1.1.1 良序原理

定理：

良序原理：正整数集的每个非空子集均有最小元素（无需证明）

应用：

应用1　求证$\sqrt{2}$是无理数

证明（反证法）：假设$\sqrt{2}=\frac{a}{b},a,b\in N^{+}$

考虑集合$S=\{y:\sqrt{2}=\frac{x}{y},x,y\in N^{+}\}$

由良序原理，S包含最小元素，不妨设为d，则$\sqrt{2}=\frac{c}{d}$

$\therefore 2=\frac{c^2}{d^2}$

即 $2d^2=c^2$

$2d^2-cd=c^2-cd$

$d(2d-c)=c(c-d)$

故有$\frac{2d-c}{c-d}=\frac{c}{d}=\sqrt{2}$

由$1<\sqrt{2}<2$知 $1<\frac{c}{d}<2$

即 $d<c<2d$

故$2d-c>0,c-d>0,c-d<d$

这说明$c-d\in S$，这与d是S中最小元素矛盾

$\therefore$假设不成立

$\therefore \sqrt{2}$是无理数

应用2　（定理1）带余除法是正确的

证明：对$a = qb + r$，考虑集合$S = \{a - xb | a - xb \geq 0\}$

由良序原理，S包含最小元素，不妨设为d，则$d = a - xb$

假设$d \geq b$，那么$d - b \geq 0$，显然$d - b \in S$

又由$d - b < d$与d为S最小元素矛盾

因此$0 \leq d \leq b - 1$

这就说明了带余除法的正确性