丢番图方程

考虑方程 $a^2+b^2=c^2$

定义： 称正整数 a,b,c 组成了一个毕达哥拉斯三元组，若 $(a,b,c)=1$ 且 $a^2+b^2=c^2$.

解： 容易看出 a,b 一奇一偶 (标注：由条件 $(a,b)=1$，知 a,b 不能同为偶数; 若 a,b 同为奇数，则 $a^2=4x+1, b^2=4y+1, a^2+b^2=4(x+y)+2$，但 $c^2=4K$ 或 $4K+1$，$a^2+b^2=c^2$ 不可能成立)

不失一般性，设 a 为偶数，则 b,c 均为奇数，

$(\frac{a}{2})^2=\frac{c^2-b^2}{4}=\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2}$

可证 $\frac{c+b}{2}=t^2, \frac{c-b}{2}=s^2, (t,s)=1. t,s$ 一奇一偶.

(标注-引理： 不定方程 $uv=w^2, u>0, v>0, (u,v)=1$ 的一切正整数解可以写成公式 $u=t^2, v=s^2, w=ts, t>0, s>0, (t,s)=1$)

(标注-引理证明： 设 u,v,w 是方程的任一解. 令 $u=t^2u_1, v=s^2v_1, t>0, s>0$，其中 u_1,v_1 不再被任何数的平方整除，则 $t^2\mid w^2, s^2\mid w^2$. 故 $t\mid w, s\mid w$. 又 $(u,v)=1$，故 $(t^2,s^2)=1$，故 $(t,s)=1$，所以 $ts\mid w$，设 $w=w_1ts$，代入方程得 $u_1v_1=w_1^2$.

若 $w_1^2\neq 1$，则存在素数 p，满足 $p^2\mid w_1^2$. 但由 u_1,v_1 的定义及 $(u_1,v_1)=1$ 知 $p^2\nmid u_1v_1$.

故 $w_1^2=1, u_1v_1=1$，但 u_1,v_1,w_1 均为正整数，所以 $u_1=v_1=w_1=1$.

因此 $u=t^2, v=s^2, w=ts, t>0, s>0, (t,s)=1$.

反之，引理中给出的解显然满足方程)

定理 7： (a,b,c) 是毕达哥拉斯三元组当且仅当

$$\begin{cases} a=2st \\ b=t^2-s \\ c=t^2+s^2 \end{cases} \qquad (t,s)=1$$

t 与 s 一奇一偶.