# 计算物理第五次作业

2000012425 张弛

2023 年 1 月 4 日

1.参考课件《偏微分方程A》，对Kruskal,Zalusky孤立子问题，给出数值解（随时间演化的动画示意图，或者代表性时刻的帧图）及说明，注意保证大$t$时数值结果的稳定性。

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0, \\ u(x,0) = \cos(\pi x), \qquad 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

$u, u_x, u_{xx}$为在$[0,2]$上的周期函数。

**解.** 一些差分

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}.$$

然后一点平均方法

$$u = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j} + u_{i+1,j}}{3}.$$

得到差分公式

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{6}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})(u_{i-1,j} + u_{i,j} + u_{i+1,j}) + \frac{\delta^2}{2(\Delta x)^2}(u_{i+2,j} + 2u_{i-1,j} - 2u_{i+1,j} - u_{i-2,j})\right].$$

近似一下变量$t$为中心差分情形的$Von\ Neumann$稳定条件

$$\frac{1}{(\Delta x/\Delta t)}\left[|u| + 4\left(\frac{\delta}{\Delta x}\right)^2\right] \le 1.$$

一些变量步数和步长的选取

$$0 \le x \le 2, \Delta x = 2/128,$$

$$0 \le t \le 12.6, \Delta t = 12.6/600000.$$

然后取$\delta = 0.022$.借助程序”*HW5计物第一题.py*”得到动图”*KZ.gif*”。

可以看到随着时间演进，余弦波开始挤压产生截波。然后色散项$u_{xxx}$开始起作用，解变成一列由*8*个类*sech*函数组成的波，速度快的波会追上慢的波，吞入然后又吐出。经过一段时间，原先的余弦波又出现了。不过这时稳定性已经不佳了。

2.参考课件《偏微分方程B》，使用谱方法或者其他方法求解2维扩散方程，给出数值解（随时间演化的动画示意图，或者代表性时刻的帧图）及说明：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{(\partial x)^2} + D\frac{\partial^2 T}{(\partial y)^2}.$$

其中$D = 1, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$,
$x$方向的边界条件为$T(x=0,y) = T(x=1,y) = 0$,
$y$方向的边界条件为$dT/dy(x,y=0) = dT/dy(x,y=1) = 0$.

**解.** 使用谱方法。$x$方向为*Dirichlet*边界条件，将解按照$x$进行傅里叶展开

$$T(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{T}_i(y,t)\sin(i\pi x).$$

一些差分

$$t_n = t_0 + n\delta t, x_i = x_0 + i\delta x, y_j = y_0 + j\delta y.$$

其中$0 \le i \le I, 0 \le j \le J$.差分化后的傅里叶展开的截断形式

$$T_{i,j}^n = \sum_{k=0}^{I} \hat{T}_{k,j}^n \sin{(ik\pi/I)}.$$

原方程差分化，使用了*Crank-Nicholson*方法，其中$y$变量中心差分

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\delta t} = \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 T}{\delta x^2}\right)_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 T}{\delta x^2}\right)_{i,j}^{n}\right] + \frac{D}{2}\left[\frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\delta y)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n}}{(\delta y)^2}\right].$$

则差分过后的傅里叶分量满足的方程

$$-\frac{C}{2}\hat{T}_{i,j-1}^{n+1} + \{1 + C(1 + i^2\kappa^2/2)\}\hat{T}_{i,j}^{n+1} - \frac{C}{2}\hat{T}_{i,j+1}^{n+1} = \frac{C}{2}\hat{T}_{i,j-1}^{n} + \{1 - C(1 + i^2\kappa^2/2)\}\hat{T}_{i,j}^{n} + \frac{C}{2}\hat{T}_{i,j+1}^{n}.$$

其中$C = D\frac{\delta t}{(\delta y)^2}, \kappa = \pi\delta y$.边界条件比较简单

$$\hat{T}_{i,0}^n = \hat{T}_{i,1}^n, \hat{T}_{i,J-1}^n = \hat{T}_{i,J}^n.$$

是个三对角矩阵。取定一些差分的格子

$$I = J = 128, \delta t = 0.0001.$$

初始条件为

$$T(x, y, 0) = \eta(0.1 - |x - 0.5|)\eta(0.1 - |y - 0.5|).$$

需要用到差分形式的傅里叶变换

$$\hat{T}_{i,j}^n = \frac{2}{I}\sum_{k=0}^{I} T_{k,j}^n \sin{(ik\pi/I)}.$$

时间范围

$$0 \le t \le 0.1, N = 1000.$$

用*Thomas*算法来解三对角线性方程。借助程序*"HW5计物第二题.py"*得到动图*"Heat.gif"*。

可以看到随着时间演进，中心方块的浓度开始扩散，近似为圆形，逐渐扩大，由于边界条件的限制，在时间充分大后，会形成边界平行于$y$轴的等浓度层。

3.考虑由一下初始条件和边界条件给出的振动方膜的二维波动方程：

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & x, y \in [0, 1], t \ge 0, \\ u(x, y, 0) = \sin{(\pi x)}\sin{(2\pi y)}, & x, y \in (0, 1), \\ u = 0 \ boundary, & t \ge 0, \\ \partial u/\partial t|_{t=0}, & x, y \in (0, 1). \end{cases}$$

边界由$x = 0, x = 1, y = 0$及$y = 1$给定。λ可以取为1.

1)使用分离变量法给出该方程的解析解。

**解.** 直接将解按照本征函数展开

$$u(x, y, t) = \sum_{mn} c_{mn}(t)\sin{(m\pi x)}\sin{(n\pi y)}.$$

代入原方程，得

$$\ddot{c}_{mn}(t) + (m^2 + n^2)\pi^2 c_{mn} = 0.$$

知道初始条件

$$\begin{cases} c_{mn}(0) = \delta_{m1}\delta_{n2}, \\ \dot{c}_{mn}(0) = 0. \end{cases}$$

解得

$$c_{mn}(t) = \delta_{m1}\delta_{n2}\cos(\sqrt{5}\pi t).$$

则解析解为

$$u(x, y, t) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y)\cos(\sqrt{5}\pi t).$$

2)使用二维差分网格，写出求解该方程的显式方法的算法，并编写数值求解离散波动方程的程序。特别是描述如何处理边界条件和初始条件，并将结果与封闭形式的解决方案进行比较。

**解.** 使用谱方法。$x$方向为*Dirichlet*边界条件，将解按照$x$进行傅里叶展开

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{u}_i(y, t)\sin(i\pi x).$$

一些差分

$$t_n = t_0 + n\delta t, x_i = x_0 + i\delta x, y_j = y_0 + j\delta y.$$

其中$0 \le i \le I, 0 \le j \le J.$差分化后的傅里叶展开的截断形式

$$u_{i,j}^n = \sum_{k=0}^{I} \hat{u}_{k,j}^n \sin(ik\pi/I).$$

原方程差分化，使用了*Crank-Nicholson*方法，其中$y$变量和$t$变量使用中心差分

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{(\delta t)^2} = \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\delta x^2}\right)_{i,j}^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 u}{\delta x^2}\right)_{i,j}^{n}\right] + \frac{\lambda}{2}\left[\frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{(\delta y)^2} + \frac{u_{i,j-1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j+1}^{n}}{(\delta y)^2}\right].$$

则差分过后的傅里叶分量满足的方程

$$-\frac{C}{2}\hat{u}_{i,j-1}^{n+1} + \{1 + C(1 + i^2\kappa^2/2)\}\hat{u}_{i,j}^{n+1} - \frac{C}{2}\hat{u}_{i,j+1}^{n+1} = \frac{C}{2}\hat{u}_{i,j-1}^{n} + \{2 - C(1 + i^2\kappa^2/2)\}\hat{u}_{i,j}^{n} + \frac{C}{2}\hat{u}_{i,j+1}^{n} - \hat{u}_{i,j}^{n-1}.$$

其中$C = \lambda\left(\frac{\delta t}{\delta y}\right)^2, \kappa = \pi\delta y.$边界条件比较简单

$$\hat{u}_{i,0}^n = 0, \hat{u}_{i,J}^n = 0.$$

初值条件直接离散傅里叶变换即可

$$\hat{u}_{i,j}^0 = \frac{2}{I}\sum_{k=0}^{I} u_{k,j}^0 \sin(ik\pi/I).$$

一阶初值条件写为

$$\hat{u}_{i,j}^1 = \hat{u}_{i,j}^0.$$

取定一些差分的格子

$$I = J = 128, \delta t = 0.001.$$

时间范围

$$0 \le t \le 1, N = 1000.$$

借助程序*"HW5计物第三题数值法.py"*得到动图*"OscillationNum.gif"*。

另外借助程序*"HW5计物第三题解析法.py"*得到动图*"OscillationAna.gif"*。

可以看到两种方法得到的结果看不出差别。都是标准的本征振动形式，且频率振幅相同。

3)给出不同差分步长($\Delta t, \Delta x$及$\Delta y$)情形的数值表现，特别是考虑和校验数值稳定性条件（此处可以设置$\lambda = 1, 2$等不同值）：

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)^{-1/2}.$$

**解.** 上一题已经给出一种较稳定的情况，下面看两个另外的情况。

取

$$\Delta t = 0.1, \Delta x = 1/128, \Delta y = 1/128.$$

此时

$$\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} = 18 \geq 1.$$

借助程序"*HW5*计物第三题稳定性比较.*py*"得到动图"*OscillationTlarge.gif*"。发现振动发生了不应该发生的衰减。

取

$$\Delta t = 0.001, \Delta x = 1/128, \Delta y = 1/16.$$

此时

$$\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} = 0.13 \leq 1.$$

借助程序"*HW*计物第三题稳定性比较.*py*"得到动图"*OscillationLattice.gif*"。由于满足稳定性，振动模式保持正确，但是由于差分格子较大，出现锐利边缘。

4)对$\Delta x = \Delta y$情形，给出结果的动画展示。

**答.** 比如前面的"*OscillationNum.gif*"和"*OscillationTlarge.gif*"。

4.参考课件《随机数及简明概率论》，选取某种程序自带的随机数产生方法，产生一组$[0-1]$之间均匀分布的随机数，统计$[0-0.1-0.2...0.9-1.0]$各个区间的撒点数。重复上述步骤多次(如：10000次)

1)请数值模拟，得到落入区间如$[0.3-0.4]$内的随机数的比例，给出这个比例的10000次数值的分布曲线，并给予论述说明；

**解.** 使用*python*的*random*函数，每次模拟产生*1000*个随机数，然后统计相关比例并画出比例曲线。

借助程序"*HW5*计物第四题随机性统计.*py*"得到下图

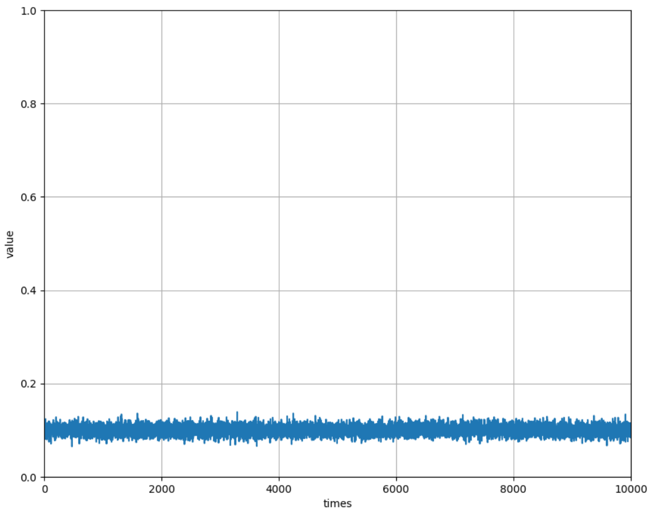


图 1: random函数随机性统计

当然我感觉散点图更好

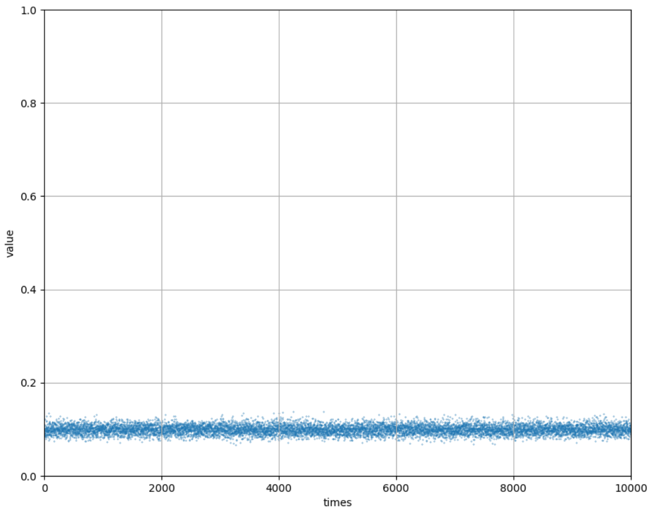


图 2: random函数随机性统计

可以看出来比例基本在0.1上下波动，比较稳定均匀。

2)参照课件，构建Chi2检验随机数的性质，并论述结果。

**解.** 列联表检验。生成20000个随机数，交替分成两组，第一组作为10000个$x$，第二组作为10000个$y$，共10000个点。这10000个点应当随机分布。考虑$x-y$平面，划分为$10\times 10$的格子，统计这10000个点落入每个方格的频次$n_{ij}$，将理论频次$m_{ij}=100$作为平均值，算出统计检验量

$$\chi^2=\sum_{i,j=1}^{k}\frac{(n_{ij}-m_{ij})^2}{m_{ij}}.$$

卡方检验自由度

$$n=9999.$$

由程序"*HW5计物第四题卡方独立性检验.py*"得到假设"*random*函数产生随机数是独立的"的置信概率为*100%*，十次模拟结果都是*100%*。