Док-во т. уст.: распишем $|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)| \le$

$$\le \frac{1}{2}\underbrace{|\varphi(x-at)-\tilde{\varphi}(x-at)|}_{<\delta/2} + \frac{1}{2}\underbrace{|\varphi(x+at)-\tilde{\varphi}(x+at)|}_{<\delta/2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\underbrace{|\psi(z)-\tilde{\psi}(z)|dz}_{} \Rightarrow$$

$$\delta\Big|_{x-at}^{x+at} = \cancel{\delta x}+\delta at-\cancel{\delta x}+\delta at = 2a\delta t$$

$\Rightarrow$ Итак: $|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)| \le \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2a}\cdot 2a\delta t \le \delta(1+T)$

выберем $\delta = \frac{\varepsilon}{1+T}$ и получим: $\underbrace{|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)| < \varepsilon}$

Теорема доказана!

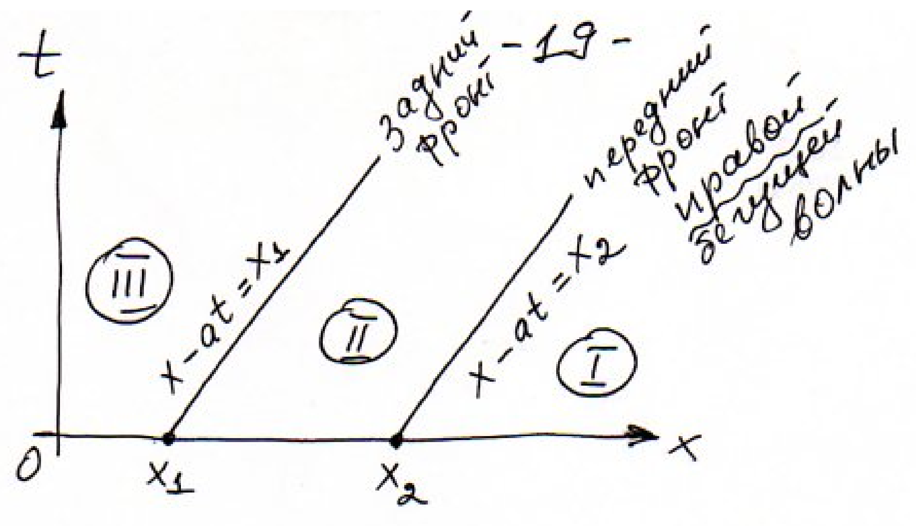
Вывод:

→ Теорема устойчивости означает, что если начальные данные двух задач мало отличаются друг от друга, то и их решение мало отличаются в момент времени $t\in[0,T]$.

Существование, единственность и устойчивость решение задачи Коши означают, что эта задача корректно поставлена!

Плоскость состояния или фазовая плоскость (x,t).

Пусть ф-ия $f(x)$ отлична от 0 в интервале (x_1,x_2) и равна 0 вне его:

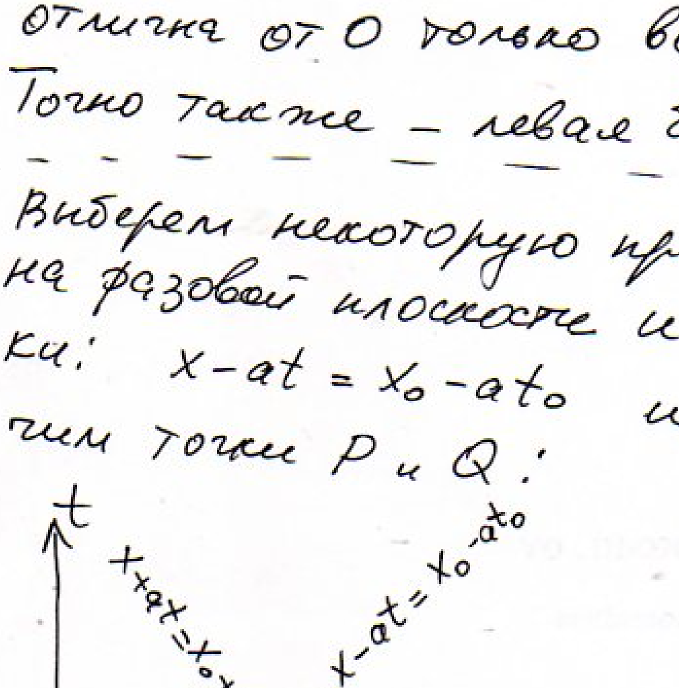


← Правая бегущая волна:

Проведём через точки $(x_1,0)$ и $(x_2,0)$ характеристики. Они разбивают верхнюю полуплоскость на 3 области. Ф-ия $u(x,t)=f(x-at)$ отлична от 0 только во II области.

Точно также – левая бегущая волна!

Выберем некоторую произвольную т. $M(x_0,t_0)$ на фазовой плоскости и проведём две характеристики: $x-at=x_0-at_0$ и $x+at=x_0+at_0$ → получим точки P и Q:



значение ф-ии
$$u(x_0,t_0)=f_1(x_0-at_0)+$$
$$+f_2(x_0+at_0)$$
в точке M равно сумме значений ф-ий $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках P и Q.

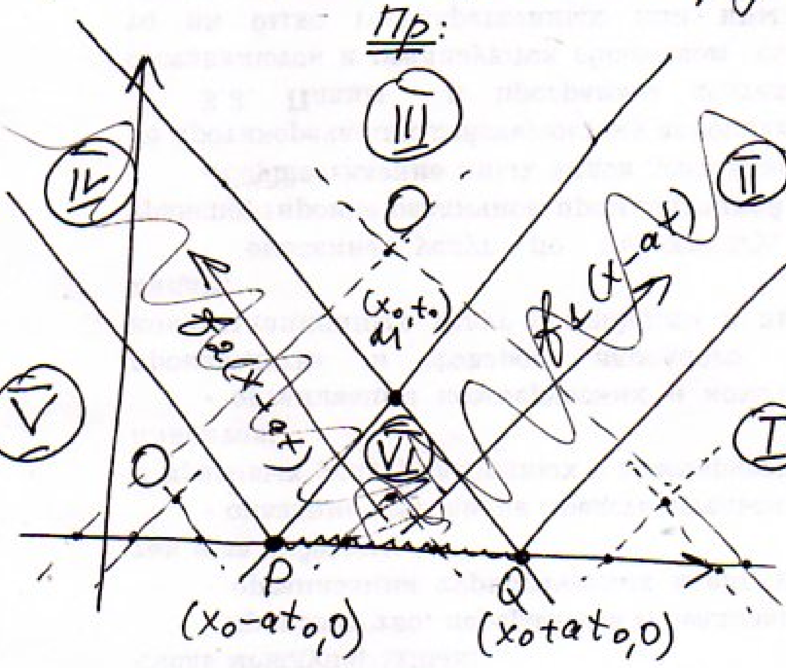
$\triangle$ MPQ – характеристический треугольник.

Из формулы Даламбера видно, что значение $u(M)=u(x_0,t_0)$ зависит только от начального отклонения в вершинах P и Q и от начальной скорости на стороне PQ.

$$\boxed{u(M) = \frac{\varphi(P)+\varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{PQ}\psi(z)\,dz}$$

Начальные данные, заданные вне отрезка PQ не оказывают влияние на значение ф-ии $u(x,t)$ в т. $M(x_0,t_0)$. Физически это связано с конечной скоростью распространения возмущения вдоль колеблющейся струны.

Пр:



Пр: пусть начальная скорость равна 0, а начальное отклонение является локальным, т.е. отличным от 0 на отрезке PQ. Проведём через т. P и Q - две характеристики. Фазовая пл-ть разобьётся на 6 областей: $\overline{I}, \overline{II}, \ldots, \overline{VI}$.

Рассмотрим, чему будет равно отклонение $u(x,t)$ струны в каждой из этих областей:

по формуле Даламбера отклонение есть сумма правой и левой бегущих волн.

$(\psi(x)=0)$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right].$$

В областях I, III, V отклонение равно 0: если взять в каждой из них произвольную точку и построить характеристический треугольник, то вершина при основании этого Δ лежат вне отрезка PQ!

В обл-ти II будет $\exists$ только правая волна:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at),$$

В обл-ти IV - только левая волна: $u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)$.

Если взять точку в обл-ти VI, то обе вершины при основании хар. Δ будут находиться на отрезке PQ $\Rightarrow$ здесь будет сумма 2-х волн!

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)+\frac{1}{2}\varphi(x+at).$$

Полуограниченная прямая и метод продолжений. $x\geq 0$

Если нас интересуют колебание струны на участке возле одного из её концов, но вдали от другого, и в таком промежутке времени, когда влияние удалённого конца ещё не успевает сказаться на выбранном участке, то такие колебание можно считать происходящими при $x\geq 0$.

эта задача имеет особое-важное-значение при изучении процессов отражение волн от конца и ставится следующим образом: