



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

双光子空间联合波函数的直接测量

Direct measurement of the spacial joint wavefunction of biphoton

姓	名:	刘书绮
学	院:	物理学院
导	师:	许小冶

Contents

1 量子测量和弱测量基本概念	5
1.1 量子测量	5
1.1.1 自旋的标准测量	5
1.1.2 相互作用哈密顿量	6
1.2 经典冯诺依曼测量	7
1.3 弱测量与弱值的引入	7
2 基于弱测量的波函数直接测量技术	8
2.1 量子系统的波函数描述	8
2.1.1 纯态与混态	8
2.1.2 纠缠态与直积态	9
2.2 利用弱值直接表征量子系统	10
2.2.1 基本原理	10
2.2.2 弱值提取	10
2.2.3 冯诺依曼测量演化	11
2.2.4 理论一般形式推广	12
2.3 免扫描利用弱值直接表征量子系统	12
2.3.1 基本原理	13
2.3.2 弱值提取	13
3 波函数直接测量与经典干涉仪	15
3.1 直接测量单光子空间波函数	15
3.2 自参考波前干涉探测仪	15
3.3 经典干涉仪的模拟结果	16
3.4 基于弱测量的波函数直接测量技术与经典干涉仪的关系	16
4 双光子空间联合波函数的直接测量	17
4.1 直接测量两体波函数理论	18
4.2 非局域弱值的提取	18
4.2.1 模量	18
4.2.2 利用离散指针进行模量提取	19
4.3 免扫描双光子光联空间波函数的直接测量	20
4.3.1 对末态进行量子层析提取模量	20
4.3.2 利用纠缠指针提取模量	21
4.3.3 数值模拟实验	22
5 结论及展望	24

摘要

由 SPDC 产生的孪生光子对空间波函数通常情况下存在关联，在量子信息中起着重要的作用。光子更高维的自由度，如轨道角动量等可以比传统的偏振自由度编码更多信息。但是利用高维自由度的第一个难点是准确测量得出它们的波函数。我们的研究提出的方案致力于在双光子横向空间关联波函数的测量下解决这一问题。传统的单光子波前测量技术不能直接应用到双光子的联合波函数测量上，而量子态层析方法在系统连续变量的测量上又存在效率问题。本篇文章基于弱值相关理论，介绍了利用弱测量直接测量波函数的方法。并进一步用弱测量的理论诠释了经典光学中的自参考波前干涉探测仪，指出了单光子情形下两者在理论上的等价性。进一步，本篇文章对双光子光联波函数的直接测量提出了解决方案。基于弱测量直接测量波函数理论，利用模量表征非局域弱值，使这一技术可以用于两体连续变量纠缠系统中，从而实现对双光子关联波函数的直接测量。

关键词：弱测量，模量，干涉仪，SPDC，量子纠缠

ABSTRACT

The photon pairs generated by SPDC process are usually correlated in spatial wave functions, which played an important role in quantum information. Higher-dimensional degrees of freedom of photons, such as orbital angular momentum, etc., can encode much more information than traditional qubits. However, the large dimensionality of these states, poses an intriguing challenge for their measurement. So we proposed to solve this problem in the case of joint spatial wavefunction of biphoton. The traditional wavefront measurement technique cannot be directly applied to the measurement of joint wavefunction of biphoton while the quantum state tomography method is inefficient when applied to the measurement of continuous variables of the system. Based on the theory of weakvalue, this paper introduces the method of direct measurement of quantum wave function. Inspired by this theoretical frame, this paper showed the universality of weakvalue in the regime of classical self-reference wavefront interferometer and pointed out the theoretical equivalence of the two interpretations in the case of single photon. Further, this paper proposes a solution to directly measuring the joint wavefunction of biphoton. We proved that in certain cases modular value can be used to replace the non-local weakvalue so that the technique mentioned above can be applied to entangled system.

keyword: weakvalue, modular value, interferometer, SPDC, quantum entanglement

1 量子测量和弱测量基本概念

1.1 量子测量

1.1.1 自旋的标准测量

测量自旋的标准实验装置是 S-G 装置。图1描述了该设置的示意图。一个自旋为 S_z 的原子从左边进入，沿着 x 轴。它在原点附近遇到一个不均匀磁场 B 。自旋与场相互作用的哈密顿量是：

$$H_{int} = -\mu \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (1)$$

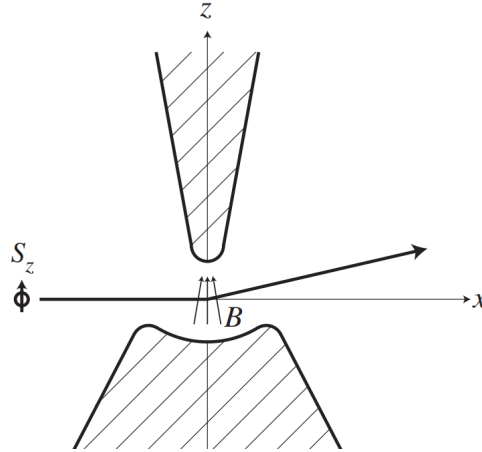


Figure 1: S-G 实验示意图 [1]

当原子通过磁场时，它的动量根据海森堡运动方程发生变化：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_{int}, \mathbf{p}] = \mu \nabla (\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}) \quad (2)$$

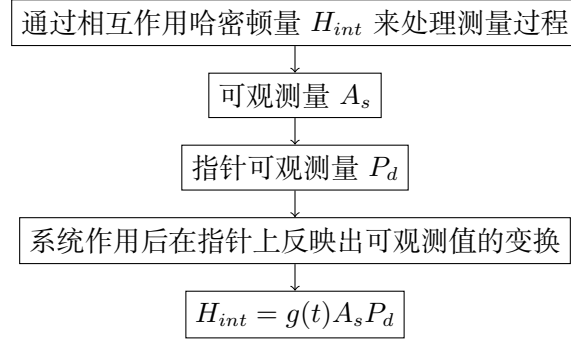
为简单起见，假设 \mathbf{B} 平行于 z 轴。然后，如果原子在磁场中运动时间为 T ，它将获得横向动量 $\mu (\partial B_z / \partial z) S_z T$ ，与自旋分量 S_z 成正比。进入 S-G 装置的原子束按照自旋分量 S_z 的不同而分裂。

我们发现，在自旋测量的实验中，这几点是关键的：

1. 测量相互作用持续有限的时间 T 。在此时间之外，原子和 S-G 仪器是独立的系统。
2. 在原子和测量装置作用后产生一个相对于可观测值的变化。
3. 测量过程不改变测量的可观测值。
4. 原则上，相互作用时间 T 可以非常小 (如果 $\partial B_z / \partial z$ 非常大)。有时快速测量更可取。例如，测量一个粒子的位置可能会改变它的动量，因此，随着时间的推移，它的位置也会改变。
5. 测量是一个量子过程。我们写出了测量相互作用的哈密顿量，可以把原子看作是一个波包演化。

1.1.2 相互作用哈密顿量

以上五点可以作为一般量子测量的准则。根据 von Neumann，考虑一个可观测量 A_s ，一般的量子测量过程应遵循如下要求：



假设 P_d 是测量系统的一个独立可观测量，最简单的耦合形式可以写为： $H_{int} = A_s P_d$ ，考虑到有限长的作用时间，乘上一个耦合系数 $g(t)$ ，满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt = g_0 \quad (3)$$

最终相互作用哈密顿量可以写为：

$$H_{int}(t) = g(t)A_sP_d \quad (4)$$

系统总的哈密顿量为：

$$H = H_d + H_s + H_{int}(t) \quad (5)$$

其中， H_d 是测量系统（指针）哈密顿量， H_s 是被测量系统的哈密顿量。考虑和 P_d 共轭的算子 Q_d ：

$$[Q_d, P_d] = i\hbar \quad (6)$$

我们将测量装置制备为某一 Q_d 已知的初始状态，假设 $Q_d(0) = 0$ ，被测系统制备为具有明确的可观测量 A_s 。根据海森堡运动方程，测量过程中 Q_d 的变化量为：

$$\begin{aligned} Q_d(T) - Q_d(0) &= \int_0^T dt \frac{dQ_d}{dt} \\ &= \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H, Q_d] \\ &= \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H_d, Q_d] + g_0 A_s. \end{aligned} \quad (7)$$

在测量时间很短的极限下， $Q_d(T)$ 中剩下的唯一一项将是 $g_0 A_s$ 。在测量结束时，我们发现测量装置处于 $Q_d = g_0 A_s$ 的状态。

1.2 经典冯诺依曼测量

有了上述相互作用哈密顿量的基础，考虑待测系统 A，待测量用算符 M 表示，其本征值为 M_1, M_2, \dots, M_n ，相应本征向量为 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ，系统初态 $\phi = \sum_j a_j \phi_j$ 。

测量仪器 B，有一对共轭的物理量 x, p 满足正则对易关系 $[x, p] = i\hbar$ ，初态记做 $\varphi(x)$ 。那么整个大系统的初态为：

$$\sum_j a_j \phi_j \otimes \varphi(x) \quad (8)$$

测量时长为 τ ，假设测量时间很短，测量过程中，可设耦合系数不变 $g(t) = g$ ，A、B 两子系统的相互作用哈密顿量设为 $H_I = gM \otimes P_d$ 。假设这段时间内两子系统自身的哈密顿量所造成的影响可忽略，那么测量完成后两个系统的状态为

$$\begin{aligned} |\Psi_{ps}\rangle &= \exp(-ig\tau M \otimes P_d) \sum_j a_j \phi_j \otimes \varphi(x) \\ &= \sum_j \exp(-ig\tau M_j P_d) a_j \phi_j \otimes \varphi(x) \\ &= \sum_j a_j \phi_j \otimes \varphi(x - g\tau M_j) \end{aligned} \quad (9)$$

可以看到，测量值反应在指针波函数的位移上，我们只需要读出指针的末态，就可以获得相应的测量值。

1.3 弱测量与弱值的引入

在上一步的系统与仪器相互作用完成后加上一个后选择：判断此时的待测系统是否处在某个特定的态 $|\psi\rangle$ ：若否，则丢掉这个样本；若是，则读取测量仪器上的读数并纳入统计数据。这等价于一个投影算符。那么，这样得到的系统状态应该为：

$$|\Psi_{pps}\rangle = |\psi\rangle \otimes \sum_j \langle\psi | \phi_j\rangle a_j |\varphi(x - g\tau M_j)\rangle \quad (10)$$

其中，下标 pps 表示该系统同时经过了前选择和后选择 (Pre- and Postselected Ensembles)。定义弱值：

$$M_w \equiv \frac{\langle\psi | M | \phi\rangle}{\langle\psi | \phi\rangle} \quad (11)$$

将(10)作 Taylor 展开，得到：

$$\begin{aligned}
& |\psi\rangle \otimes \sum_j \langle \psi | \phi_j \rangle a_j \sum_k \frac{1}{k!} \left(-g\tau M_j \frac{d}{dx} \right)^k |\varphi(x)\rangle \\
& = |\psi\rangle \otimes \sum_k \frac{1}{k!} \langle \psi | M^k | \phi \rangle \left(-g\tau \frac{d}{dx} \right)^k |\varphi(x)\rangle \\
& = \langle \psi | \phi \rangle |\psi\rangle \otimes \sum_k \frac{(M^k)_w}{k!} \left(-g\tau \frac{d}{dx} \right)^k |\varphi(x)\rangle \\
& = \langle \psi | \phi \rangle |\psi\rangle \otimes |\varphi(x - g\tau M_w)\rangle + \\
& \quad \langle \psi | \phi \rangle |\psi\rangle \otimes \sum_k \frac{(M^k)_w - (M_w)^k}{k!} \left(-g\tau \frac{d}{dx} \right)^k |\varphi(x)\rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

第二项的求和要从 $k=2$ 开始不为零。假定测量仪器与待测系统的耦合 $g\tau$ 足够弱，那么可以只关心第一项。我们发现，测量仪器的波函数整体平移了一个测量弱值 $g\tau M_w$ 。

2 基于弱测量的波函数直接测量技术

2.1 量子系统的波函数描述

2.1.1 纯态与混态

在量子力学公设中，纯态对应为希尔伯特空间中的向量，被称为态矢量或者波函数，可以由希尔伯特空间中的一组完备基矢相干叠加而成：

$$|\psi\rangle = \sum_i^n a_i |\psi_i\rangle \tag{13}$$

并且满足归一化条件：

$$\sum_i^n |a_i|^2 = 1 \tag{14}$$

如果是连续的希尔伯特空间 $|\psi(\vec{r}, t)\rangle$ ，归一化条件变为：

$$\int |\psi(\vec{r}, t)\rangle^2 d\vec{r} = 1 \tag{15}$$

混态是相当于纯态的概率混合，混态可以用密度矩阵表示，引入密度矩阵：

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \\
&= \sum_{i,j,k} a_{ik} a_{jk}^* |i\rangle \langle j|,
\end{aligned} \tag{16}$$

密度矩阵具有以下性质：

1. ρ 是自共轭的： $\rho = \rho^\dagger$ ；
2. ρ 是非负的；

3. $\text{Tr}[\rho] = 1$ 。

考虑一个两体系统：

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \sum_{i,j} |i\rangle \langle i| \hat{\rho} |j\rangle \langle j| \\ &= \rho_{11} |1\rangle \langle 1| + \rho_{12} |1\rangle \langle 2| + \rho_{21} |2\rangle \langle 1| + \rho_{22} |2\rangle \langle 2|\end{aligned}\quad (17)$$

相应的密度矩阵为：

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (18)$$

其中对角项 ρ_{11} ρ_{22} 称为布居数 (populations)，非对角项 ρ_{12} ρ_{21} 称为相干项 (coherences)。纯态也能用密度矩阵表示：

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (19)$$

对于一个纯态：

$$|\psi\rangle = |c_1| |1\rangle + e^{i\varphi} |c_2| |2\rangle \quad (20)$$

其密度矩阵可以写为：

$$\rho = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & |c_1| |c_2| e^{-i\varphi} \\ |c_1| |c_2| e^{i\varphi} & |c_2|^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

可以看出，对于纯态来说，不同基之间相对相位反应在非对角项上。而对于混态：

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| + \frac{1}{2} |2\rangle \langle 2| \quad (22)$$

其密度矩阵可以写为：

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

可以看到，其相干项全部为 0。

根据密度矩阵的性质，如果一个密度矩阵满足 $\rho^2 = \rho$ ，则为纯态。

对密度矩阵的平方求迹可以判断系统是纯态还是混态，对于纯态有： $\text{Tr}[\rho^2] = \text{Tr}[\rho] = 1$ ；对于混态： $\text{Tr}[\rho^2] = \text{Tr}[\rho] < 1$ 。

2.1.2 纠缠态与直积态

根据密度矩阵，定义施密特数 (Schmidt number) 为密度矩阵 ρ 的非零的本征值的数目，对于两体系统就是 $\rho_A(\rho_B)$ 的非零本征值的数目，因此也是 $|\psi\rangle_{AB}$ 做施密特分解的项数。

对于两体系统： $|\psi\rangle_{AB}$ ，我们可以用施密特数来判断系统是纠缠态或是直积态 [7]：

1. 如果施密特数大于 1， $|\psi\rangle_{AB}$ 是纠缠态 (或不可分态)

2. 否则, $|\psi\rangle_{AB}$ 是可分态, 可以写为 \mathcal{H}_A 、 \mathcal{H}_B 中纯态的直积: $|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$

2.2 利用弱值直接表征量子系统

2.2.1 基本原理

一个未知的空间波函数可以表示为 $|\Psi\rangle$, $\psi(x)$ 为 x 处的概率幅。根据弱值的定义式(11)可知, 如果我们将可观测量 \hat{M} 选为 x 位置的投影子 $\hat{\pi}_x = |x\rangle\langle x|$, 初态为待测的波函数 $|\Psi\rangle$, 末态为无偏的后选择态 $|p\rangle$, 测量的弱值可以写为:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\pi}_x \rangle_w &= \frac{\langle p | x \rangle \langle x | \Psi \rangle}{\langle p | \Psi \rangle} \\ &= \frac{e^{ipx/\hbar} \psi(x)}{\Phi(p)}.\end{aligned}\quad (24)$$

如果 $p=0$, 上式可以简化为:

$$\langle \hat{\pi}_x \rangle_w = k\psi(x) \quad (25)$$

这里 $k = \frac{1}{\Phi(0)}$ 是一个常数, 可以看做波函数的整体相位, 通过归一化可以消除其影响。由此, 我们可以看到 $\hat{\pi}_x$ 的弱值与相应位置的概率幅成比例, 通过测量不同位置的弱值, 就可以得到对应的概率幅, 最后做归一化就可以直接得到完整的空间波函数。在每一个 x 点, 测量指针的观测位置位移和动量位移分别与 $\text{Re}\psi(x)$ 和 $\text{Im}\psi(x)$ 成正比。

2.2.2 弱值提取

这里以具体的实验装置 [5] 说明弱值的提取。实验可分为四个步骤: 波函数的制备、光子横向位置的弱测量、对于动量为 0 的光子的后选择、弱测量的读出。

具有波函数 $\psi(x)$ 的光子系综从单模光纤发射并准直。首先直接测量该波函数。然后, 通过引入已知的光子振幅和相位变化来制备一系列的波函数, 进一步测试该方法。[4]

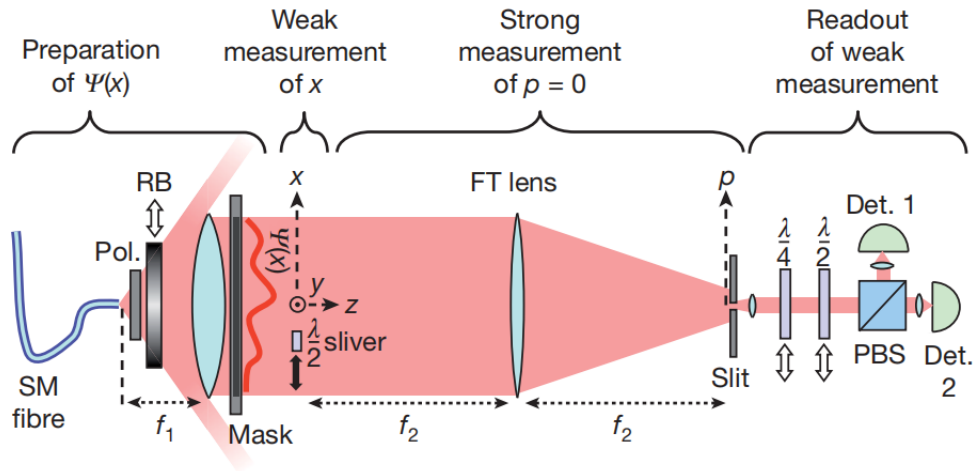


Figure 2: 光子波函数的直接测量 [5]

实验装置如图2所示, 单光子束出射, 制备成水平偏振态 $|H\rangle$, 然后制备成初态 $|\psi\rangle$ 。接着, 在 x 处放置半波片, 光轴与 x 轴夹角为 $\alpha/2 (\alpha \ll 1)$

该半波片对偏振态进行么正变换操作:

$$\hat{U} = |H\rangle\langle H| - |V\rangle\langle V| + \alpha(|H\rangle\langle V| + |V\rangle\langle H|). \quad (26)$$

则对于光子空间模式和偏振的直积态 $|\psi\rangle \otimes |H\rangle$, 经过半波片后演化为:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= [|x\rangle\langle x| \otimes \hat{U} + (\hat{1} - |x\rangle\langle x|) \otimes \hat{1}]|\psi\rangle \otimes |H\rangle \\ &= |\psi\rangle \otimes |H\rangle + \alpha\psi(x)|x\rangle \otimes |V\rangle \end{aligned} \quad (27)$$

经过半波片之后, 单光子数经过傅里叶透镜, 在焦平面上 $x=0$ 处放置狭缝, 对 $|p=0\rangle$ 的态做后选择, 态演化为:

$$|\Psi\rangle_f = \langle p=0|\psi\rangle |p=0\rangle \otimes |H\rangle + \alpha\psi(x) \langle p=0|x\rangle |p=0\rangle \otimes |V\rangle \quad (28)$$

此时光子的偏振态可以写为:

$$|s\rangle_f = |H\rangle + \frac{\alpha\psi(x)}{\langle p=0|\psi\rangle} |V\rangle = |H\rangle + \alpha \langle \hat{\pi}_x \rangle_w |V\rangle \quad (29)$$

接下来只需要在对角线偏振基和圆偏振基下测量光子的偏振态。

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \quad |A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle) \quad (30)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + i|V\rangle) \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - i|V\rangle) \quad (31)$$

忽略 α 的二阶小量, 可得四种测量概率:

$$\begin{aligned} P_1 &= |\langle D | s \rangle|^2 = \frac{1}{2} + \alpha \operatorname{Re} \langle \hat{\pi}_x \rangle_w \\ P_2 &= |\langle A | s \rangle|^2 = \frac{1}{2} - \alpha \operatorname{Re} \langle \hat{\pi}_x \rangle_w, \\ P_3 &= |\langle L | s \rangle|^2 = \frac{1}{2} + \alpha \operatorname{Im} \langle \hat{\pi}_x \rangle_w \\ P_4 &= |\langle R | s \rangle|^2 = \frac{1}{2} - \alpha \operatorname{Im} \langle \hat{\pi}_x \rangle_w. \end{aligned} \quad (32)$$

实验上分别在对角基和圆偏振基上投影测量概率, 即可得出相应弱值的实部和虚部。

2.2.3 冯诺依曼测量演化

利用冯诺依曼测量演化的理论框架, 上述测量过程的哈密顿量可以写为:

$$\hat{H}_{int} = \alpha \hat{\pi}_x \hat{\sigma}_2 \quad (33)$$

则测量过程的演化可以写为：

$$\begin{aligned}
|\Psi'\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi\rangle |H\rangle \\
&\approx \left(1 - \frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) |\psi\rangle |H\rangle \\
&= |\psi\rangle |H\rangle - \frac{it \sin \alpha}{\hbar} \hat{\pi}_x |\psi\rangle \hat{\sigma}_2 |H\rangle
\end{aligned} \tag{34}$$

在 $|p=0\rangle$ 上进行后选择，忽略空间模式并归一化，系统末态的指针态可以表达如下：

$$\begin{aligned}
|s_f\rangle &\approx |H\rangle - \frac{it \sin \alpha}{\hbar} \frac{\langle p=0 | \hat{\pi}_x | \psi \rangle}{\langle p=0 | \psi \rangle} \hat{\sigma}_2 |H\rangle \\
&= |H\rangle - \frac{it \sin \alpha}{\hbar} \langle \pi_x \rangle_W \hat{\sigma}_2 |H\rangle \\
&= |H\rangle + \frac{t \sin \alpha}{\hbar} \langle \pi_x \rangle_W |V\rangle
\end{aligned} \tag{35}$$

只需选择合适的系数 α 该结果与前述使用么正变换操作的推导结果完全一致。

2.2.4 理论一般形式推广

根据上述思想，可以利用弱测量技术直接测量任意量子系统的量子态。假设系统可由一组基 $|a\rangle$ 展开：

$$|\psi\rangle = \sum_a \langle \psi | a \rangle |a\rangle \tag{36}$$

该方法需要在这组基上弱测量其投影子 $\hat{\pi}_a = |a\rangle \langle a|$ 并对其互补观测值 B 的特定值 b_0 进行后选择。因此弱值为：

$$\langle \pi_a \rangle_W = \frac{\langle b_0 | a \rangle \langle a | \psi \rangle}{\langle b_0 | \psi \rangle} = \frac{\langle a | \psi \rangle}{v} \tag{37}$$

则系统量子态可以表述为：

$$|\psi\rangle = v \sum_a \langle \pi_a \rangle_W |a\rangle \tag{38}$$

这表明，在任何物理系统中，人们可以通过扫描一组合适的基的弱测量值，并在互补基中进行适当的后选择，直接测量该系统的量子态。

2.3 免扫描利用弱值直接表征量子系统

在上述实验方案中，需要移动波片的位置进行扫描，同时在动量空间中进行后选择，仅有动量为 0 的光子被保留下来，因此比较耗时，而且效率比较低。在2.2.4一节，我们知道，只需要选择合适的测量基，以及后选择基，我们可以规避扫描的麻烦，直接测量系统的波函数。因此，这里通过改变可观测量及互补后选择态，达到免扫描直接测量的目的。[8]

2.3.1 基本原理

光子的初态制备为 $|\Psi\rangle$, 考虑一个入射的光子, 经过初态制备后, 光子的态可写为:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |V\rangle \quad (39)$$

可观测量取为动量投影子 $\hat{\pi}_{p_0} = |p_0\rangle \langle p_0|$, 指针为光子的偏振自由度。这里使用更规范的冯诺依曼测量演化的写法, 则演化哈密顿量写为:

$$\hat{H}_{int} = g(t) \hat{\pi}_{p_0} \otimes \hat{\sigma}_2 \quad (40)$$

经过弱测量后, 光子的状态演化成:

$$|\Psi'\rangle = e^{-i\hat{H}_{int}\Delta t/\hbar} |\psi\rangle \otimes |V\rangle \quad (41)$$

可观测量取为动量投影子 $\hat{\pi}_{p_0} = |p_0\rangle \langle p_0|$, 末态为位置本征态 $|x\rangle$ 。则测量的弱值可以写为:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\pi}_{p_0} \rangle_{\mathbf{x}}^W &= \frac{\langle x | p_0 \rangle \langle p_0 | \Psi \rangle}{\langle x | \Psi \rangle} \\ &= \frac{e^{ip_0 x/\hbar} \phi(p_0)}{\psi(x)}. \end{aligned} \quad (42)$$

在实验中, 在动量等于 0 的态进行弱测量, 则上式可以进一步写为:

$$\psi(x) = \frac{\nu}{\langle \hat{\pi}_{p_0=0} \rangle_{\mathbf{x}}^W} \quad (43)$$

2.3.2 弱值提取

为了测量出(42)中的弱值, 仍然选择光子的偏振作为指针, 在冯诺依曼测量体系下, 系统和指针的耦合哈密顿量为:

$$\hat{H} = \alpha \hat{p}_0 \hat{\sigma}_2 \quad (44)$$

这里 α 是表征耦合强度的常数, 在本实验中指特定动量 $|p_0\rangle$ 态的光子偏振态旋转的角度, $\hat{\sigma}_2 = -i(|H\rangle \langle V| - |V\rangle \langle H|)$ 是泡利矩阵, 表征用半波片对光子的线偏振态进行旋转。

光子的偏振初态制备为垂直偏振态, 态矢量记为 $s_i = [0, 1]^T$, 在经过弱测量装置后, 系统经过了演化, 这里弱测量指 αt 是一个小量, 我们可以做如下泰勒展开:

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi\rangle |s_i\rangle \\ &\approx \left(1 - \frac{i\hat{H}t}{\hbar} \right) |\psi\rangle |s_i\rangle \\ &= |\psi\rangle |s_i\rangle - \frac{it \sin \alpha}{\hbar} \hat{p}_0 |\psi\rangle \hat{\sigma}_2 |s_i\rangle \end{aligned} \quad (45)$$

在位置基上进行后选择, 忽略空间模式并归一化, 系统末态的指针态可以表达如下:

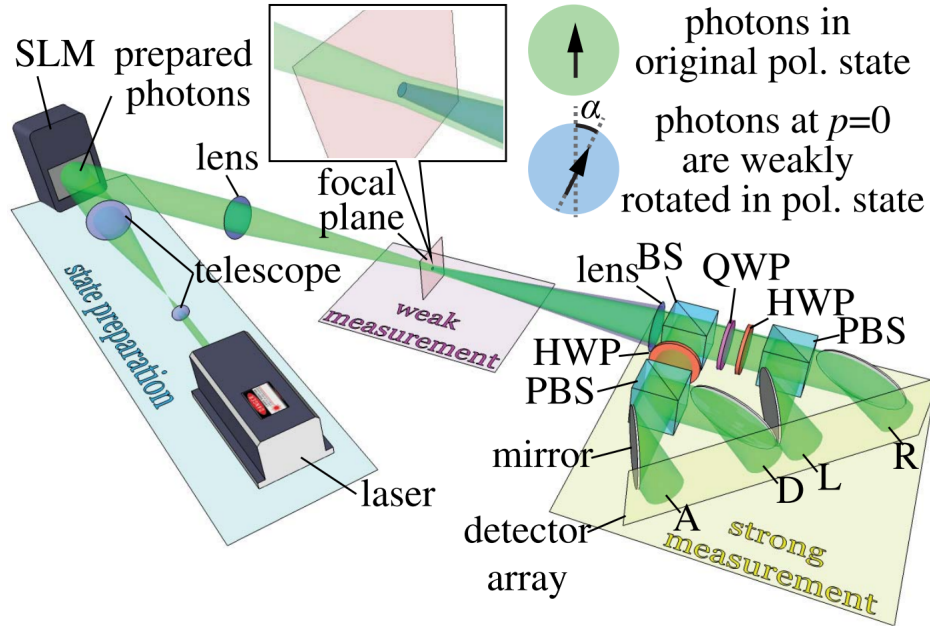


Figure 3: 免扫描直接测量光子波函数 [8]

$$\begin{aligned}
 |s_f\rangle &\approx |s_i\rangle - \frac{it \sin \alpha}{h} \frac{\langle \mathbf{x} | \hat{p}_0 | \psi \rangle}{\langle \mathbf{x} | \psi \rangle} \hat{\sigma}_2 |s_i\rangle \\
 &= |s_i\rangle - \frac{it \sin \alpha}{h} \langle \pi_{p_0} \rangle_x^W \hat{\sigma}_2 |s_i\rangle.
 \end{aligned} \tag{46}$$

测量指针末态波函数的 $\hat{\sigma}_1$ $\hat{\sigma}_2$ 的期望值，可以分别得出弱值的实部、虚部：

$$\begin{aligned}
 \langle s_f | \hat{\sigma}_1 | s_f \rangle &= \langle s_i | \hat{\sigma}_1 | s_i \rangle - \frac{it \sin \alpha}{h} \left[\langle \pi_{p_0} \rangle_x^W \langle s_i | \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 | s_i \rangle - \right. \\
 &\quad \left. \langle \pi_{p_0} \rangle_x^{W\dagger} \langle s_i | \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_1 | s_i \rangle \right] \\
 &= \frac{-2t \sin \alpha}{h} \Re \left[\langle \pi_{p_0} \rangle_x^W \right].
 \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
 \langle s_f | \hat{\sigma}_2 | s_f \rangle &= \langle s_i | \hat{\sigma}_2 | s_i \rangle - \frac{it \sin \alpha}{h} \left[\langle \pi_{p_0} \rangle_x^W \langle s_i | \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 | s_i \rangle - \right. \\
 &\quad \left. \langle \pi_{p_0} \rangle_x^{W\dagger} \langle s_i | \hat{\sigma}_2 \hat{\sigma}_2 | s_i \rangle \right] \\
 &= \frac{2t \sin \alpha}{h} \Im \left[\langle \pi_{p_0} \rangle_x^W \right].
 \end{aligned} \tag{48}$$

最终，系统的波函数可以表示为：

$$\psi(x) = \frac{\nu}{\langle \pi_{p_0=0} \rangle_x^W} = \frac{\nu'}{\langle s_f | \hat{\sigma}_1 | s_f \rangle - i \langle s_f | \hat{\sigma}_2 | s_f \rangle} \tag{49}$$

可以看到，通过对每个不同位置的 $|s_f\rangle$ 的两个投影算子的期望值的测量，可以直接获得光子的位置空间波函数，而无需扫描每个状态。

3 波函数直接测量与经典干涉仪

3.1 直接测量单光子空间波函数

由上一节可知，经过弱测量及后选择，系统的偏振态演化为：

$$|s\rangle_f = |H\rangle + \frac{\alpha\langle p=0|\psi\rangle}{\psi(x)}|V\rangle = |H\rangle + \alpha\langle\hat{\pi}_{p_0=0}\rangle_w|V\rangle \quad (50)$$

经过演化后，弱值以相对相位的形式出现在不同偏振态上，考虑到弱值和波函数的关系，这里设波函数具有如下形式：

$$\psi(x) = A(x)e^{i\phi(x)} \quad (51)$$

则可以将(50)写成如下形式：

$$|s\rangle_f = |H\rangle + \alpha(x)e^{-i\phi(x)}|V\rangle \quad (52)$$

这里将 $\alpha(x) = \alpha/A(x)$ ，利用(32)列出的四个概率，我们可以将波函数的相位改写为：

$$\phi(x) = \arctan\left[\frac{P_3 - P_4}{P_1 - P_2}\right] \quad (53)$$

接下来介绍这种形式和经典自参考波前干涉仪的相似性。

3.2 自参考波前干涉探测仪

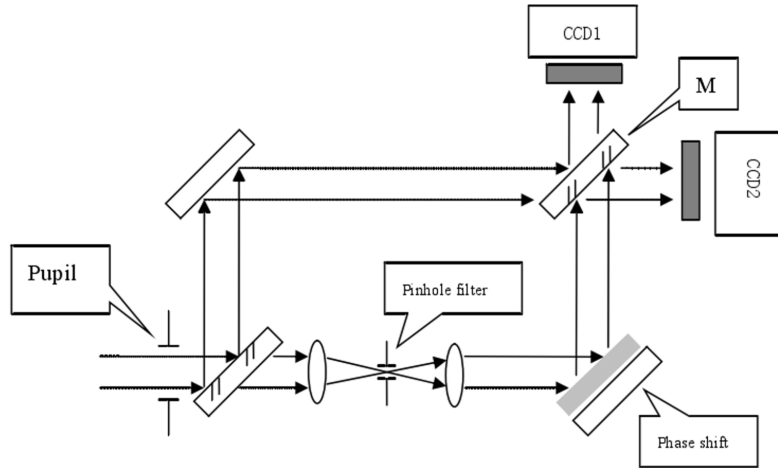


Figure 4: 自参考波前干涉仪

这里介绍经典的自参考波前干涉仪，设入射波面具有如下形式：

$$U_b = A_b(x, y)e^{i\phi_b(x, y)} \quad (54)$$

经过参考光路后，波面成为平面波：

$$U_r = A_r(x, y)e^{i(\phi_0 + \theta)} \quad (55)$$

其中, ϕ_0 为经过针孔滤波器后平面波的初始相位, θ 为移相器产生的相位差。则 C C D 1 / C C D 2 探测到的干涉条纹光强可表示为:

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= A_b^2 + A_r^2 + 2A_bA_r \cos[\phi_b(x, y) + \pi - \phi_0 - \theta] \\ I_2(x, y) &= A_b^2 + A_r^2 + 2A_bA_r \cos[\phi_b(x, y) - \phi_0 - \theta] \end{aligned} \quad (56)$$

令 $\theta = 0(\pi/2)$:

$$\phi_b - \phi_0 = \arctan \left[\frac{I_2(x, y)|_{\theta=\pi/2} - I_1(x, y)|_{\theta=\pi/2}}{I_2(x, y)|_{\theta=0} - I_1(x, y)|_{\theta=0}} \right] \quad (57)$$

其中, ϕ_0 为常数。

3.3 经典干涉仪的模拟结果

这里在自参考波前干涉仪、点衍射波前干涉仪两种模型下进行了模拟。入射光为 HG 模 ($m=1, n=1$)。

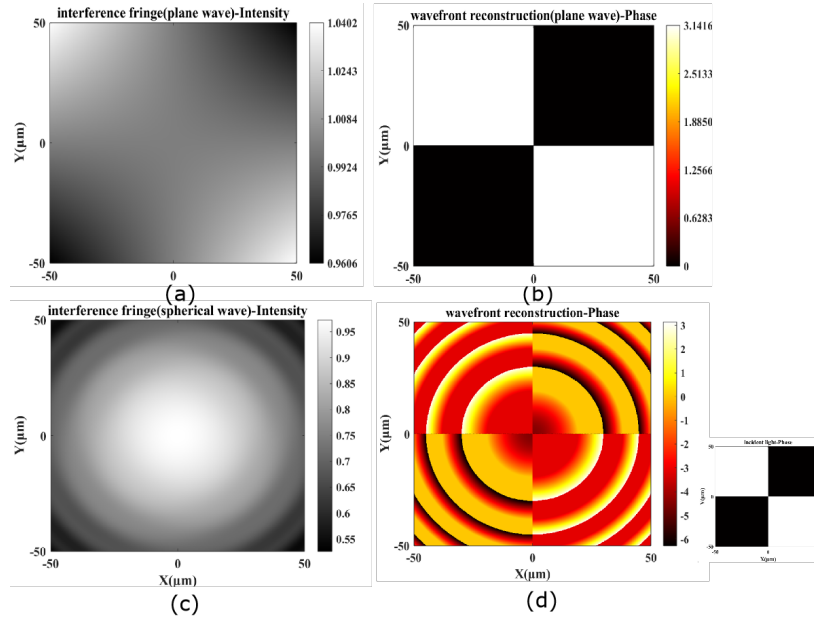


Figure 5: (a)(c) 平面波参考及球面波参考干涉图样; (b)(d) 测量得到的相位, 其中 (d) 中相位包裹

可以看到利用平面波或球面波作为参考, 可以准确测量得到入射光场的相位信息。

3.4 基于弱测量的波函数直接测量技术与经典干涉仪的关系

对于经典光场, 基于不同参考光场的干涉图样还原相位信息是可靠的。为了说明这一理论形式实际上可以被基于弱测量的波函数直接测量理论体系所描述, 以自参考波前干涉探测仪为例, 这里引入路径自由度, 这种说法虽然不严谨, 因为上述模型是基于经典光场建立的, 但是这种观点可以下可以看到弱测量与经典波前探测器的联系。

将入射的光子在左路（不经过针孔）的状态记为 $|L\rangle$ ，在右路（经过针孔）的状态记为 $|R\rangle$ ，则光子的初始状态可写为：

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |path\rangle = |\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \quad (58)$$

光子经过上述测量装置，在量子力学体系的描述下等价于作用如下么正变换：

$$\begin{aligned} \hat{U}|\Psi\rangle &= \left(|p=0\rangle\langle p=0| \otimes |R\rangle\langle R| + \hat{I} \otimes |L\rangle\langle L| \right) \left(|\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi\rangle |L\rangle + \psi(p=0) |p=0\rangle |R\rangle) \end{aligned} \quad (59)$$

这等效于如下耦合哈密顿量：

$$\hat{H} = g(t) |p=0\rangle\langle p=0| \otimes \hat{\sigma}_3 \quad (60)$$

在经过相互作用后，路径状态演化为：

$$|path\rangle_f = |L\rangle + \langle \hat{\pi}_{p0} \rangle_W^x |R\rangle \quad (61)$$

在不考虑移相器的作用下，光子在 $|x\rangle$ 上后选择，光子的路径状态记为：

$$|path\rangle_f = |L\rangle + \frac{c'}{\psi(x)} |R\rangle \quad (62)$$

不难看出此式与(50)的相似性。为了提取相对相因子，我们考虑移相器的作用，可以看出移相器引入一个 0 或 $\pi/2$ 的相位。由经典光学的知识我们知道：

1. 移相器不产生相移，CCD1、CCD2 分别采集到移相为 π 、0 的干涉图像；
2. 移相器产生 $\pi/2$ 的相移，CCD1、CCD2 分别采集到移相为 $\pi/2$ 、 $3\pi/2$ 的干涉图像；

这正好对应于向对角基、反对角基、左旋圆偏振基和右旋圆偏振基的投影。只不过这里相应的基由路径态的线性组合构成。

依照(32)的符号规定，至此可以将(3.2)改写为：

$$\phi_b = \arctan \left[\frac{P_3 - P_4}{P_1 - P_2} \right] \quad (63)$$

其中常数相因子可通过路径态的归一化消去。至此可以清楚地看到这里免扫描弱测量直接测量波函数的理论框架实际上清楚地描述了在经典光学中应用已久的自参考干涉仪。

单光子情形下，经典光学在理论形式上可以与弱测量的理论形式统一。但是经典光学的理论体系显然无法描述双光子纠缠态体系，或者混态情形。接下来将弱测量的理论体系推广到双光子空间联合波函数的直接测量。

4 双光子空间联合波函数的直接测量

传统的单光子波前测量技术并不能直接应用到双光子的联合波函数测量上；在离散变量系统中被广泛应用的量子态层析方法也不适合于这类连续空间分布的系统。这一节将基于弱测量的直接测量波函数技术被进一步拓展到双光子连续变量系统，实现对双光子关联波函数的直接测量。

在第2节中介绍了使用弱值直接表征系统的波函数，这里先引入一般的使用弱值表征两体波函数的理论，因为两体波函数表征需要非局域弱值，通过引入模量，介绍了非局域弱值提取的方法。最后结合已有的基于弱测量的直接测量波函数技术、非局域弱值测量理论，提出直接测量双光子空间波函数的方法。

4.1 直接测量两体波函数理论

考虑两个子系统 A、B 构成的复合系统，复合系统完备的希尔伯特空间为两个局域希尔伯特空间的直积 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 。每个子系统的完备基矢为： $|j\rangle \in \mathcal{H}_A, |l\rangle \in \mathcal{H}_B$ ，进而复合空间的完备基矢可以表示为 $|n\rangle = |j, l\rangle = |j\rangle_A |l\rangle_B$ 。

这个复合空间的任意两体波函数都可以表示为：

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{j,l} \Psi_{j,l} |j, l\rangle \quad (64)$$

其中 $\Psi_{j,l}$ 为复概率幅。同样地，如果初态选为末知态 $|\Psi\rangle_{AB}$ ，末态为无偏的后选择 $|\Phi\rangle_{AB} = N \sum_{j,l} |j, l\rangle$ ，那么非局域投影子 $\hat{P}_{j,l} = \hat{P}_j^A \hat{P}_l^B = |j, l\rangle \langle j, l|$ 的弱值和相应的概率幅之间满足：

$$\Psi_{j,l} = c \langle \hat{P}_{j,l} \rangle_w \quad (65)$$

其中 c 为常数，从上式可以知道扫描非局域投影子 $\hat{P}_{j,l}$ 的弱值就可以得到复概率幅 $\Psi_{j,l}$ 。

4.2 非局域弱值的提取

提取弱值的标准方式是弱测量，对于局域可观测量，用弱测量的方式提取弱值是简单而有效的，但是现在我们需要考虑的是非局域弱值 $\langle \hat{P}_{j,l} \rangle_w$ 。这个时候标准方法需要的演化为 $U_I = e^{-ig\hat{P}_{j,l}\hat{P}}$ ，这是一个非物理的相互作用，不管指针算符如何选择，它都需要非局域的哈密顿量 $\hat{H} \sim \hat{P}_j^A \hat{P}_l^B$ 。因此，前面提及的标准弱测量的方式对我们考虑的非局域两体情形并不适用，如果想要获得非局域的两体系统的波函数，就需要进一步考虑如何提取非局域的弱值。

这一节通过引入模量，证明模量和弱值的关系，推导模量的实验提取方法，最终达到对于非局域弱值的提取。

4.2.1 模量

定义可观测量 C 的模量 [3]：

$$C_m = \frac{\langle \phi | e^{-ig\hat{C}} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \quad (66)$$

选定耦合强度 g 下，令 $s = e^{-ig} - 1$

$$\begin{aligned}
(\hat{P}_j^A)_m &= \frac{\langle \phi | e^{-ig\hat{P}_j^A} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \\
&= \frac{\langle \phi | \sum_{n=0} (-ig)^n \frac{1}{n!} (\hat{P}_j^A)^n | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \\
&= 1 + \sum_{n=1} (-ig)^n \frac{1}{n!} \frac{\langle \phi | \hat{P}_j^A | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \\
&= 1 + s \langle \hat{P}_j^A \rangle_w
\end{aligned} \tag{67}$$

我们选择 $s=-2$ 即 $g = \pi$ ，对应于一个标准测量设置。当我们考虑两个对易的投影子时，其模量可以表示为 [6]:

$$\begin{aligned}
(\hat{P}_j^A + \hat{P}_l^B)_m &= \frac{\langle \phi | e^{-ig(\hat{P}_j^A + \hat{P}_l^B)} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \\
&= \frac{\langle \phi | e^{-ig\hat{P}_j^A} e^{-ig\hat{P}_l^B} | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \\
&= 1 + s \left(\langle \hat{P}_j^A \rangle_w + \langle \hat{P}_l^B \rangle_w \right) + s^2 \langle \hat{P}_j^A \hat{P}_l^B \rangle_w,
\end{aligned} \tag{68}$$

由此可得:

$$\Psi_{j,l} \propto \langle \hat{P}_{j,l} \rangle_w = s^{-2} [(\hat{P}_j^A + \hat{P}_l^B)_m - (\hat{P}_j^A)_m - (\hat{P}_l^B)_m + 1] \tag{69}$$

至此，对于非局域弱值的提取转化为对模量的提取。注意上述关系对投影子 \hat{P}_j^A 、 \hat{P}_l^B 本身没有限制，该投影子既可以是离散变量的投影子如 $|H\rangle \langle H|_j^A$ ，也可以是连续变量的投影子，如 $\hat{\pi}_j^A = |x\rangle \langle x|_j^A$ ，因此该理论可以用于双光子空间连续变量波函数对应的非局域弱值提取。

4.2.2 利用离散指针进行模量提取

现在的关键变为获得(69)中涉及的模量，实验中一般通过离散指针获得 [3]，考虑一个不同系统的可观测量 C_i ，它的和的模量的值可以作如下考虑：

指针的初态制备为：

$$\alpha \prod |0\rangle_i + \beta \prod |1\rangle_i \tag{70}$$

相互作用哈密顿量写为：

$$H_{int} = g(t) \sum_i P_i C_i \tag{71}$$

其中 $P_i = |1\rangle_i \langle 1|_i$ ，经过演化后的指针末态为：

$$\alpha \prod |0\rangle_i + \beta \left(\sum C_i \right)_m \prod |1\rangle_i \tag{72}$$

如果需要获得 C_i 部分和的模量，则可以将初态制备为：

$$\alpha \prod_i |0\rangle_i + \beta \prod_{i \in \Omega} |1\rangle_i \prod_{i \notin \Omega} |0\rangle_i \quad (73)$$

同样计算可以得到，指针末态为：

$$\alpha \prod_i |0\rangle_i + \beta \left(\sum_{i \in \Omega} C_i \right) \prod_m |1\rangle_i \prod_{i \notin \Omega} |0\rangle_i \quad (74)$$

使用这一方法，同样可以得到 C_i 的任意线性组合的模量的值，只需要改变不同的耦合系数 g_i 就可以做到，这里不再赘述。

可以看到，任意和的模量反应在演化后的指针末态的相对相位中，实际实验中，可以通过对指针末态进行量子层析，就可以获得相应的模量。

4.3 免扫描双光子光联空间波函数的直接测量

考虑双光子关联波函数 $\Psi(x_1, x_2)$ ，定义动量投影算符 $\hat{\pi}_p^A = |p_1 = 0\rangle \langle p_1 = 0|$ ， $\hat{\pi}_p^B = |p_2 = 0\rangle \langle p_2 = 0|$ ，后选择向 $|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle$ 投影，可以得到非局域空间算符 $|p_1 = 0, p_2 = 0\rangle \langle p_1 = 0, p_2 = 0|$ 的弱值为：

$$\begin{aligned} \langle \hat{\pi}_{p_0}^A \hat{\pi}_{p_0}^B \rangle_{\mathbf{x}}^w &= \frac{\langle x_1, x_2 | p_1 = 0, p_2 = 0 \rangle \langle p_1 = 0, p_2 = 0 | \psi \rangle}{\langle x_1, x_2 | \psi \rangle} \\ &= \frac{c}{\Psi(x_1, x_2)} \end{aligned} \quad (75)$$

此时只需要测出非局域弱值，就可以直接获得双光子的关联动量空间波函数。根据模量的定义 [3]，上述非局域弱值可以由模量测出。

$$\frac{1}{\Psi(x_1, x_2)} \propto \langle \hat{\pi}_{p_0}^A \hat{\pi}_{p_0}^B \rangle_{\mathbf{x}}^w = s^{-2} [(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_{\mathbf{m}}^{\mathbf{x}} - (\hat{\pi}_{p_0}^A)_{\mathbf{m}}^{\mathbf{x}} - (\hat{\pi}_{p_0}^B)_{\mathbf{m}}^{\mathbf{x}} + 1] \quad (76)$$

其中 $s = e^{-ig} - 1$ 。

4.3.1 对末态进行量子层析提取模量

用光子的偏振自由度作为指针，定义投影子： $\hat{P}_V^A = |V\rangle^A \langle V|^A$ 、 $\hat{P}_V^B = |V\rangle^B \langle V|^B$ 相互作用哈密顿量写为：

$$H_{int} = g(\hat{\pi}_{p_0}^A \hat{P}_V^A + \hat{\pi}_{p_0}^B \hat{P}_V^B) \quad (77)$$

为了提取 $(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_{\mathbf{m}}^{\mathbf{x}}$ ，指针的初态制备为：

$$|s_i\rangle = \alpha |H\rangle^A |H\rangle^B + \beta |V\rangle^A |V\rangle^B \quad (78)$$

经过演化：

$$U_I = e^{-ig(\hat{\pi}_{p_0}^A \hat{P}_V^A + \hat{\pi}_{p_0}^B \hat{P}_V^B)} \quad (79)$$

指针末态为：

$$|s_f\rangle = \alpha |H\rangle^A |H\rangle^B + \beta (\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_{\mathbf{m}}^{\mathbf{x}} |V\rangle^A |V\rangle^B \quad (80)$$

为了提取 $(\hat{\pi}_{p_0}^A)_m^x$ ，指针的初态制备为：

$$|s_i\rangle = \alpha |H\rangle^A |H\rangle^B + \beta |V\rangle^A |H\rangle^B \quad (81)$$

此时指针末态为：

$$|s_f\rangle = \alpha |H\rangle^A |H\rangle^B + \beta (\hat{\pi}_{p_0}^A)_m^x |V\rangle^A |H\rangle^B \quad (82)$$

提取 $(\hat{\pi}_{p_0}^B)_m^x$ 同理。此时我们可以对指针末态进行偏振态层析 [2], 获得相应的模量, 利用(76)可以得到双光子关联空间波函数。

4.3.2 利用纠缠指针提取模量

如果我们将指针的初态选为纠缠态，其中 $\varepsilon \ll 1$ ：

$$|s_i\rangle = \frac{|HV\rangle + \varepsilon |VH\rangle}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (83)$$

定义投影子： $\hat{P}_V^A = |V\rangle^A \langle V|^A$ 、 $\hat{P}_H^B = |H\rangle^B \langle H|^B$ 相互作用哈密顿量写为：

$$\hat{H}_{int} = g(t)(\hat{\pi}_{p_0}^A \hat{P}_V^A + \hat{\pi}_{p_0}^B \hat{P}_H^B) \quad (84)$$

对于单个光子演化算符可以展开为：

$$\begin{aligned} e^{-ig(\hat{\pi}_{p_0}^A \hat{P}_V^A)} &= \sum_{n=0} (-ig)^n (\hat{\pi}_{p_0}^A \otimes \hat{P}_V^A)^n \\ &= \hat{1} - ig(\hat{\pi}_{p_0}^A \otimes \hat{P}_V^A) + (-ig)^2 (\hat{\pi}_{p_0}^A \otimes \hat{P}_V^A)^2 + \dots \\ &= \hat{1} - ig(\hat{\pi}_{p_0}^A \otimes \hat{P}_V^A) + (-ig)^2 ((\hat{\pi}_{p_0}^A)^2 \otimes (\hat{P}_V^A)^2) + \dots \\ &= \hat{1} + (\hat{\pi}_{p_0}^A \otimes \hat{P}_V^A) \sum_{n=1} (-ig)^n \\ &= \hat{1} + (\hat{\pi}_{p_0}^A \otimes \hat{P}_V^A)(e^{-ig} - 1) \\ &= \hat{1} + ((e^{-ig\hat{\pi}_{p_0}^A} - \hat{I}^A) \otimes \hat{P}_V^A) \\ &= \hat{I}^A \otimes \hat{I}^{polar} + e^{-ig\hat{\pi}_{p_0}^A} \otimes \hat{P}_V^A - \hat{I}^A \otimes \hat{P}_V^A \\ &= e^{-ig\hat{\pi}_{p_0}^A} \otimes \hat{P}_V^A + \hat{I}^A \otimes \hat{P}_H^A \end{aligned} \quad (85)$$

上述推导中 $\hat{1}$ 为 A 位置与偏振直积空间的单位算符， \hat{I}^A 为 A 系统位置空间单位算符， \hat{I}^{polar} 为 A 系统偏振空间单位算符，最后一步运用了偏振空间基矢的完备性条件。经过演化后的态写为：

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{fin} &= e^{-ig\hat{H}_{int}} |\psi\rangle \otimes |s_i\rangle \\ &= (e^{-ig\hat{\pi}_{p_0}^A \hat{P}_V^A} \otimes e^{-ig\hat{\pi}_{p_0}^B \hat{P}_H^B}) |\psi\rangle \otimes |s_i\rangle \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} e^{-ig(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)} |\psi\rangle \otimes |VH\rangle + \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} |\psi\rangle \otimes |HV\rangle \end{aligned} \quad (86)$$

经过相互作用并将指针末态投影到 $|1\rangle = (|HV\rangle + |VH\rangle)/\sqrt{2}$ 、 $|2\rangle = (|HV\rangle - |VH\rangle)/\sqrt{2}$ 、 $|3\rangle = (|HV\rangle + i|VH\rangle)/\sqrt{2}$ 、 $|4\rangle = (|HV\rangle - i|VH\rangle)/\sqrt{2}$ 上，并对空间部分的态在 $\langle x_1, x_2 |$ 上做后选择，忽略空间部分的状态，归一化后的指针态可以写为：

$$\langle 1(2)|\Psi\rangle_{fin} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \pm \varepsilon(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m) \quad (87)$$

$$\langle 3(4)|\Psi\rangle_{fin} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \pm i\varepsilon(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m) \quad (88)$$

投影概率为：

$$\begin{aligned} P_{1(2)} &= \frac{1}{2} \pm \varepsilon \operatorname{Re} [(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m] + O(\varepsilon^2) \\ P_{3(4)} &= \frac{1}{2} \pm \varepsilon \operatorname{Im} [(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (89)$$

为了提取 $(\hat{\pi}_{p_0}^A)_m$, $(\hat{\pi}_{p_0}^B)_m$, 只需将相应的演化过程写为：

$$\hat{U}^A = e^{-ig(\hat{\pi}_{p_0}^A \hat{P}_V^A)} \otimes \hat{1}^B \quad (90)$$

$$\hat{U}^B = \hat{1}^A \otimes e^{-ig(\hat{\pi}_{p_0}^B \hat{P}_V^B)} \quad (91)$$

最终的投影概率为：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1(2)}^{A(B)} &= \frac{1}{2} \pm \varepsilon \operatorname{Re} \left[(\hat{\pi}_{p_0}^{A(B)})_m \right] + O(\varepsilon^2) \\ \mathcal{P}_{3(4)}^{A(B)} &= \frac{1}{2} \pm \varepsilon \operatorname{Im} \left[(\hat{\pi}_{p_0}^{A(B)})_m \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (92)$$

利用纠缠指针，可以方便地提取模量，从而得到非局域弱值，实现双光子空间关联波函数的直接测量。

4.3.3 数值模拟实验

基于上述原理，基于 MATLAB 实现了数值模拟实验。对于具有发散、汇聚的高斯相位的关联函数形式进行了模拟。

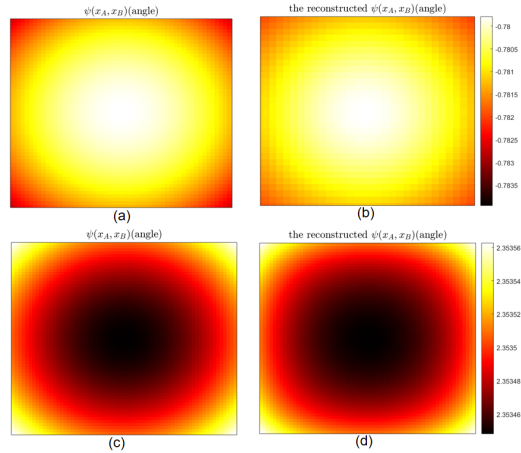


Figure 6: 双光子空间关联波函数测量模拟结果：(a)(c) 关联函数相位分布 (b)(d) 测量得到的关联函数相位分布

可以看到，使用上述方法得到的关联函数的测量量结果准确，对于汇聚型高斯相位，可以看

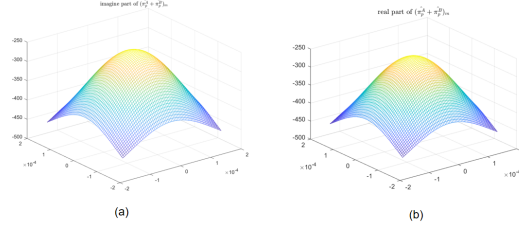


Figure 7: 模量的测量结果：(a) $(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m$ 虚部 (b) $(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m$ 实部

到远离中心相位逐渐减小。对于发散性高斯相位，可以看到远离中心相位逐渐增大。

图7展示发散高斯相位对应的测量得到的 $(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m$ 的实部、虚部，可以看到在该关联函数形式下，模量连续，无奇异点。

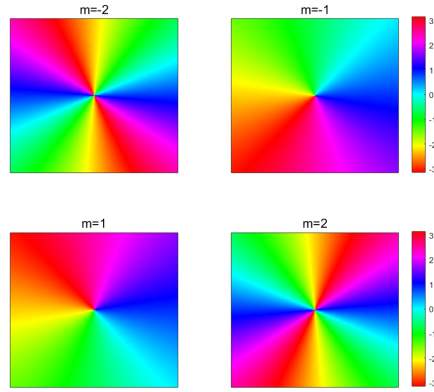


Figure 8: L-G 模式，不同 m 取值的相位

图8展示了 L-G 模式不同参数 m 取值下的相位，将 L-G 模式作为关联函数的形式进行测试。

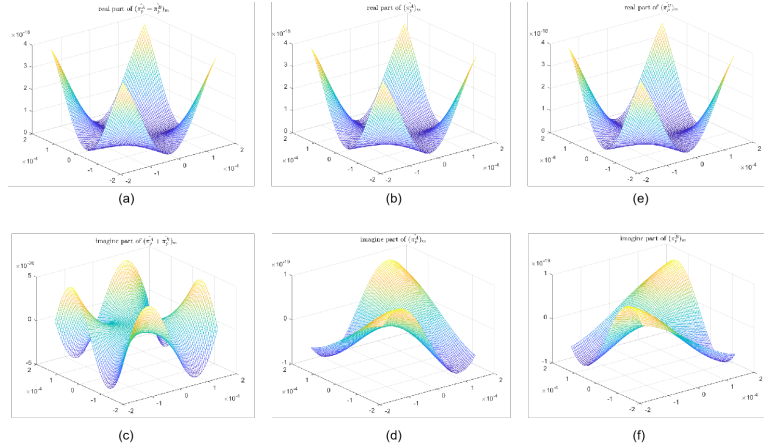


Figure 9: 模量：(a)(c) $(\hat{\pi}_{p_0}^A + \hat{\pi}_{p_0}^B)_m$ 实部和虚部 (b)~(f) $(\hat{\pi}_{p_0}^{A(B)})_m$ 实部和虚部

图9为 $m=2$ 时获得的各部分的模量。实验模拟中发现该方法对相位梯度大的关联函数的测量存在一定的缺陷。实验精度和具体耦合位置（动量 $p=0$ ）的截取范围相关。

5 结论及展望

本篇文章基于弱测量相关理论，从利用弱测量直接测量波函数的方法开始，先从理论上解决了原始方案 [5] 的两个不足之处：1. 测量的过程需要移动玻片扫描，精度受限；2. 单光子波函数的直接测量方案无法直接运用到双光子情形。通过引入模量 [3]，我们将弱测量直接测量波函数的理论拓展到了双光子系统连续变量波函数测量情形，提出了直接测量双光子空间关联波函数的方案。基于这一方案，我们进行了相关数值模拟实验。

受波函数直接测量技术的启发，我们发现基于弱测量的波函数测量技术和经典波前干涉测量仪之间存在相似性。通过在自参考波前干涉仪中引入可观测量，我们指出了单光子情形下两者在理论上的等价性，也即可以通过弱测量的理论描述经典波前干涉仪。进一步，我们发现，弱值可以在这一情景下在经典光学的技术中引入可观测量的概念，对于双光子情形，经典波前干涉仪相关技术不再适用，而弱测量相关理论仍可以通过本篇文章所述的方式拓展。因此在经典光学的波前测量这一框架下，弱值是更具普遍性的理论描述。

在下一步的研究中，我们会进一步对于弱值在描述经典波前探测领域中的理论统一性进行研究，对于 Shack Hartmann 传感器、点衍射干涉仪传感器等做更详细的探讨。对于本文提出的双光子空间关联波函数的测量方法，我们正在搭建实验装置进一步测试这一方法的可行性。

相较于传统量子态层析技术，对于两体高维系统波函数的测量，基于弱测量的双光子空间关联波函数的直接测量技术是效率更高的方案，这将方便我们对两体量子系统高维变量的信息的获取，并有望拓展到多体系统中。

References

- [1] Yakir Aharonov and Daniel Rohrlich. *Quantum paradoxes: quantum theory for the perplexed*. John Wiley & Sons, 2008.
- [2] Joseph B Altepeter, Evan R Jeffrey, and Paul G Kwiat. “Photonic state tomography”. In: *Advances in atomic, molecular, and optical physics* 52 (2005), pp. 105–159.
- [3] Yaron Kedem and Lev Vaidman. “Modular values and weak values of quantum observables”. In: *Physical review letters* 105.23 (2010), p. 230401.
- [4] J.S. Lundeen and K.J. Resch. “Practical measurement of joint weak values and their connection to the annihilation operator”. In: *Physics Letters A* 334.5 (2005), pp. 337–344. ISSN: 0375-9601. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.11.037>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960104016342>.
- [5] Jeff S Lundeen et al. “Direct measurement of the quantum wavefunction”. In: *Nature* 474.7350 (2011), pp. 188–191.
- [6] Wei-Wei Pan et al. “Direct measurement of a nonlocal entangled quantum state”. In: *Physical Review Letters* 123.15 (2019), p. 150402.
- [7] John Preskill. “Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation”. In: *California Institute of Technology* 16.1 (1998), pp. 1–8.
- [8] Zhimin Shi et al. “Scan-free direct measurement of an extremely high-dimensional photonic state”. In: *Optica* 2.4 (2015), pp. 388–392.