Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс семинаров для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕМА 1.

1) Уравнения с разделяющимися переменными
2) Однородные уравнения

СЕМИНАРЫ:

ТЕМА ЗАНЯТИЯ №1

1. Уравнения с разделяющимися переменными

2. Однородные уравнения

СЕМИНАР 1

1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

СТР. 1

ТЕОРИЯ 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$ (1) $\Rightarrow f(x)dx=g(y)dy \Rightarrow \int f(x)dx=\int g(y)dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{F(x)=G(y)+C\text{, где } C=\text{const}}$ (2)

Комментарий 1: форма записи (1) явно указывает, что x здесь независимая переменная, а $y(x)$ – функция;

Комментарий 2: Решение (1) найдено в виде неявной функции $H(x,y)=F(x)-G(y)=\text{const}$ $\Rightarrow$ говорится, что (1) решено в квадратурах (найден интеграл).

2) $f(x)\,dx-g(y)\,dy=0$ (1′) здесь явно не указано, что считать аргументом, а что функцией. Надо рассмотреть оба случая.

Пример 1 (Филиппов, №51) $xy\,dx+(x+1)\,dy=0$ – симметричная форма записи

1) $x(y)\equiv-1$ (y-аргумент); 2) $y(x)\equiv 0$; 3) $\frac{dy}{y}=-\frac{x\,dx}{x+1}=\frac{-(x+1-1)}{x+1}dx=$

$=-dx+\frac{dx}{x+1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int dx+\int\frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln|y|=-x+\ln|x+1|+\ln|C|$

$\Rightarrow |y|=|C|e^{-x}\cdot|x+1| \Rightarrow y=C(x+1)\cdot e^{-x}$ (C – любая!)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x(y)\equiv-1; \\ y(x)\equiv 0; \\ y(x)=C(x+1)e^{-x} \end{array}\right.$

Коммент. 1 2й ответ явл. частным случаем третьего, его можно убрать.

Коммент2 Пока C не определена, можно писать ее в ∀ удобном виде, модуль можно убрать

СЕМИНАР 1

Пример 2 (Филиппов, 53)

$$\begin{cases}(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0\\ y(0)=1\end{cases}$$

comment: решение $y(x)\equiv 0$ нам не подходит, делим на y

Решение $\frac{dy}{dx}\cdot(x^2-1) = -2xy^2 \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\int\frac{dy}{y^2} = \int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1} \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + C \Rightarrow$ множество X содержит точку 0, модуль раскр.

$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{y} = \ln(1-x^2)+C\\ y(0)=1\end{cases} \Rightarrow C=1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{\ln(1-x^2)+C}}$ ← Ответ

Пример 3 (Филиппов, 55)

$$\begin{cases}y' = 3\sqrt[3]{y^2};\\ y(2)=0\end{cases}$$

1) Прежде всего, есть решение $y(x)\equiv 0$ но является ли оно единственным?

2) $y(x)\not\equiv 0$? $\Rightarrow \frac{dy}{3y^{2/3}} = dx \Rightarrow y^{1/3} = x + C \Rightarrow \begin{cases}y=(x+C)^3\\ y(2)=0\end{cases} \Rightarrow C=-2$

$\Rightarrow y(x) = (x-2)^3$

Комментарий: Несмотря на то, что мы решали задачу Коши, решение – не одно! Почему? Как мы выясним позднее, здесь нарушено условие существ. и единств. решения

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y(x)\equiv 0;\\ y(x)=(x-2)^3\end{array}\right.$

Пример 4 (Филиппов, 57)

$$2x^2yy'+y^2=2$$

Вводим новую переменную $z=y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x^2\frac{dz}{dx}=2-z$ **1)** $z=2$ – решение $\Rightarrow$ $\boxed{x=\pm\sqrt{2} \text{ – реш.}}$

2) $\frac{dz}{z-2}=-\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int\frac{dz}{z-2}=-\int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \ln|z-2|=\frac{1}{x}+\ln|C| \Rightarrow$

$\Rightarrow |z-2|=|C|e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow z-2=Ce^{1/x} \Rightarrow z=2+Ce^{1/x} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } x=\pm\sqrt{2+Ce^{1/x}}}$

Комментарий: $x=\pm\sqrt{2}$ входит в общий ответ

Пример 5 (Филиппов, 59)

$$e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1 \Rightarrow \frac{ds}{dt}=e^{s}-1$$

1) $s=0$ – решение

2) $\frac{ds}{e^s-1}=dt \Rightarrow \int\frac{ds}{e^s-1}=t+\ln|C| \Rightarrow \int\frac{e^s ds}{(e^s-1)e^s}=t+\ln|C|$

(замена $e^s=z$) $\Rightarrow \int\frac{dz}{z(z-1)}=t+\ln|C| \Rightarrow \int\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz=t+\ln|C|$

$\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|=t+\ln C \Rightarrow 1-e^{-s}=Ce^{t} \Rightarrow$ $\boxed{Ce^{t}+e^{-s}=1}$ ← Ответ

2. Однородные уравнения

Теория $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ **(3)** — однор. ур-ние

Метод решения: Замена переменной $\frac{y}{x} = z \Rightarrow$

$\Rightarrow y = xz \Rightarrow dy = x\,dz + z\,dx$ **(4)**. Подставим (4) в (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x\,dz + z\,dx}{dx} = f(z) \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = f(z) - z$ **(5)** УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пример 6 (Филиппов, 101)

$(x+2y)\,dx - x\,dy = 0$ Уравнение записано в симметричном виде,

1) $\boxed{x(y) \equiv 0 \text{ — решение}}$

2) $(x+2y)\,dx = x\,dy \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x} = 1 + \frac{2y}{x}}$ ← однородное уравнение

$\left(\frac{y}{x} = z\right) \Rightarrow \frac{x\,dz + z\,dx}{dx} = 1 + 2z \Rightarrow x\frac{dz}{dx} + z = 1 + 2z \Rightarrow \boxed{x\frac{dz}{dx} = z + 1}$

$\Rightarrow$ 3) $z \equiv -1 \Rightarrow \boxed{y = -x \text{ — решение}}$

4) $\frac{dz}{z+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dz}{z+1} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z+1| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$

$\Rightarrow z + 1 = Cx \Rightarrow \frac{y}{x} + 1 = Cx \Rightarrow$

Ответ: $x(y) \equiv 0$; $y = -x$; $y = Cx^2 - x$

СЕМИНАР 1

СТР. 5

Пример 7 (Филиппов, 103) $(y^2-2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$

1) $x(y)\equiv 0$ – решение;

2) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy-y^2}{x^2} = 2\left(\dfrac{y}{x}\right)-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$ (замена $\dfrac{y}{x}=z$, $dz = xdz + zdx$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{xdz+zdx}{dx} = 2z-z^2 \Rightarrow x\dfrac{dz}{dx}+z = 2z-z^2 \Rightarrow \underbrace{x\dfrac{dz}{dx} = z-z^2}$

3) $\left[\begin{array}{l} z=0 \Rightarrow \boxed{y(x)\equiv 0 \text{ – решение;}} \\ z=1 \Rightarrow \boxed{y=x \text{ – решение}} \end{array}\right.$

4) $\dfrac{dz}{z-z^2} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \dfrac{dz}{z}+\dfrac{dz}{1-z} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow$

$\int\dfrac{dz}{z}+\int\dfrac{dz}{1-z} = \int\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z|-\ln|1-z| = \ln|C|+\ln|x| \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{z}{1-z} = Cx \Rightarrow \dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = Cx \Rightarrow \boxed{\dfrac{y}{x-y} = Cx} \Rightarrow$ можно и так:

$\dfrac{y-x}{y} = \dfrac{C}{x} \Rightarrow 1-\dfrac{x}{y} = \dfrac{C}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{y} = 1-\dfrac{C}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{x}{1-\frac{C}{x}} = \dfrac{x^2}{x-C}$

Ответ:
$x(y)\equiv 0$;
$y(x)\equiv 0$;
$y=x$;
$\dfrac{y}{x-y} = C$

Пример 8 (Филиппов, 107) $xy' - y = x\,tg\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = tg\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \left(\frac{y}{x} = z\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x\,dz + z\,dx}{dx} - z = tg\,z \Rightarrow \boxed{x\frac{dz}{dx} = tg\,z}$

СЕМИНАР 1

СТР. 6

1) $tg\,z = 0,\ z = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pi n \Rightarrow y = \pi n x,\ n \in \mathbb{Z}$ - решение

2) $\frac{dz}{tg\,z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos z\,dz}{\sin z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin z| = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \sin z = cx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **Ответ:** $\left[\begin{array}{l} y = \pi n x,\ n \in \mathbb{Z} \\ \sin\frac{y}{x} = cx \end{array}\right.$

Пример 9 Филиппов, 113 $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$

ТЕОРИЯ: В таких задачах надо в первую очередь сместить НАЧАЛО КООРДИНАТ

Новые переменные:

1) $\begin{cases} x = u - a \\ y = v - b \end{cases} \Rightarrow \Big(2(u-a) - 4(v-b) + 6\Big)du + \Big((u-a) + (v-b) - 3\Big) = 0 \Rightarrow$

(a, b) - сдвиг $\Rightarrow \Big(2u - 4 + \underbrace{6 - 2a + 4b}_{=0}\Big) + \Big(u + v \underbrace{- a - b - 3}_{=0}\Big) = 0$

$\left(\begin{cases} 2a - 4b = 6 \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 3 \\ a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}\right.$, проверим $\Big) \Rightarrow$ $\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$

СЕМИНАР 1

СТР. 7

$$\big(2(u+1)-4(v+2)+6\big)\,du+\big(u+1+v+2-3\big)\,dv=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2u-4v)\,du+(u+v)\,dv=0 \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{du}=\frac{4v-2u}{u+v}}$$ – однородное уравнени

2) $$\frac{v}{u}=z \Rightarrow \frac{z\,du+u\,dz}{du}=\frac{4z-2}{z+1} \Rightarrow u\frac{dz}{du}+z=\frac{4z-2}{z+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u\frac{dz}{du}=\frac{4z-2}{z+1}-z=\frac{-z^2+3z-2}{z+1}$$

3) $$z^2-3z+2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \text{ – решение} \\ z=2 \text{ – решение} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=2u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-2=x-1 \\ y-2=2(x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=2x \end{array}\right. \text{ – решения}}$$

4) $$u\frac{dz}{du}=-\frac{z^2-3v+2}{z+1} \Rightarrow \int\frac{(z+1)\,dz}{(z^2-3z+2)}=-\int\frac{du}{u} \Rightarrow \int\frac{(z+1)\,dz}{(z-1)(z-2)}$$

$$\left(\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}=\frac{Az-2A+Bz-B}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ -2A-B=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-2 \\ B=3 \end{array}\right.\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int\frac{du}{u}=-2\int\frac{dz}{z-1}+3\int\frac{dz}{z-2} \Rightarrow \ln|u|=\ln\left|\frac{(z-1)^2}{(z-2)^3}\right|+|\ln C|$$

$$\Rightarrow u=C\frac{(z-1)^2}{(z-2)^3} \Rightarrow u=C\frac{(\frac{v}{u}-1)^2}{(\frac{v}{u}-2)^3}=\frac{Cu(v-u)^2}{(v-2u)^3} \Rightarrow C=\frac{(y-x-1)^2}{(y-2x)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=2x \\ (y-x-1)^2=C(y-2x)^3 \end{array}\right. \leftarrow \text{Ответ:}}$$

На дом: 52, 54, 56, 60
102, 104, 106, 114