良序原理

良序原理： 正整数集的每个非空子集均有最小元素（无需证明）

应用 1： 求证 $\sqrt{2}$ 是无理数

证明（反证法）： 假设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}, a, b \in N^+$

考虑集合 $S = \{y : \sqrt{2} = \frac{x}{y}, x, y \in N^+\}$

由良序原理，S 包含最小元素，不妨设为 d，则 $\sqrt{2} = \frac{c}{d}$

$\therefore 2 = \frac{c^2}{d^2}$

即 $2d^2 = c^2$

$2d^2 - cd = c^2 - cd$

$d(2d - c) = c(c - d)$

故有 $\frac{2d-c}{c-d} = \frac{c}{d} = \sqrt{2}$

由 $1 < \sqrt{2} < 2$ 知 $1 < \frac{c}{d} < 2$

即 $d < c < 2d$

故 $2d - c > 0, c - d > 0, c - d < d$

这说明 $c - d \in S$，这与 d 是 S 中最小元素矛盾

$\therefore$ 假设不成立

$\therefore \sqrt{2}$ 是无理数

应用 2 （定理 1）： 带余除法是正确的

证明： 对 $a = qb + r$，考虑集合 $S = \{a - xb | a - xb \geq 0\}$

由良序原理，S 包含最小元素，不妨设为 d，则 $d = a - xb$

假设 $d \geq b$，那么 $d - b \geq 0$ ，显然 $d - b \in S$

又由 $d - b < d$ 与 d 为 S 最小元素矛盾

因此 $0 \leq d \leq b - 1$

这就说明了带余除法的正确性