Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК
Курс ONLINE лекций для студентов ВМК отделения
«ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДУ n-го ПОРЯДКА И

§4. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ОДУ

§4. Методы построения частных решений неоднородных ОДУ

1. Метод неопределенных коэффициентов

$$Ly = y^{n}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = P_m(t) e^{\alpha t} \quad (1)$$

Область применимости: L - оператор с постоянными коэф-тами; $P_m(t)$ - многочлен степени m; α - произвольное число (может быть комплексным) (2)

Метод построения:

1) Решается характеристическое уравнение (3)

$$L(\lambda) = \lambda^{n} + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

2a) Если для всех j $\lambda_j \neq \alpha$ (нерезонансный случай), то частное решение ур-ния (1) ищется в виде (4)

$$y_{\text{частн, неодн}}(t) = Q_m(t) e^{\alpha t},$$

где $Q_m(t)$ - многочлен степени m. Выражение (24) подставляется в (1), что позволяет найти коэффициенты $Q_m(t)$.

Пример 1
Филиппов 533

$y''-2y'-3y=e^{4x}=P_0(x)e^{4x}$, $P_0(x)=1$

$\lambda^2-2\lambda-3=0$; $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}=\left[\begin{array}{l}3\neq 4\\ -1\neq 4\end{array}\right.\Rightarrow$ не резонансный случай

$\Rightarrow y_{част,неодн}=e^{4x}=Ae^{4x}\Rightarrow$ (подставим в уравнение)

$(Ae^{4x})''-2(Ae^{4x})'-(3Ae^{4x})=e^{4\lambda}\Rightarrow 16A-8A-3A=1\Rightarrow A=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow y_{частн,неодн}(x)=\frac{1}{5}e^{4x}$; $y_{общ,неод}=y_{частн.неод}(x)+y_{общ,одн}(x)=\frac{1}{5}e^{4x}+C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$

Пример 2
Филиппов 534

$y''+y=4xe^{x}=P_1(x)e^{x}$; $L(\lambda)=\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda=\pm i\neq 1\Rightarrow$ не резонансный случай. $y_{общ,одн}=C_1\cos x+C_2\sin x$

1) $y_{част,неод}(x)=Q_1(x)e^{x}=(Ax+B)e^{x}$; $y'_{ч,неод}=Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}$;

$y''_{ч,неод}=Ae^{x}+Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}=2Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow y''_{ч,неод}+y_{част,неод}=(Ax+B)e^{x}+2Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}=4xe^{x}\Rightarrow\begin{cases}2A=4\\ 2B+2A=0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}A=2\\ B=-2\end{cases}\Rightarrow y_{част,неод}=2(x-1)e^{x}$; $y_{общ,неод}=2(x-1)e^{x}+C_1\cos x+C_2\sin x$

$\boxed{\text{Пример 3 Филиппов 537}}$ $y'' - 3y' + 2y = \sin x = P_0(x)\,\mathrm{Im}(e^{ix})$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \neq \pm i$ – не резонансный случай

$y_{общ,\,одн} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$; $\underline{y_{част,\,неод}(x)} = \mathrm{Re}\left(Q_0(x)e^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(A - Bi\right)(\cos x + i\sin x) =$

$= \underline{A\cos x + B\sin x}$; $\Rightarrow y'_{частн,\,неод}(x) = -A\sin x + B\cos x \Rightarrow y''_{частн,\,неод}(x) =$

$= -A\cos x - B\sin x \Rightarrow L(y_{част,\,неод}) = y''_{част,\,н} - 3y'_{част,\,неод} + 2y_{част,\,неод} =$

$= (-A\cos x - B\sin x) - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = \sin x$

Приравниваем коэф-ты при $\cos x$, $\sin x$:

$$\begin{cases} -A - 3B + 2A = 0 \\ -B + 3A + 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 3B = 0 \\ 3A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{10} \\ B = \frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow y_{част,\,неод} = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{общ,\,неод}(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + C_1 e^x + C_2 e^{2x}} \leftarrow \text{Ответ}$$

стр25

2б) Если для некоторого $\lambda_j = \alpha$ (резонансный случай), то решение ищется в виде

$$y_{част,неодн}(t) = t^k Q_m(t) e^{\alpha t},$$ где k – кратность корня λ_j (5)

Пример 4 Филиппов 536

$y'' + y' - 2y = 3xe^x = P_1(x)e^x$; $\alpha = 1$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 1 = \alpha$ – резонанс, кратность корня $\lambda = 1$ равна 1.
$\lambda_2 = -2$

$y_{общ,одн} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$; $y_{част,неодн} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$;

$y'_{част,неод}(x) = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$;

$y''_{част,неод}(x) = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x =$

$= 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow y'' + y' - 2y = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + \cancel{(Ax^2 + Bx)e^x} + (2Ax + B)e^x + \cancel{(Ax^2 + Bx)e^x} - \cancel{2(Ax^2 + Bx)e^x} = 3xe^x \Rightarrow 2A + 2(2Ax + B) + (2Ax + B) = 3x$

$\Rightarrow \begin{cases} 6A = 3 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y_{част,неод} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x$

$y_{общ,неодн} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

Пример 5
Филиппов 538

СТР 26

$$y''+y=4\sin x=\mathrm{Re}\left(P_0(x)e^{ix}\right),\quad \alpha=i$$

$$\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda=\pm i,\quad \lambda=\alpha,\ \text{кратность } 1$$

$$\Rightarrow \underline{y_{общ,одн}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x}$$

$$y_{част,неодн}(x)=\mathrm{Re}\left(xQ_0(x)e^{ix}\right)=A\cdot x\cdot\cos x+B\cdot x\cdot\sin x$$

Теория: $(uv)'=u'v+v'u$

$$(uv)''=(u'v+v'u)'=u''v+2u'v'+v''u$$

$$(uv)'''=(u''v+2u'v'+v''u)'=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$$

Аналог с $(a+b)^n$

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)} \quad (6)$$

поэтому $(Ax\cos x+Bx\sin x)''=2(-A\sin x+B\cos x)-Ax\cos x-Bx\sin x$

подставим в уравнение

$$y''_{част,неод}+y_{част,неод}=2(-A\sin x+B\cos x)-\cancel{Ax\cos x}-\cancel{Bx\sin x}+\cancel{Ax\cos x}+\cancel{Bx\sin x}=4\sin x \Rightarrow \begin{cases}-2A=4\\ 2B=0\end{cases} \Rightarrow A=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y_{част,неодн}(x)=-\tfrac{1}{2}x\cos x}$$

$$\underline{y_{общ,неод}(x)=-2\cdot x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x}$$

Пример 6
Филиппов 546

$$y''+y = x\sin x = Re\left(P_1(x)e^{ix}\right), \quad \alpha = 1$$

$$y_{общ,одн} = C_1\cos x + C_2\sin x, \quad \text{т.к. } \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda = \pm i, \ \frac{\lambda=\alpha}{\text{кратность } 1.}$$

$$y_{част,неодн}(x) = Re\left(xQ_1(x)e^{ix}\right) = (Ax^2+Bx)\cos x + (Cx^2+Dx)\sin x$$

Надо применять формулу (6):

$$y''_{ч,неод}(x) + y_{ч,неод}(x) = 2A\cos x + 2(2Ax+B)(-\sin x) + \cancel{(Ax^2+Bx)(-\cos x)} +$$
$$+ \cancel{(Cx^2+Dx)(-\sin x)} + 2C\sin x + 2(2Cx+D)\cos x + \cancel{(Ax^2+Bx)}\cos x + \cancel{(Cx^2+Dx)\sin x} = x\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A+2D=0 \\ 2C-2B=0 \\ -4A=1 \\ 4C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ D=\frac{1}{4} \\ C=0 \\ B=0 \end{cases} \Rightarrow y_{част,неод} = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x$$

$$\Rightarrow y_{общ,неодн} = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$$

На дом: 539, 540, 542, 545, 547