Профессор Сычугов Д.Ю., МГУ ВМК

Курс семинаров для студентов ВМК отделения «ВТОРОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТЕМА 3.

1) Линейные ОДУ 1 порядка
2) Уравнение Бернулли

СЕМИНАРЫ:

ТЕМА ЗАНЯТИЯ №3

1) ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА;
2) УРАВНЕНИЕ Бернулли.

АВТОР ONLINE КУРСА

ПРОФЕССОР СЫЧУГОВ Д.Ю.,
ВМК МГУ

1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1ГО ПОРЯДКА

Определение 1. Линейным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \textbf{(1)}$$

Замечание 1 Если $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на всей прямой, то задача Коши для ур-ния (1) имеет, и притом единственное, решение на всей числовой оси (см. лекции).

Задача (1) допускает решение аналитически, с помощью метода, который носит название метода вариации постоянн.

2. Метод вариации постоянной состоит из 2 шагов:

1) Решается вспомогательная задача (нужно найти нетрив. решение)

$$\frac{dv}{dx} + a(x)v(x) = 0 \quad \textbf{(2)} \Rightarrow \frac{dv}{v(x)} = -a(x)dx \Rightarrow$$

(уравнение с раздел. переменными) $\Rightarrow \int \frac{dv}{v(x)} = -\int a(x)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|v(x)| = -A(x) + \ln|C|$, где $A(x) = \int a(x)\,dx$, $A'(x) = a(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{v(x) = C e^{-A(x)} \quad (3)}$ – первый этап закончен.

2) Будем искать решение задачи (1) в виде

$y(x) = C(x) e^{-A(x)}$ (4), где $C(x)$ – уже не константа, а некоторая неизвестная функция. Подставим (4) в (1) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\left(C(x) e^{-A(x)}\right) + a(x)\cdot\left(C(x) e^{-A(x)}\right) = b(x) \Rightarrow \boxed{A'(x) = a(x)} \Rightarrow$$

$$C'(x) e^{-A(x)} \cancel{- C(x) a(x) e^{-A(x)}} \cancel{+ C(x) a(x) e^{-A(x)}} = b(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = e^{A(x)} b(x) \quad (5) \Rightarrow$$

$C(x) = \int e^{A(x)} b(x)\,dx + C_0$ (6), здесь C_0 – уже некоторая константа

Подставив (6) в (4), получим окончательное решение задачи (1):

$$\boxed{y(x) = \left(\int e^{A(x)} b(x)\,dx + C_0\right)\cdot e^{-A(x)} \quad (7)}$$

стр. 3

Замечание 2 То сокращение, которое получено у нас при подстановке представления (4) в (1), происходит всегда, поскольку мы показали его в общем виде. Поэтому, несмотря на наличие формулы (7) (решение в окончательном виде), можно при решении задачи (1) каждый раз повторять всю процедуру вариации постоянной, что дает, по существу, контролем правильности наших вычислений.

Пример 1 (Фил., 136)

$$xy' - 2y = 2x^4$$

1) Решим вспомогательную задачу:

$$x\frac{dv}{dx} - 2v = 0 \Rightarrow$$ (нам нужно нетривиальное, то есть не равное тожд. нулю решение)

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow v = Cx^2.$$

2) Ищем решение исх. ур-ния в виде $y(x) = C(x)\cdot x^2$. Подставим:

$$x\frac{d}{dx}\left(C(x)x^2\right) - 2C(x)x^2 = 2x^4 \Leftrightarrow C'(x)x^3 + \cancel{C(x)\cdot 2x^2} - \cancel{C(x)\cdot 2x^2} = 2x^4$$

$$\Rightarrow C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + C_0 \Rightarrow \boxed{y(x) = (x^2 + C_0)x^2 = C_0x^2 + x^4} \leftarrow \text{Ответ}$$

Пример 2
Фил., 138

$$y' + y\cdot tg\,x = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

1) Решаем вспомогательную задачу:

$$\frac{dv}{dx} + v(x)\cdot tg\,x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v(x)} = -tg\,x\,dx = -\frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow \ln|v(x)| = \ln|\cos x| + \ln|C| \Rightarrow \underline{v(x) = C\cos x}$$

2) Ищем решение исходной задачи в виде

$y(x) = C(x)\cos x$, подставим в исходное уравнение

$$\left(C(x)\cos x\right)' + C(x)\cdot\cos x\cdot tg\,x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot\cos x - \cancel{C(x)\cdot\sin x} + \cancel{C(x)\cdot\sin x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow C(x) = \int\frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C_0 \Rightarrow \boxed{y(x) = (tg\,x + C_0)\cos x = \sin x + C_0\cos x}$$

Ответ

Пример 3 (фил., 140) Сделать самостоятельно.

3. Уравнение Бернулли

Определение 2 Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y'(x)+a(x)y(x) = b(x)\cdot y^{n}(x), \text{ где } n\neq 0,\ n\neq 1 \quad (8)$$

Замечание 3 Если $n=0$, то (8) переходит в линейное уравнение 1-го порядка. Если $n=1$, то (8) можно преобразовать, вынеся общий множитель $y(x)$, Получится уравнение с разделяющимися переменными. Поэтому в определении (2) $n\neq 0$ и $n\neq 1$.

Прежде всего, если $n>0$, то $y(x)\equiv 0$ **(9)** является решением уравнения (8); (тривиальным)

Как найти нетривиальное решение?

Поделим уравнение (8) на $y^n(x)$:

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)} + a(x)\,y^{1-n}(x) = b(x) \quad (10)$$

и сделаем замену

$$z(x) = y^{1-n}(x) \quad (11)$$

тогда $z'(x) = (1-n)\,y^{-n}(x)\,y'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{y'(x)}{y^n(x)} = \dfrac{z'(x)}{1-n}$ (12) и уравнение (10) примет вид:

$$\boxed{\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + a(x)\,z(x) = b(x)} \quad (13)$$

Таким образом, замена (11) сводит уравнение Бернулли к линейному уравнению 1-го порядка. Далее для его решения применяется метод вариации постоянной.

Пример 4 (Фил., 151)

$$y' + 2y = y^2 e^x \quad (14)$$

<u>Решение</u>

1) Прежде всего, $y(x) \equiv 0$ – решение.

2) Для нахождения нетривиального решения поделим исх. ур-ние на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x,$$ и сделаем замену: $\frac{1}{y} = z \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{dz}{dx} + 2z = e^x \quad (15)$$

3) Решим вспомогательную задачу $\frac{dv}{dx} - 2v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|v| = 2x + \ln C \Rightarrow v = Ce^{2x}$

4) Будем искать решение задачи (15) в виде $z(x) = C(x)e^{2x}$ **(16)**

и подставим (16) в (15) $\Rightarrow -C'(x)e^{2x} \cancel{-2C(x)e^{2x}} + \cancel{2C(x)e^{2x}} = e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow C'(x) = -e^{-x} \Rightarrow C(x) = e^{-x} + C_0 \Rightarrow z(x) = (e^{-x} + C_0)e^{2x} = e^x + C_0 e^{2x}$

5) Осталось вернуться к первоначальной ф-ции

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{e^x + C_0 e^{2x}}; \quad y(x) \equiv 0.}$$

← <u>Ответ</u>

Пример 5
фил, 153

$$y' - y\,tg\,x = +y^4 \cdot \cos(x) \quad (17)$$

1) $y(x) \equiv 0$ – решение

2) Поделим (17) на $y^4(x) \Rightarrow \frac{y'}{y^4(x)} - \frac{1}{y^3(x)} \cdot tg\,x = +\cos x$ **(18)** и сделаем замену $z(x) = y^{-3}(x) \Rightarrow z'(x) = -3y^{-4}(x)\,y'(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{y^4(x)} = -\frac{1}{3} z'(x)$ **(19)**
и подставим (19) в (18):

$$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx} - z(x) \cdot tg\,x = \cos x \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{dz}{dx} + z(x)\,tg\,x = -\cos x \quad (20)$$

3) Решим вспомогательную задачу $\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} + v(x) \cdot tg\,x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -3\,tg\,x\,dx = -3\frac{\sin x}{\cos x}dx = +3\frac{d\cos x}{\cos x} \Rightarrow \ln|v| = +3\ln|\cos x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) = C\cos^3(x)$$

4) Решение задачи (20) будем искать в виде $z(x) = C(x)\cos^3 x$ **(21)**
Подставим (21) в (20) $\Rightarrow +\frac{1}{3}C'(x)\cos^3 x - \cancel{C(x)\cos^2 x \sin x} + \cancel{C(x)\cos^3 x \cdot tg\,x} = -\cos x$

$$\Rightarrow C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow C(x) = -3\,tg\,x + C_0 \Rightarrow z(x) = (-3\,tg\,x + C_0)\cos^3 x =$$

$$= C_0\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x$$

5) $$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{z(x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{C_0\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x}}} \leftarrow \text{Ответ!}$$

На дом: 137, 142, 145, 154