算数基本定理

定理 6：对每个正整数 $n \geq 2$，要么是素数，要么是素数的乘积，且分解是唯一的.

证明：（数学归纳法，待补充）

应用：令 $\tau(n)$ 为 n 的正因子数量.

令 $\sigma(n)$ 为 n 的正因子之和.

令 $\varphi(n) = |\{0 \leq i \leq n-1 : (i,n) = 1\}|$，即与 n 互素的数个数

$\varphi(n)$ 即欧拉函数. 可通过对 n 的分解计算出这三个函数.

设 n 的分解式为 $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$，其中 $p_i, i = 1, 2, \cdots k$ 为素数

$\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (m_i + 1)$

$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{(m_i+1)} - 1}{p_i - 1}$

$\sigma(n) = n * \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})$

例：$n = 20 = 2^2 * 5$

$\tau(20) = (2+1) * (1+1) = 6.$

$\sigma(20) = \frac{2^3-1}{2-1} * \frac{5^2-1}{5-1} = 42.$

$\varphi(20) = 20 * (1 - \frac{1}{2}) * (1 - \frac{1}{5}) = 8.$