) = u_1 + (u_2-u_1)\frac{\ln r/a}{\ln b/a}}$$

<u>Уравнение Лапласа в секторе:</u> Найти ф-ию, гармоническую в секторе.

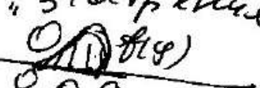


$$\begin{cases} \Delta u = 0, \; 0<r<a; \; 0<\varphi<\varphi_0; \\ u(a,\varphi) = f(\varphi) \\ u(r,0) = 0 \\ u(r,\varphi_0) = 0 \\ |u(0,\varphi)| < \infty \text{ - усл. огр. в } O. \end{cases}$$

– в секторе сможем решить только такие задачи (в отличие от общей задачи в прямоугольнике.



→ из-за „заострений"



М.Р.П.:

$$u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$$

(!) $$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

$-\nu^2$ 1).

1) для $\Phi(\varphi)$: $\begin{cases} \Phi'' + \nu^2 \Phi = 0; & \underset{\sim\sim\sim}{0 < \varphi < \varphi_0} \\ \Phi(0) = 0 & \text{а есть} \\ \Phi(\varphi_0) = 0 & \leftarrow \text{обычные гр. усл.} \end{cases}$ в секторе нет условие периодичности.

$$\Rightarrow \overset{\text{с.ф.}}{\Phi_n(\varphi)} = \sin\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi \; ; \quad n = 1, 2, \dots$$

с.з. $\nu_n = \dfrac{\pi n}{\varphi_0}$; $\|\Phi_n\|^2 = \dfrac{\varphi_0}{2}$.

2) радиальная задача для $R(r)$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\right)^2}{r^2} R = 0$$; раскрываем производную и умножаем на r^2:

$$\boxed{r^2 R'' + 2R' - \underset{\text{связь}}{\left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\right)^2} R = 0}$$

Опять получим дифф. ур-ие Эйлера. Вмём связь с угловой задачей осуществляется через с.з угловой задачи $\nu_n = \frac{\pi n}{\varphi_0}$ - для сектора - нецелое! В отличие от „полного" круга с с.з $\nu_n = n$ - целое!

Как обычно, ищем решение ур-ие Эйлера в виде:

$\boxed{R(r) = r^\sigma}$, $R' = \sigma r^{\sigma-1}$; $R'' = \sigma\cdot(\sigma-1)\cdot r^{\sigma-2}$, подставим в ур-ие.

$$r^2\cdot\sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2} + 2\cdot\sigma\cdot r^{\sigma-1} - \left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\right)^2 \cdot r^\sigma = 0$$

$$\underset{\substack{\not= \\ 0}}{r^\sigma}\cdot\Big[\underbrace{\sigma(\sigma-1) + \sigma - \left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\right)^2}_{= 0}\Big] = 0 \Rightarrow$$ характеристическое ур-ие для определения σ - это квадратное для дифф. ур-ия 2$^{\text{ого}}$ порядка!

$$\sigma^2 - \cancel{\sigma} + \cancel{\sigma} - \left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\right)^2 = 0 \; ,$$

$\sigma_{1,2} = \pm\dfrac{\pi n}{\varphi_0}$ -> получили два значение $\sigma_{1,2}$:

Значит, имеем два решения ур-ия Эйлера:

$\boxed{R_1(r) = r^{\frac{\pi n}{\varphi_0}}}$; $\boxed{\cancel{R_2(r) = \frac{1}{r^{\frac{\pi n}{\varphi_0}}}}}$ - Выбираем из них: В секторе Δ) есть условие ограниченности в 0:

$|R(0)| < \infty \Rightarrow$ берём $\boxed{R(r) = r^{\frac{\pi n}{\varphi_0}}}$.

→ Общее решение ур-ия Лапласа в секторе:

связь!

$$\boxed{u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n \, r^{\frac{\pi n}{\varphi_0}} \cdot \sin\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi}$$

; коэфф. A_n найдём из гр. усл. при $r=a$.

$$r=a: \quad \sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n \cdot a^{\frac{\pi n}{\varphi_0}} \cdot \underbrace{\sin\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi} = f(\varphi)$$

раскладывая заданную ф-ию $f(\varphi)$ в ряд по синусам.

$$A_n = \frac{1}{a^{\frac{\pi n}{\varphi_0}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\varphi_0}{2}}_{\text{квадрат нормы синусов!}}} \cdot \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) \cdot \sin\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi \, d\varphi$$

Задача решена! Рассмотрим пример:

Пр.

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \quad 0<r<a; \quad 0<\varphi<\pi/3 \\ u(a,\varphi) = \sin 3\varphi \\ u(r,0) = u(r,\pi/3) = 0 \end{cases}$$

; М.Р.П. $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \not\equiv 0$

(1)

$$\frac{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\overbrace{\frac{\Phi''}{\Phi}}^{-\nu^2}}_{1)} = 0,$$

1) $\begin{cases} \Phi'' + \nu^2\Phi = 0; \quad 0<\varphi<\pi/3 \\ \Phi(0) = 0 \\ \Phi(\pi/3) = 0 \end{cases}$

с.ф. $\Phi_n(\varphi) = \sin\frac{\pi n}{\pi/3}\varphi = \underset{\sim\sim\sim}{\sin 3n\varphi}$; $n = 1, 2, \dots$

с.з. $\underset{\sim\sim\sim}{\nu_n = 3n}$; $\|\Phi_n\|^2 = \pi/6$.

2) для $R(r)$: $\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{(3n)^2}{r^2}R = 0, & 0<r<a \\ |R(0)| < \infty \end{cases}$

рад. ур-ие Эйлера: $\boxed{r^2R'' + rR' - (3n)^2R = 0}$; $R(r) = r^\sigma$, $R' = \sigma r^{\sigma-1}$, $R'' = \sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2}$.

$r^2\cdot\sigma(\sigma-1)r^{\sigma-2} + r\cdot\sigma\cdot r^{\sigma-1} - (3n)^2 r^\sigma = 0$

$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{r^\sigma}\cdot[\underbrace{\sigma(\sigma-1) + \sigma - (3n)^2}_{\overset{\shortparallel}{0}}] = 0 \Rightarrow \sigma_{1,2} = \pm 3n \Rightarrow$

$\underset{\sim\sim\sim}{R_1(r) = r^{3n}}$; $\cancel{R_2(r) = \frac{1}{r^{3n}}}$ из усл. огр. в 0

и
Общее решение ур-ие Лапласа в секторе:

$U(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' A_n\cdot r^{3n}\cdot\sin 3n\varphi$,

связь!

$r=a$: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot a^{3n}\sin 3n\varphi = \underbrace{\sin 3\varphi}$

это 1 из набора с.ф. $\sin 3n\varphi$ - при $\boxed{n=1}$.

$\Rightarrow \boxed{n=1}$: $A_1\cdot a^3\cdot\cancel{\sin 3\varphi} = \cancel{\sin 3\varphi} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{1}{a^3}}$

и ответ: без суммы - с $n=1$:

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{U(r,\varphi) = A_1\cdot r^3\cdot\sin 3\varphi = \frac{r^3}{a^3}\sin 3\varphi}.$$

Всё! Теперь д.з.: →

Д.З. № 14 Кольцо:

$$\begin{cases}\Delta u=0, \quad 1<r<2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=3\\ u|_{r=2}=5\end{cases}$$

Д.З. № 15 Сектор.

$$\begin{cases}\Delta u=0, \quad 0<r<1,\ 0<\varphi<\pi/6\\ u|_{\varphi=0}=u|_{\varphi=\pi/6}=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1}=\sin 6\varphi\end{cases}$$

Д.З. 14, 15 К след. разу → 12 нед.

Гармонические ф-ии.

Опр: ф-ия $u(M)$, непрерывная в обл D вместе со своими производными до $2^{ого}$ порядка включительно и удовлетворяющая в обл. D ур-ию Лапласа, называется гармонической в обл. D.

→ Изучим св-ва гарм. ф-ий и дадим решение ур-ия Лапласа с помощью решения специального вида → фундаментального решения или ф-ии источника, или ф-ии Грина. (Как было для ур-ия теплопров. на ∞ прямой!) Для этого нужно дать интегральное представление гарм. ф-ии. → Будем использовать формулы Грина.

Сначала:

Постановка краевых задач и классич. решение.

$$\begin{cases}\Delta u=0;\ M\in D\\ u(P)=\mu(P);\ P\in S, & \text{— первая краевая задача → задача Дирихле}\\ \text{или}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=\nu(P),\ P\in S; & \text{— вторая краевая зад. — → зад. Неймана}\end{cases}$$

$\Big\{$ или $\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\Big|_{p\in S}=\chi(p),\ p\in S$ - третья краевая задача.

(не будем рассм.)!

[где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к границе (поверхности) S.]

Если решение ищется в огранич. обл-ти, то задачу называют внутренней. ((D)S), если - вне огранич. обл-ти

- то внешней краевой задачей.

(!)

Решение всех краевых задач будем подразумевать классическим. Это накладывает требование на постановку задач!

(1) Внутр. задача Дирихле: $\begin{cases}\Delta u(M)=0; & M\in D\\ u(p)=\mu(p); & p\in S\end{cases}$ где

D - огр. обл. в R^2 или R^3,

S - гладкая граница - замкнутая поверхность в R^3 - или замк. кривая в R^2.

Класс. реш: Найти ф-ию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замк. обл. $\bar{D}=D\cup S$, удовлетворяет внутри обл. D ур-нию Лапласа: $\Delta u=0$ и прин. на границе S заданные значения: $u(p)=\mu(p)$, $p\in S$.

(+)

Треб. на $\mu(p)$: $\mu\in C(S)$ - непрер.

$u(M)\in C(\bar{D})\cap C^2(D)$

$\Big\}$ - класс. реш. задачи Дирихле

② Внутр. задача Неймана: $\begin{cases} \Delta u(M)=0; & M\in D \\ \frac{\partial u}{\partial n}(P)=V(P); & P\in S \end{cases}$

Класс. реш: Найти ф-ию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрер. дифф. в замк. обл. $\overline{D}$, удовлетворяет внутри обл D ур-ию Лапласа: $\Delta u=0$; а её нормальная производная принимает на границе S зад. значение: $\frac{\partial u}{\partial n}(P)=V(P)$; $P\in S$.

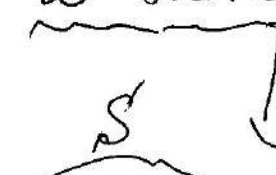
④ Треб. на $V(P)$: $V\in C(S)$ - непр.

$\left.\begin{cases} u(M)=C^1(\overline{D})\cap C^2(D) \end{cases}\right\}$ → класс. реш. задачи Неймана

③ → это позже: Внешние задачи ставятся по-разному в R^2 и R^3: это связано с различием в поведении на ∞ фунд. решений ур-ия Лапласа в $3^{х}$ мер. и 2мер. случаях!

Выведем формулы Грина - $1^{ую}$ и $2^{ую}$ для общего эллиптического оператора:

$$\boxed{Lu=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-qu}$$, где ф-ии k и q непрер. в $\overline{D}$, k - непр. дифф. в D



Пусть обл. D ограничена гладкой замк. поверх. S

[Поверхность назыв. гладкой, если в каждой точке её ∃ касательная пл-ть (или нормаль), и при переходе от точки к точке положение →

→ этой касательной пл-ти (или нормали) меняется непрерывно!

Пусть в обл. D задана векторная ф-ия $\vec{A}(M)$.
(непрерывная в $\bar{D}$ и непр. с 1ыми производными в D)

Тогда для неё справедлива формула Гаусса-Остроградского:

$$\boxed{\iiint\limits_D \operatorname{div}\vec{A}\, dV = \oiint\limits_S \vec{n}\cdot\vec{A}\, dS}$$, где $\vec{n}$ - ед. вектор внешней нормали к пов. S.

(или)
$$\left(= \oiint\limits_S A_n dS\right)$$, где A_n - проекция вектора $\vec{A}$ на нормаль.

↑
эту формулу будем использовать!

В качестве вектора: $\vec{A} = v(M)\cdot \operatorname{grad} u(M)$; заданные ф-ии $u, v \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$

Введём
Дифф. оператор $Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu$.

Рассмотрим интеграл: $\iiint\limits_D v\cdot Lu\, dV =$
(искусственно!)

$$= \iiint\limits_D \underbrace{v\cdot\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)}_{=\operatorname{div}(k\cdot v\cdot\operatorname{grad}u) - k\cdot\nabla u\cdot\nabla v}\, dV - \iiint\limits_D q v u\, dV \overset{\text{по ф. Остр.}}{=} \ldots =$$

(это $\vec{A}$) (grad)

$$= \oiint\limits_S \vec{n}\, k v\, \nabla u\, dS - \iiint\limits_D [k\cdot\nabla u\cdot\nabla v + q v u]\, dV = \text{его(?) перепишем:}$$

а т.к. $\vec{n}\cdot\nabla u = \frac{\partial u}{\partial n}$

это производная по направлению нормали.

$$= \oiint\limits_S k v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_D [k\cdot\nabla u\cdot\nabla v + q u v]\, dV$$

это и есть первая фор. Грина!

Итак: Iая фор. Грина:

$$\boxed{\int\limits_{D} v\cdot Lu\,dV = \int\limits_{S} k v\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \int\limits_{D}\Big[k\cdot \underset{(grad)}{\nabla u\cdot\nabla v} + quv\Big]dV}$$

ещё раз поясню: $\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ это вектор!

$\vec{n}\cdot\operatorname{grad} u = n_x\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + n_y\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + n_z\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по нормали!

Дальше получим II ую формулу Грина:
→ поменяем u и v местами и вычтем из I ф. Грина

$\ominus$

$$\int\limits_{D} u\cdot Lv\,dV = \int\limits_{S} k u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \int\limits_{D}\big[k\cdot\nabla u\cdot\nabla v + quv\big]dV$$

$$\boxed{\int\limits_{D}\big[v\cdot Lu - u\cdot Lv\big]dV = \int\limits_{S} k\cdot\Big[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\Big]dS}$$

это и есть IIая фор. Грина

Всё: Теперь упростим I и II формулы Грина для случая оператора Лапласа:

$$\boxed{Lu \equiv \Delta u}, \text{ это когда } \boxed{\begin{matrix} k=1 \\ q=0 \end{matrix}}.$$

$$\boxed{\int\limits_{D} v\cdot\Delta u\,dV = \int\limits_{S} v\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \int\limits_{D}\nabla u\cdot\nabla v\,dV}$$

Iая фор. Грина

$$\boxed{\int\limits_{D}\big[v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v\big]dV = \int\limits_{S}\Big[v\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\Big]dS}$$

Для опер. Лап. (Δ)

IIая фор. Грина

Теперь III я формула Грина – это будет интегральное представление ф-ии $u(M)$ – дважды непрер. дифф. в обл. D.

Для вывода понадобится специальное решение ур-ия Лапласа – фундаментальное $\overset{\text{опр}}{\Rightarrow}$ это такая гармоническая ф-ия, которая имеет определённого вида особенность в единственной точке M_0:

D: $\cdot M$ – произв. т.; M_0 – фиксир. т.; Найдем решение ур-ия Лапласа, зависящее только от расстояния от точки M_0: отдельно – по-разному – трёхмерный и двумерный случай!

1). 3^x мер. случай (он проще!)

→ сферическая система координат (r, θ, φ) с центром в т. M_0. Отыщем радиально-симметричное решение ур-ия Лапласа: $u(r)$!

→ т.е. возьмём только радиальную часть оператора Лапласа в сфер. системе:

Справочно: $\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\text{радиальная часть}} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du(r)}{dr}\right) = 0;$$ умножаем на r^2:

$$\frac{d}{dr}\underbrace{\left(r^2\cdot\frac{du}{dr}\right)}_{\text{const} = C_1} = 0 \Rightarrow r^2\frac{du}{dr} = C_1;$$ делим на r^2 и интегрируем слева и справа:

$$\int\frac{du}{dr} = \int\frac{C_1}{r^2} \Rightarrow \boxed{u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2}$$

→ т.е. нашли общее реш. $\Delta u = 0$ в радиально-симм. случае!

итак, $\boxed{U(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2}$, положив, например, $C_1 = -1$; $C_2 = 0$, получим $\boxed{U(r) = \frac{1}{r}}$, дальше: обозначим

$r = R_{M_0M}$ – это расстояние от т. M_0 до т. M – произвольной

и опр:

Решение $\boxed{v(M_0, M) = \frac{1}{R_{M_0M}}}$ называется фундаментальным решением ур-ия Лап. в 3х мер. случае.

Оно удовл. ур-ию Лап. всюду, кроме одной т. M_0, (или $r = 0$), где оно обращается в ∞ (неограниченно) – имеет особенность! Физ. смысл: С точностью до множителя оно даёт поле точечного заряда „e", помещённого в начале координат. Потенциал этого поля $U = \frac{e}{r}$.

---

2) 2 мер. случай: Введём полярную систему координат (r, φ) с центром в т. M_0 и будем искать решение $\Delta u = 0$, зависящее только от r: $U(r)$:

т.е. возьмём опять только радиальную часть оператора Лап. в полярной сист.: $\boxed{\Delta = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\text{радиальная часть}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU(r)}{dr}\right) = 0$, умножаем на r, ~~раскрываем производную~~: $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{dU}{dr} = C_1$; $\int\frac{dU}{dr} = \int\frac{C_1}{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U(r) = C_1 \ln r + C_2}$, положив $C_1 = -1$, $C_2 = 0$;

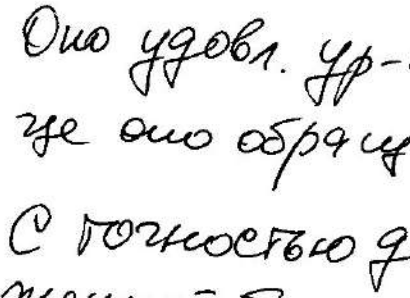
получим: $\boxed{U(r) = \ln \frac{1}{r}}$.

опять введем $r = R_{M_0M}$: и дадим определение:

<u>Опр</u>: ф-ия $\boxed{v(M_0, M) = \ln \frac{1}{R_{M_0M}}}$ называется фунд. реш. ур. Лапл. в $2^{\text{мер}}$. случае.

Оно удовл. ур-нию Лапл. всюду, кроме т. M_0, $(r=0)$, где оно обращается в ∞. С <u>физ.</u> точки зрения: С точностью до множителя оно дает поле заряженной бесконечной линии. Потенциал этого поля равен $U = 2e_1 \cdot \ln \frac{1}{r}$; где e_1 — плотность заряда, рассчитанная на единицу длины.

Вывод ~~ВЕН~~ III ей формулы Грина. [$3^{х}$ мер. случай — проще!]



$$\begin{cases} U \text{ — произв. ф-ия (непрер. в } \bar{D} \text{ с } 1^{\text{ми}} \text{ произв. и непрер. со } 2^{\text{ми}} \text{ произв. в } D) \\ v = \dfrac{1}{R_{M_0M}} \text{ — фунд. реш.}, \end{cases}$$

(в т. M_0 — когда т. M совпадает с M_0 — особенность. К ней — в обл. D нельзя прим. II ф. Грина $\Rightarrow$ Окружим т. M_0 сферой радиуса ε, целиком лежащей в D: Σ_ε.

$\rightarrow$ т.е. „вырезаем" т. M_0!

Тогда в области $D - K_{\varepsilon\,\text{шар}}^{M_0}$ (без границ!) применим II фор. Грина:

это 2 границы: S обл. D и Σ_ε

$$\int\limits_{D-K_\varepsilon^{M_0}\ \text{шар}} [u\cdot \underbrace{\Delta v}_{=0} - \underbrace{v}_{=\frac{1}{R_{M_0M}}}\cdot \Delta u]\,dV = \int_S \Big[u\underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)} - \underbrace{v}_{=\frac{1}{R_{M_0P}}}\frac{\partial u}{\partial n}\Big]dS + \int_{\Sigma_\varepsilon}\Big[u\underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=\frac{1}{\varepsilon^2}} - \underbrace{v}_{=\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\partial u}{\partial n}\Big]dS$$

т. $P \in S$

здесь $\vec{n}$ — внутр.

$4\pi u(M_0)$

т.к. считаем, разбираемся с этим $\int_{\Sigma_\varepsilon}$:

$$v(P)_{\text{на } \Sigma_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(P)\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\int_{\Sigma_\varepsilon}\Big[u\cdot\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\Big]dS \overset{\text{по т. о среднем}}{=}$$

$$= \Big[\frac{1}{\varepsilon^2}u(P) - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\Big]\cdot \underbrace{4\pi\varepsilon^2}_{\text{это площадь поверх. сферы радиуса } \varepsilon} =$$

$$= 4\pi\cdot u(P) - 4\pi\underset{\downarrow 0}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}(P),$$ переходя к

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\ldots] = 4\pi\cdot u(M_0).$$

Тогда шар $K_\varepsilon^{M_0}$ — стянется в т. M_0, а значение $u(P)\to u(M_0)$

Тогда → после этих вычислений, оставляем $u(M_0)$ —, $\frac{1}{4\pi}$ (делим) — меняем знак "u" получим формулу:

(*) где $M_0 \in D$ — внутр. т.

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int_S\Big[\frac{1}{R_{M_0P}}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\Big]dS - \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{1}{R_{M_0M}}\cdot\Delta u\,dV$$

это часть III-ей формулы Грина

Дальше — исследовать расположение т. M_0, когда т. $M_0 \in D$ — внутр. т.

Если т. M_0 не лежит в обл. $\overline{D}$, то $v = \frac{1}{R_{M_0M}}$ является гармонической всюду в D! т.е.

т.е. $\Delta V = 0$ в D $\Rightarrow$ не нужно вырезать сферу вокруг т. M_0: Σ_ε !

и сразу можно прим. II-ую ф-ф. Грина в D.

$$\int_D \Big[\underset{\frac{1}{R_{M_0M}}}{\underset{\parallel}{V}}\cdot\Delta u - u\cdot\underset{0}{\underset{\parallel}{\Delta V}}\Big]dV = \int_S \Big[\underset{\frac{1}{R_{M_0P}}}{\underset{\parallel}{V}}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\,\underset{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)}{\underset{\parallel}{\frac{\partial V}{\partial n}}}\Big]dS$$

т.е.: $$\frac{1}{4\pi}\int_D \frac{1}{R_{M_0M}}\cdot\Delta u\,dV = \frac{1}{4\pi}\int_S\Big[\frac{1}{R_{M_0P}}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{R_{M_0P}}\Big)\Big]dS$$

и формально слева и справа припишем множитель „$\frac{1}{4\pi}$";
(чтобы дальше $\rightarrow$ объединить все случаи положения т. M_0 — в один.)

и перенесём формально $\rightarrow$ вправо и запишем слева $u(M_0)$, которая равна 0! $u(M_0)=0$, когда т. M_0 не лежит в $\bar{D}$!

т.е. (**)

$$\underset{[u(M_0)]}{\underset{\parallel}{0}} = \frac{1}{4\pi}\int_S\Big[\frac{1}{R_{M_0P}}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{R_{M_0P}}\Big)\Big]dS - \frac{1}{4\pi}\int_D\frac{1}{R_{M_0M}}\cdot\Delta u(M)\,dV$$

где т. $M_0 \notin \bar{D}$

и, наконец, 3-е положение т. M_0 — на S.

т.е. вырежем эту точку M_0 — сферическим куполом (полусферой), её поверхность равна $2\pi\varepsilon^2$, т.е. в формуле „$\frac{1}{4\pi}$" на „$\frac{1}{2\pi}$" и всё..."

(***)

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_S\Big[\frac{1}{R_{M_0P}}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{1}{R_{M_0P}}\Big)\Big]dS - \frac{1}{2\pi}\int_D\frac{1}{R_{M_0M}}\cdot\Delta u(M)\,dV,$$

когда $M_0 \in S$

 это (*), (**), (***)

и объединяя все три случая положения т. M_0 — внутри обл D, вне и на границе S, получим:

Это и есть III-я фор. Грина !!!

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{R_{M_0P}}\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right]dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\frac{1}{R_{M_0M}}\cdot\Delta u\,dV=\begin{cases}u(M_0), & M_0\in D\\ \frac{u(M_0)}{2}, & M_0\in S;\\ 0, & M_0\notin \bar{D}\end{cases}$$

этот вывод — к экзамену повторить!

Эта формула показывает, что в $\forall$ т. внутр обл D ф-ия u может быть выражена через интеграл: через своё значение на S, значение нормальной произв. на S, и значение оператора Лап. от этой ф-ии в D!

Это интегральное представление!

A теперь: Возьмём $u(M)$ — гармоническую! т.е. $\Delta u(M)=0$ в D

(в 3^x мер.)

и тогда упростим III-ю фор. Грина:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n}-u(P)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right]dS=\begin{cases}u(M_0), & \text{когда } M_0\in D\\ \frac{u(M_0)}{2}, & \text{когда } M_0\in S\\ 0, & \text{когда } M_0\notin \bar{D}.\end{cases}$$

Всё!

Вернее нет → ещё „автоматически" перенесем I II III ф. Грина для 2мер. случая: $D\in R^2$ - ограниченная обл-ть на пл-ти (x,y). и её граница S - гладкая кривая!

тогда ↓↓↓

(2 мер. случай) - просто справочно!

I фор. Грина:

$$\iint_D v\cdot\Delta u\cdot dx\cdot dy = \oint_{S'} v\cdot\frac{\partial u}{\partial n}dl - \iint_D \overset{(\nabla u)}{grad\,u}\cdot\overset{(\nabla v)}{grad\,v}\cdot dxdy$$

II фор. Грина:

$$\iint_D (v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v)\,dxdy = \oint_{S'}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dl$$

III фор. Грина:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{S'}\left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n} - u(P)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right]dl - \frac{1}{2\pi}\iint_D \Delta u\cdot\ln\frac{1}{R_{M_0M}}\cdot dxdy = \begin{cases} u(M_0), & \text{когда } M_0\in D \\ \frac{u(M_0)}{2}, & \text{когда } M_0\in S' \\ 0, & \text{когда } M_0\notin \bar{D} \end{cases}$$

Вот теперь всё!

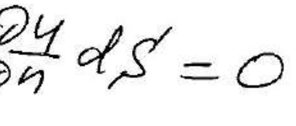
В сл. раз будем разбирать, используя ФГ, св-ва гармонических ф-ий: (их 4! + следствие.)

Кратко.

1) Теорема Гаусса: $\iint_{S'}\frac{\partial u}{\partial n}dS' = 0$

2) Теорема о среднем. (или формула среднего значение)

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Sigma_a^{M_0}} u(P)\,dS$$



3) бесконечная дифференцируемость

4) Принцип max (или min) $\Rightarrow$ и следствие: пр. сравнение.