

# 第八章 恒定电流的磁场

§8-0 那段历史

§8-1 恒定电流

§8-2 磁感应强度

§8-3 毕奥-萨伐尔定律

§8-4 恒定磁场的高斯定理和安培环路定理

§8-5 带电粒子在电场和磁场中的运动

§8-6 磁场对载流导线的作用

§8-7 磁场中的磁介质

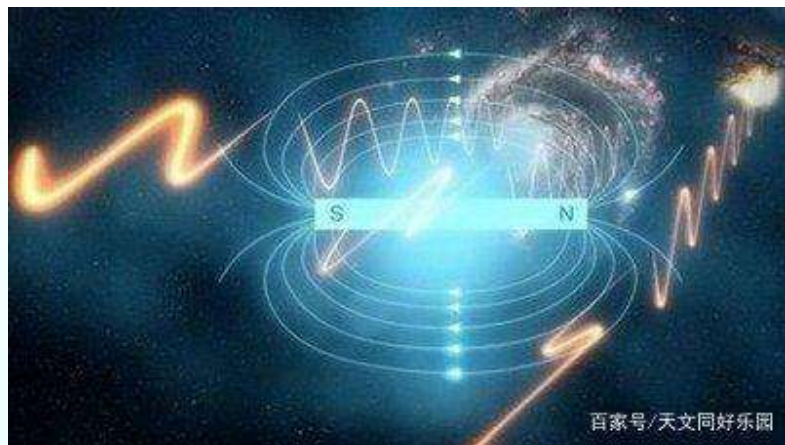
§8-8 有磁介质时的安培环路定理和高斯定理 磁场强度

## § 8-1 那段历史

- 系统的电磁现象研究开始于17世纪，以吉尔伯特1600年发表《论磁、磁体和地球作为一个巨大磁体》，概述讨论了各种磁现象，也对电现象进行了阐述，吉尔伯特认为电和磁之间是没有关系的。
- 库仑也认为电荷磁之间没有关系，他于1785发明库仑扭秤之后，不仅建立了电的库仑定律还建立了磁的库仑定律

$$F = k \frac{Q_{m1} Q_{m2}}{r^2}$$

其中 $Q$ 和电荷类比，叫“磁荷”。其后在磁的库仑定律的基础上建立了一套与静电学“完全类似”的理论。但是这个理论存在一个“致命的缺陷”（是什么？）。



- 磁的本质是什么，有什么属性和作用规律
- 磁和电有没有关系，对磁怎么做数学描述
- 微观上如何理解，有没有类似“电荷”的微观单元

- 有人相信电和磁之间有关联，并一直在努力寻找。1731年有个英国商人说雷电使自己的一箱新的刀叉带上了磁性，1751年，富兰克林发现莱顿瓶放电让缝纫针磁化了。1774年，德国一家研究所有奖征解“电力和磁力是否存在着实际的和物理的相似性”，只是在**电池没有发明的情况下**，很难证明。
- 18世纪末，电学研究从静电领域发展到电流领域，关键在于**电池**的发明。
- 1780年，伽伐尼解剖青蛙时发现了青蛙的电效应，只是他认为这是由于青蛙自身的某种动物电，但对后面的人起到了启发的作用，很多人开始从事这项实验。
- 意大利哲学家伏打发现使用不同的金属接触青蛙，青蛙会发生痉挛，使用莱顿瓶接触青蛙也会产生相同的效果，证明不同金属导致了电效应。**1800年**，他发表了自己的研究成果，提出了金属接触说。把铜片和锌片夹在盐水浸湿的纸片中，重复折叠构成了**伏打电堆**。把锌片和铜片插入盐水或者稀酸中，构成了**伏打电池（磁研究的关键轮子）**
- 伏打电池的发明，提供了产生恒定电流的电源，使人们有可能研究电流的规律和各种电流效应，从此电学进入飞速发展的时期——研究电流（流电学）和电磁效应（电磁学）的新时期。

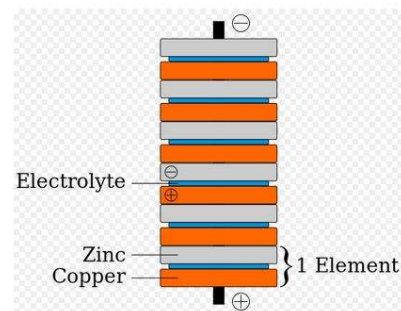


伽伐尼



伏打

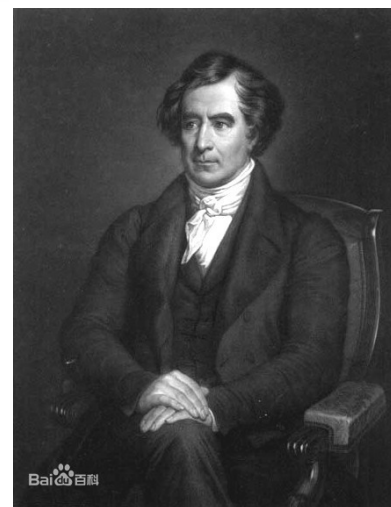
## 伏打电堆



- 1805年，两个德国人把伏打电堆悬挂起来，企图观察电堆在地磁作用下会不会改变取向，**很难**。
- 1820年**，丹麦奥斯特在一个讲演的时候，演示出了电流的磁效应，通电导线使磁针发生了摆动，并且他逐步认识到，直径大的金属丝比直径小的效果好，也不需要使用贵金属，只要是金属就可以。（**他共做了六十多次试验**）。他发表了相关成果，引起了电流磁效应研究的热潮。
- 法国阿拉果（D. F. J. Arago）于1820. 9. 4月向法国科学院报告并演示了奥斯的实验。安培、毕奥、萨伐尔等人立即开始重复奥斯特实验并发表其成果。



奥斯特



阿拉果



- 1820. 9. 18-1820. 10. 9之间，安培连续报告了他的研究成果，包括确定磁针偏转方向的右手定则、分子电流（永磁体）的磁效应、地磁效应源于从东到西的圆周电流、通电直导线同向相吸，异向相斥。
- 1825年，塞贝克做“磁雾”实验，反对安培一切归结于电的观点，用丝线吊起磁铁，在金属旁摆动，以摆动的快速衰减证明磁雾的存在。
- 1821年，毕奥和萨伐尔通过磁针周期振荡发现了直线电流对磁针的作用定律，这个作用正比于电流的强度，反比于它们之间的距离（平方反比），作用力的方向垂直于磁针到导线的连线（已经涉及到磁相互作用的本质了）。（拉普拉斯假设电流作用可以看成是各个电流源单独作用的总和）。毕奥不认同安培的观点，认为电磁力是一种基本力。



安培



塞贝克



毕奥

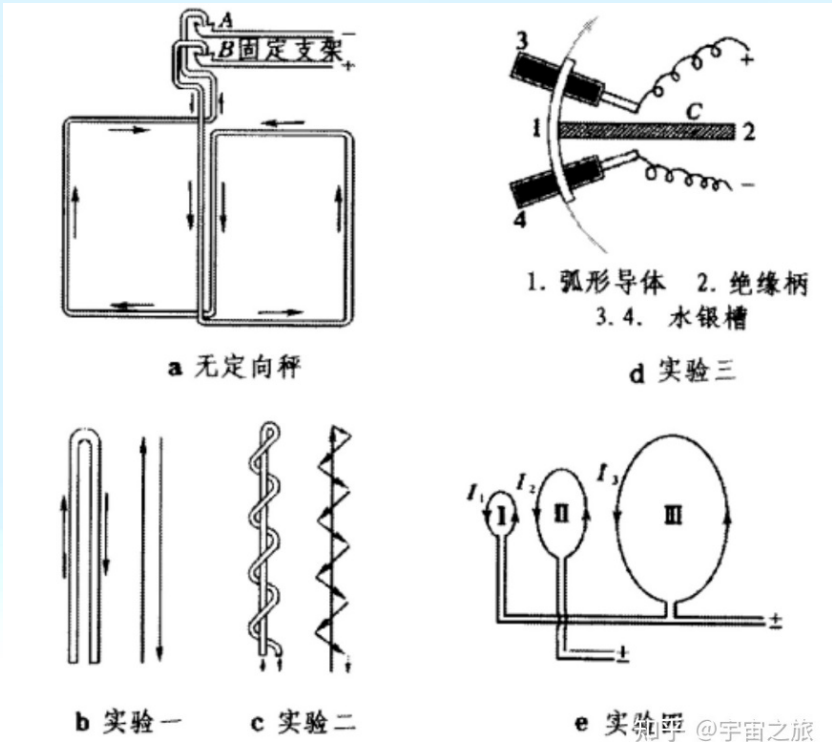


萨伐尔

通过四个零值实验（定量研究电流之间的相互作用），大约在1827，安培得出了他的电动力学公式，两个电流元之间的相互作用力为：

$$f = \frac{ii' ds ds'}{r^2} (\sin\theta \cdot \sin\theta' \cdot \cos\omega - \frac{1}{2} \cos\theta \cdot \cos\theta')$$

这个公式为电动力学提供了基础。从形式上看，与万有引力公式很相似，他也是基于类比的手段得出，他认为电流元之间的相互作用是电动力学的核心，电流元相当于力学中的质点，它们之间的电动力是一种超距作用，像万有引力一样。



- 实验一：证明强度相等、方向相反的两个靠的很近的电流对另一个电流产生的吸引力和排斥力绝对值相等
- 实验二：证明电动力的矢量性
- 实验三：研究电动力的方向
- 实验四：检验电动力和电流及距离的关系

## § 8-1 恒定电流

### 一、电流 电流密度

电流  $I$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

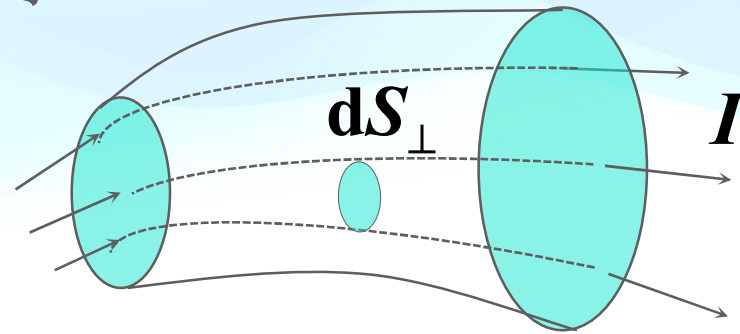
标量，方向

电流密度矢量  $j$

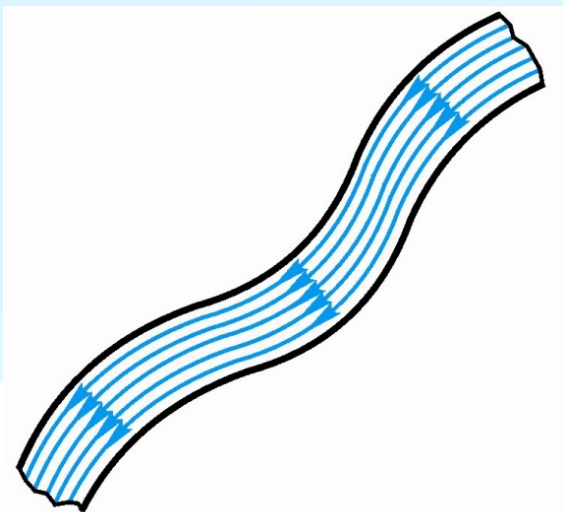
$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

方向：正电荷运动的方向。

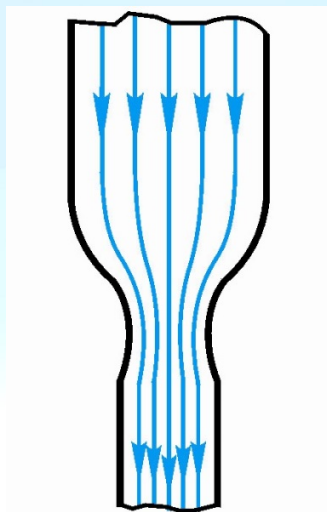
大小：等于单位时间内从垂直于电荷运动方向的单位截面上流过的电荷量。



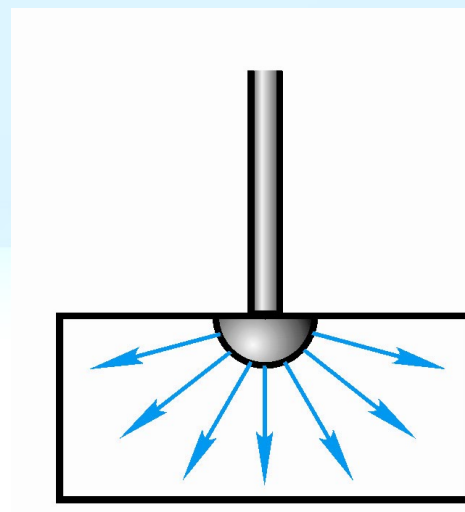
## 几种典型的电流分布



粗细均匀的  
金属导体



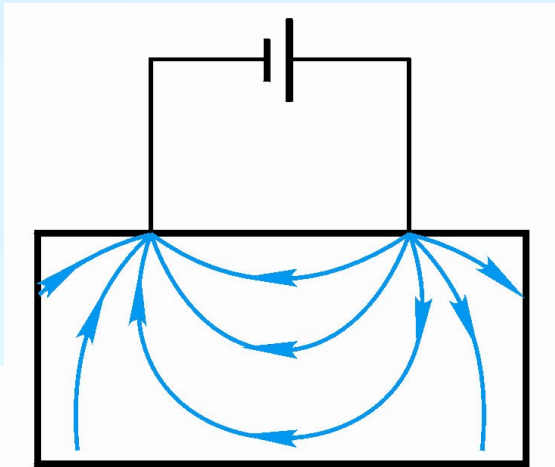
粗细不均匀  
的金属导线



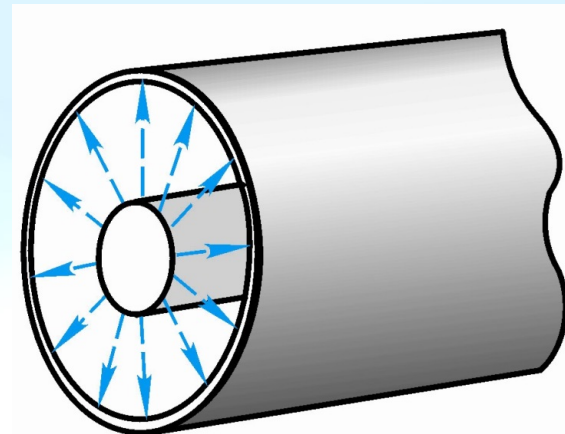
半球形接地电  
极附近的电流



## 几种典型的电流分布



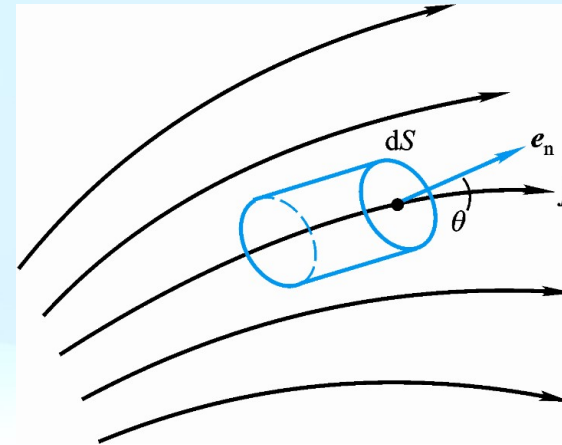
电阻法勘探矿藏  
时的电流



同轴电缆中的  
漏电流

## 电流与电流密度的关系

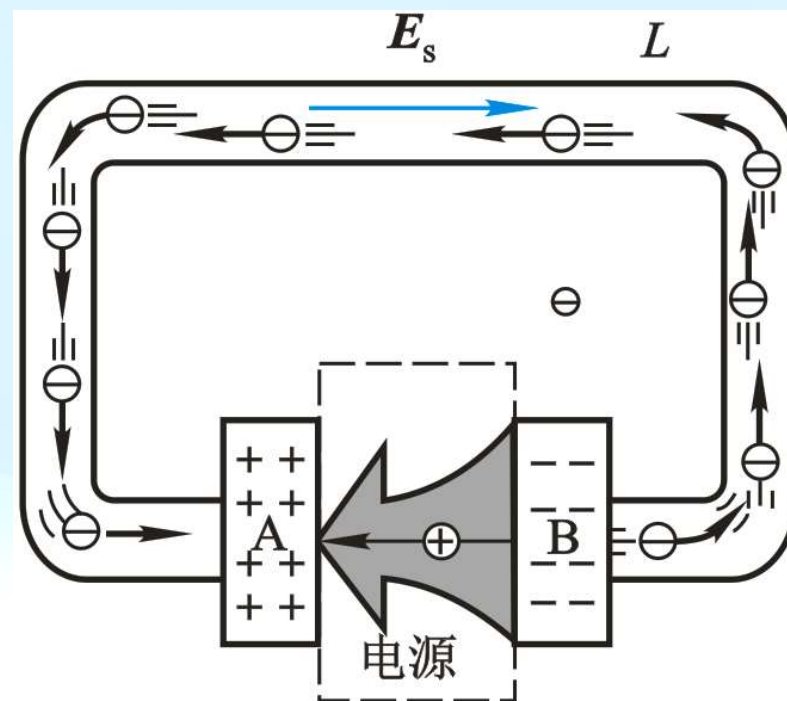
$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{e}_n dS = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



电流就是电流密度穿过某截面的通量。

## 二、电源的电动势

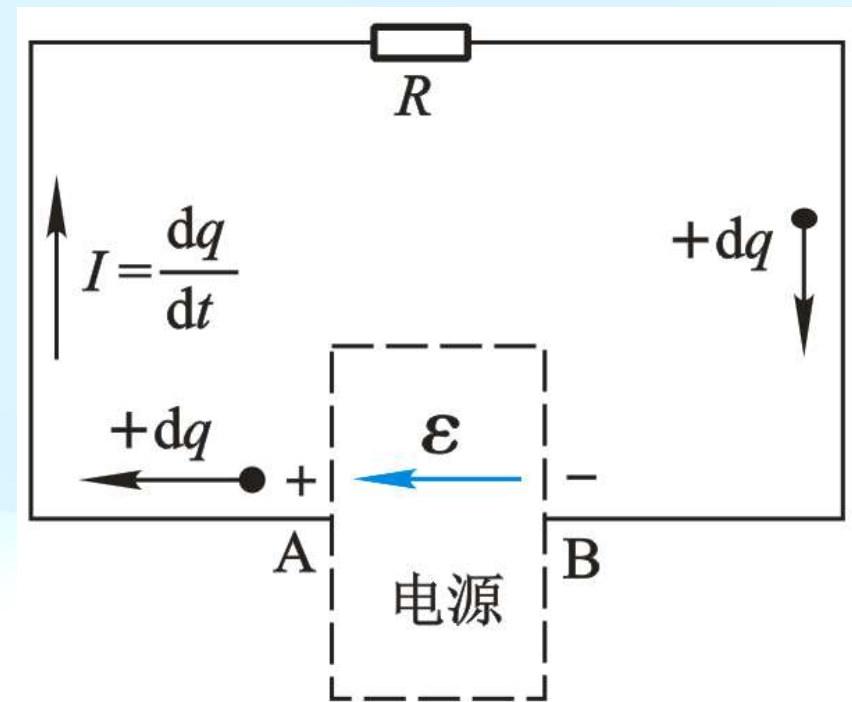
导体内形成持续电流的条件：  
载流子、电势差



- 电源——提供非静电力的装置，把正电荷从电势低的地方（电源负极）移到电势高的地方（电源正极）。
- 电源把其它形式的能量转化为电势能。如化学电池、发电机、热电偶、硅太阳能电池、核反应堆等。

电动势:  $\varepsilon = \frac{dA}{dq}$

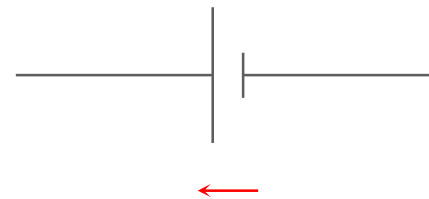
电动势 $\varepsilon$ 等于将单位正电荷从电源负极沿内电路移到正极过程中非静电力做的功。



非静电场的场强:  $\vec{E}_k = \frac{\vec{F}_k}{q}$

$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$  标量, 方向  
(内电路)

电源外  $\vec{E}_k = 0 \Rightarrow \varepsilon = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$



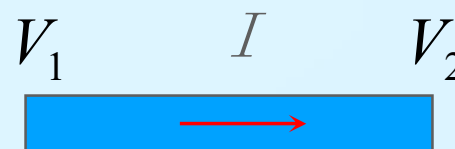


### \*三、欧姆 (G. S. Ohm) 定律

#### 1. 一段含源电路和闭合电路的欧姆定律

一段导体的欧姆定律:

$$V_1 - V_2 = RI$$



导线的电阻:  $R = \rho \frac{l}{S}$

电阻率:  $\rho$  单位:  $\Omega \cdot \text{m}$

电导率:  $\gamma = \frac{1}{\rho}$  单位:  $\text{S/m}$

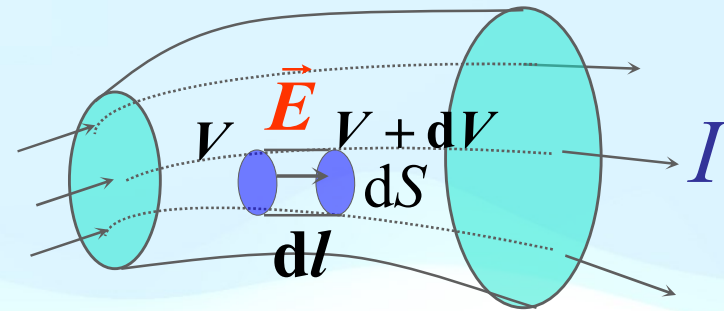
## 2. 欧姆定律的微分形式

$$dI = \frac{V - (V + dV)}{R} = -\frac{dV}{R}$$

$$R = \rho \frac{dl}{dS} = \frac{dl}{\gamma dS}$$

$$\Rightarrow dI = -\gamma \frac{dV}{dl} dS$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dS} = \gamma E$$



$$E = -\frac{dV}{dl}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

欧姆定律的微分形式

## § 8-2 磁感应强度

### 一、基本磁现象

#### 1. 永磁铁，磁极

至今未发现磁单极



#### 2. 传导电流（运动电荷）之间的磁力， 电现象与磁现象密切相关

#### 3. 物质磁性本质的假说，分子电流



一切磁现象起源于运动电荷（电流）。

## 二、磁感应强度

电流  $\longleftrightarrow$  磁场  $\longleftrightarrow$  电流

研究运动电荷在磁场中受力, 实验表明:

- (1)  $q$  以同一速率沿不同方向通过P点时, 所受磁力大小不同, 总是垂直于  $\vec{v}$
- (2)  $q$  以某一方向运动时, 若所受磁力为零, 则规定此方向为磁场的方向
- (3) 当 $q$  垂直磁场的方向运动时所受磁场力最大, 且正比于 $q$ , 正比于 $v$ 。



定义  $\vec{B}$  的大小: 
$$B = \frac{F_m}{qv}$$

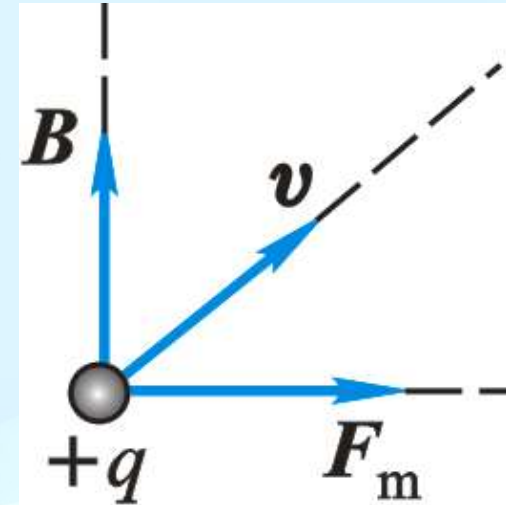
(4) 磁场力总是垂直于B与v组成的平面

据此可以确定B的正向

单位 (SI): T(特斯拉), Gs(高斯)

$$1\text{T} = 1\text{N}\cdot\text{s}/(\text{C}\cdot\text{m}), \quad 1\text{Gs} = 10^{-4}\text{T}$$

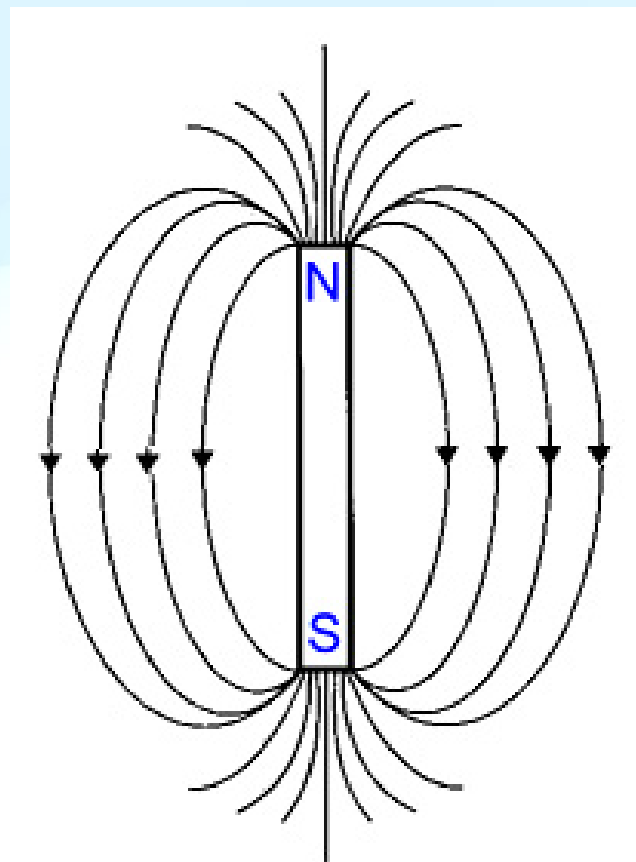
人体心电激发的磁场约  $3\times 10^{-10}$  T, 地球磁场约  $5\times 10^{-5}$  T, 电磁铁约几(十) T, 超导磁铁约几十T, 原子核附近约  $10^4$  T, 脉冲星约  $10^8$  T。

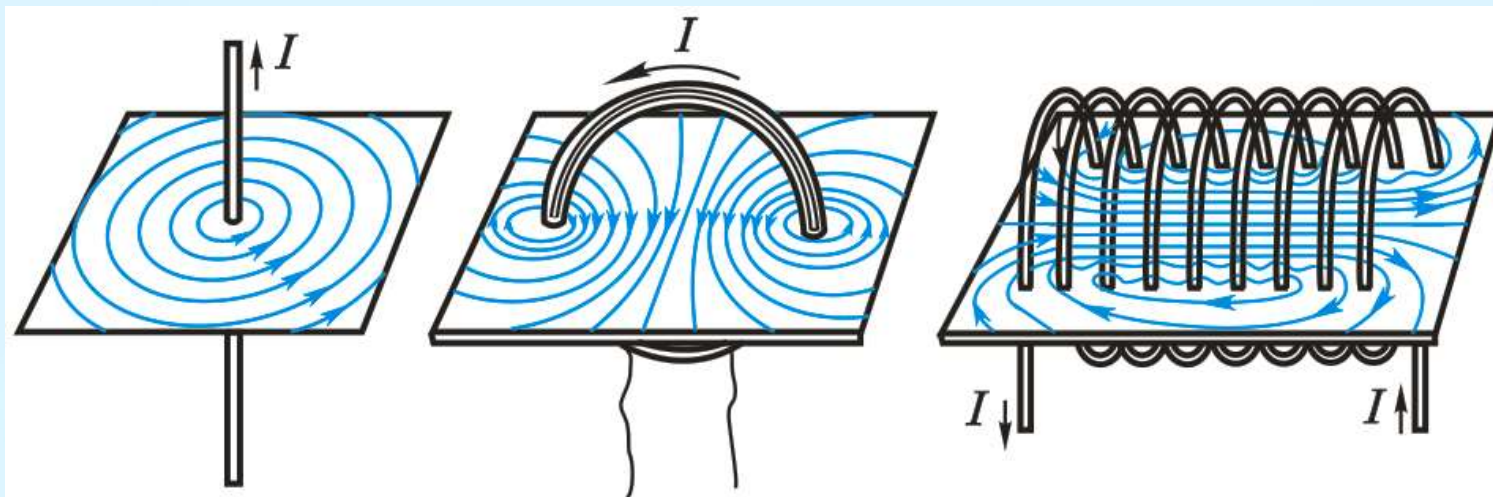


### 三、磁感应线和磁通量

#### 1. 磁场的定性描述——磁感应线（磁感线）

- 磁感线上各点的切线方向表示 此处磁场的方向
- 磁感线的疏密反映磁场的强弱

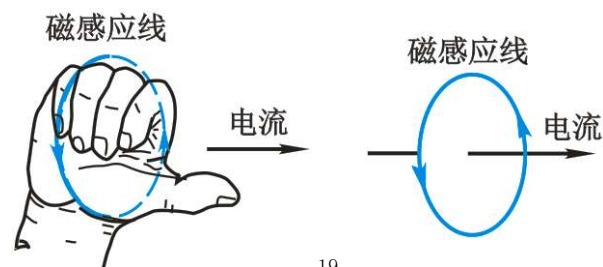




- 磁感应线的性质

磁感应线与闭合电流套连成无头无尾的闭合曲线

磁感应线绕行方向与电流成右手螺旋关系



## 2. 磁通量

**磁通量：** 穿过磁场中任一给定曲面的磁感应线总数。

通过面元 $dS$ 的磁通量：

$$d\Phi = B \cos \theta dS = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

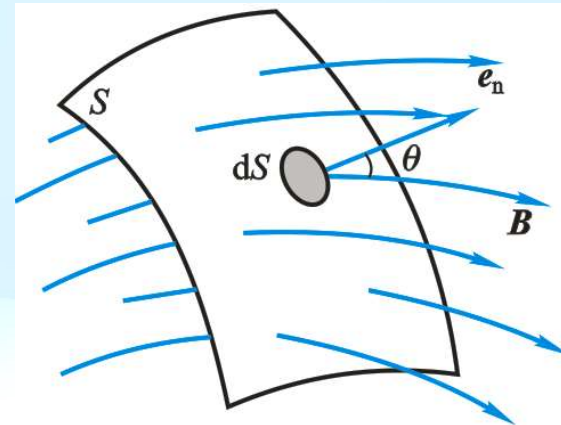
通过有限曲面 $S$ 的磁通量：

$$\Phi = \iint_S d\Phi = \iint_S B \cos \theta dS = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

单位(SI): **Wb(韦伯)**,  $1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ Wb}$

$$B = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}}$$

磁感应强度又称**磁通量密度**。



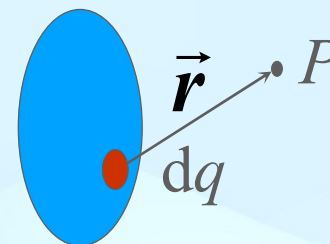


## § 8-3 毕奥 - 萨伐尔定律

### 一、毕奥-萨伐尔(Biot-Savart) 定律

回顾求任意形状带电体产生的电场  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

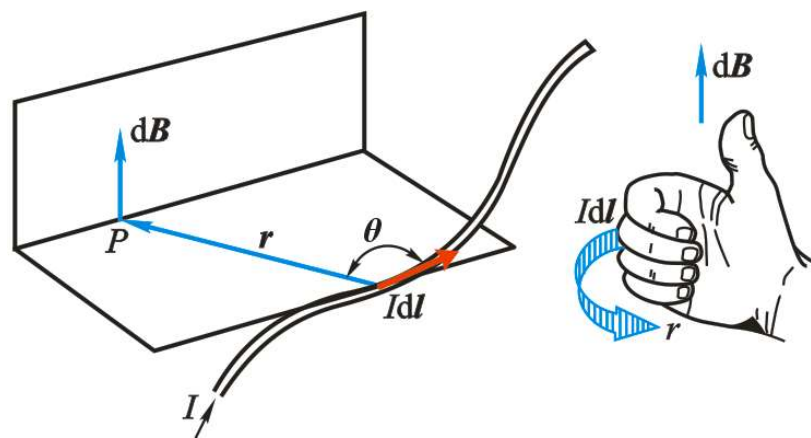


类似方法计算任意形状线电流所激发的磁场:

电流元  $I d\vec{l} \rightarrow d\vec{B}$      $\vec{B} = \int d\vec{B}$

大小     $dB \propto \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$

方向     $d\vec{B} \parallel d\vec{l} \times \vec{r}$



真空中 (SI) : 
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

真空磁导率: 
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

毕奥-萨伐尔定律:  
(Biot-Savart law) 
$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

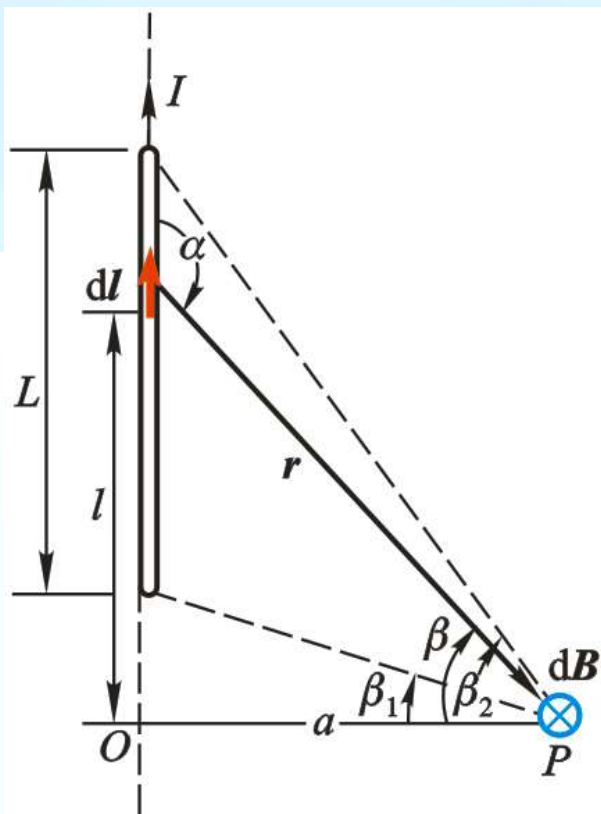
任意线电流所激发的总的磁感应强度

$$\vec{\mathbf{B}} = \int d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{\mathbf{l}} \times \vec{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

## 二、应用毕奥-萨伐尔定律计算磁感应强度示例

**例8-1 载流长直导线的磁场** 设有长为 $L$ 的载流直导线( $I$ )，计算场点 $P$ 处的磁感应强度。

**解：** 电流元  $I d\vec{l}$  在 $P$ 点产生的磁感应强度：



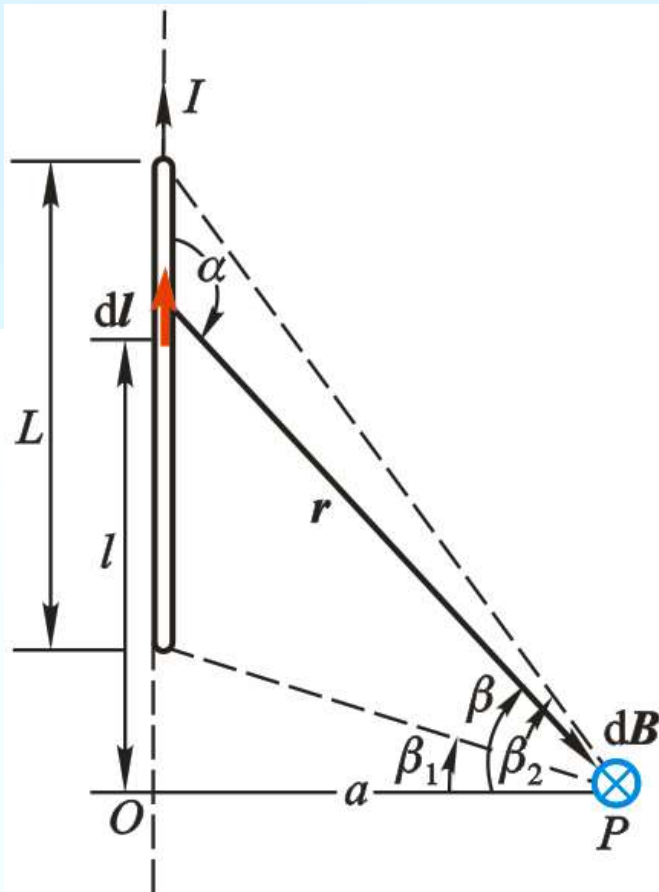
大小： 
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idz \sin \alpha}{r^2}$$

方向：  $\otimes$

$$\Rightarrow B = \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2)$$

变量代换:  $l = a \tan \beta \quad dl = a \sec^2 \beta d\beta$



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{I}{a} \cos \beta d\beta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2)$$



讨论

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2)$$

特例：

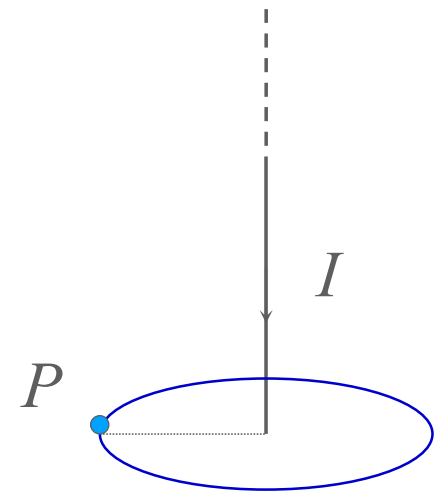
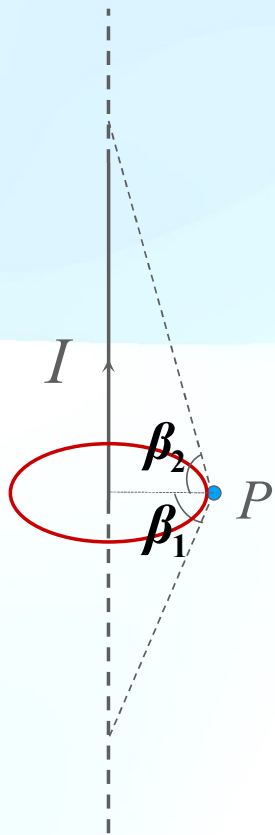
a. 若导线无限长， 即  $\beta_1 \rightarrow -\pi/2, \beta_2 \rightarrow \pi/2$

$$\Rightarrow \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (\text{长直电流的磁场})$$

方向由右手螺旋法判断。

b. 半无限长直导线

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$



例8-2 载流圆线圈轴线上的磁场 半径为 $R$ 的载流圆线圈( $I$ 、 $R$ )，计算轴线上任一点 $P$ 的磁感应强度。

解： 选取坐标系和电流元，

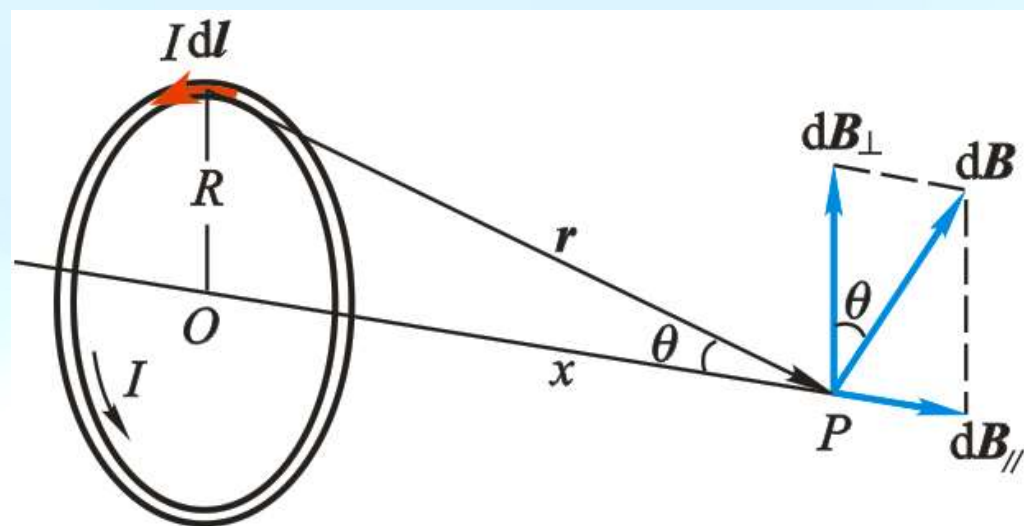
电流元  $I d\vec{l}$  在 $P$ 点  
产生的  $d\vec{B}$  的大小：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin 90^\circ = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

方向：  $\perp (Id\vec{l} \times \vec{r})$

各电流元产生的  $d\vec{B}$  方向各不相同，

$$\text{分解 } d\vec{B} \begin{cases} \text{平行于 } z \text{ 轴的 } dB_z \\ \text{垂直于 } z \text{ 轴的 } dB_\perp \end{cases}$$



由对称性,  $d\mathbf{B}_\perp$  分量相互抵消。

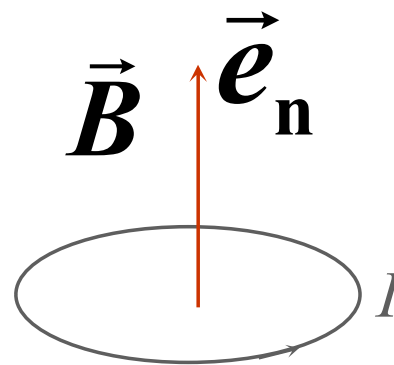
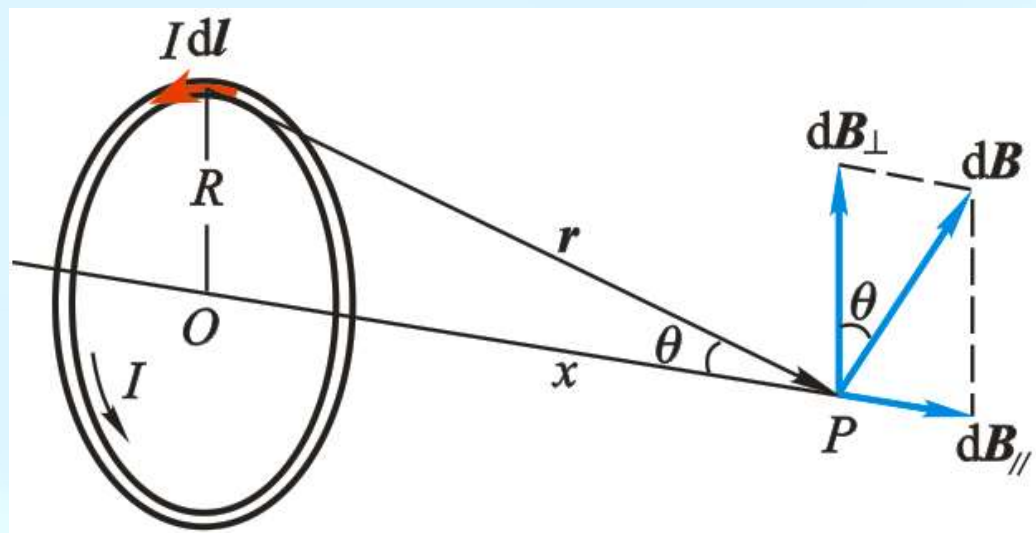
$$\Rightarrow \mathbf{B} = \int d\mathbf{B}_\parallel$$

$$= \int d\mathbf{B} \cdot \sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi r^2} 2\pi R$$

$$= \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$\vec{\mathbf{B}}$  的方向与电流环绕方向呈右手旋关系。



讨论 
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1. 圆心处,  $x=0$ , 
$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

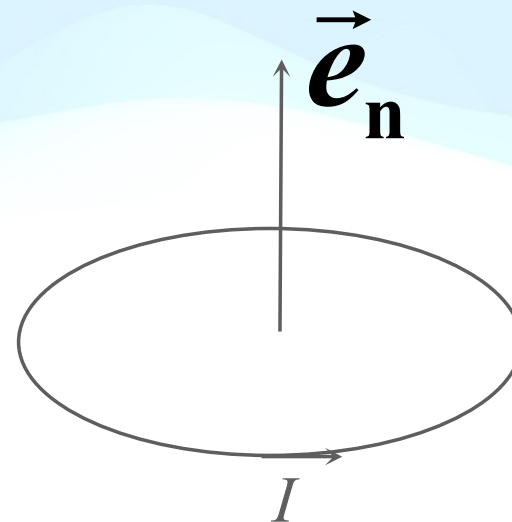
2. 远离圆心处,  $x \gg R$ ,  $x=r$ , 
$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^3}$$

定义载流线圈的磁矩:  $\vec{\mathbf{m}} = NIS \vec{\mathbf{e}}_n$

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 \vec{\mathbf{m}}}{2\pi r^3}$$

试与电偶极子轴线上远处的电场强度公式比较:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{p}}}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$



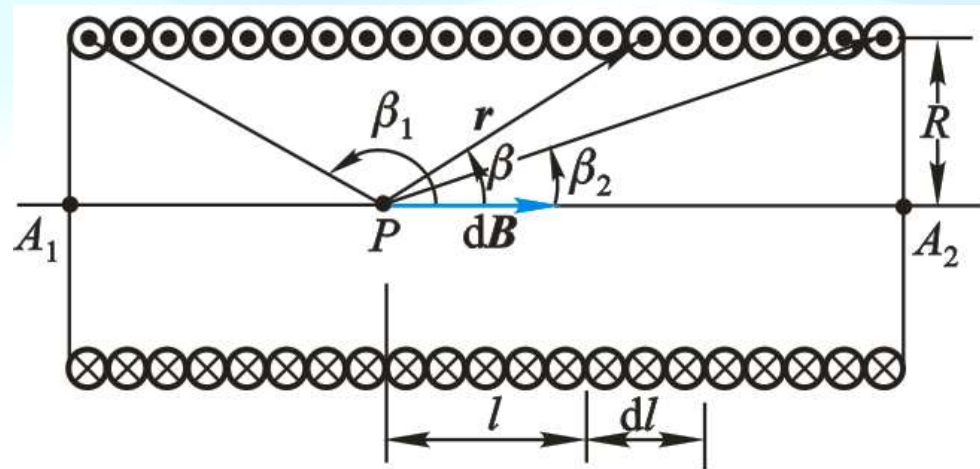
等效磁偶极子

### 例8-3 载流直螺线管内部的磁场

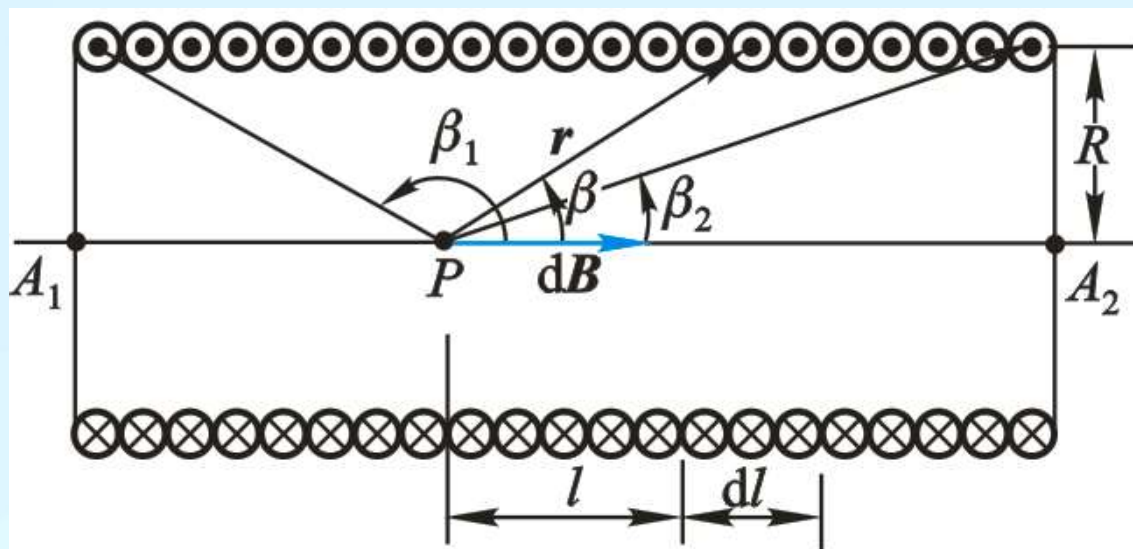
设螺线管半径 $R$ ，通有电流 $I$ ，单位长度上匀绕 $n$ 匝线圈，计算轴线上任一点 $P$ 的磁感应强度。

解：在螺线管上任取一小段 $dl$ ，相当于电流为 $In dl$ 的一个圆电流，在 $P$ 点产生的 $d\vec{B}$ 大小为

$$dB = \frac{\mu_0 R^2 n I dl}{2(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$



方向：沿轴线朝右，所有圆电流产生的 $d\vec{B}$ 方向相同。



$$\Rightarrow B = \int_L dB = \int_L \frac{\mu_0 R^2 n I dl}{2(R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

利用  $l = R \cot \beta$

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

螺线管电流轴线  
上的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

讨论

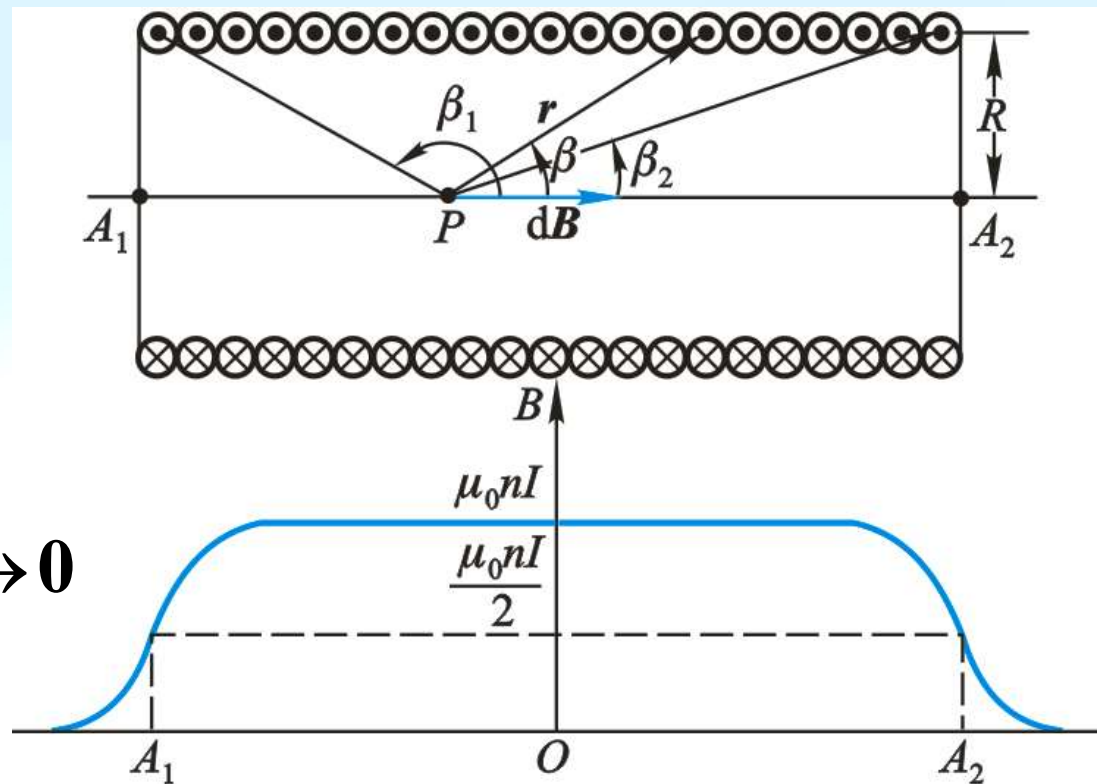
1. 若螺线管无限长,

$l \gg R$ , 有  $\beta_1 \approx \pi$ ,  $\beta_2 \approx 0$

$$B = \mu_0 n I$$

2. 左端点:  $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta_2 \rightarrow 0$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

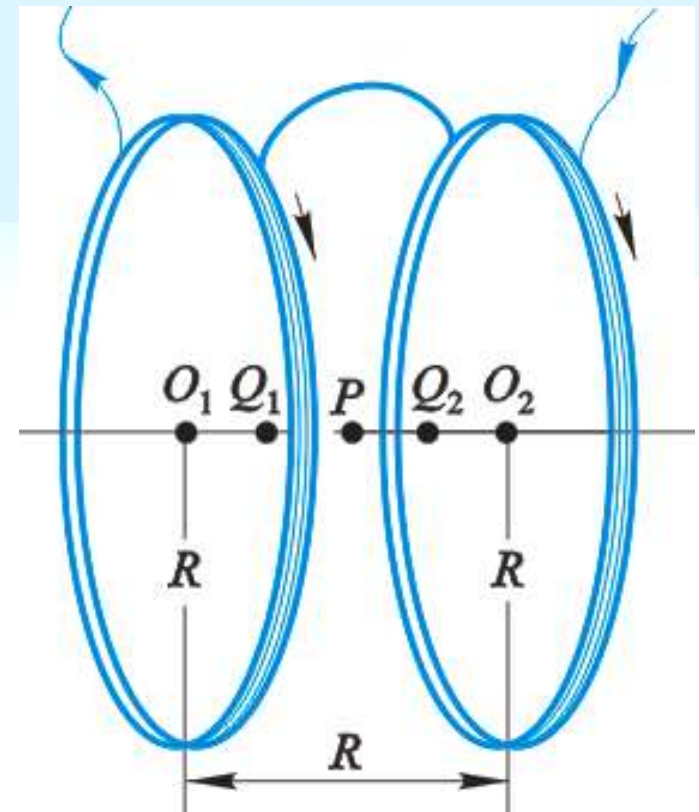




**例8-4** 在实验室中，常应用亥姆霍兹线圈产生所需的不太强的均匀磁场。它是由一对相同半径的同轴载流线圈组成，当它们之间的距离等于它们的半径时，试计算两线圈中心处和轴线上中点的磁感应强度。

**解：** 设两个线圈的半径为 $R$ ，各有 $N$ 匝，每匝中的电流均为 $I$ ，且流向相同。

两线圈在轴线上各点的场强方向均沿轴线向右，在圆心 $O_1$ 、 $O_2$ 处磁感应强度相等。



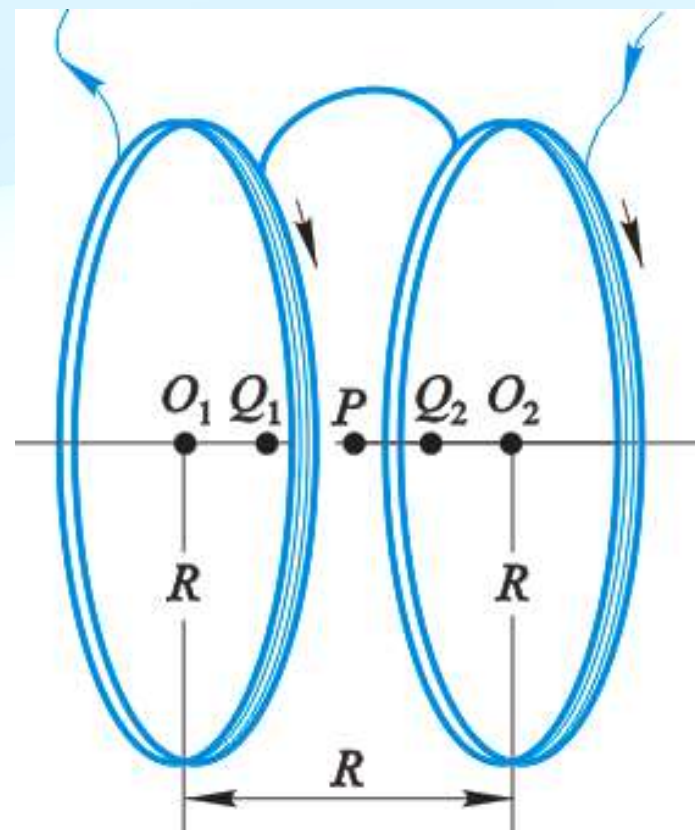
在圆心 $o_1$ 、 $o_2$ 处磁感应强度大小为

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2R} + \frac{\mu_0 NIR^2}{2(R^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.677 \frac{\mu_0 NI}{R}$$

两线圈间轴线上中点 $P$ 处, 磁感应强度为

$$B_P = 2 \frac{\mu_0 N I R^2}{2 \left[ R^2 + \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

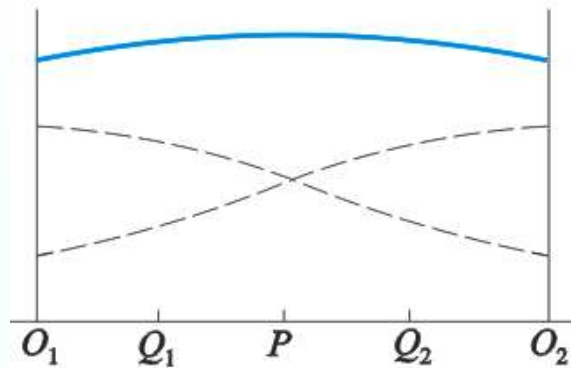
$$= 0.716 \frac{\mu_0 N I}{R}$$



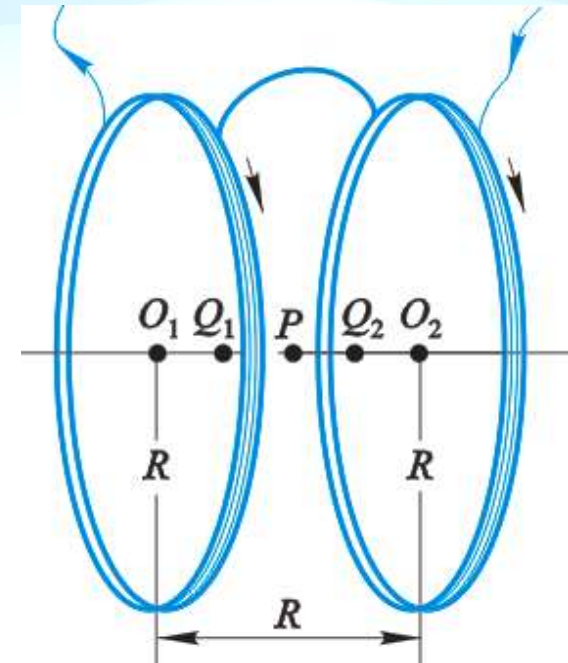
在  $P$  点两侧各  $R/4$  处的  $Q_1$ 、 $Q_2$  两点处磁感应强度：

$$B_Q = \frac{\mu_0 N I R^2}{2 \left[ R^2 + \left( \frac{R}{4} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0 N I R^2}{2 \left[ R^2 + \left( \frac{3R}{4} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 0.712 \frac{\mu_0 N I}{R}$$



轴线上中点附近的场强近似均匀。



### 三、运动电荷的磁场

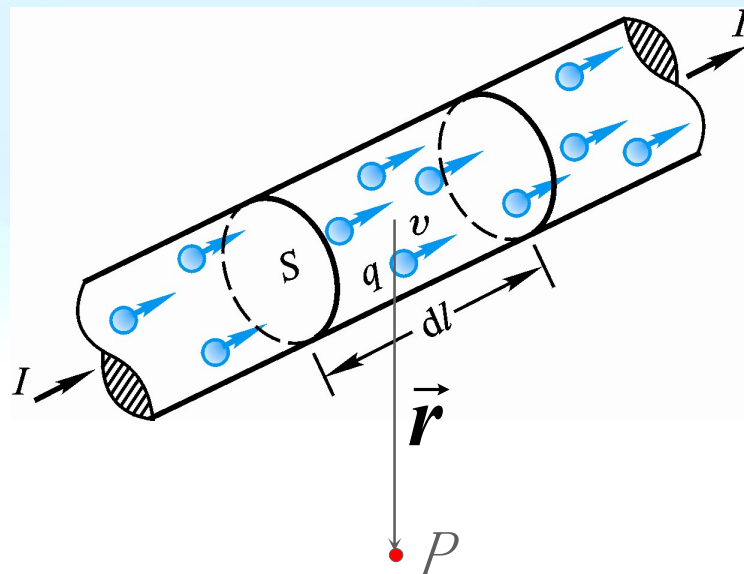
设电流元  $I d\vec{l}$ ，横截面积  $S$ ，载流子： $q, \vec{v}, n$

单位时间内通过横截面  $S$  的电荷即为电流  $I$ ：

$$I = qn v S$$

电流元在  $P$  点产生的磁感应强度：

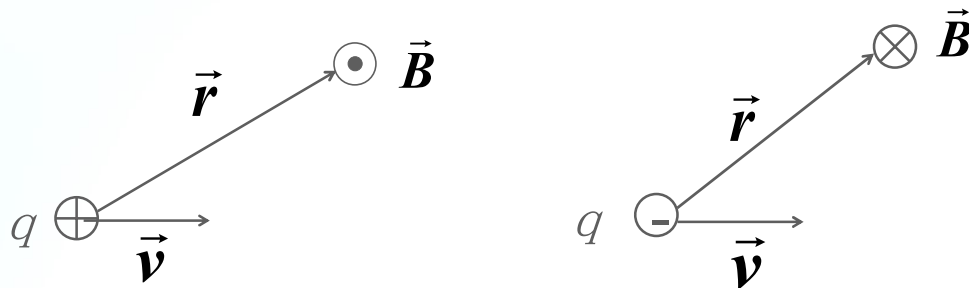
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qn S dl \vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2}$$



电流元内带电粒子数目： $\mathbf{d}N = nS\mathbf{d}l$

每个电荷量为 $q$ ，以速度 $\vec{v}$ 运动的电荷产生的磁感应强度为

$$\vec{B}_q = \frac{\mathbf{d}\vec{B}}{\mathbf{d}N} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (\text{适用于 } v \ll c)$$



**例8-5** 在玻尔的氢原子模型中，电子绕原子核做匀速圆周运动，具有相应的磁矩，称为**轨道磁矩**。设圆半径为 $r$ ，转速为 $n$ ，求：（1）轨道中心的磁感应强度的大小；（2）轨道磁矩 $\mu$ 与轨道角动量 $L$ 之间的关系；（3）计算氢原子在基态时电子的轨道磁矩。

**解：**（1）电子的运动相当于一个圆电流： $I = ne$

由圆电流中心的磁场公式，轨道中心的磁感应强度为

$$B_0 = \frac{\mu_0 ne}{2r}$$

（2）轨道磁矩：
$$\mu = IS = ne\pi r^2$$

轨道角动量：
$$L = m_e v r = m_e 2\pi r n r = 2m_e n \pi r^2$$

## § 8-4 恒定磁场的高斯定理和安培环路定理

### 一、恒定磁场的高斯定理

由磁感应线的闭合性可知，对任意闭合曲面，穿入的磁感应线条数与穿出的磁感应线条数相同，因此，通过任何闭合曲面的磁通量为零。

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{恒定磁场的高斯定理}$$

➤ 表明磁感应线是无头无尾闭合的，说明磁场是无源场。



恒定磁场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$\vec{B}$  线：无头无尾 闭合线

恒定磁场是无源场

原因：自然界不存在磁单极

静电场的高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

$\vec{E}$  线：起始于正电荷，终止于负电荷

静电场是有源场

## 二、安培环路定理

$\vec{B}$  的环流:  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$

特例：无限长直载流导线的磁场

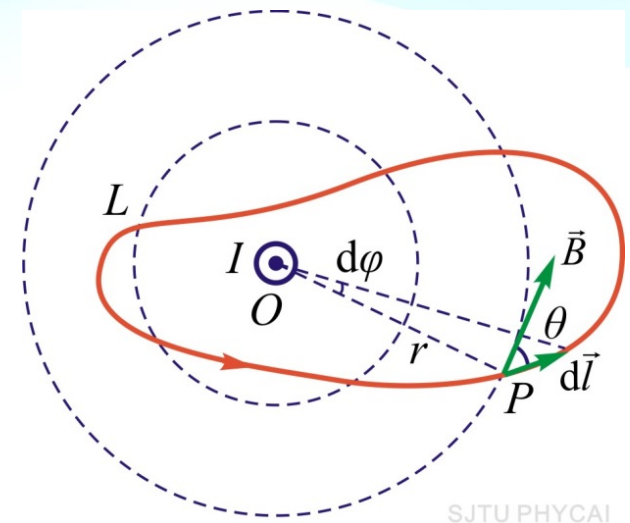
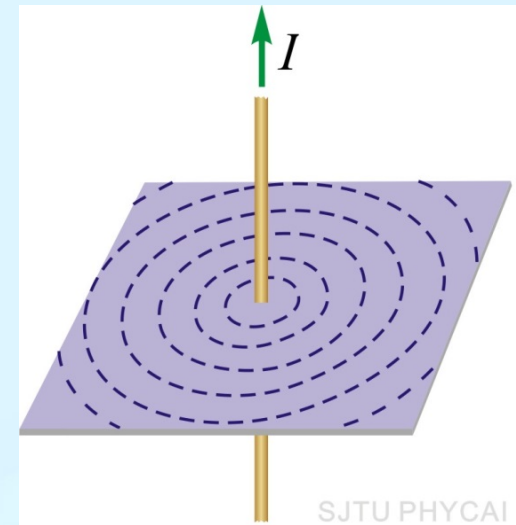
### 1. 电流穿过环路

在垂直于导线的平面内任作一环路：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad dl \cos \theta = r d\varphi$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos \theta dl$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

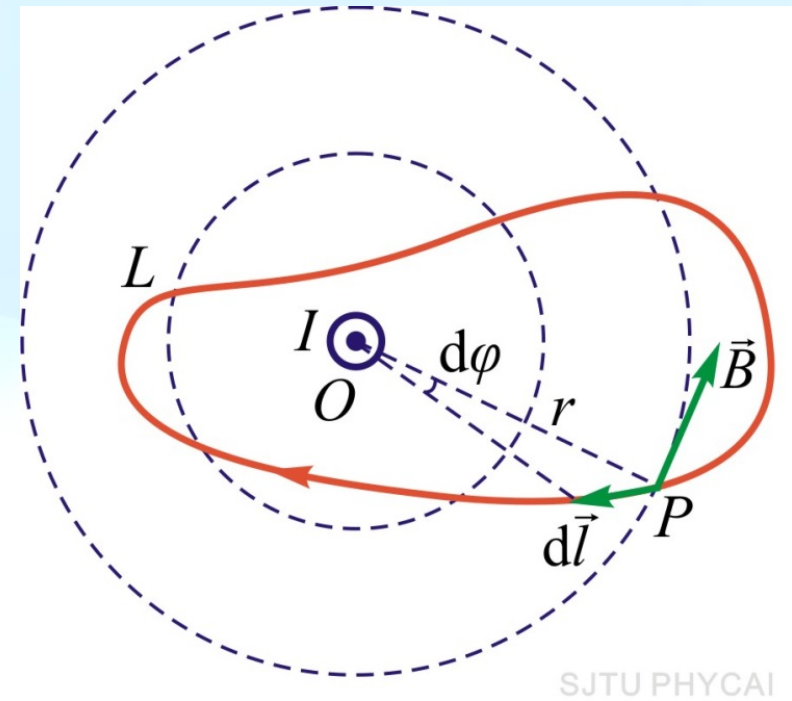


如果环路不在垂直于导线的平面内：

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L \vec{B} \cdot (d\vec{l}_\perp + d\vec{l}_\parallel) \\&= \oint_L B \cos 90^\circ dl_\perp + \oint_L B \cos \theta dl_\parallel \\&= 0 + \oint_L Br d\varphi \\&= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\varphi \\&= \mu_0 I\end{aligned}$$

如果沿同一路径但改变绕行方向积分：

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L B \cos(\pi - \theta) dl \\ &= \oint_L -B \cos \theta dl \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi \\ &= -\mu_0 I\end{aligned}$$



- 磁感应强度矢量的环流与闭合曲线的形状无关，它只和闭合曲线内所包围的电流有关。

## 2. 电流在环路之外

$$dl \cos \theta = r d\varphi$$

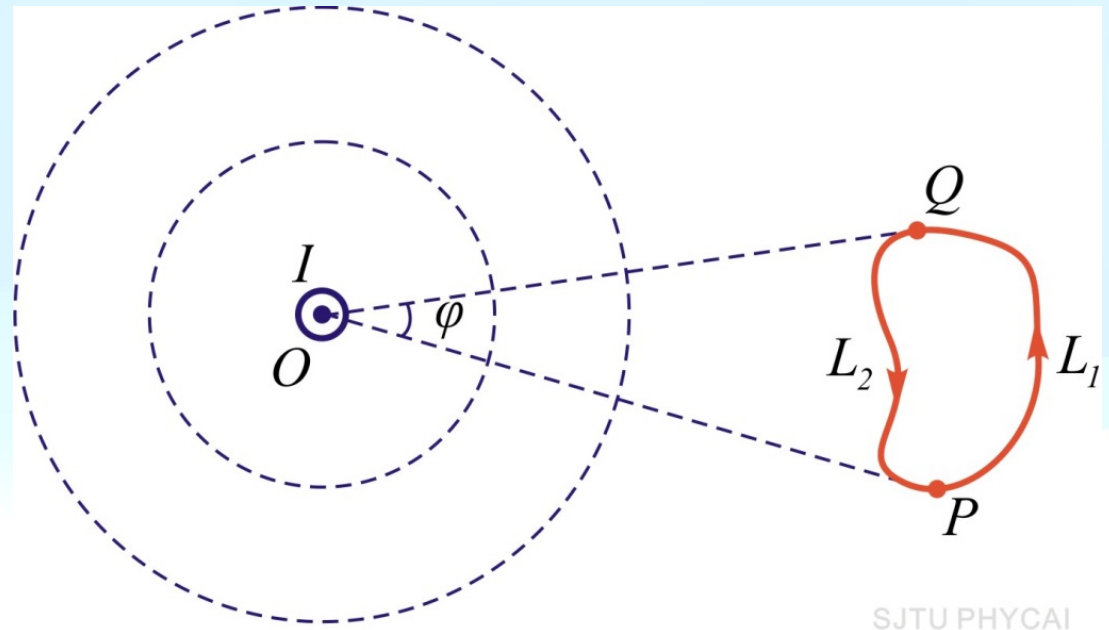
$$dl' \cos \theta' = -r' d\varphi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad B' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r'}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} + \vec{B}' \cdot d\vec{l}'$$

$$= B dl \cos \theta + B' dl' \cos \theta'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi - \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} r' d\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



**安培环路定理:**在磁场中，沿任何闭合曲线 $B$ 矢量的线积分（ $B$ 矢量的环流），等于真空中的磁导率 $\mu_0$ 乘以穿过闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。

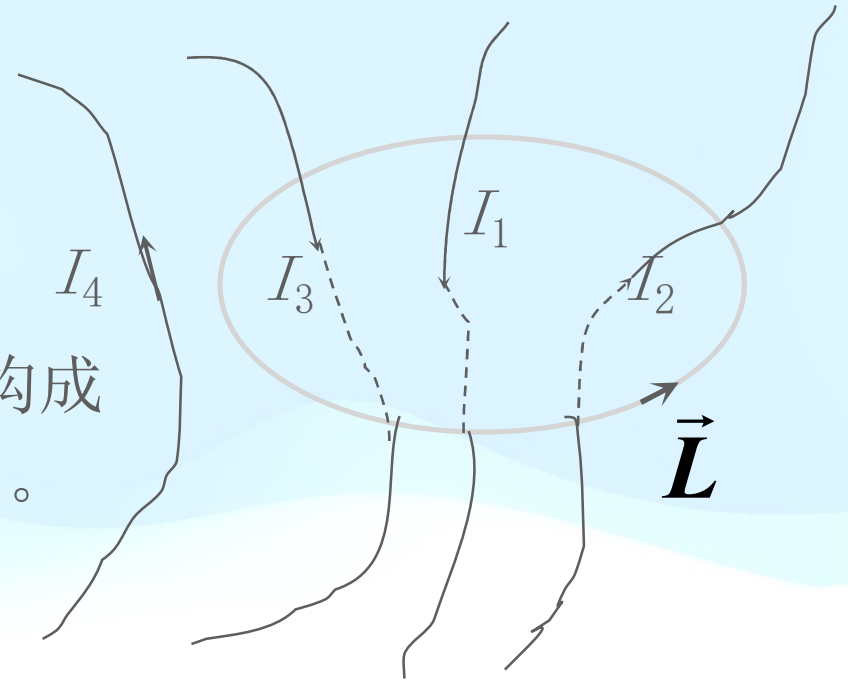
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

## 讨论

1. 静电场的环路定理说明静电场是无旋场；恒定磁场的环路定理反映恒定磁场是**有旋场**。
2. 式中的磁感应强度 $B$ 是闭合曲线内外所有电流产生的磁感应强度。但环流只与闭合曲线所包围并穿过的电流有关。

### 3. 电流的符号规定:

当电流方向与积分路径的绕行方向构成右手螺旋关系时电流为正, 反之为负。



如右图所示:  $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i = \mu_0 (I_2 - I_1 - I_3)$

### 4. 同一电流与闭合回路N次链套时:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I$$



### 三、安培环路定理的应用

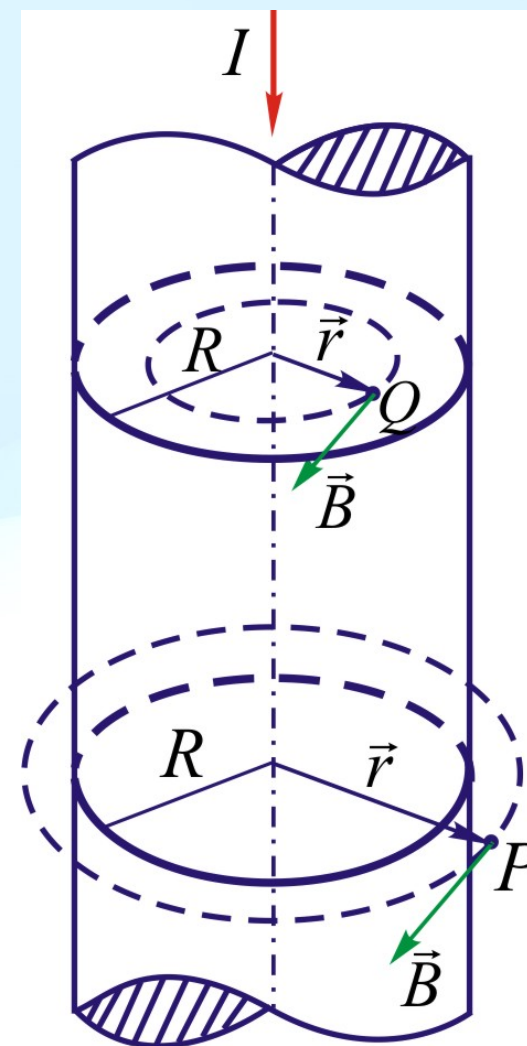
#### 例8-6 求长直圆柱形载流导线内外的磁场

解：电流呈轴对称分布，磁场对圆柱形轴线具有对称性。

(1) 圆柱外的磁场：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > R)$$



SJTU PHYCAI

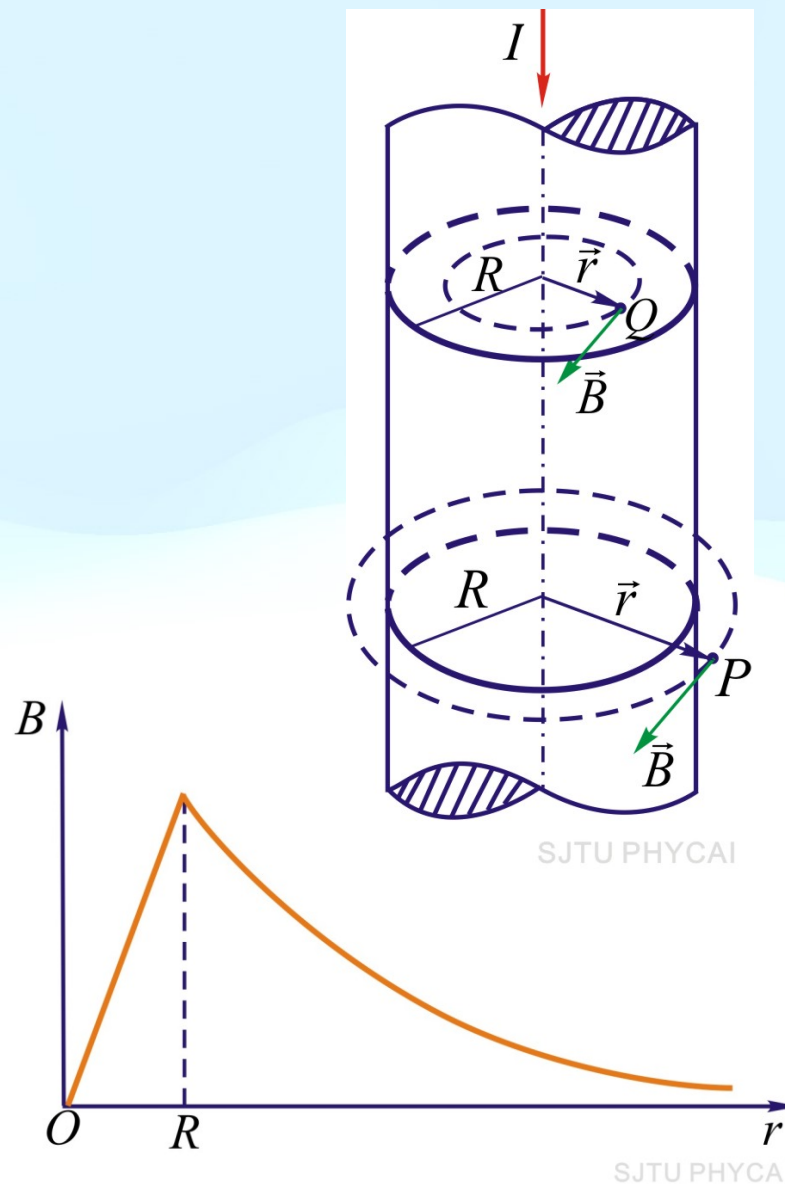
(2) 圆柱内的磁场:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I'$$

$$= \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

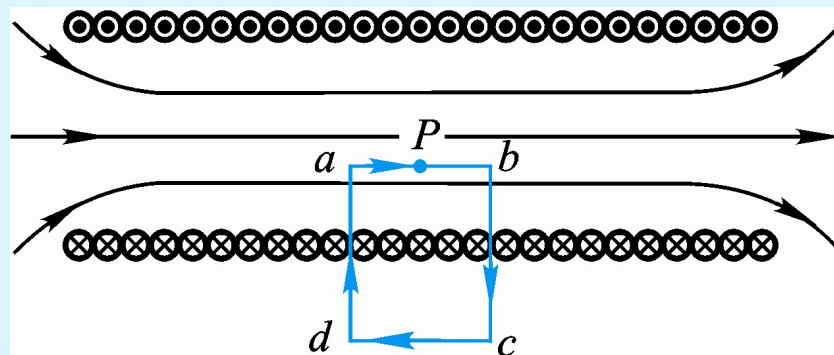
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \quad (r \leq R)$$

思考: 若电流  $I$  沿圆柱的表面流动, 圆柱内外的磁场分布又如何?



### 例8-7 求载流长直螺线管内的磁场 ( $I$ 、 $n$ )

解：由电流分布的对称性，管内磁场平行于轴线方向，且管内外与轴等距离处 $B$ 相等；螺线管密绕，管外磁场近似为零。



选择闭合回路  $\vec{L}$  ( $abcda$ )

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 \overline{abnI}$$

$$\int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad B_{cd} = 0$$

$$\Rightarrow B_{ab} \cdot l = \mu_0 l \cdot nI \quad B = \mu_0 nI = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

长直螺线管内为匀强磁场，方向平行于轴线，且与电流绕向构成右手螺旋关系。

### 例8-8 载流螺绕环内的磁场

解：设环上线圈的总匝数为 $N$ ，电流为 $I$ 。

$$\because \vec{B} // d\vec{l}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= B \oint_L dl \\ &= B 2\pi r \\ &= \mu_0 NI\end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad r_2 - r_1 \ll r \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0 nI \quad \text{方向……}$$

环外：  $B=0$

