# 计算物理第二次作业

2000012425 张弛

2022 年 10 月 11 日

1.编写高斯消元法和Cholesky方法的代码，特别是求解如下线性方程组：

$$
\begin{aligned}
0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.06x_3 + 0.05x_4 = 0.23\\
0.07x_1 + 0.10x_2 + 0.08x_3 + 0.07x_4 = 0.32\\
0.06x_1 + 0.08x_2 + 0.10x_3 + 0.09x_4 = 0.33\\
0.05x_1 + 0.07x_2 + 0.09x_3 + 0.10x_4 = 0.31.
\end{aligned}
$$

请将两种方法的计算结果以及Cholesky分解得到的上三角矩阵写到答案文档中。

**答.** 这次使用的是不完全支点遴选。代码见“*HW2*计物第一题”。两种方法计算得到的结果如下。

| index | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| GEM | 0.9999999999999328 | 1.0000000000000395 | 1.0000000000000195 | 0.9999999999999879 |
| Cholesky | 0.9999999999998956 | 1.0000000000000624 | 1.0000000000000278 | 0.9999999999999836 |

表 1: 两种方法的计算结果

上三角矩阵如下。

$$
\begin{pmatrix}
0.22360679774997896 & 0.3130495168499706 & 0.2683281572999748 & 0.223606797749979\\
0 & 0.04472135954999535 & -0.08944271909999287 & -3.103167691559122e-16\\
0 & 0 & 0.14142135623730867 & 0.2121320343559652\\
0 & 0 & 0 & 0.07071067811865184
\end{pmatrix}
$$

2.对$f(x) = \cos(x^2), x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$，采用三次样条插值，分别考虑如下两种边界条件
(a)$x_0 = 0$和$x_2 = 0.9$端点处的二次导数值为0；

**解.** 设

$$y_0 = \cos(x_0^2) = 1, y_1 = \cos(x_1^2) = 0.935897, y_2 = \cos(x_2^2) = 0.689498.$$

再设

$$
\begin{aligned}
S_{01}'' &= M_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} + M_0\frac{x_1-x}{x_1-x_0},\\
S_{12}'' &= M_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1} + M_1\frac{x_2-x}{x_2-x_1},\\
S_{01}' &= \frac{M_1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{x_1-x_0} - \frac{M_0}{2}\frac{(x_1-x)^2}{x_1-x_0} + A_0,\\
S_{12}' &= \frac{M_2}{2}\frac{(x-x_1)^2}{x_2-x_1} - \frac{M_1}{2}\frac{(x_2-x)^2}{x_2-x_1} + A_1,\\
S_{01} &= \frac{M_1}{6}\frac{(x-x_0)^3}{x_1-x_0} - \frac{M_0}{6}\frac{(x-x_1)^3}{x_1-x_0} + A_0(x-x_0) + B_0,\\
S_{12} &= \frac{M_2}{6}\frac{(x-x_1)^3}{x_2-x_1} - \frac{M_1}{6}\frac{(x-x_2)^3}{x_2-x_1} + A_1(x-x_1) + B_1.
\end{aligned}
$$

$x_0, x_1, x_2$处的值为$y_0, y_1, y_2$，共四个方程

$$
\begin{aligned}
\frac{M_0}{6}(x_1-x_0)^2+B_0&=y_0,\\
\frac{M_1}{6}(x_1-x_0)^2+A_0(x_1-x_0)+B_0&=y_1,\\
\frac{M_1}{6}(x_2-x_1)^2+B_1&=y_1,\\
\frac{M_2}{6}(x_2-x_1)^2+A_1(x_2-x_1)+B_1&=y_2.
\end{aligned}
$$

可以得到用$M_0, M_1, M_2$表示的$A_0, A_1, B_0, B_1$

$$
\begin{aligned}
&B_0=y_0-\frac{M_0}{6}(x_1-x_0)^2,\\
&A_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}-\frac{(M_1-M_0)(x_1-x_0)}{6},\\
&B_1=y_1-\frac{M_1}{6}(x_2-x_1)^2,\\
&A_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\frac{(M_2-M_1)(x_2-x_1)}{6}.
\end{aligned}
$$

$x_1$处一阶导数连续

$$\frac{M_1}{2}(x_1-x_0)+A_0=\frac{M_1}{2}(x_1-x_2)+A_1.$$

端点二阶导数为*0*

$$
\begin{aligned}
M_0&=0,\\
M_2&=0.
\end{aligned}
$$

整理得到三个关于$M_0, M_1, M_2$的方程

$$
\begin{aligned}
0.1M_0+0.3M_1+0.05M_2&=-0.714489,\\
M_0&=0,\\
M_2&=0.
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
&M_0=0,\\
&M_1=-2.38163,\\
&M_2=0,\\
&B_0=1,\\
&A_0=0.131324,\\
&B_1=0.971621,\\
&A_1=-0.940410.
\end{aligned}
$$

得到三次样条插值

$$
\begin{aligned}
&S_{01}=-0.661564x^3+0.131324x+1,\\
&S_{12}=1.32313x^3-3.57245x^2+2.27479x+0.571307.
\end{aligned}
$$

(b)利用$f(x)$得到$x_0=0$和$x_2=0.9$端点处的一次导数值。

**解.** 要求端点一阶导数满足

$$S_{01}'(x_0)=0, S_{12}'(x_2)=-1.30372.$$

也即

$$\begin{aligned} -\frac{M_0}{2}(x_1-x_0)+A_0=0, \\ \frac{M_2}{2}(x_2-x_1)+A_1=-1.30372. \end{aligned}$$

所以关于$M_0, M_1, M_2$的三个方程是

$$0.1M_0+0.3M_1+0.05M_2=-0.714489,$$

$$0.2M_0+0.1M_1=-0.106839,$$

$$0.05M_1+0.1M_2=-0.482392$$

解得

$$\begin{aligned} M_0&=0.398857, \\ M_1&=-1.866104, \\ M_2&=-3.890868, \\ B_0&=0.976069, \\ A_0&=0.119657, \\ B_1&=0.963888, \\ A_1&=-0.72009. \end{aligned}$$

得到三次样条插值

$$\begin{aligned} S_{01}&=-0.629156x^3+0.199429x^2+3.72797\times 10^{-7}x+1, \\ S_{12}&=-1.12487x^3+1.09171x^2-0.53537x+1.10707. \end{aligned}$$

3.在区间$[1,2]$内利用0-4阶和0-6阶Chebyshev多项式展开$\log_2(x)$，对结果和误差作图并分析。

**解.** 换元$x'=2x-3$，有

$$f(x')=\log_2\left(\frac{x'}{2}+\frac{3}{2}\right).$$

最佳平方近似有

$$c_k=\frac{2-\delta_{0k}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

另一种近似方法

$$c_{N,m}=\frac{2-\delta_{0m}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}T_m(x_{N,k})f(x_{N,k}).$$

数值计算无原则困难，没有必要展示代码，得到系数如下。

| index | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 最佳平方近似 | 0.543107 | 0.495055 | -0.042469 | 0.00485768 | -0.000625085 |
| 另一种近似 | 0.543107 | 0.495055 | -0.0424687 | 0.00485588 | -0.000612818 |

表 2: 4阶展开系数

| index | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 最佳平方近似 | 0.543107 | 0.495055 | -0.042469 | 0.00485768 | -0.000625085 | 0.0000857981 | -0.0000122672 |
| 另一种近似 | 0.543107 | 0.495055 | -0.042469 | 0.00485768 | -0.000625079 | 0.0000857568 | -0.0000119964 |

表 3: 6阶展开系数

在绘图时换元换回来。也即

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k T_k(2x-3).$$

对于四阶展开式得到下图。不完整的绘图代码见“*HW2计物第三题*”。其中”*func1*”为*4*阶最佳平方近似，“*func2*”为*4*阶另一种近似，“*func3*”为*6*阶最佳平方近似，“*func4*”为*6*阶另一种近似。

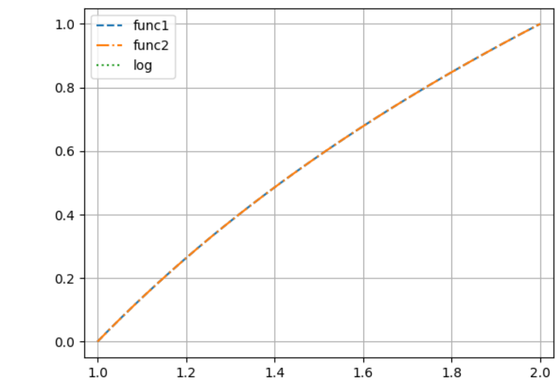


图 1: 4阶

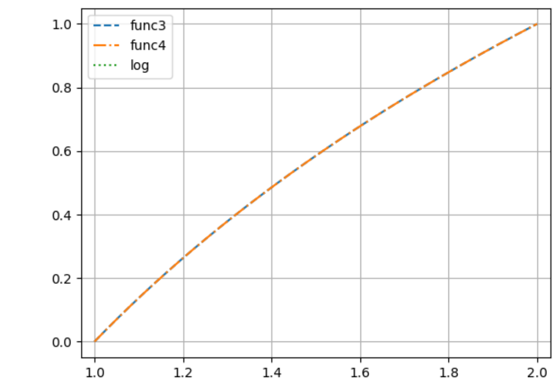


图 2: 6阶

从图上看来，曲线完全重合，误差极小。下面把它们与原函数的差值分别画出来。

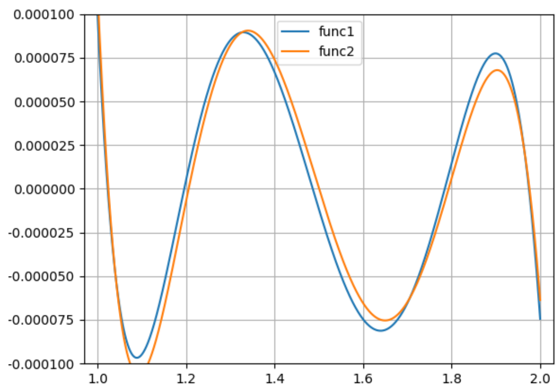


图 3: 4阶误差$[func(x) - \log_2 x]$

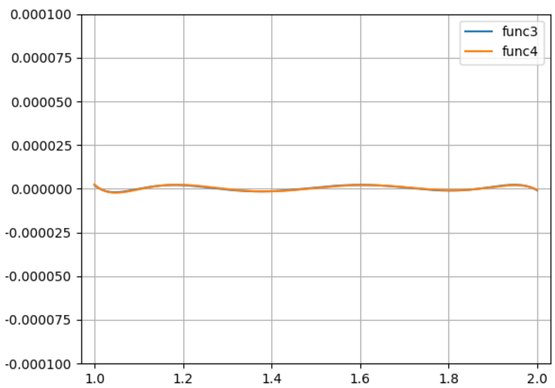


图 4: 6阶误差$[func(x) - \log_2 x]$

可以看出同一阶的两种近似方法的误差很近，而*6*阶比*4*阶的误差要小很多。

**4.Runge效应** 考虑Runge函数$f(x) = 1/(1+25x^2)$在区间$[-1,+1]$上的行为。本题中将分别利用等间距的多项式内插、 Chebyshev内插以及三次样条函数来近似$f(x)$的数值。

(a)考虑$x \in [-1,+1]$之间21个均匀分布的节点（包括端点，相隔0.1一个点）的20阶多项式$P_{20}(x)$之内插（你可以利用各种方法，例如拉格朗日内插、牛顿内插或者Neville方法）。给出一个表分别列出$x, f(x), P_{20}(x)$以及两者差的绝对值。为了看出两者的区别请在这21个点分成的每个小段的中点也取一个数据点并一起列出（因此共有41个点），同时画图显示之。

**答.** 考虑使用*Neville*方法，借助程序“*HW2计物第四题a*”得到需要的一切。

| x | -1.00 | -0.95 | -0.90 | -0.85 | -0.80 | -0.75 | -0.70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3.846e-02 | 4.244e-02 | 4.706e-02 | 5.246e-02 | 5.882e-02 | 6.639e-02 | 7.547e-02 |
| $P_{20}(x)$ | 3.846e-02 | -3.995e+01 | 4.706e-02 | 3.455e+00 | 5.882e-02 | -4.471e-01 | 7.547e-02 |
| $\|f(x) - P_{20}(x)\|$ | 1.388e-17 | 3.999e+01 | 6.939e-18 | 3.402e+00 | 9.714e-17 | 5.134e-01 | 0.000e+00 |

| x | -0.65 | -0.60 | -0.55 | -0.50 | -0.45 | -0.40 | -0.35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 8.649e-02 | 1.000e-01 | 1.168e-01 | 1.379e-01 | 1.649e-01 | 2.000e-01 | 2.462e-01 |
| $P_{20}(x)$ | 2.024e-01 | 1.000e-01 | 8.066e-02 | 1.379e-01 | 1.798e-01 | 2.000e-01 | 2.384e-01 |
| $\|f(x) - P_{20}(x)\|$ | 5.551e-17 | 1.159e-01 | 3.613e-02 | 1.110e-16 | 1.481e-02 | 5.551e-17 | 7.708e-03 |

| x | -0.30 | -0.25 | -0.20 | -0.15 | -0.10 | -0.05 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3.077e-01 | 3.902e-01 | 5.000e-01 | 6.400e-01 | 8.000e-01 | 9.412e-01 | 1.000e+00 |
| $P_{20}(x)$ | 3.077e-01 | 3.951e-01 | 5.000e-01 | 6.368e-01 | 8.000e-01 | 9.425e-01 | 1.000e+00 |
| $\|f(x) - P_{20}(x)\|$ | 2.220e-16 | 4.849e-03 | 4.441e-16 | 3.245e-03 | 2.220e-16 | 1.314e-03 | 6.661e-16 |

| x | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 9.412e-01 | 8.000e-01 | 6.400e-01 | 5.000e-01 | 3.902e-01 | 3.077e-01 | 2.462e-01 |
| $P_{20}(x)$ | 9.425e-01 | 8.000e-01 | 6.368e-01 | 5.000e-01 | 3.951e-01 | 3.077e-01 | 2.384e-01 |
| $\|f(x) - P_{20}(x)\|$ | 1.314e-03 | 1.443e-15 | 3.245e-03 | 1.110e-16 | 4.849e-03 | 3.886e-16 | 7.708e-03 |

| x | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2.000e-01 | 1.649e-01 | 1.379e-01 | 1.168e-01 | 1.000e-01 | 8.649e-02 | 7.547e-02 |
| $P_{20}(x)$ | 2.000e-01 | 1.798e-01 | 1.379e-01 | 8.066e-02 | 1.000e-01 | 2.024e-01 | 7.547e-02 |
| $\|f(x) - P_{20}(x)\|$ | 8.327e-17 | 1.481e-02 | 1.943e-16 | 3.613e-02 | 8.327e-17 | 1.159e-01 | 5.551e-17 |

| x | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 6.639e-02 | 5.882e-02 | 5.246e-02 | 4.706e-02 | 4.244e-02 | 3.846e-02 |
| $P_{20}(x)$ | -4.471e-01 | 5.882e-02 | 3.455e+00 | 4.706e-02 | -3.995e+01 | 3.846e-02 |
| $\|f(x) - P_{20}(x)\|$ | 5.134e-01 | 1.318e-16 | 3.402e+00 | 2.776e-17 | 3.999e+01 | 1.665e-16 |

表 4: Neville方法的内插结果与误差

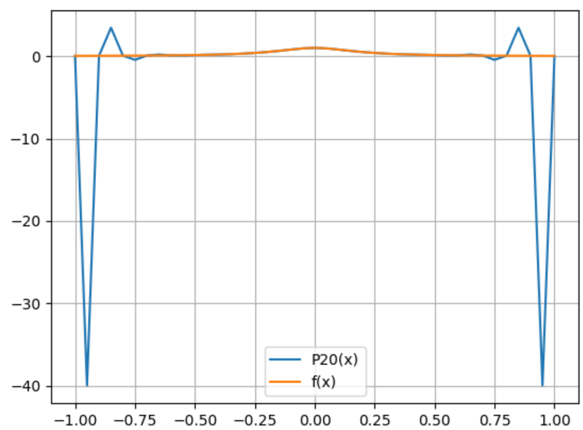


图 5: Neville方法的内插结果

(b)现在选取$n=20$并将上问中均匀分布的节点换为标准的Chebyshev节点：

$$x_k=\cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{20}\right),k=0,1,\cdots,19.$$

然后构造$f(x)$在$[-1,+1]$上的近似式，

$$f(x)\approx C(x)\equiv-\frac{c_0}{2}+\sum_{k=0}^{19}c_kT_k(x).$$

其中在各个Chebyshev的节点处我们要求它严格等于$f(x)$。同样列出上问的表并画图，与上问结果比较。

**答.** 似乎不能使用最佳平方近似，相关数值计算借助程序“*HW2计物第四题b*”。展开系数如下

| index | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c | 1.960e-01 | -6.939e-19 | -2.633e-01 | 1.041e-17 | 1.768e-01 | -1.166e-16 | -1.186e-01 | 1.457e-16 |
| index | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| c | 7.932e-02 | -2.082e-18 | -5.275e-02 | -5.135e-17 | 3.463e-02 | -3.678e-17 | -2.205e-02 | 1.972e-16 |
| index | 16 | 17 | 18 | 19 | | | | |
| c | 1.299e-02 | -3.157e-17 | -6.014e-03 | -4.766e-17 | | | | |

表 5: Chebyshev展开系数

决定还是取上题*41*个点，得到如下结果。

| x | -1.00 | -0.95 | -0.90 | -0.85 | -0.80 | -0.75 | -0.70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3.846e-02 | 4.244e-02 | 4.706e-02 | 5.246e-02 | 5.882e-02 | 6.639e-02 | 7.547e-02 |
| $P_{20}(x)$ | 3.702e-02 | 4.085e-02 | 4.869e-02 | 5.226e-02 | 5.671e-02 | 6.717e-02 | 7.825e-02 |
| $\lvert f(x)-P_{20}(x)\rvert$ | 1.446e-03 | 1.592e-03 | 1.626e-03 | 1.981e-04 | 2.110e-03 | 7.792e-04 | 2.780e-03 |
| x | -0.65 | -0.60 | -0.55 | -0.50 | -0.45 | -0.40 | -0.35 |
| f(x) | 8.649e-02 | 1.000e-01 | 1.168e-01 | 1.379e-01 | 1.649e-01 | 2.000e-01 | 2.462e-01 |
| $P_{20}(x)$ | 8.653e-02 | 9.641e-02 | 1.141e-01 | 1.405e-01 | 1.711e-01 | 2.028e-01 | 2.402e-01 |
| $\lvert f(x)-P_{20}(x)\rvert$ | 4.721e-05 | 3.587e-03 | 2.663e-03 | 2.592e-03 | 6.176e-03 | 2.763e-03 | 5.979e-03 |
| x | -0.30 | -0.25 | -0.20 | -0.15 | -0.10 | -0.05 | 0.00 |
| f(x) | 3.077e-01 | 3.902e-01 | 5.000e-01 | 6.400e-01 | 8.000e-01 | 9.412e-01 | 1.000e+00 |
| $P_{20}(x)$ | 2.963e-01 | 3.853e-01 | 5.119e-01 | 6.639e-01 | 8.126e-01 | 9.221e-01 | 9.624e-01 |
| $\lvert f(x)-P_{20}(x)\rvert$ | 1.136e-02 | 4.909e-03 | 1.189e-02 | 2.385e-02 | 1.261e-02 | 1.910e-02 | 3.759e-02 |
| x | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 |
| f(x) | 9.412e-01 | 8.000e-01 | 6.400e-01 | 5.000e-01 | 3.902e-01 | 3.077e-01 | 2.462e-01 |
| $P_{20}(x)$ | 9.221e-01 | 8.126e-01 | 6.639e-01 | 5.119e-01 | 3.853e-01 | 2.963e-01 | 2.402e-01 |
| $\lvert f(x)-P_{20}(x)\rvert$ | 1.910e-02 | 1.261e-02 | 2.385e-02 | 1.189e-02 | 4.909e-03 | 1.136e-02 | 5.979e-03 |
| x | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 |
| f(x) | 2.000e-01 | 1.649e-01 | 1.379e-01 | 1.168e-01 | 1.000e-01 | 8.649e-02 | 7.547e-02 |
| $P_{20}(x)$ | 2.028e-01 | 1.711e-01 | 1.405e-01 | 1.141e-01 | 9.641e-02 | 8.653e-02 | 7.825e-02 |
| $\lvert f(x)-P_{20}(x)\rvert$ | 2.763e-03 | 6.176e-03 | 2.592e-03 | 2.663e-03 | 3.587e-03 | 4.721e-05 | 2.780e-03 |

表 6: Chebyshev内插结果与误差

| x | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 6.639e-02 | 5.882e-02 | 5.246e-02 | 4.706e-02 | 4.244e-02 | 3.846e-02 |
| $P_{20}(x)$ | 6.717e-02 | 5.671e-02 | 5.226e-02 | 4.869e-02 | 4.085e-02 | 3.702e-02 |
| $\|f(x)-P_{20}(x)\|$ | 7.792e-04 | 2.110e-03 | 1.981e-04 | 1.626e-03 | 1.592e-03 | 1.446e-03 |

表 7: Chebyshev内插结果与误差（续表）

两个函数的图像和误差如下。

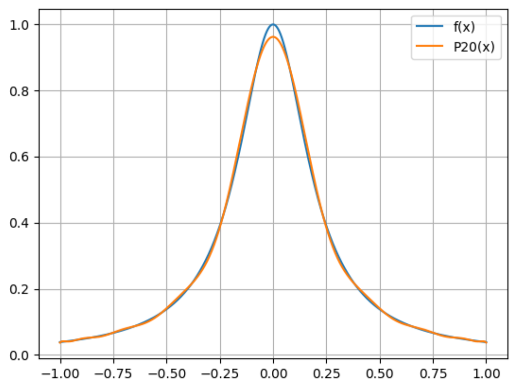


图 6: Chebyshev内插图像

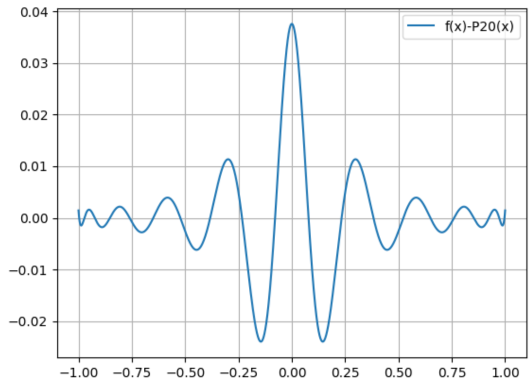


图 7: 误差$[f(x)-P20(x)]$

可以看出*Chebyshev*比多项式内插有更强的稳定性，节点之外没有出现离谱的偏离。

(c)仍然考虑第一问中均匀分布的21个节点的内插。但这次利用21点的三次样条函数。重复上面的列表、画图并比较。

**答.** 决定使用$f(x)$的一阶导作为边界条件。设

$$S''_{m,m+1}=\frac{M_{m+1}(x-x_m)}{x_{m+1}-x_m}+\frac{M_m(x_{m+1}-x)}{x_{m+1}-x_m},$$
$$S'_{m,m+1}=\frac{M_{m+1}}{2}\frac{(x-x_m)^2}{x_{m+1}-x_m}-\frac{M_m}{2}\frac{(x_{m+1}-x)^2}{x_{m+1}-x_m}+A_m,$$
$$S_{m,m+1}=\frac{M_{m+1}}{6}\frac{(x-x_m)^3}{x_{m+1}-x_m}-\frac{M_m}{6}\frac{(x-x_{m+1})^3}{x_{m+1}-x_m}+A_m(x-x_m)+B_m.$$

使用每段两端的节点值得到

$$A_m=\frac{y_{m+1}-y_m}{x_{m+1}-x_m}-\frac{M_{m+1}-M_m}{6}(x_{m+1}-x_m),$$
$$B_m=y_m-\frac{M_m}{6}(x_{m+1}-x_m)^2.$$

每段的端点处一阶导连续，得到

$$\frac{x_{m+2}-x_{m+1}}{6}M_{m+2}+\frac{x_{m+2}-x_m}{3}M_{m+1}+\frac{x_{m+1}-x_m}{6}M_m=\frac{y_{m+2}-y_{m+1}}{x_{m+2}-x_{m+1}}-\frac{y_{m+1}-y_m}{x_{m+1}-x_m},m=0,\cdots,19.$$

端点给定一阶导数，得到

$$\frac{x_1-x_0}{3}M_0+\frac{x_1-x_0}{6}M_1=-f'(x_0)+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$
$$\frac{x_{21}-x_{20}}{6}M_{20}+\frac{x_{21}-x_{20}}{3}M_{21}=f'(x_{20})-\frac{y_{21}-y_{20}}{x_{21}-x_{20}}.$$

借由程序“*HW2*计物第四题*c*”解出线性方程组，得到*20*个三次样条的系数如下。

| index | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | 2.072e-01 | 3.060e-01 | 4.692e-01 | 7.474e-01 | 1.269e+00 | 2.217e+00 | 4.344e+00 | 7.781e+00 |
| A | 8.433e-02 | 1.149e-01 | 1.618e-01 | 2.366e-01 | 3.635e-01 | 5.852e-01 | 1.020e+00 | 1.798e+00 |
| B | 3.812e-02 | 4.655e-02 | 5.804e-02 | 7.423e-02 | 9.788e-02 | 1.342e-01 | 1.928e-01 | 2.947e-01 |
| index | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| M | 1.530e+01 | -4.372e+00 | -5.781e+01 | -4.372e+00 | 1.530e+01 | 7.781e+00 | 4.344e+00 | 2.217e+00 |
| A | 3.328e+00 | 2.891e+00 | -2.891e+00 | -3.328e+00 | -1.798e+00 | -1.020e+00 | -5.852e-01 | -3.635e-01 |
| B | 4.745e-01 | 8.073e-01 | 1.096e+00 | 8.073e-01 | 4.745e-01 | 2.947e-01 | 1.928e-01 | 1.342e-01 |
| index | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | | |
| M | 1.270e+00 | 7.443e-01 | 4.809e-01 | 2.620e-01 | 3.714e-01 | -4.662e-01 | | |
| A | -2.365e-01 | -1.621e-01 | -1.140e-01 | -8.780e-02 | -5.066e-02 | | | |
| B | 9.788e-02 | 7.423e-02 | 5.802e-02 | 4.662e-02 | 3.784e-02 | | | |

表 8: 三次样条系数

上面*41*个点处的内插结果与误差如下。

| x | -1.00 | -0.95 | -0.90 | -0.85 | -0.80 | -0.75 | -0.70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3.846e-02 | 4.244e-02 | 4.706e-02 | 5.246e-02 | 5.882e-02 | 6.639e-02 | 7.547e-02 |
| $SPL(x)$ | 3.846e-02 | 4.244e-02 | 4.706e-02 | 5.246e-02 | 5.882e-02 | 6.639e-02 | 7.547e-02 |
| $\|f(x) - SPL(x)\|$ | 0.000e+00 | 9.228e-07 | 0.000e+00 | 2.322e-06 | 0.000e+00 | 2.796e-06 | 0.000e+00 |
| x | -0.65 | -0.60 | -0.55 | -0.50 | -0.45 | -0.40 | -0.35 |
| f(x) | 8.649e-02 | 1.000e-01 | 1.168e-01 | 1.379e-01 | 1.649e-01 | 2.000e-01 | 2.462e-01 |
| $SPL(x)$ | 8.648e-02 | 1.000e-01 | 1.168e-01 | 1.379e-01 | 1.649e-01 | 2.000e-01 | 2.463e-01 |
| $\|f(x) - SPL(x)\|$ | 1.103e-05 | 0.000e+00 | 1.935e-06 | 0.000e+00 | 8.377e-05 | 0.000e+00 | 1.143e-04 |
| x | -0.30 | -0.25 | -0.20 | -0.15 | -0.10 | -0.05 | 0.00 |
| f(x) | 3.077e-01 | 3.902e-01 | 5.000e-01 | 6.400e-01 | 8.000e-01 | 9.412e-01 | 1.000e+00 |
| $SPL(x)$ | 3.077e-01 | 3.894e-01 | 5.000e-01 | 6.432e-01 | 8.000e-01 | 9.389e-01 | 1.000e+00 |
| $\|f(x) - SPL(x)\|$ | 0.000e+00 | 8.243e-04 | 0.000e+00 | 3.169e-03 | 0.000e+00 | 2.310e-03 | 0.000e+00 |
| x | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 |
| f(x) | 9.412e-01 | 8.000e-01 | 6.400e-01 | 5.000e-01 | 3.902e-01 | 3.077e-01 | 2.462e-01 |
| $SPL(x)$ | 9.389e-01 | 8.000e-01 | 6.432e-01 | 5.000e-01 | 3.894e-01 | 3.077e-01 | 2.463e-01 |
| $\|f(x) - SPL(x)\|$ | 2.310e-03 | 0.000e+00 | 3.169e-03 | 0.000e+00 | 8.243e-04 | 0.000e+00 | 1.142e-04 |
| x | 0.40 | 0.45 | 0.50 | 0.55 | 0.60 | 0.65 | 0.70 |
| f(x) | 2.000e-01 | 1.649e-01 | 1.379e-01 | 1.168e-01 | 1.000e-01 | 8.649e-02 | 7.547e-02 |
| $SPL(x)$ | 2.000e-01 | 1.649e-01 | 1.379e-01 | 1.168e-01 | 1.000e-01 | 8.648e-02 | 7.547e-02 |
| $\|f(x) - SPL(x)\|$ | 0.000e+00 | 8.366e-05 | 0.000e+00 | 2.323e-06 | 0.000e+00 | 9.586e-06 | 0.000e+00 |

表 9: 三次样条函数内插结果与误差

| x | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 | 1.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 6.639e-02 | 5.882e-02 | 5.246e-02 | 4.706e-02 | 4.244e-02 | 3.846e-02 |
| $P_{20}(x)$ | 6.638e-02 | 5.882e-02 | 5.248e-02 | 4.706e-02 | 4.236e-02 | 3.846e-02 |
| $\|f(x) - P_{20}(x)\|$ | 8.188e-06 | 0.000e+00 | 1.780e-05 | 0.000e+00 | 7.603e-05 | 0.000e+00 |

表 10: 三次样条函数内插结果与误差（续表）

图像与误差如下。

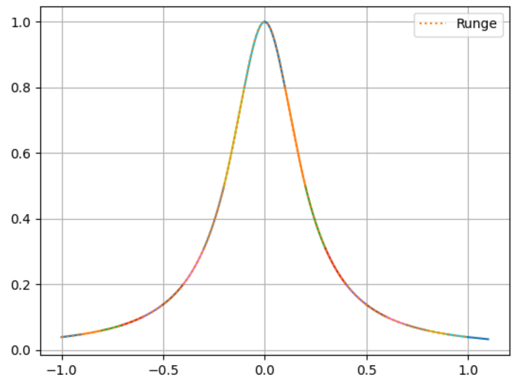


图 8: SPL内插图像

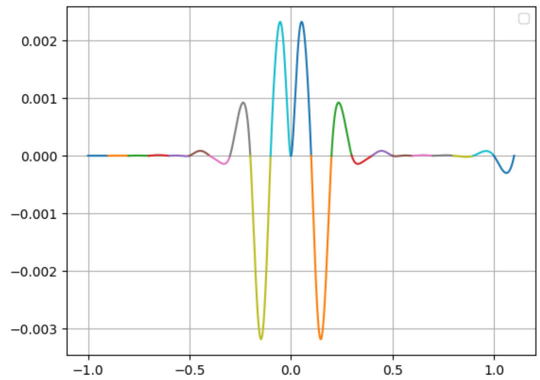

图 9: 误差$[f(x) - SPL(x)]$

三次样条插值比*Chebyshev*的稳定性更好，误差振幅更小，而且衰减更快。

**5.样条函数在计算机绘图中的运用** 本题中我们考虑Cubic spline在计算机绘图中的广泛运用。我们将尝试用三次样条函数平滑地连接若干个二维空间中已知的点。考虑二维空间的一系列点$(x_i, y_i)i = 0, 1, \cdots, n$。我们现在希望按照顺序（由0到$n$）将它们平滑地连接起来。一个方便的办法是引入一个连续参数$t \in [0, n]$，取节点为$t_i = 0, 1, \cdots, n$，然后分别建立两个样条函数：$S_\Delta(X; t)$和$S_\Delta(Y; t)$它们分别满足

$$S_\Delta(X; t_i) = x_i, \ S_\Delta(Y; t_i) = y_i.$$

这两个样条函数可以看做是$(x(t), y(t))$的内插近似。因此绘制参数曲线$(x(t), y(t))$的问题就化为求出两个样条函数并将它们画出的问题。我们考虑的函数是著名的心形线(cardioid)。它的极坐标方程是

$$r(\phi) = 2a(1 - \cos\phi) = 1(1 - \cos\phi).$$

为了方便起见我们取了$2a = 1$。（请利用上一题中关于样条函数内插的相应代码来处理本题）

(a)选取$\phi = t\pi/4, \ t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$这九个点，给出$x_t = r(\phi)\cos\phi$和$y_t = r(\phi)\sin\phi$的数值。将这些数值作为精确的数值列在一个表里。

**答.** 可以借助程序得到结果，代码是*trivial*的，这里不给出了。结果如下。

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_t$ | 0.000e+00 | 2.071e-01 | 6.123e-17 | -1.207e+00 | -2.000e+00 |
| $y_t$ | 0.000e+00 | 2.071e-01 | 1.000e+00 | 1.207e+00 | 2.449e-16 |

| t | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $x_t$ | -1.207e+00 | -1.837e-16 | 2.071e-01 | 0.000e+00 |
| $y_t$ | -1.207e+00 | -1.000e+00 | -2.071e-01 | -0.000e+00 |

表 11: 心形线的几个点的坐标

(b)给出过这8个点的两个三次样条函数$S_\Delta(X;t)$和$S_\Delta(Y:t)$。

**答.** 形状依然是

$$S''_{m,m+1} = \frac{M_{m+1}(x-x_m)}{x_{m+1}-x_m} + \frac{M_m(x_{m+1}-x)}{x_{m+1}-x_m},$$

$$S'_{m,m+1} = \frac{M_{m+1}}{2}\frac{(x-x_m)^2}{x_{m+1}-x_m} - \frac{M_m}{2}\frac{(x_{m+1}-x)^2}{x_{m+1}-x_m} + A_m,$$

$$S_{m,m+1} = \frac{M_{m+1}}{6}\frac{(x-x_m)^3}{x_{m+1}-x_m} - \frac{M_m}{6}\frac{(x-x_{m+1})^3}{x_{m+1}-x_m} + A_m(x-x_m) + B_m.$$

借助程序“*HW2计物第五题b*”给出全部的$M, A, B$，结果如下。

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_{mx}$ | -1.077e-01 | -3.457e-01 | -2.539e+00 | 7.730e-01 | 3.476e+00 |
| $M_{my}$ | -4.929e-01 | 1.820e+00 | -1.088e+00 | -3.167e+00 | 4.709e-04 |
| $A_{mx}$ | 2.949e-01 | 2.335e-02 | -1.970e+00 | -1.363e+00 | 1.366e+00 |
| $A_{my}$ | -3.900e-02 | 1.390e+00 | 5.359e-01 | -1.952e+00 | -1.951e+00 |
| $B_{mx}$ | 1.107e-02 | 2.426e-01 | 2.610e-01 | -1.287e+00 | -2.357e+00 |
| $B_{my}$ | 5.067e-02 | 2.004e-02 | 1.112e+00 | 1.533e+00 | -4.842e-05 |
| m | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $M_{mx}$ | 7.495e-01 | -2.445e+00 | -6.983e-01 | 1.209e+00 | -1.077e-01 |
| $M_{my}$ | 3.165e+00 | 1.094e+00 | -1.844e+00 | 5.842e-01 | -4.929e-01 |
| $A_{mx}$ | 1.955e+00 | 3.512e-02 | -5.133e-01 | 4.360e-01 | |
| $A_{my}$ | 5.348e-01 | 1.394e+00 | -5.417e-02 | 4.047e-01 | |
| $B_{mx}$ | -1.284e+00 | 2.513e-01 | 2.789e-01 | -1.243e-01 | |
| $B_{my}$ | -1.533e+00 | -1.112e+00 | -1.752e-02 | -6.006e-02 | |

表 12: SPL的系数M,A,B

(c)画出参数形式的曲线$(x_t, y_t) = (S_\Delta(X;t), S_\Delta(Y;t))$，同时画出它所内插的严格的曲线进行比较，请标出相应的节点。

**答.** 借助程序“*HW2计物第五题c*”可以作图如下。

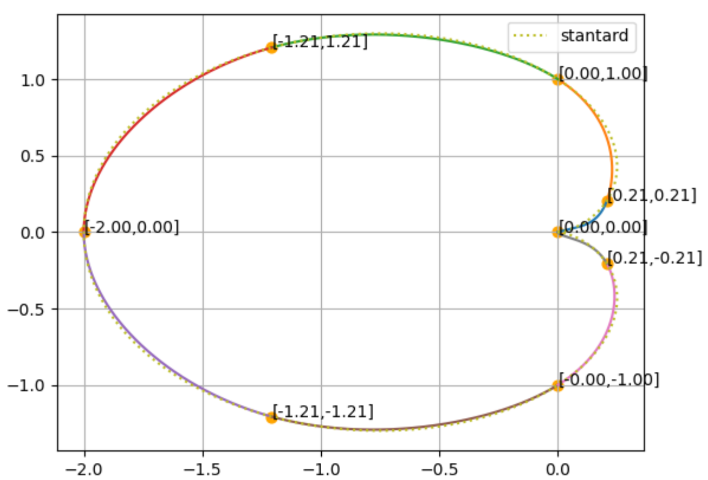


图 10: SPL内插心形线

原函数与相关节点均已标出。可以看出内插效果非常好。

(d)简要说明为什么这个算法可以平滑地连接所有的点（这实际上是很多画图软件中spline曲线所采用的的算法）。

**答.** 可以看出来各个节点的连接处，至少到一阶导数都是连续的。由于三次样条内插，一个节点的两端有

$$S'_\Delta(X;k-0)=S'_\Delta(X;k+0),\ S'_\Delta(Y;k-0)=S'_\Delta(Y;k+0).$$

那么就有

$$\left(\frac{dS_\Delta(X;t)}{dS_\Delta(Y;t)}\right)_{t=k-0}=\frac{S'_\Delta(X;k-0)}{S'_\Delta(Y;k-0)}=\frac{S'_\Delta(X;k+0)}{S'_\Delta(Y;k+0)}=\left(\frac{dS_\Delta(X;t)}{dS_\Delta(Y;t)}\right)_{t=k+0}.$$

一阶导数连续。就很平滑。