南京大学电子科学与工程学院

大学物理I

附I 微积分初步

王启晶
邮箱：qijingwang@nju.edu.cn
办公室：物理楼254

§1 函数及其图形

函数

- 数学定义：有两个互相联系的变量 x 和 y，如果每当变量 x 取定了某个数值后，按照一定的规律就可以确定 y 的对应值，我们就称 y 是 x 的**函数**，记作

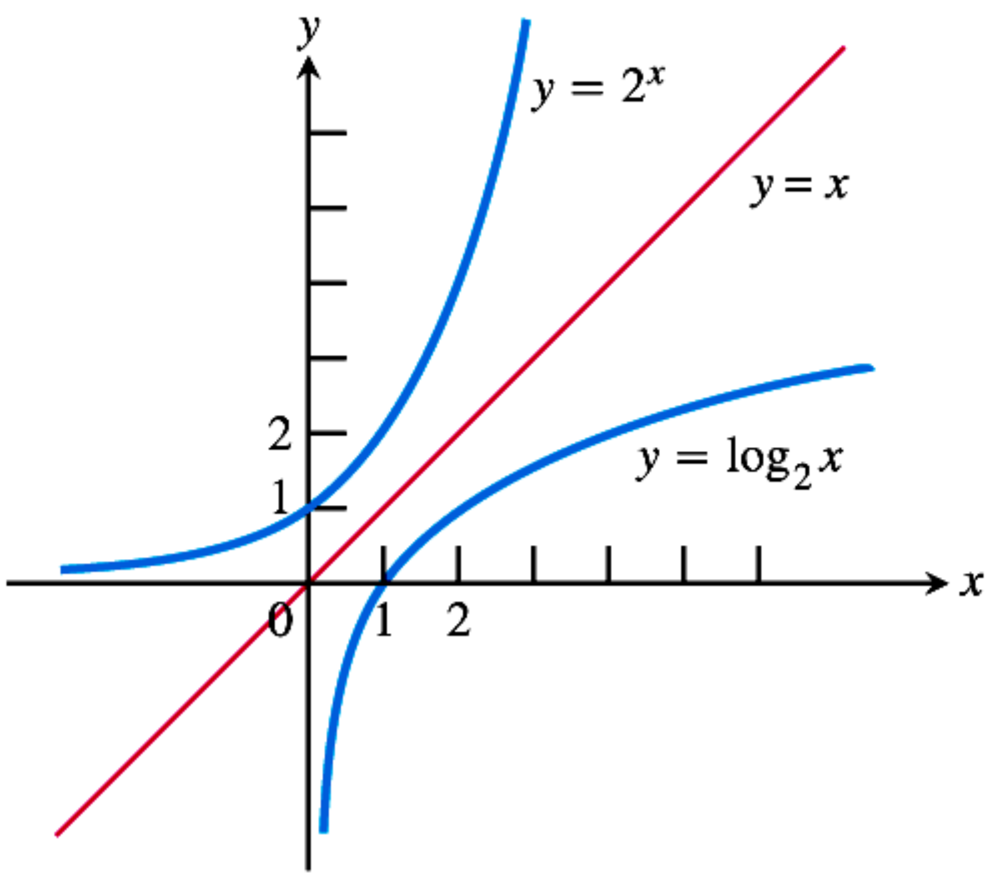
$$y = f(x)$$

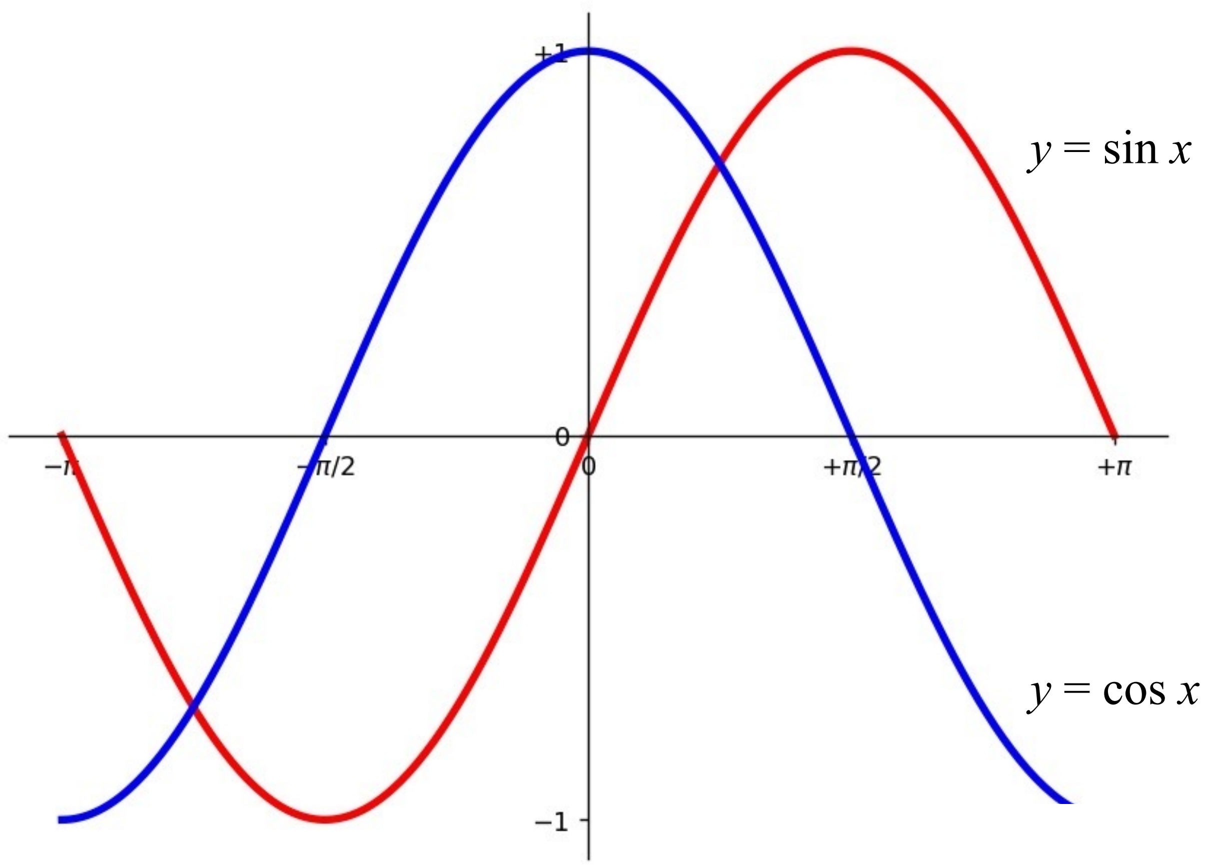
其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，f 是一个函数记号，表示 y 和 x 数值的对应关系

- 常见的函数：
- $y = f(x) = 3 + 2x, ax + \frac{1}{2}bx^2, \frac{c}{x}, \cos 2\pi x, \ln x, e^x$

函数的图形

- 在解析几何学和物理学中经常用平面上的曲线来表示两个变量之间的函数关系



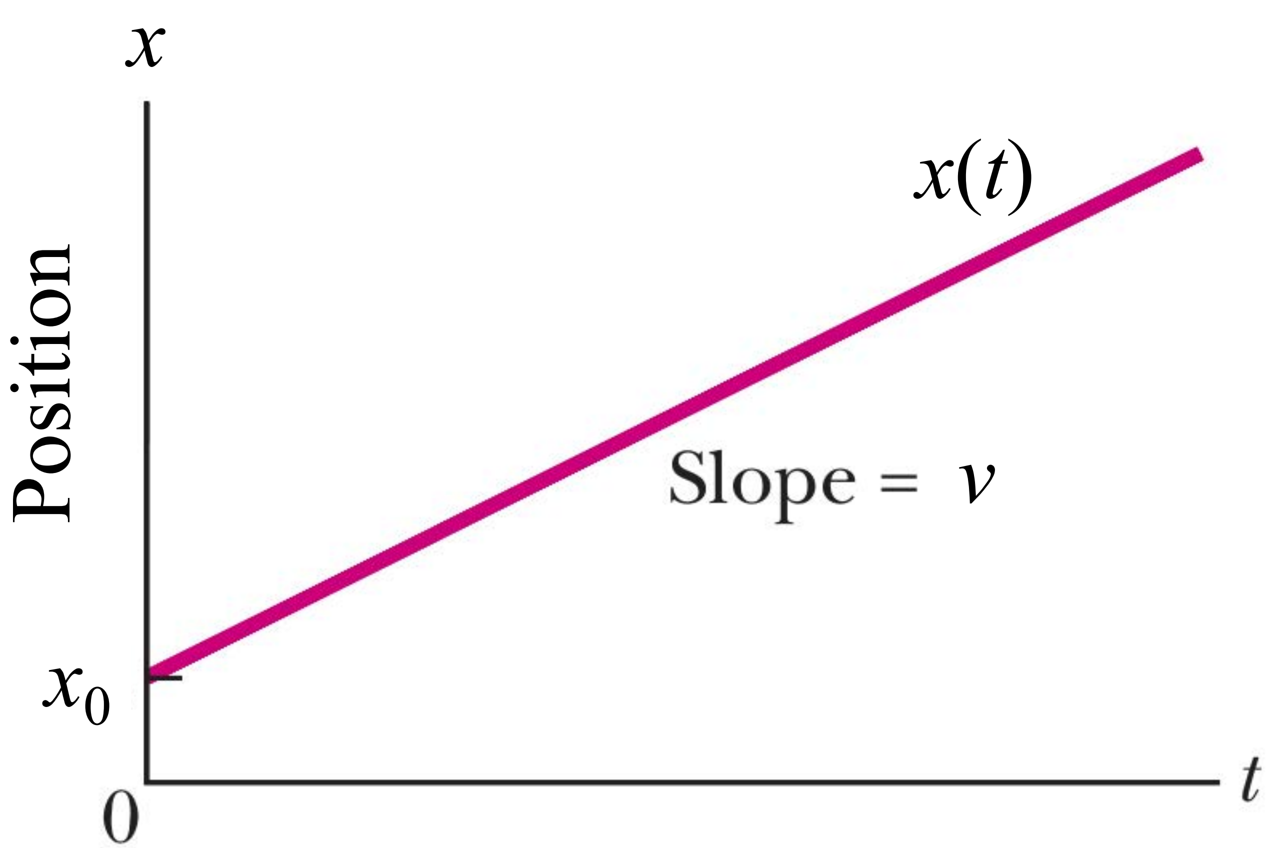


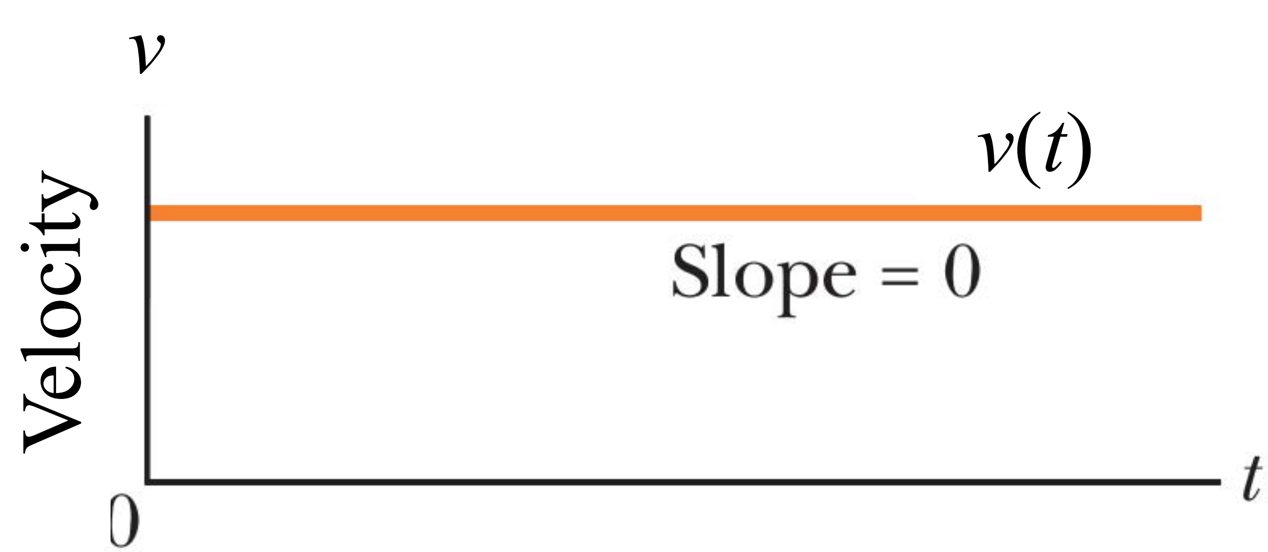
物理学中函数的实例

- 匀速直线运动

$$x = x_0 + vt$$

表示物体作匀速直线运动时的位置 x 随时间 t 变化的规律



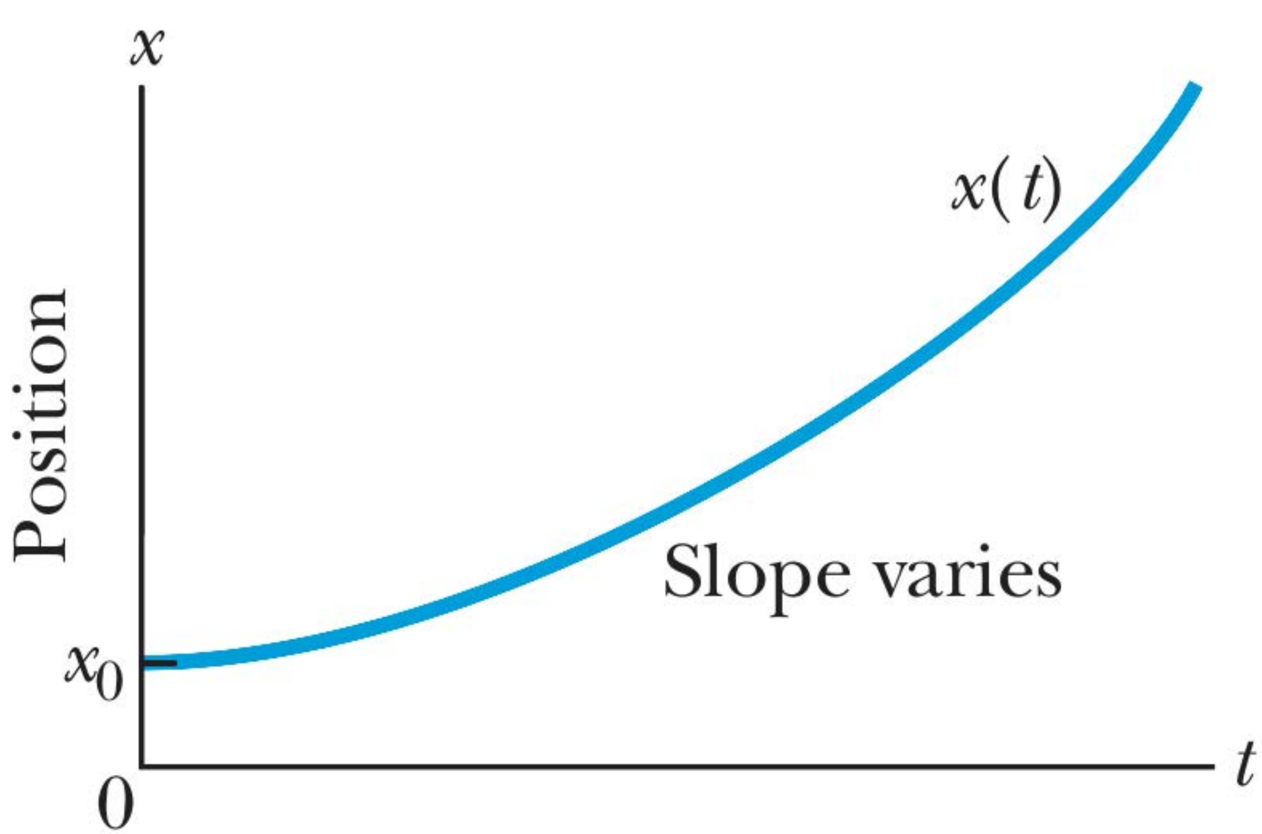


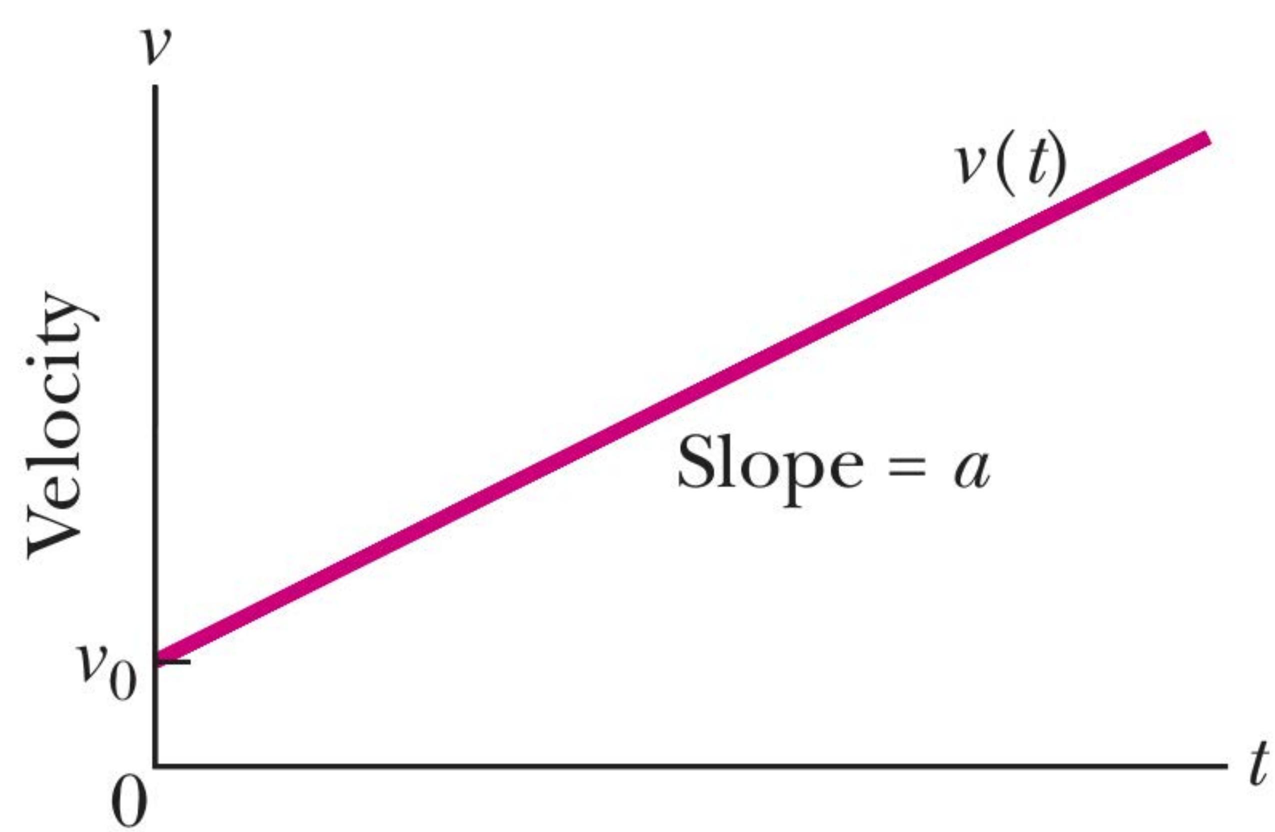
物理学中函数的实例

- 匀变速直线运动

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$v = v_0t + at$$



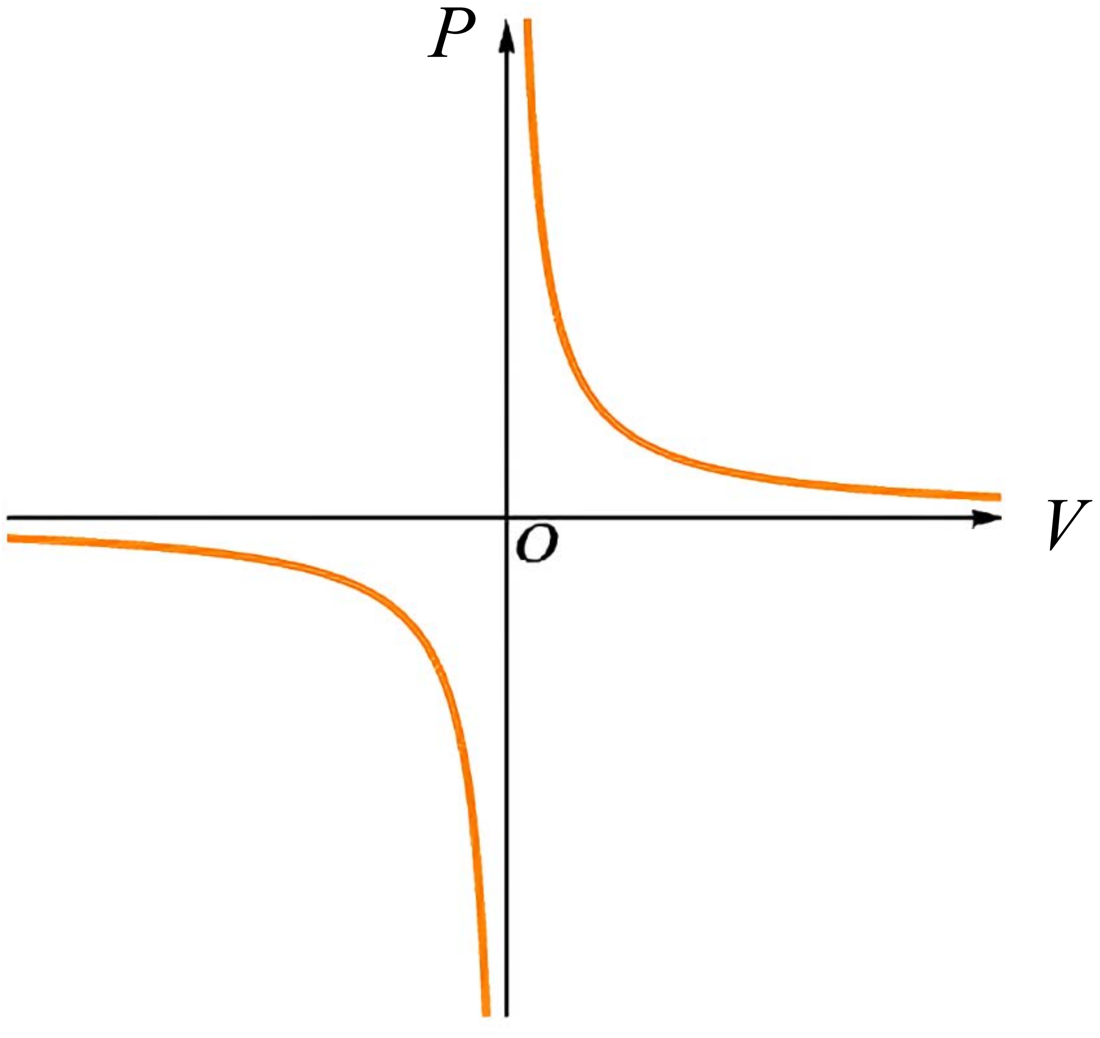


物理学中函数的实例

- **波意耳-马略特定律（Boyle–Mariotte law）**
- 在定量定温下，理想气体的体积与压力成反比。这是人类历史上第一个被发现的“定律”。

$$PV = nRT = C$$

$$\rightarrow \quad y = \frac{C}{x}$$

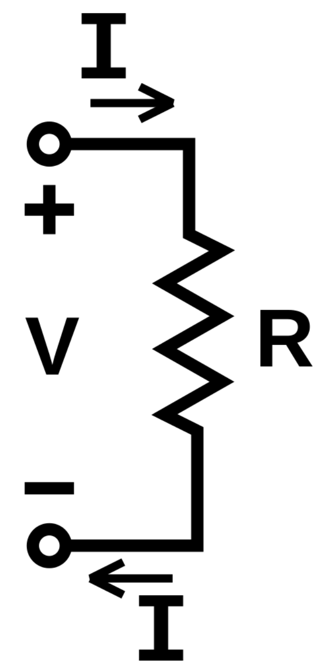


物理学中函数的实例

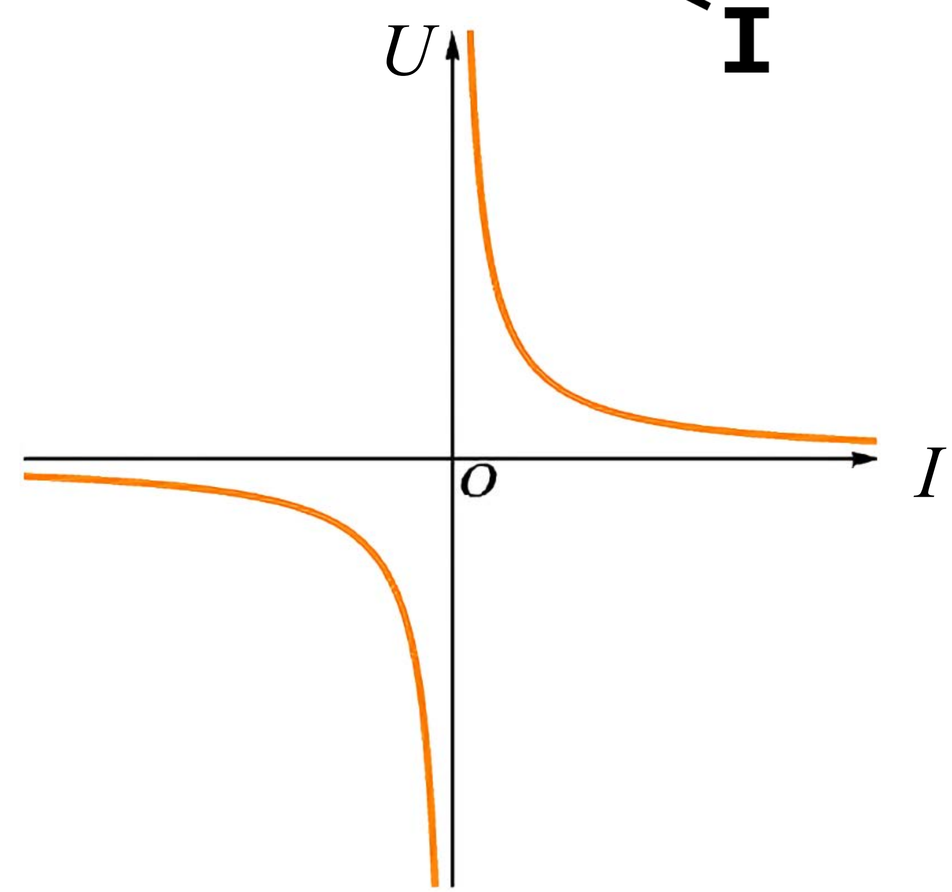
- 欧姆定律：电导体两端的电压（U）与通过电导体的电流（I）成正比

$$U = IR$$

$$I = \frac{U}{R}$$



- 不论电压、电流为何，电阻的定义均为电压除以电流



§2 导数

极限

- 数学定义：如果当自变量 x 无限趋近某一数值 x_0 时（记作 $x \to x_0$），函数 $f(x)$ 的数值无限趋近某一确定的数值 a，则 a 叫做 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**极限值**，并记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

物理学中的实例—瞬时速度

- 当一个物体作任意直线运动时，它的位置可用它到某个坐标原点 O 的距离 x 来描述。在运动过程中 x 是随时间变化的

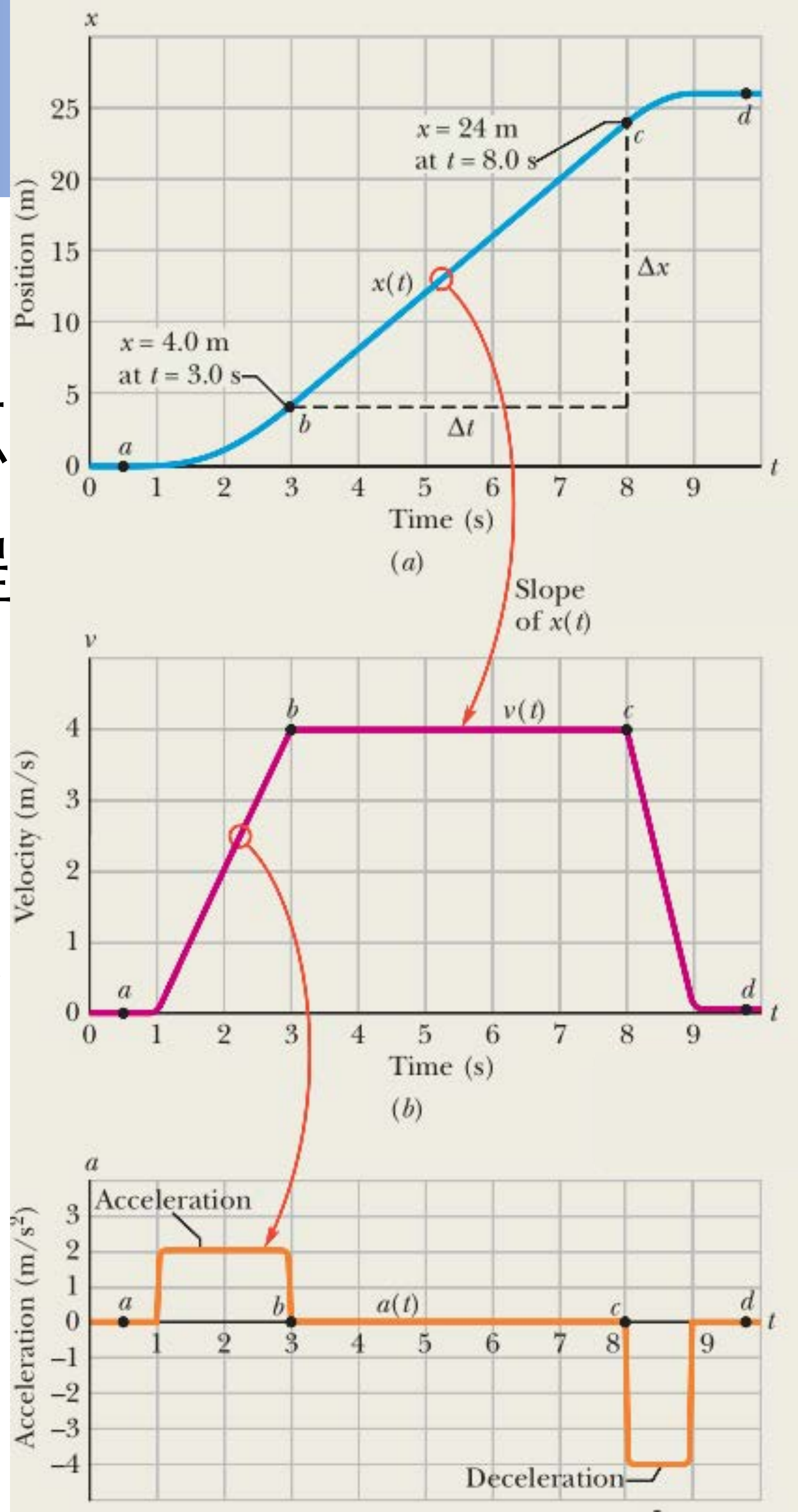
$$x = x(t)$$

- 考虑从 $t = t_0$ 到 $t = t_1$ 的时间内

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

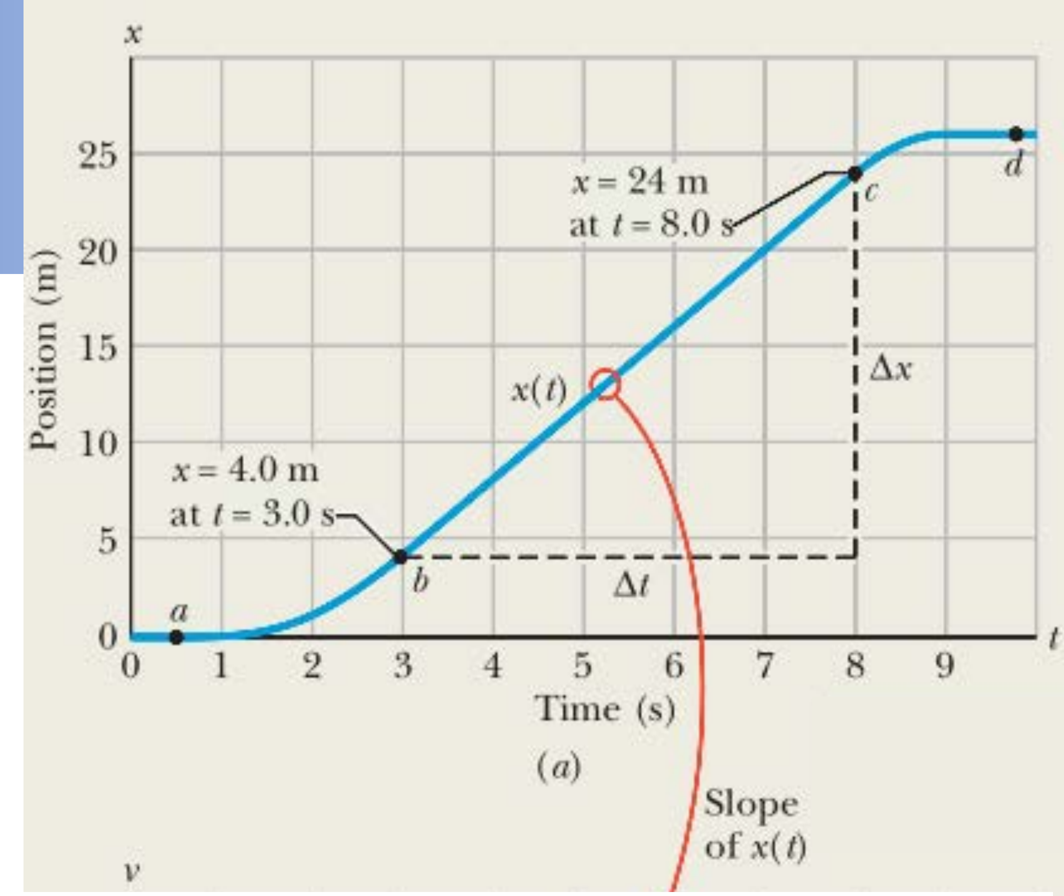
$$\Delta x = x(t_1) - x(t_0)$$

$$= x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$$



物理学中的实例—瞬时速度

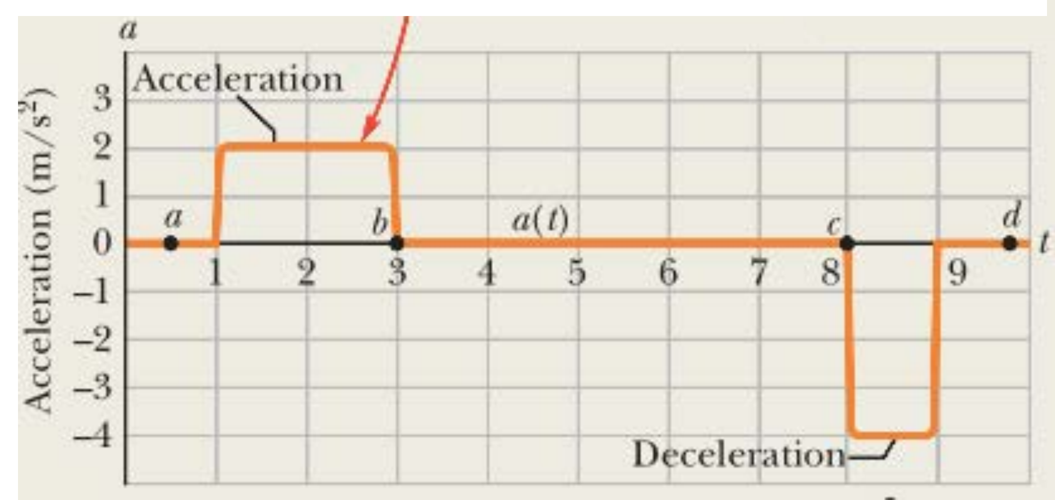
- Δt内的平均速率



$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$= \frac{[x_0 + v_0(t_0 + \Delta t) + \frac{1}{2}a(t_0 + \Delta t)^2] - [x_0 + v_0 t_0 + \frac{1}{2}a t_0{}^2]}{\Delta t}$$

$$= \frac{(v_0 + a t_0)\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2}{\Delta t} = v_0 + a t_0 + \frac{1}{2}a\Delta t$$



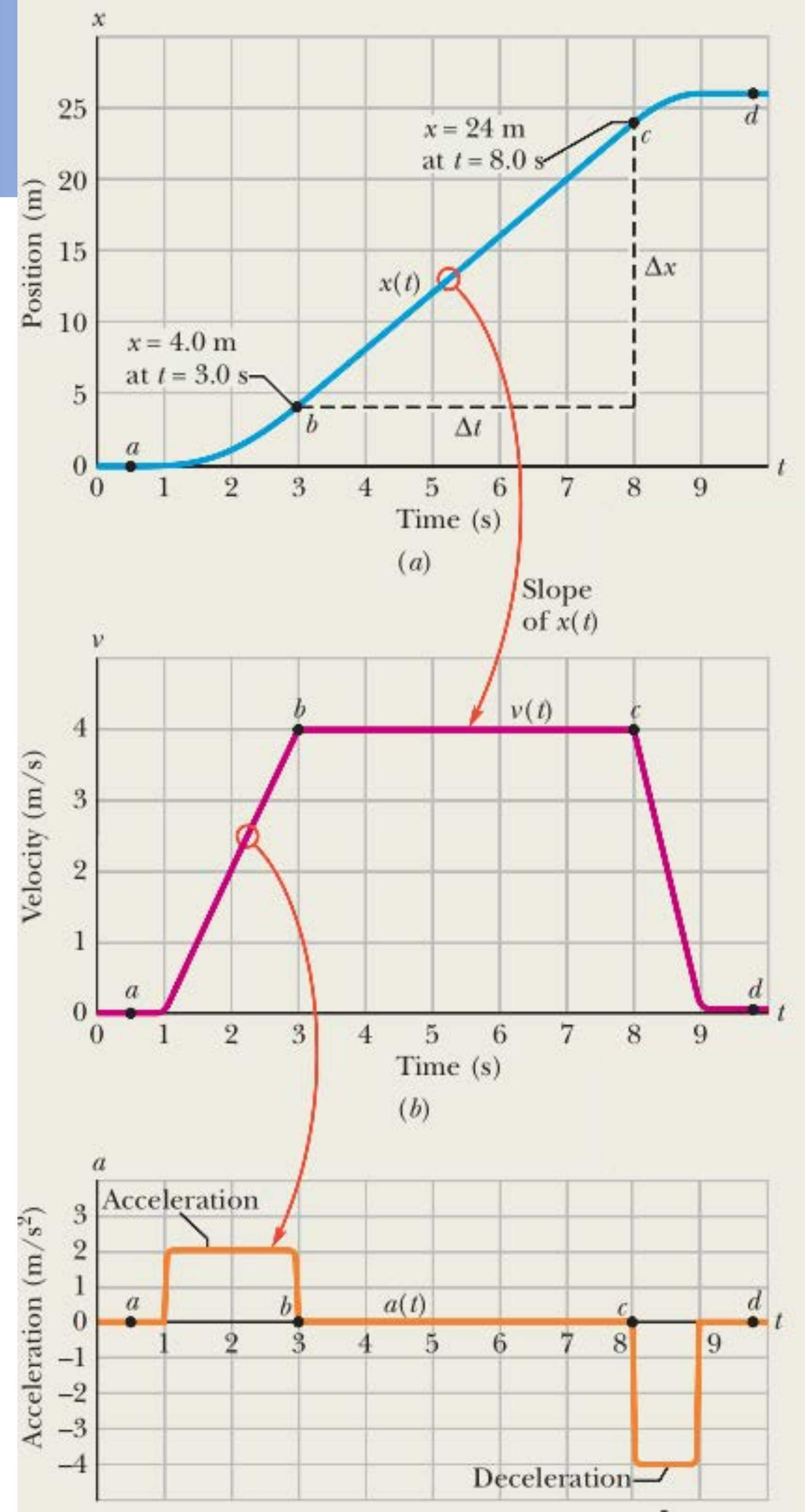
物理学中的实例——瞬时速度

- Δt内的平均速率

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_0 + a t_0 + \frac{1}{2} a \Delta t \right) \\ &= v_0 + a t_0 \end{aligned}$$

匀变速直线运动



物理学中的实例—瞬时加速度

- 瞬时速度 v 也是 t 的函数

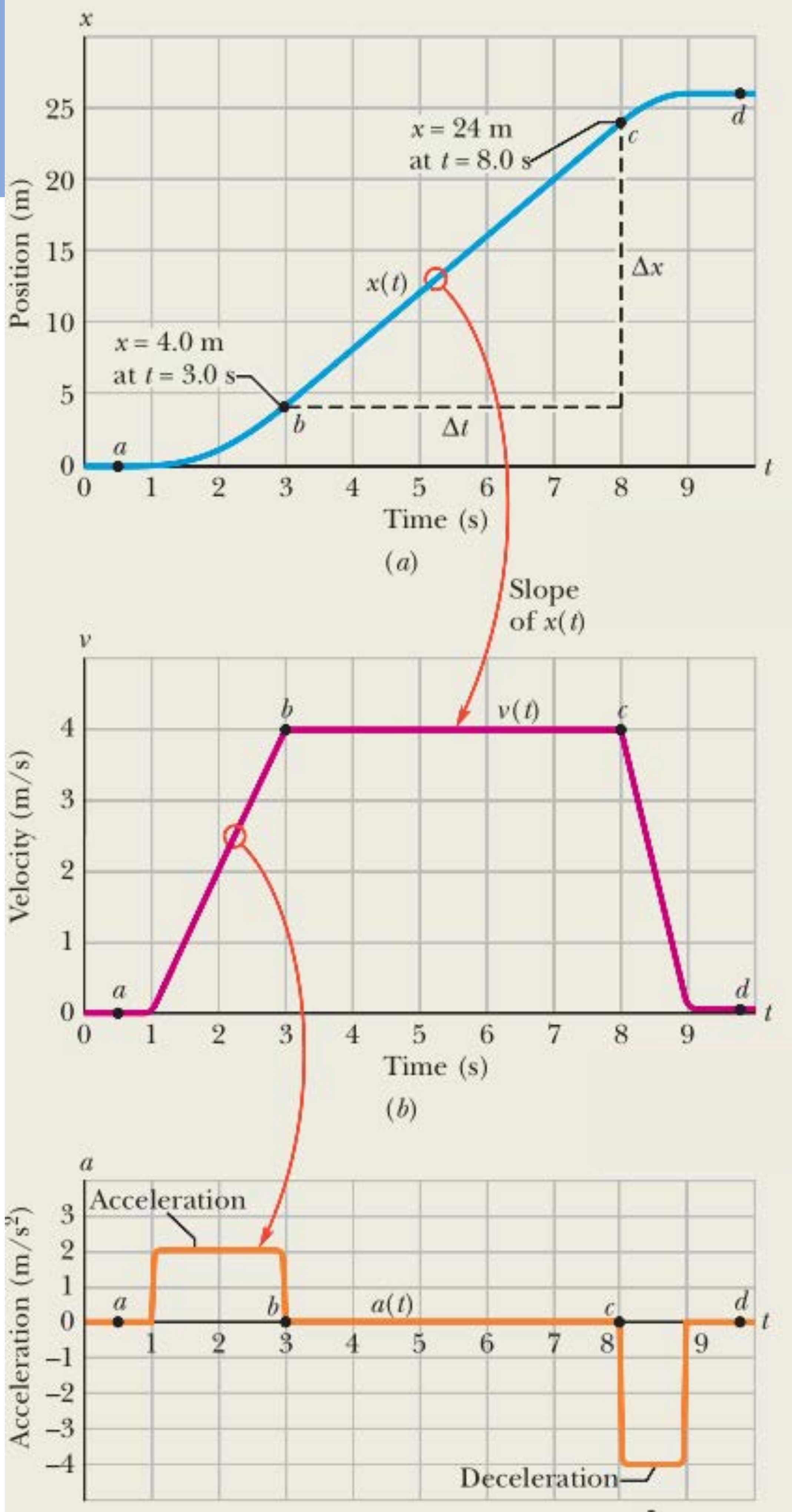
$$v = v(t)$$

- 考虑从 $t = t_0$ 到 $t = t_1$ 的时间内

$$\Delta v = v(t_1) - v(t_0)$$
$$= v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$



§3 导数的运算

基本函数的导数公式

- $y = f(x) = C$ （常量）
  - $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C-C}{\Delta x} = 0$
- $y = f(x) = x$
  - $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = 1$
- $y = f(x) = x^2$
  - $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

基本函数的导数公式

- $y=f(x)=x^3$
  - $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2$$

- $y=f(x)=\frac{1}{x}$
  - $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=\frac{-1}{x^2}$$

基本函数的导数公式

- $y = f(x) = \sqrt{x}$
  - $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2-\sqrt{x}^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

导数运算定理

- 定理一

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u(x) \pm v(x)\right] = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[u(x) \pm v(x)\right] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]$

导数运算定理

- 定理二

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)v(x)] = v(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm u(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)v(x)] = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{[u(x)+\Delta u][v(x)+\Delta v]-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] = v(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm u(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

导数运算定理

- 定理三

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{[v(x)]^2}$$

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x)+\Delta u]v(x)-u(x)[v(x)+\Delta v]}{[v(x)+\Delta v]v(x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{[v(x)+\Delta v]v(x)\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{[v(x)+\Delta v]v(x)}=\frac{v(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{[v(x)]^2}$$

导数运算定理

- 定理四

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u[v(x)]=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u[v(x)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u[v(x+\Delta x)]-u[v(x)]}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(v+\Delta v)-u(v)}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(v+\Delta v)-u(v)}{\Delta v}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

§4 微分和函数的幂级数展开

微分

- 数学定义：自变量的微分，就是它的任意一个无限小的增量Δx。用$\mathrm{d}x$代表 x 的微分，则$\mathrm{d}x = \Delta x$
- 一个函数$y = f(x)$的导数$f'(x)$乘以自变量的微分$\mathrm{d}x$，叫做这个函数的微分，用$\mathrm{d}y$或$\mathrm{d}f(x)$表示，即

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

故

$$f'(x) = f'(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

幂函数展开

- 已知一个函数$f(x)$在$x = x_0$一点的数值$f(x_0)$，如何求得其附近的点$x = x_0 + \Delta x$处的函数值$f(x) = f(x_0 + \Delta x)$？

牛顿二次项定理：

$$f(x) = xn = (x_0 + \Delta x)^n = {x_0}^n \left(1 + \frac{\Delta x}{x0}\right)^n = f(x_0)\left[1 + \left(\frac{\Delta x}{x0}\right)\right]^n$$

$$= f(x_0)[1+n\left(\frac{\Delta x}{x0}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta x}{x0}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\Delta x}{x0}\right)^3+\cdots]$$

$$= f(x_0)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\Delta x}{x0}\right)^m$$

泰勒展开

- 非幂函数（譬如$\sin x$, e^x）如何作幂级数展开？
- 假设函数$f(x)$在$x = x_0$处的增量$\Delta f = f(x) - f(x_0)$
- $f(x) - f(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$
- 逐项求导$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1}$
- 当$x \to x_0$，$m > 1$的项都趋于0，$f'(x_0) = a_1$
- 再次求导，得$f''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m (x - x_0)^{m-2}$
- 当$x \to x_0$，$m > 2$的项都趋于0，$f''(x_0) = 2a_2$
- 如此类推，$f^{(m)}(x_0) = m!\, a_m$

泰勒展开

- 非幂函数（譬如$\sin x, e^x$）如何作幂级数展开？

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$

- 如果定义第0阶导数$f^0(x)$就是$f(x)$本身，则：

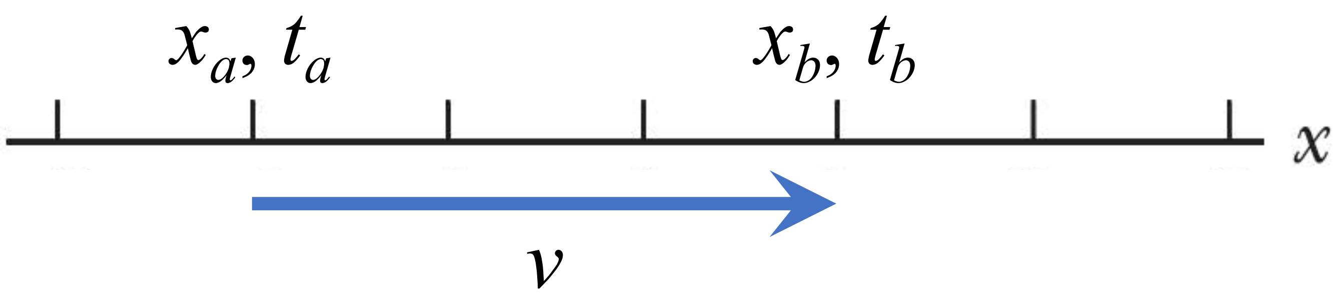
$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$$

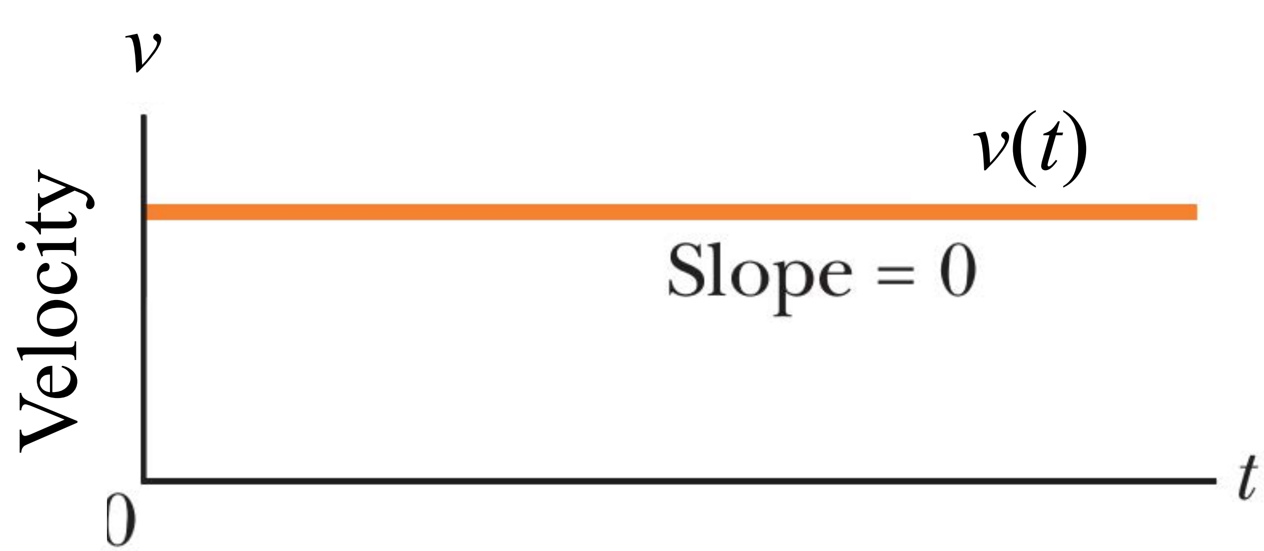
§5 积分

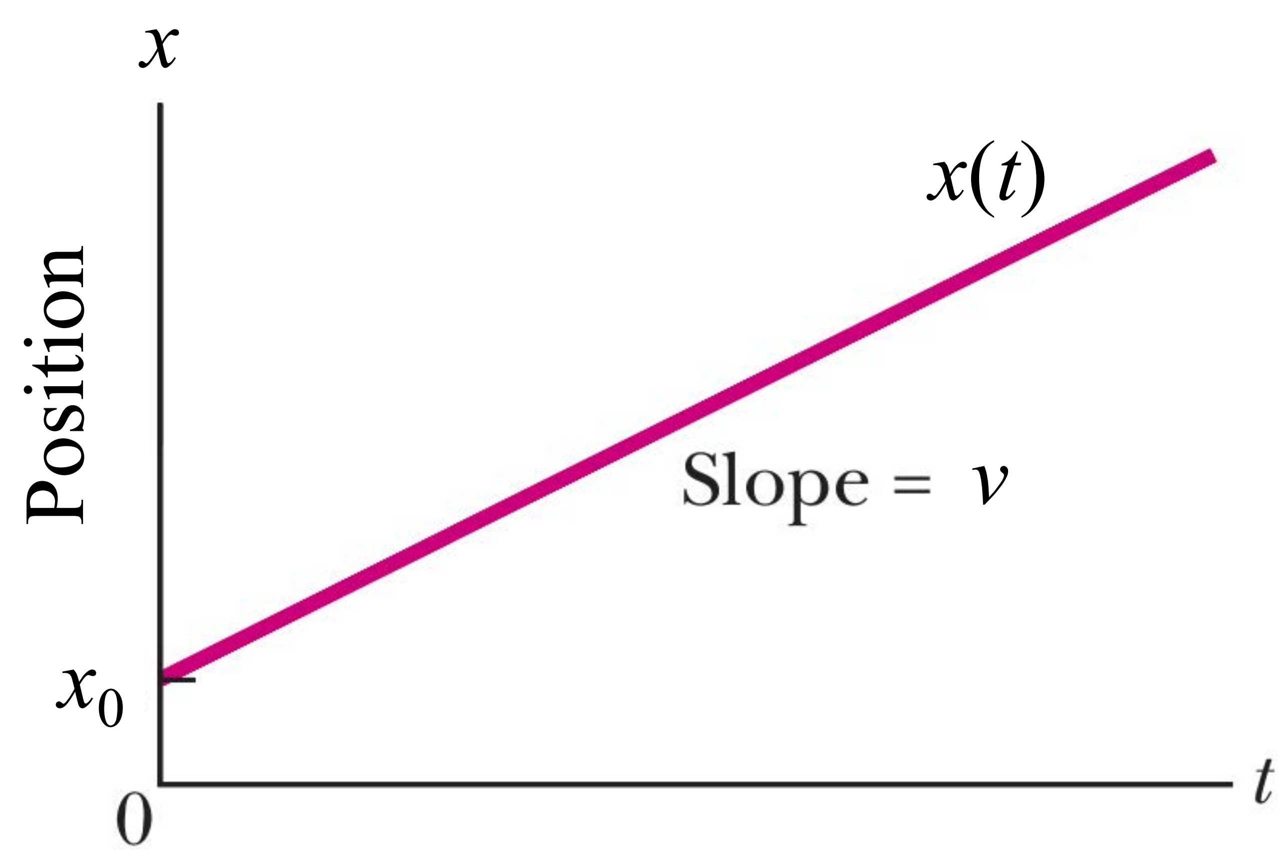
物理学中积分的实例

- 匀速直线运动的路程

$$\Delta x = v(t_b - ta)$$

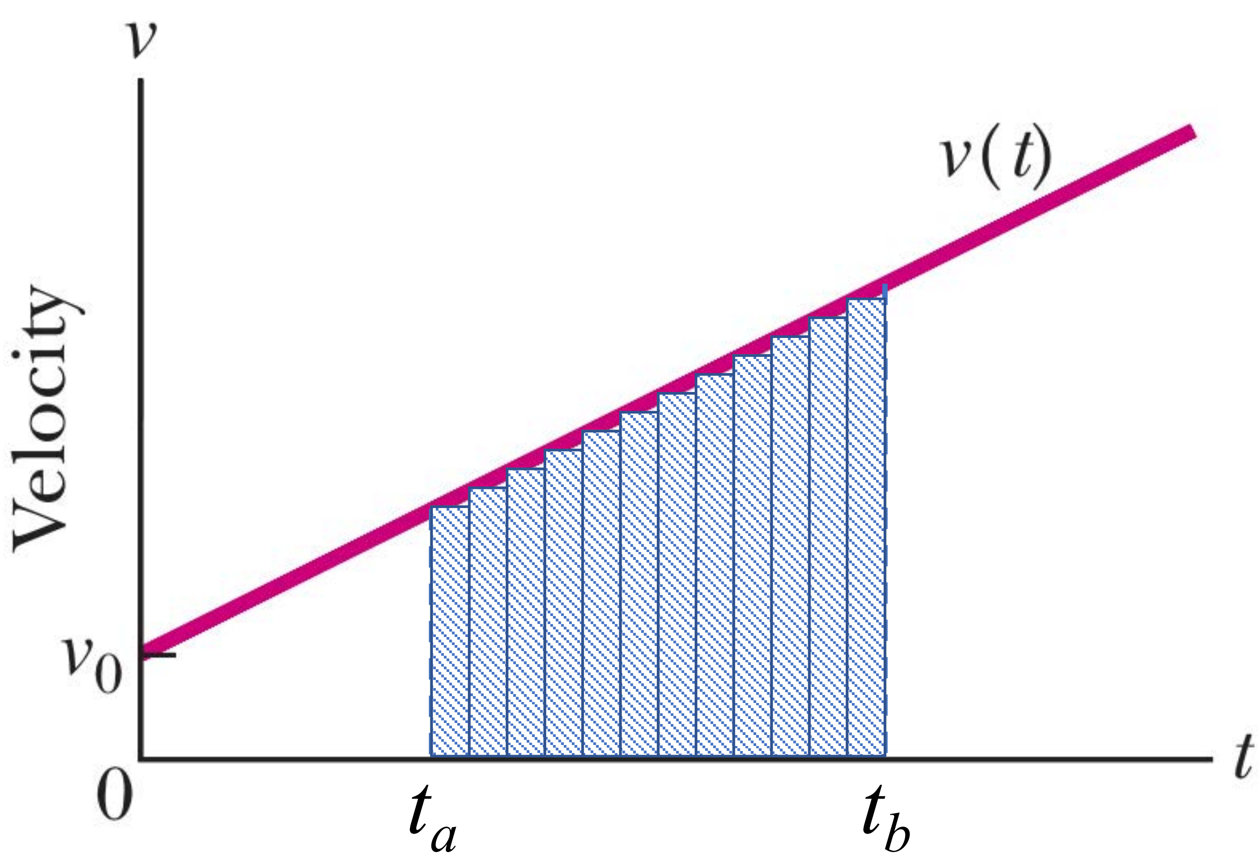


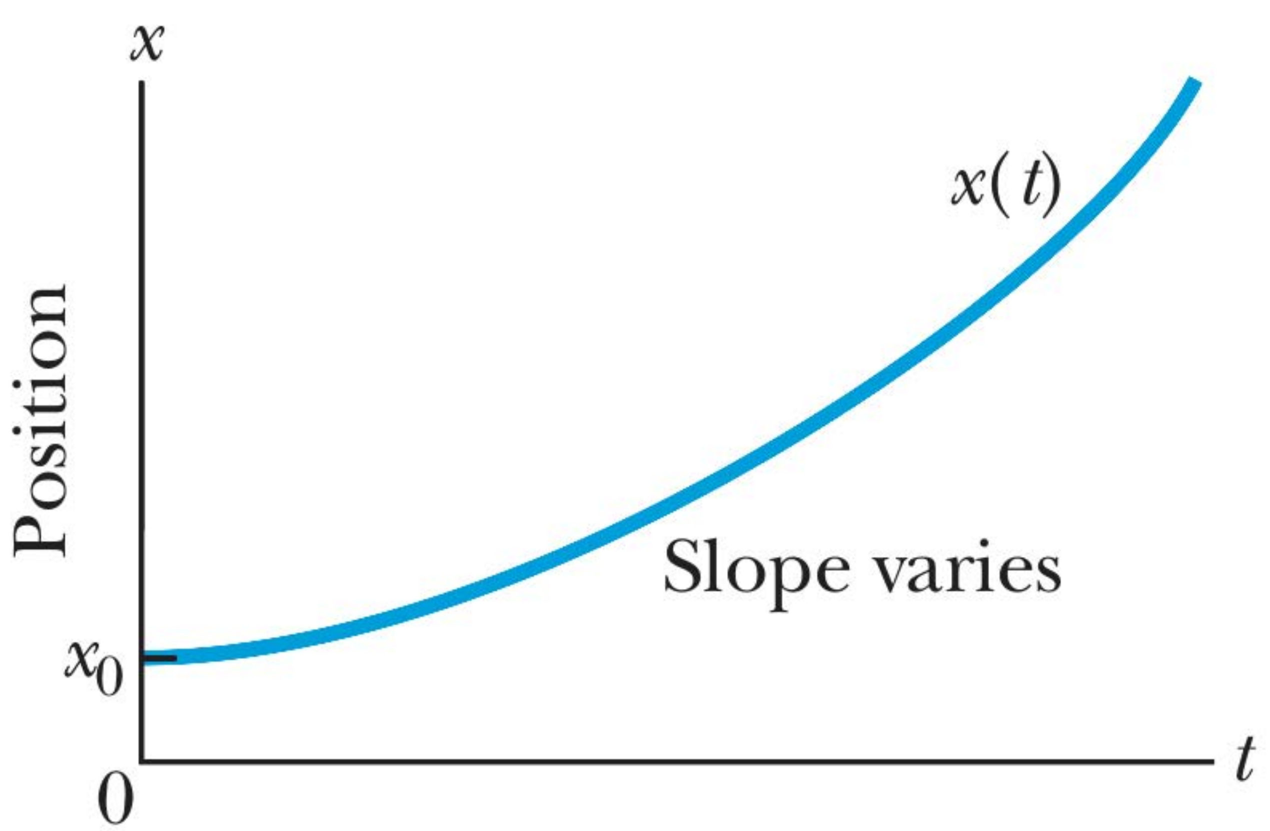




物理学中积分的实例

- 变速直线运动的路程 $v = v(t)$



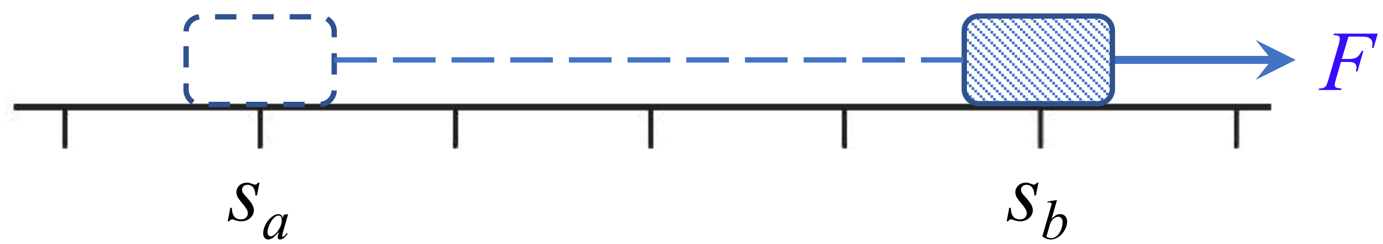


$$\Delta x = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$$

物理学中积分的实例

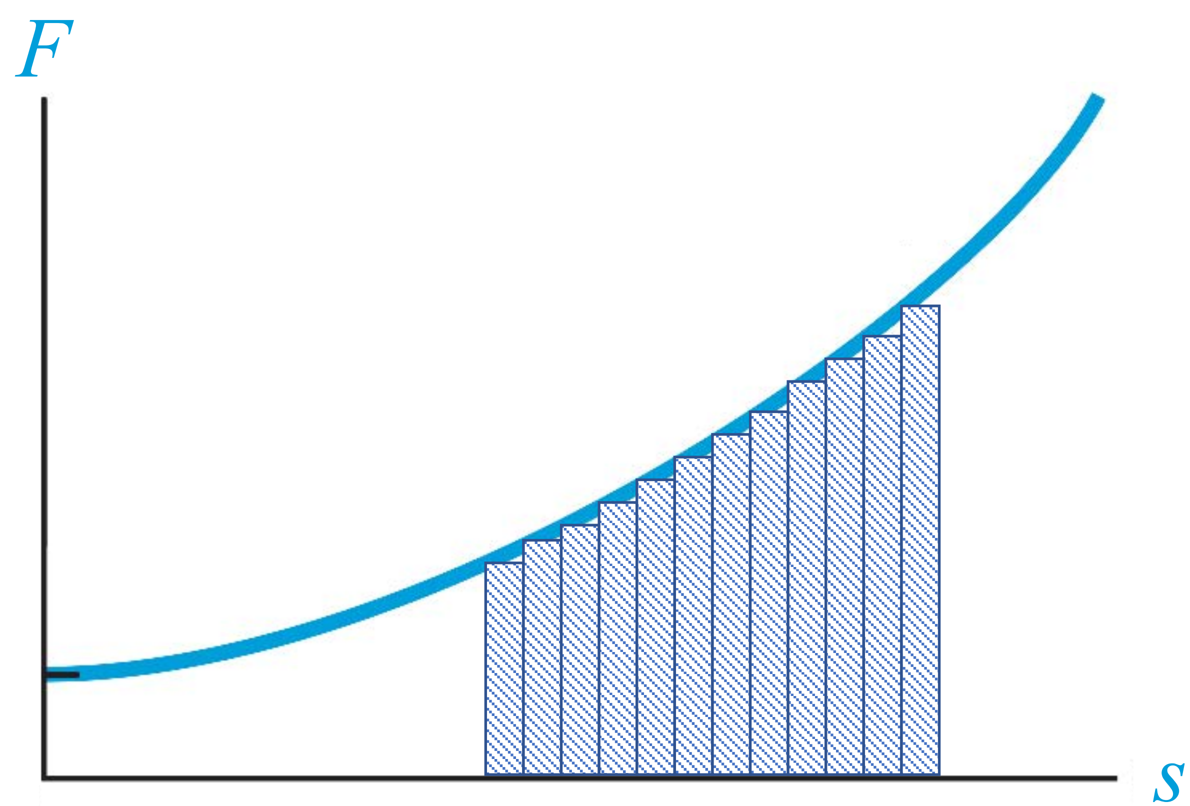
- 恒力的功

$$A = F(s_b - s_a)$$



- 变力的功$F = F(s)$

$$A = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} F(s_i)\Delta s$$



定积分

- 数学定义：给定一个函数$f(x)$， 用 $x=x_1(=a)$, x_2, x_3, …， $x_n(=b)$ 把自变量 x 在 $(b-a)$ 区间内的数值分成 n 小段，设每小段的大小为 Δx , 求 $n\to\infty$ 、 $\Delta x\to 0$ 时 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$的极限。
- 通常把这类形式的极限用符号 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x)$来表示，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x) = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x)$叫 $x=a$ 到 $x=b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的**定积分**，$f(x)$ 叫做**被积函数**， b 和 a 分别叫做定积分的**上限**和**下限**。

定积分

变速直线运动的路程

$$\Delta x = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t = \int_{t_a}^{t_b} v(t)\,\mathrm{d}(t)$$

变力的功

$$A = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} F(s_i)\Delta s = \int_{s_a}^{s_b} F(s)\,\mathrm{d}(s)$$

定积分基本定理

- 如果被积函数 $f(x)$ 是某个函数 $\phi(x)$ 的导数，即

$$f(x) = \phi'(x)$$

则在 $x = a$ 到 $x = b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的定积分等于 $\phi(x)$ 在这区间内的增量即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x) = \phi(b) - \phi(a)$$

定积分基本定理

- 在 $a \leq x \leq b$ 区间内任选一点 x_i，首先考虑 $\phi(x)$ 在 $x = x_i$ 到 $x = x_i + \Delta x = x_{i+1}$ 区间的增量 $\Delta\phi(x_i) = \phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)$：

$$\Delta\phi(x_i) \approx \frac{\Delta\phi(x_i)}{\Delta x}\Delta x$$

- 当 $\Delta x \to 0$ 时，我们可用 $\phi(x)$ 的导数 $\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$ 代替 $\frac{\Delta\phi}{\Delta x}$，故 $\Delta\phi(x_i) = \phi'(x_i)\Delta x = f(x_i)\Delta x$
- 把 $a \leq x \leq b$ 区间分成 $n-1$ 小段，每段长 Δx.

定积分基本定理

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x) = \lim_{0\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}} [f(x_1)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x]$$

$$= \lim_{0\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}} [\Delta\phi(x_1) + \Delta\phi(x_2) + \cdots + \Delta\phi(x_{n-1})]$$

$$= \lim_{0\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}} \left\{\begin{matrix}[\phi(x_2) - \phi(x_1)] + [\phi(x_3) - \phi(x_2)] + \cdots \\ +[\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})]\end{matrix}\right\}$$

$$= \phi(x_n) - \phi(x_1) = \color{red}{\phi(b) - \phi(a)}$$

不定积分及其运算

- 数学定义：通常把一个函数 $f(x)$ 的逆导数的通式 $\phi(x)+C$ 叫做它的不定积分，并记作$\int f(x)\,\mathrm{d}(x)$，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}(x)=\phi(x)+C$$

- 因在不定积分中包含任意常量，它代表的不是个别函数，而是一组函数

不定积分及其运算

- 定理一：如果 $f(x) = au(x)$ （ a 是常量），则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}(x) = a\int u(x)\,\mathrm{d}(x)$$

- 定理二：如果 $f(x) = u(x) \pm v(x)$，则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}(x) \pm \int u(x)\,\mathrm{d}(x)$$

通过不定积分计算定积分

- 不定积分中的任意常量能够被消除

$$\int f(x)\,\mathrm{d}(x) = \phi(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x) = \phi(b) - \phi(a)$$

南京大学电子科学与工程学院

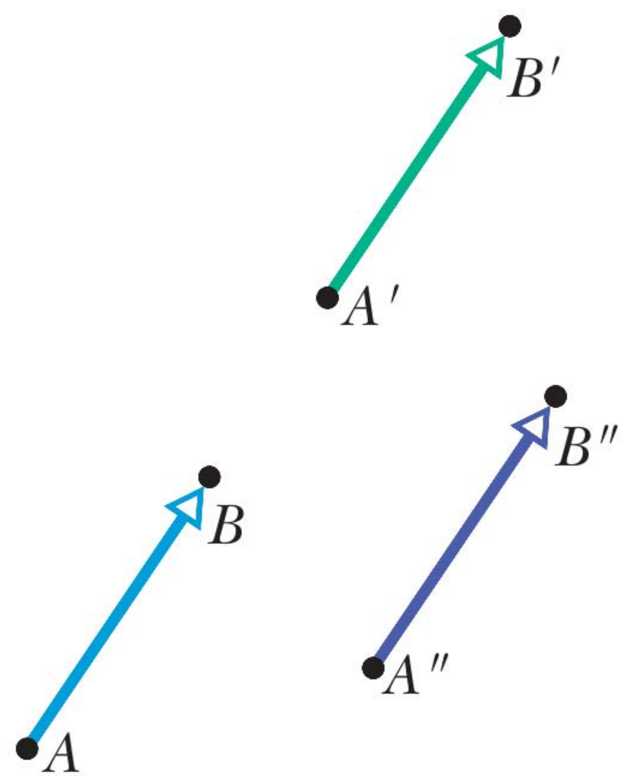
大学物理I

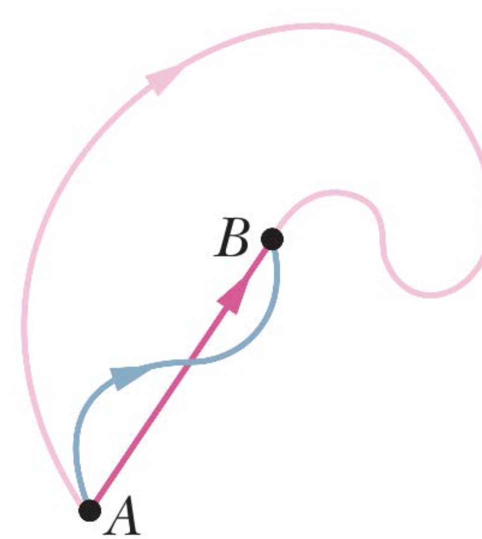
附II 矢量

王启晶
邮箱：qijingwang@nju.edu.cn
办公室：物理楼254

矢量及其解析表示

- 物理学中有各种物理量，像质量、密度、能量、温度、压强等，在选定单位后仅需用一个数字来表示其大小，这类物理量叫做**标量**（scalar）；而像位移、速度、加速度、动量、力等，除数量的大小外还具有一定的方向，这类物理量叫做**矢量**（vector）。





矢量及其解析表示

- **矢量**必须遵从一定的合成法则与随坐标变换的法则。

- 用直角坐标系来描述空间和表示其中的矢量，是最基本的方法。n 维的直角坐标系有 n 个相互垂直的坐标轴。

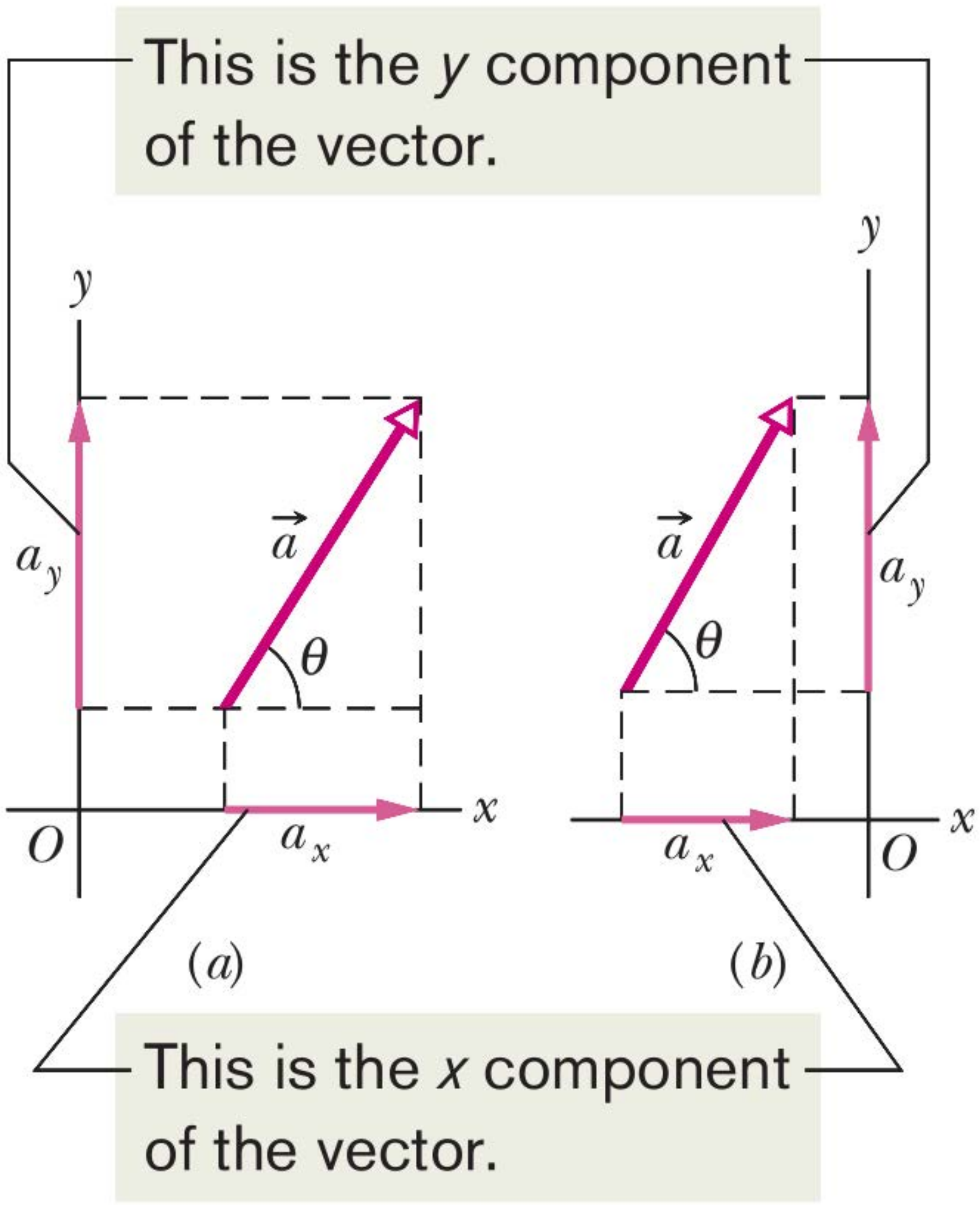
矢量及其解析表示

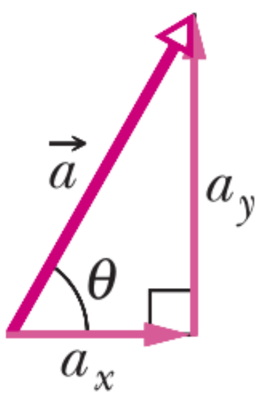
- 二维空间

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$a_x = a\cos\theta$$

$$a_y = a\sin\theta$$

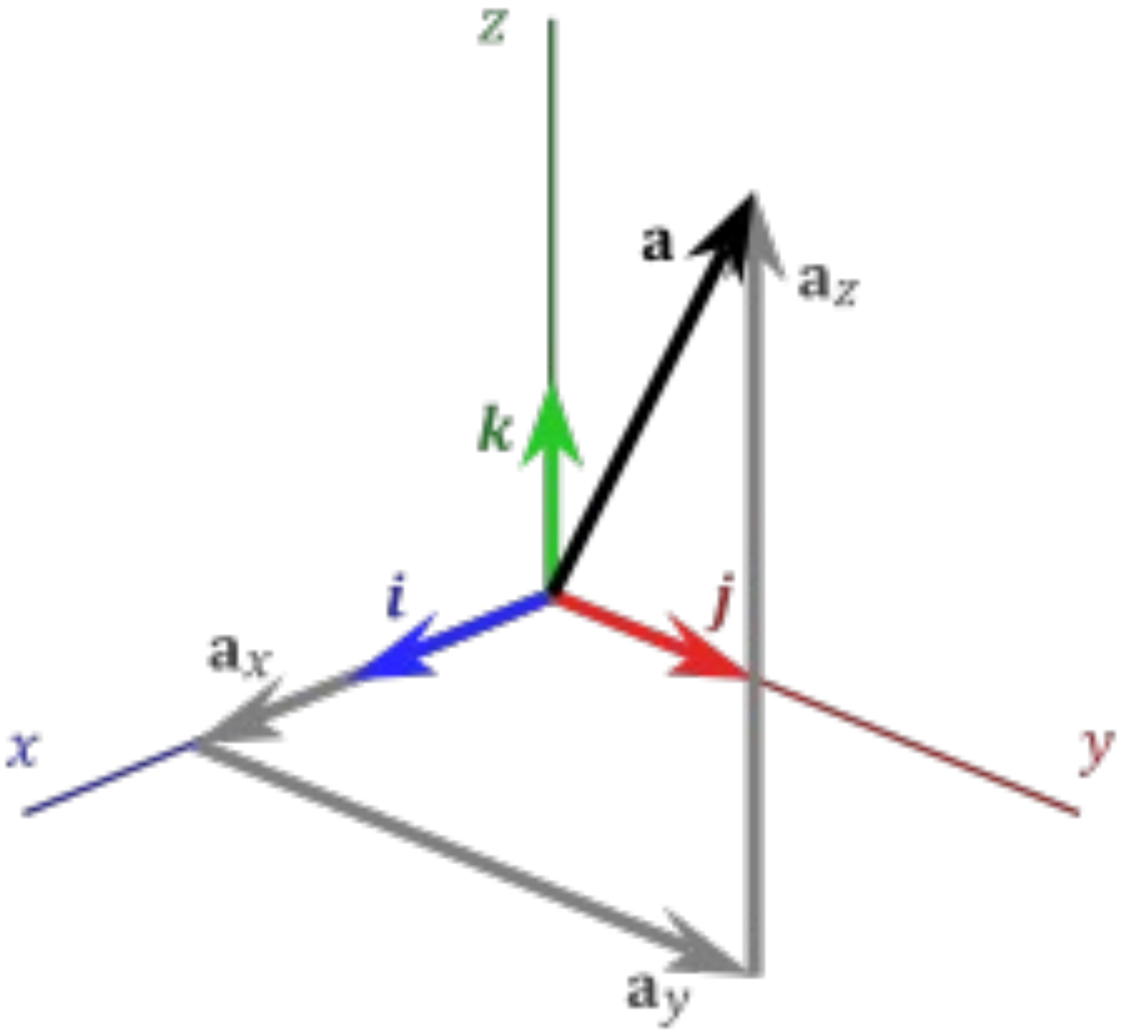




$$a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2$$

矢量及其解析表示

- 三维空间



$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = a\cos\alpha$$

$$a_y = a\cos\beta$$

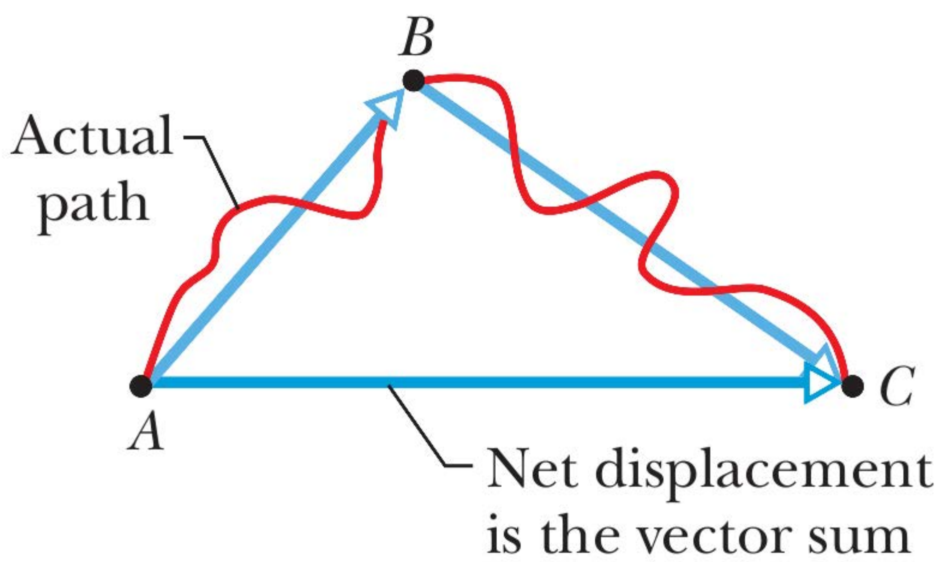
$$a_z = a\cos\gamma$$

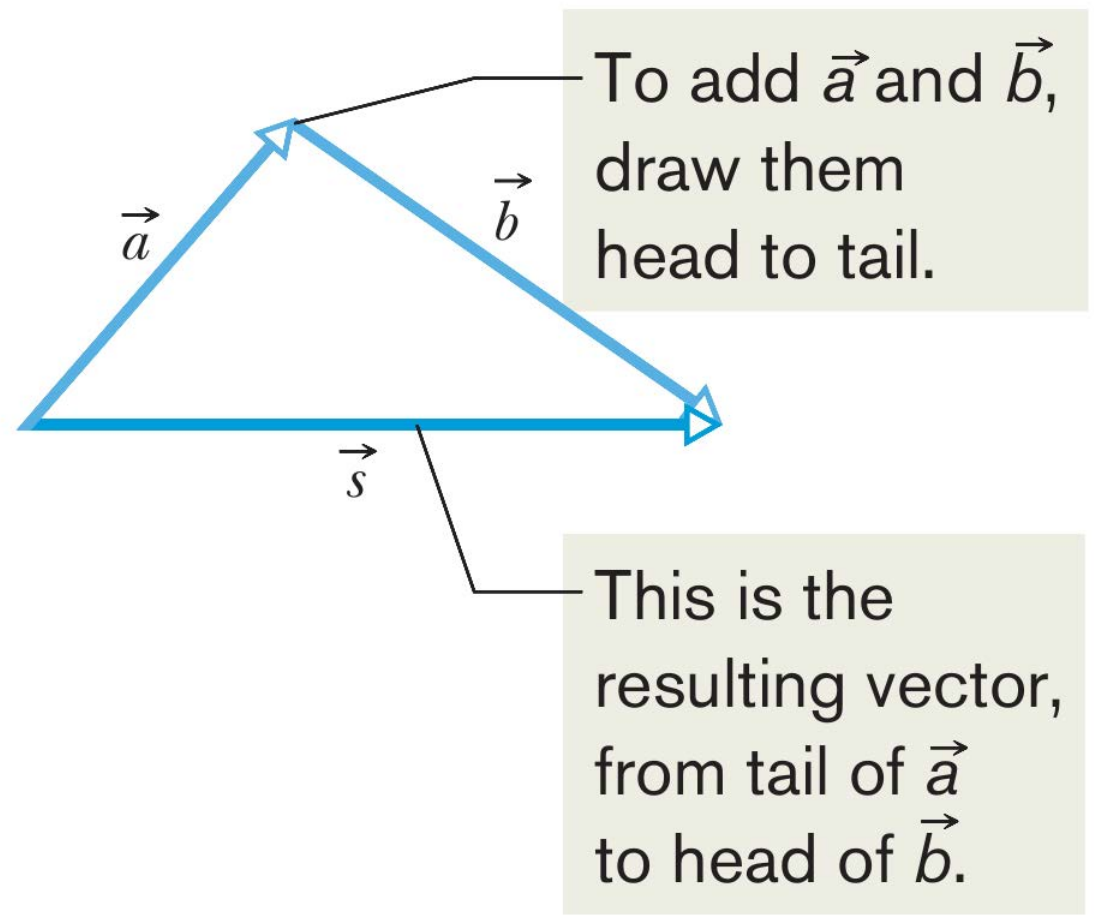
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2$$

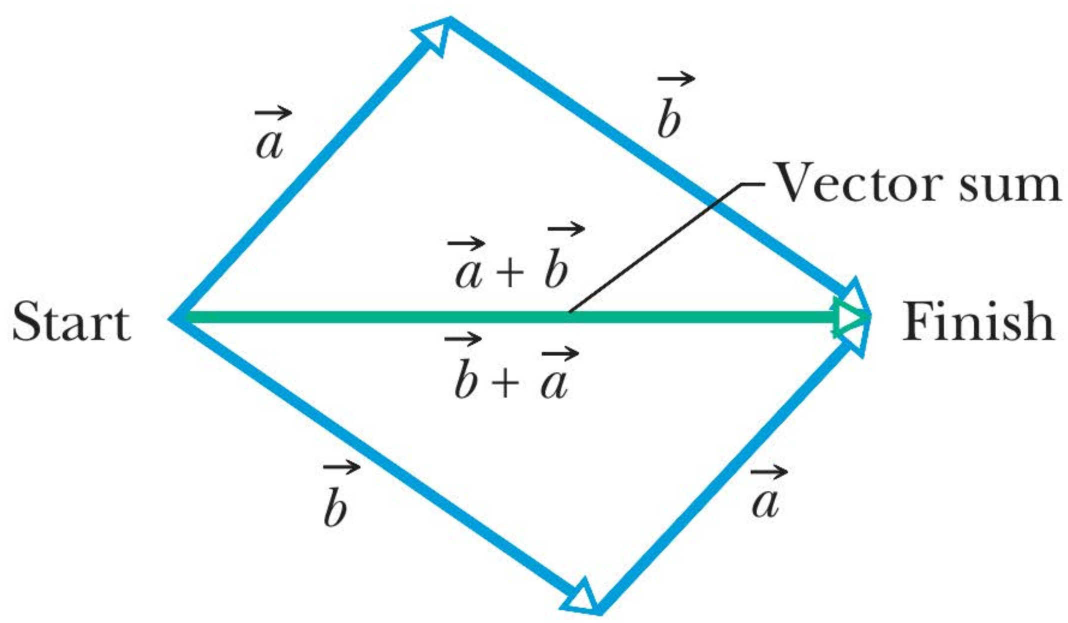
矢量的加减法

- 用直角坐标系来描述空间和表示其中的矢量，是最基本的方法。n维的直角坐标系有n个相互垂直的坐标轴。我们先从二维空间说起。

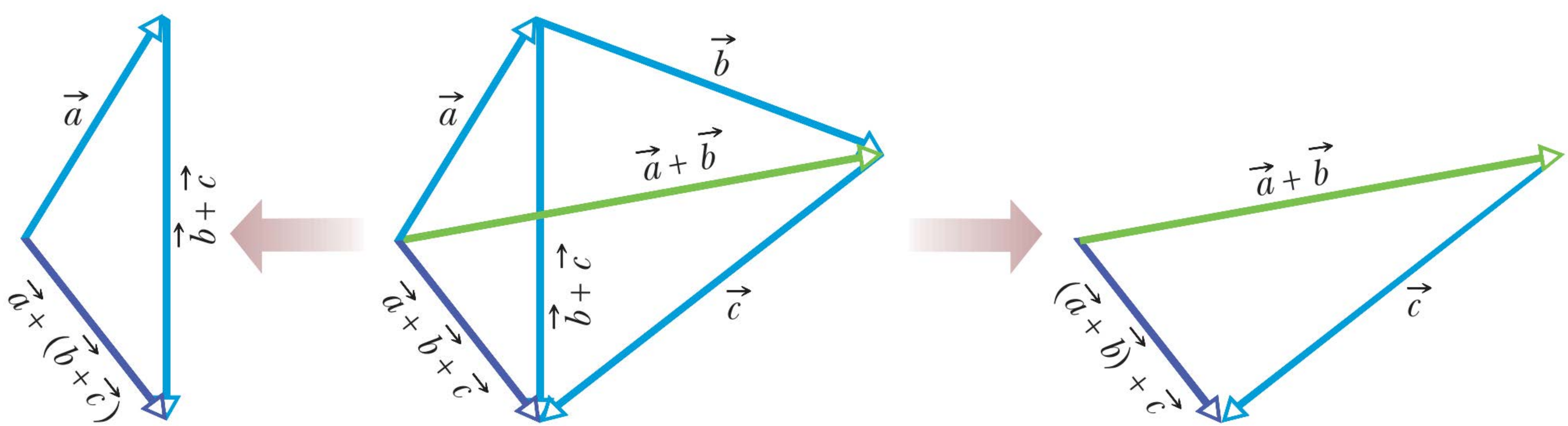




矢量的加减法

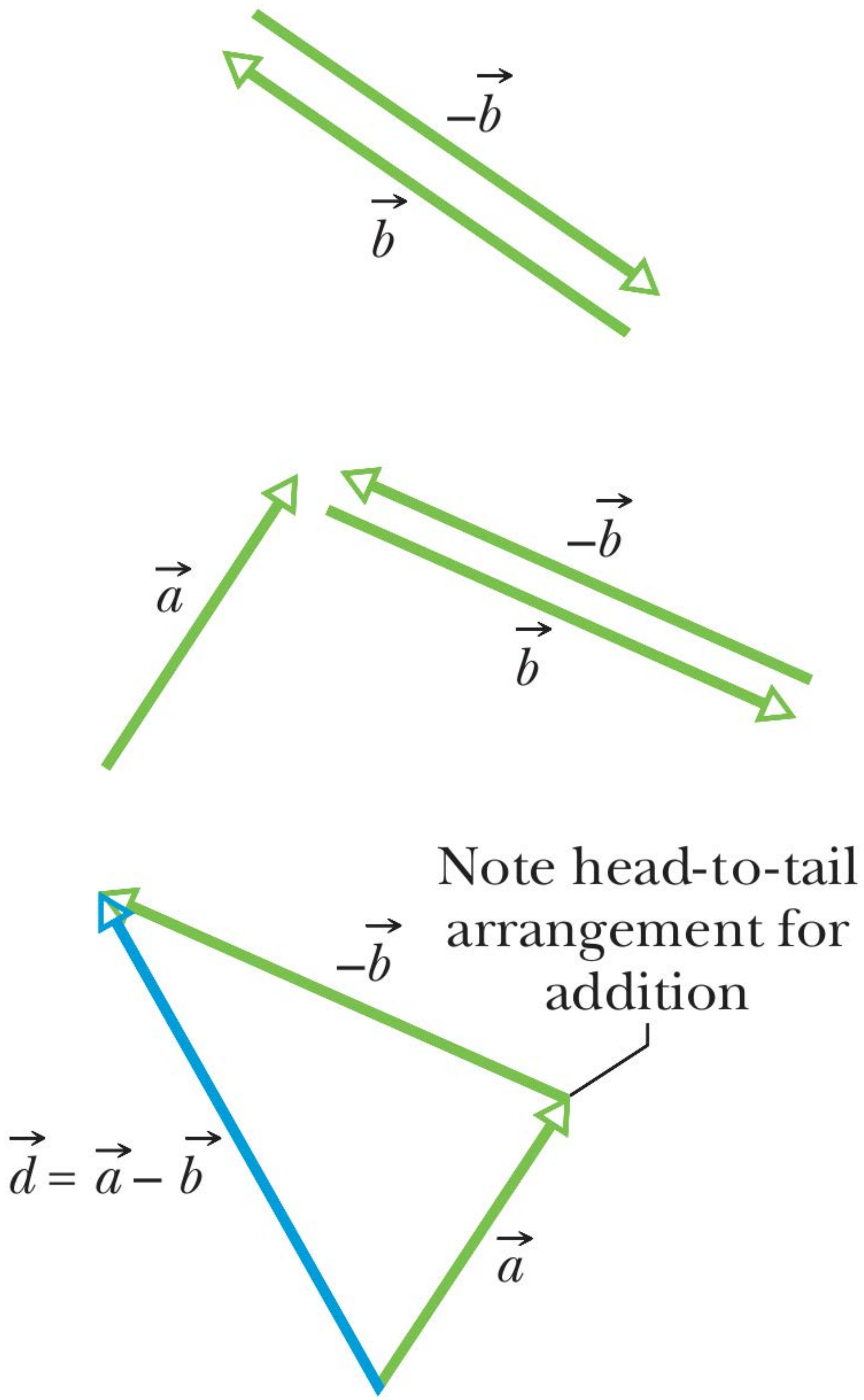


$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\text{（交换律）}$$



$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}\text{（结合律）}$$

矢量的加减法



$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$$

矢量的标积

- 设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个任意矢量，它们的标积（常用 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 表示，又称**点乘**）的解析定义为：

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = axb_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- 交换律

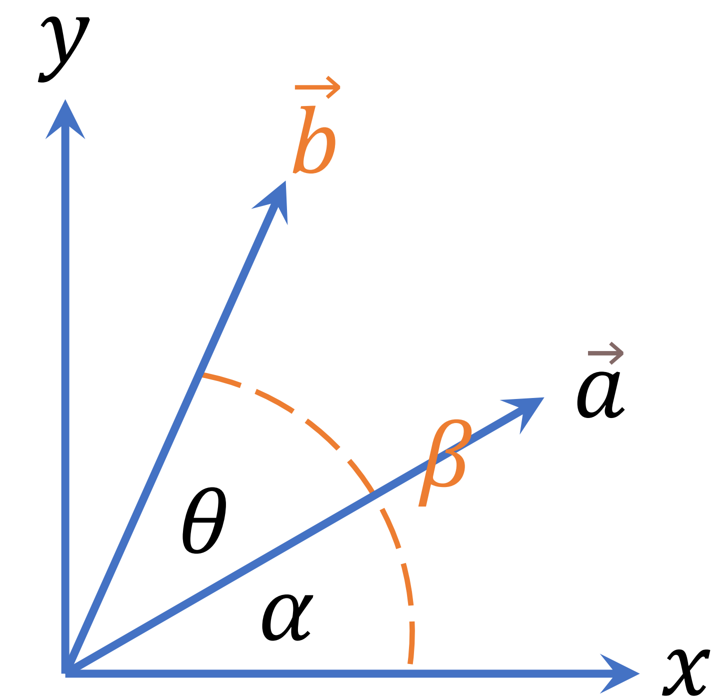
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

- 分配律

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

矢量的标积

- 将 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共起点



$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= axb_x + a_y b_y \\
&= ab(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
&= abcos(\beta - \alpha) \\
&= ab\cos\theta
\end{aligned}
$$

- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 平行时， $\theta = 0$ ， $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$ ；

  $\theta = \pi$ ， $\vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$ ；

- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 垂直时， $\theta = \frac{\pi}{2}$ ， $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$。

矢量的矢积

- 设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个任意矢量，它们的标积（常用 $\vec{a}\times\vec{b}$ 表示，又称**叉乘**）的解析定义为：

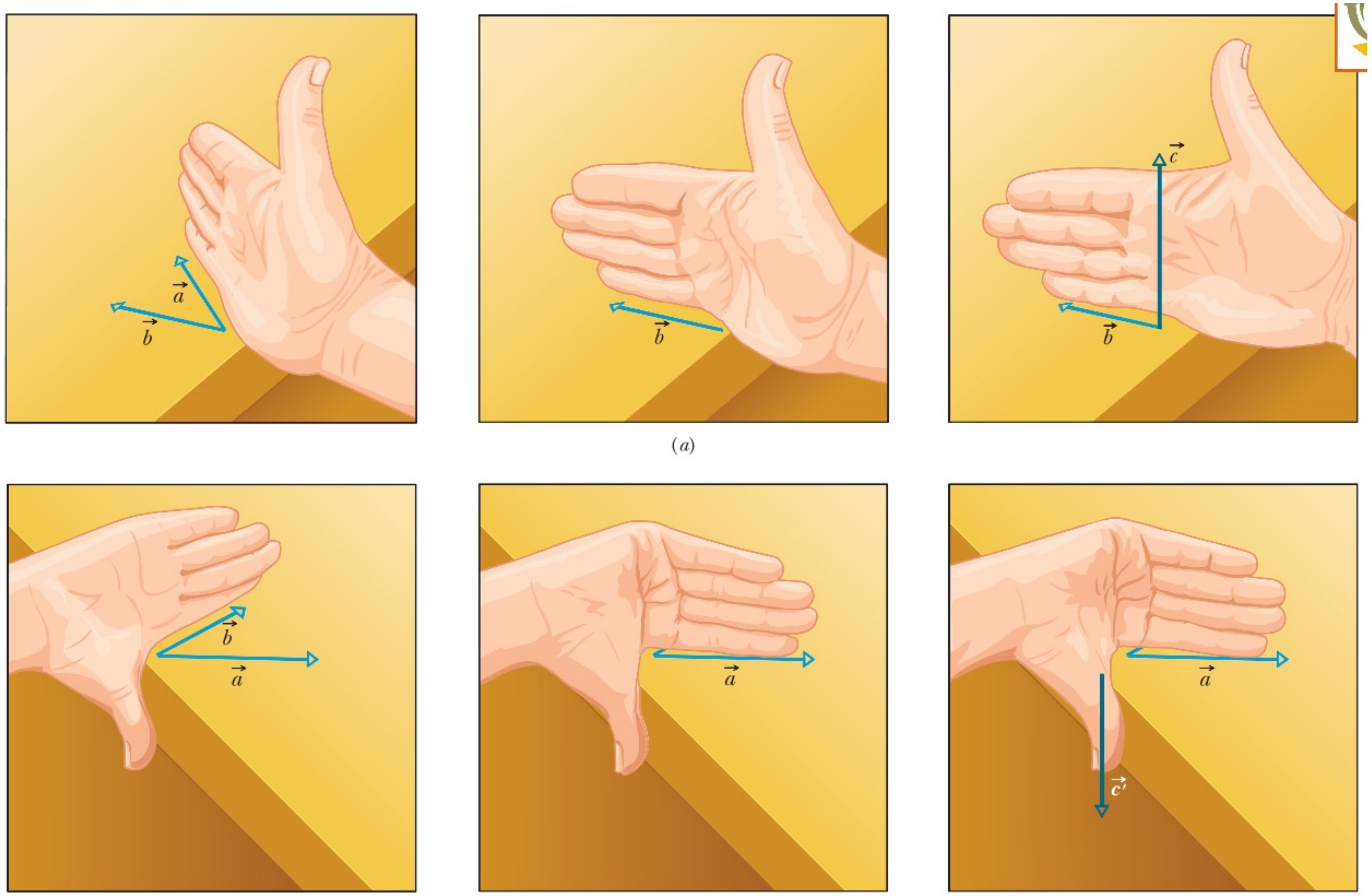
$$\vec{a}\times\vec{b}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

$$=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{pmatrix}$$

矢量的矢积

- 反交换律 $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$



- 分配律 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

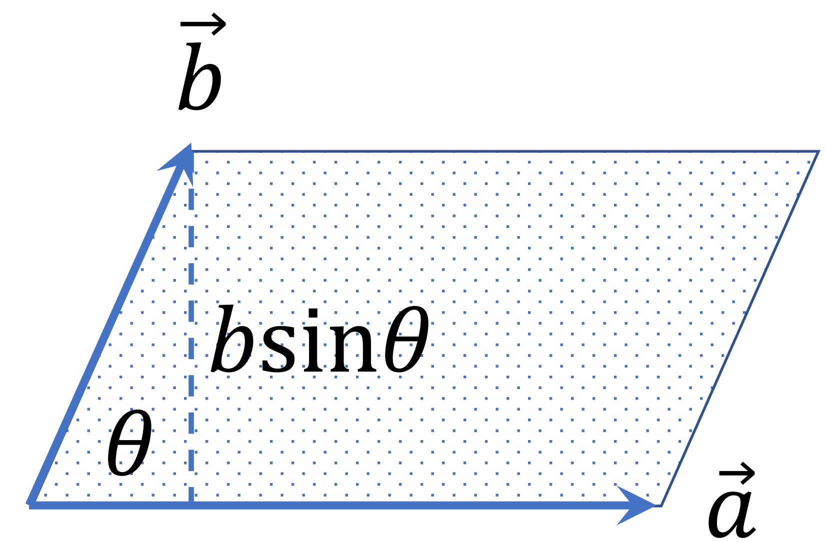
矢量的矢积

- $\vec{a}\times\vec{b} = (axb_y - a_yb_x)\vec{k}$

$$= ab(\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta)\vec{k}$$

$$= ab\sin(\beta - \alpha)\vec{k}$$

$$= ab\sin\theta\vec{k}$$



- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的矢积 $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ 的数值 $c = ab\sin\theta$
- $\vec{c}$ 的方向与$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 组成的平面垂直
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 平行或反平行时，$\theta = 0$ 或 π，$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = 0$；
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 垂直时，$\theta = \frac{\pi}{2}$，$\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}|$。

矢量的三重积

- 三重标积

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$$

- 三重矢积

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$