南京大學
NANJING UNIVERSITY

第七章　　静止电荷的电场

§7-7 电容器的电容
§7-8 静电场中的电介质
§7-9 有电介质时的高斯定理和环路定理　电位移矢量

§7-7 电容器的电容

一、孤立导体的电容

孤立导体的电势与电荷量有关；

电荷量相同时不同形状和大小的孤立导体电势不同，但是

$$V \propto q$$

定义 $C \equiv \dfrac{q}{V}$ —— 孤立导体的电容

电容只与导体的几何因素（及周围介质）有关，反映导体带电多少的本领——固有的容电本领

SI：F(法拉)　$1\mathrm{F} = 10^{6}\mu\mathrm{F} = 10^{12}\mathrm{pF}$

真空中孤立导体球的电容

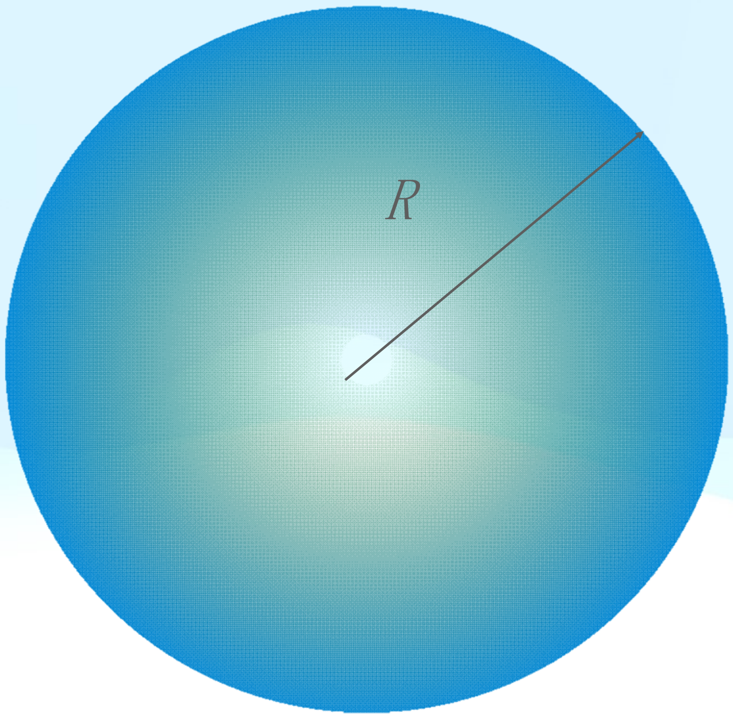
设导体球半径为R，带电荷为q。

导体球电势为 $$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

导体球电容为 $$C=\frac{q}{V}=4\pi\varepsilon_0 R$$

对半径如地球一样的导体球，其电容为

$$C_{\mathrm{E}}=4\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{E}}=7.11\times10^{-4}\,\mathrm{F}$$

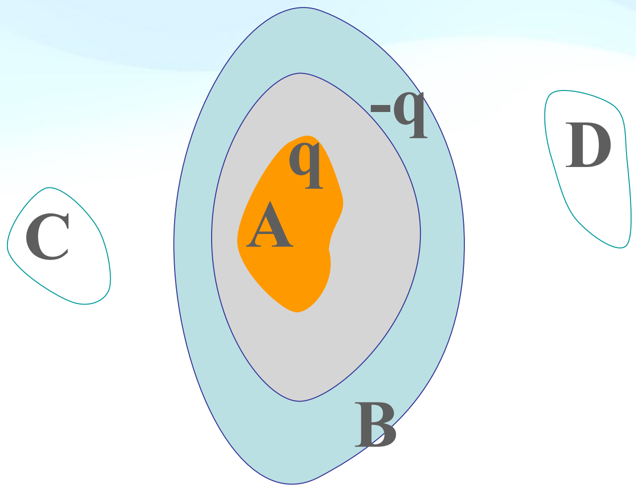


二、电容器的电容

带电导体周围的电场、电势会受附近导体的影响。为消除这种影响可以用一个封闭的导体包裹该导体。

$$q\uparrow \quad \rightarrow \quad V_A - V_B \uparrow$$

$$C = \frac{q}{V_A - V_B}$$



导体A，B构成一对电容器

两导体组（A、B）电容器

定义：
$$C=\frac{q}{V_{\mathrm{A}}-V_{\mathrm{B}}}=\frac{q}{\Delta V_{\mathrm{AB}}}$$

电容器电容只与导体组的几何构形（及周围空间介质）有关，与带电多少无关。

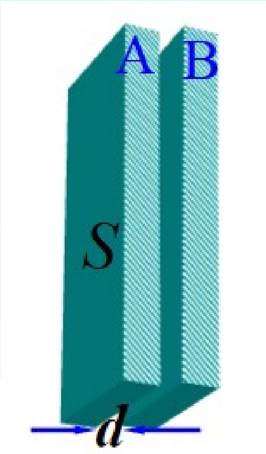
实验证明，充满电介质时电容器的电容C为两极板间为真空时电容C_0的ε_r倍：

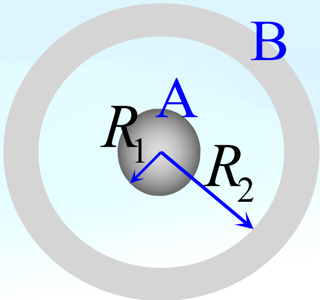
$$C=\varepsilon_{\mathrm{r}}C_{0}$$ （适用于任何形状的电容器）

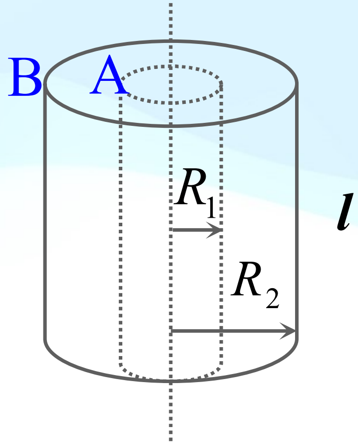
ε_r称为介质的相对电容率或相对介电常量。

- 几种常见电容器

平板电容器　　球形电容器　　圆柱形电容器







- 电容器电容的计算：

先假设电容器带电$\pm q$，求出两个极板的电势差ΔV_{AB}，按定义求电容C。

电容器的符号：

例7-22 求平行板电容器的电容

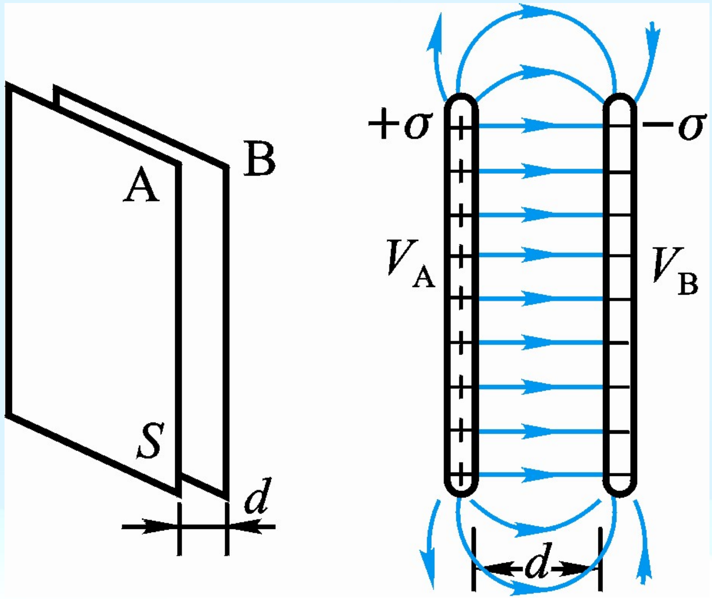
解： $$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

$$V_A-V_B=\int_0^d \vec{E}\cdot d\vec{l}=Ed=\frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$

电容： $$C=\frac{q}{V_A-V_B}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C\propto S$$

$$C\propto\frac{1}{d}$$



可变电容器

例7-23 求圆柱形电容器的电容

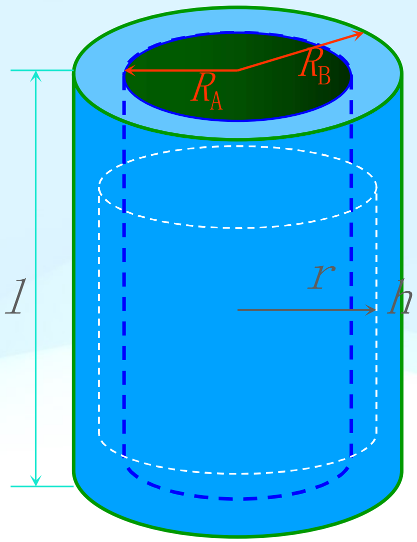
解：由高斯定理 $E\cdot 2\pi rh=\dfrac{q}{\varepsilon_0 l}h$

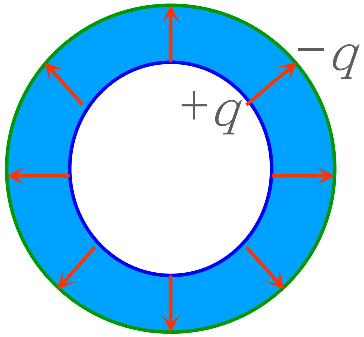
$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Delta V=\int_{R_A}^{R_B}E\cdot \mathrm{d}r=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 lr}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

电容：$C=\dfrac{q}{\Delta V}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$





例7-24 求球形电容器的电容

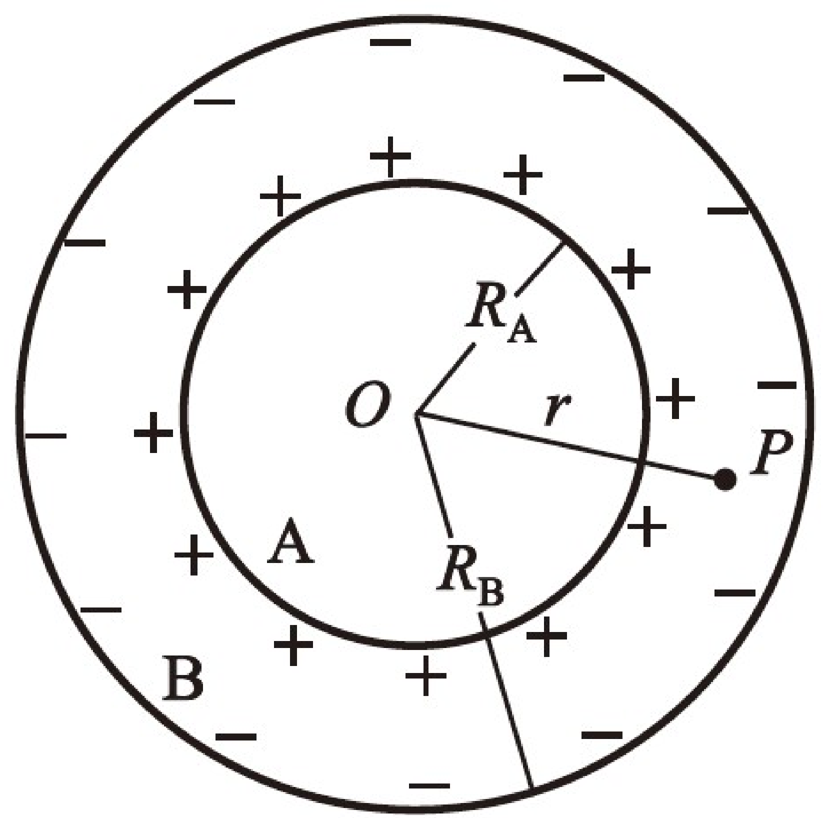
解：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Delta V=\int_{R_A}^{R_B}\frac{q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

$$C=\frac{q}{\Delta V}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_A R_B}{R_B-R_A}$$

$$R_B\to\infty,\quad C=4\pi\varepsilon_0 R_A$$



如果两极板间充满相对电容率为ε_r的电介质，各种电容器的电容为

平板电容器： $$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

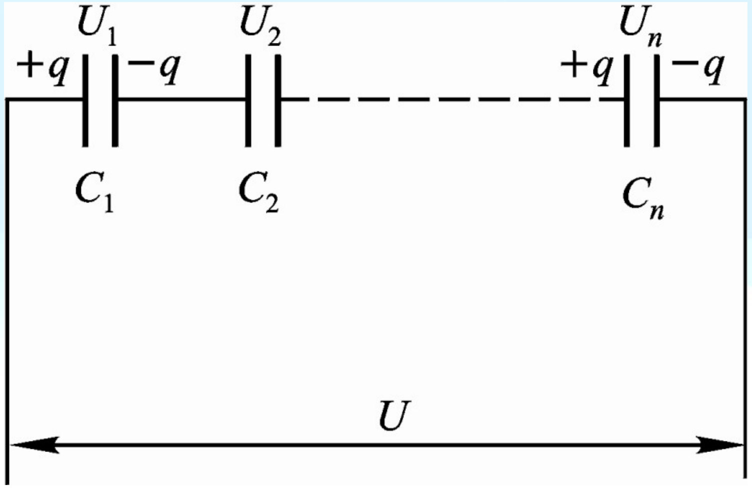
球形电容器： $$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{R_A R_B}{R_B-R_A}$$

圆柱形电容器： $$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$$

三、电容器的串联和并联

电容器的性能指标：电容和耐压，如100 μF/25 V。

1.串联电容器



设各电容器带电荷量为q

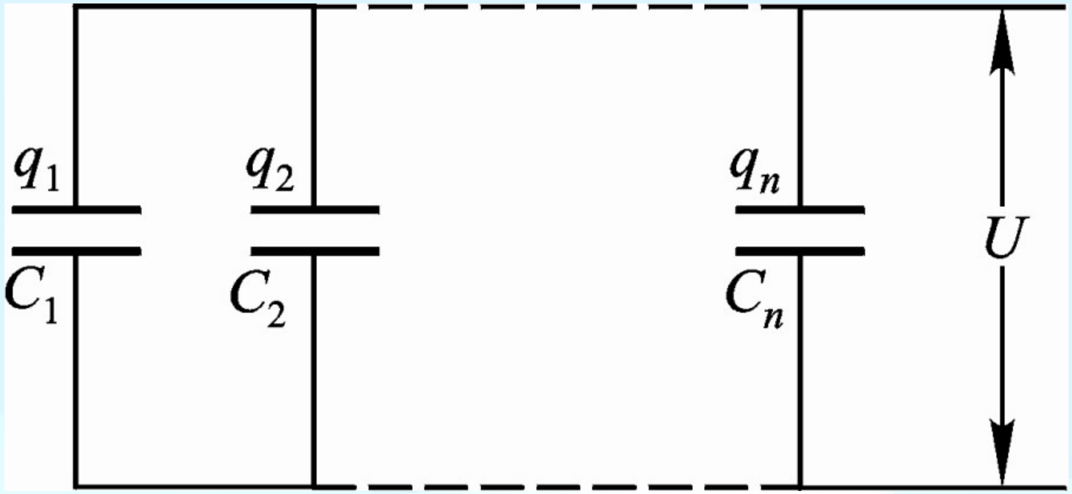
$$U_1=\frac{q}{C_1},U_2=\frac{q}{C_2},\cdots$$

$$U=U_1+U_2+\cdots+U_n=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\right)q$$

等效电容：

$$\frac{1}{C}=\frac{U}{q}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

2. 并联电容器



$$q_1 = C_1 U \,, q_2 = C_2 U \,, \cdots$$

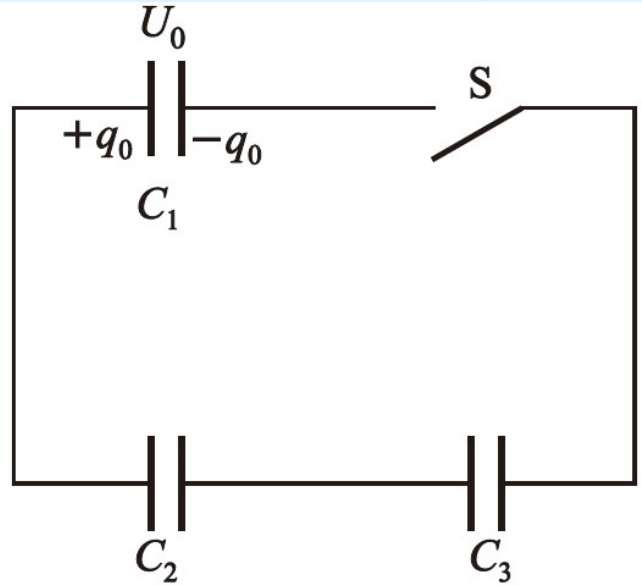
总电荷 ：

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = (C_1 + C_2 + \cdots C_n)U$$

等效电容：

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

例7-25 如图所示三个电容器，当电键S打开时，将C_1充电到电势差U_0，然后断开电源，并闭合电键S。求各电容器上的电势差。



解：在S闭合前，C_2, C_3的电量为0，C_1的电量

$$q_0 = C_1 U_0$$

在S闭合后，C_1的电量q_1，C_2, C_3的电量为q_2

$$\Rightarrow \quad q_0 = q_1 + q_2 \qquad \frac{q_0}{C_1} = \frac{q_1}{C_2} + \frac{q_2}{C_3}$$

联立解得

$$q_1 = \frac{C_1^2(C_2 + C_3)}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}U_0$$

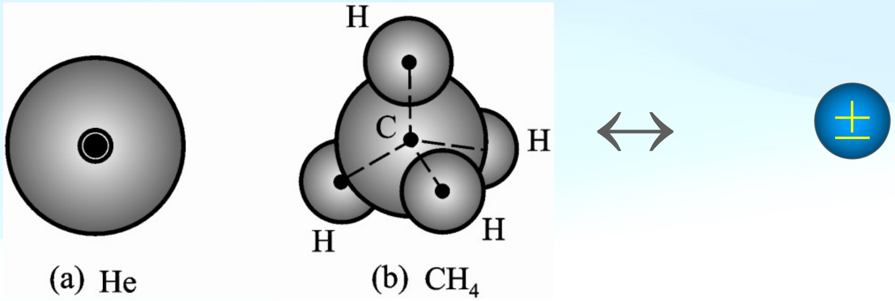
$$q_2 = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1}U_0$$

根据 $U = \dfrac{q}{C}$ 可得各电容器上的电势差

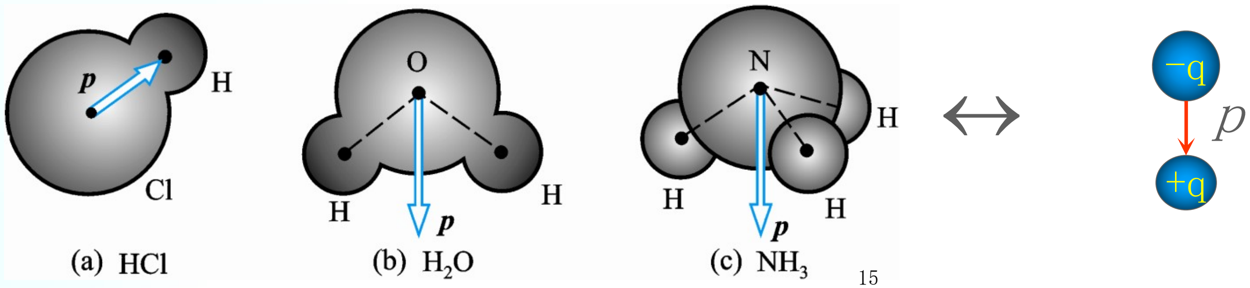
§ 7-8 静电场中的电介质

*一、 电介质的电结构

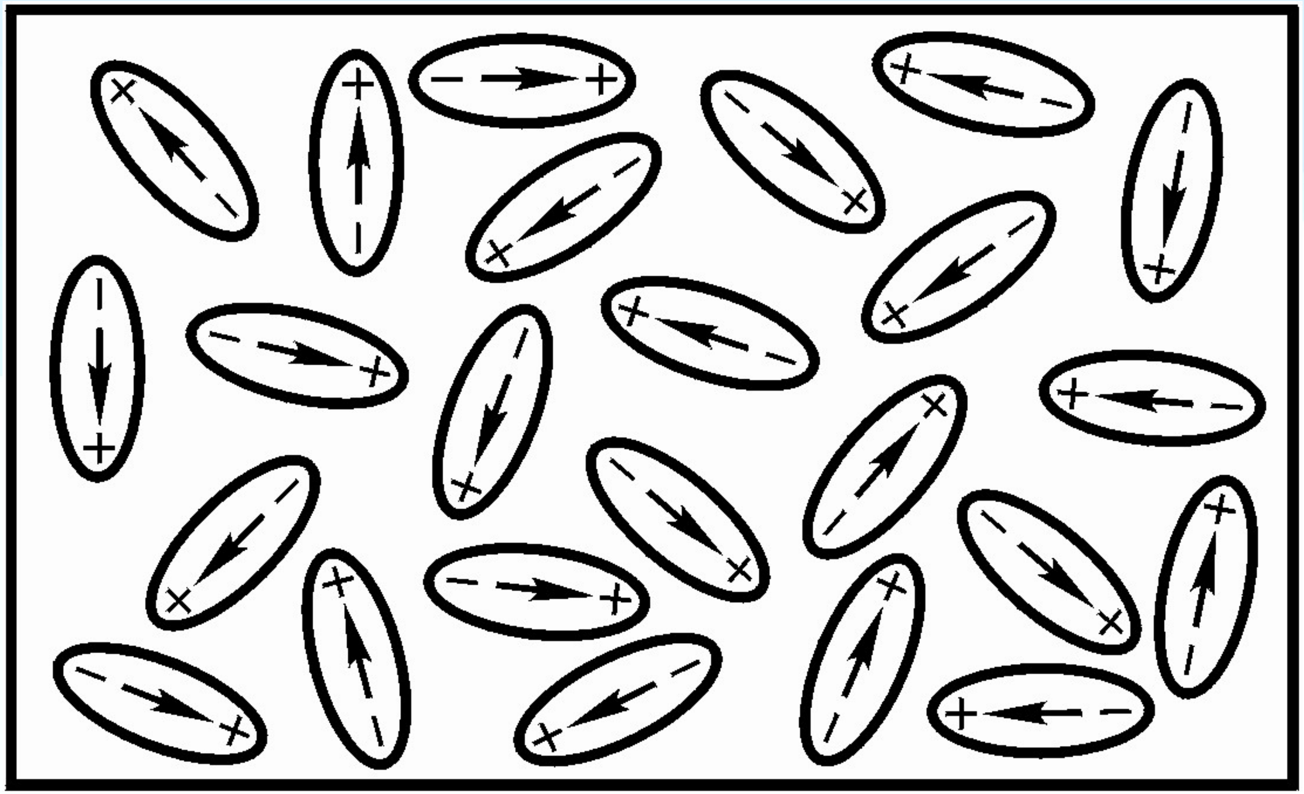
无极分子： 分子的正、负电荷中心在无外场时重合。不存在固有分子电偶极矩。



有极分子： 分子的正、负电荷中心在无外场时不重合，分子存在固有电偶极矩。



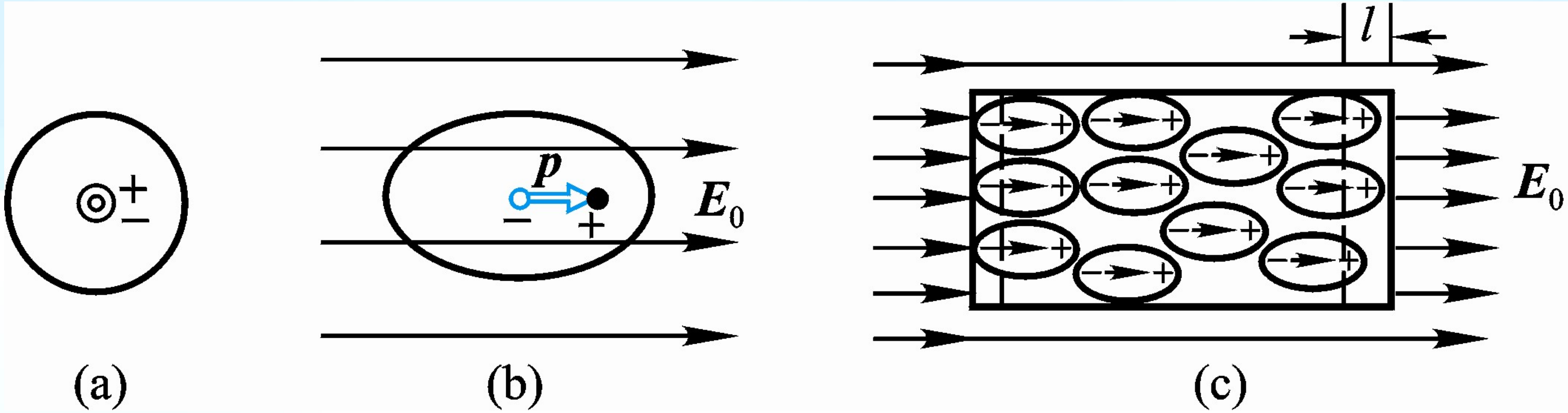
在无外电场时，无论哪种电介质，整体都呈现电中性。



*二、电介质的极化

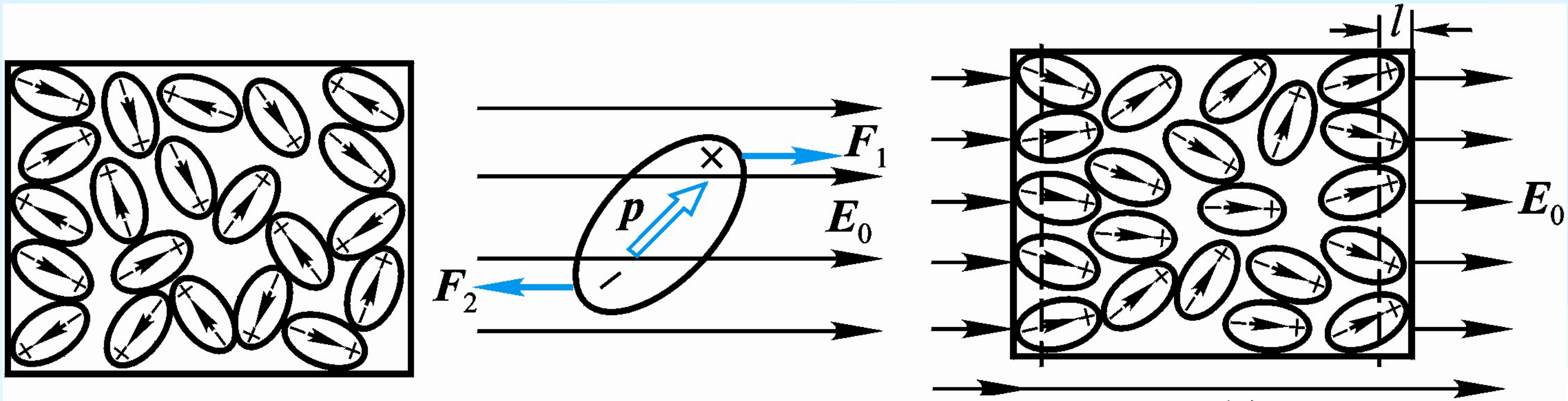
在外电场作用下，介质中出现净电荷极化电荷（或束缚电荷）的现象称电介质的极化。

1. 无极分子电介质的位移极化



无极分子在外场的作用下正负电荷中心发生偏移而产生的极化称为位移极化。

2. 有极分子电介质的取向极化

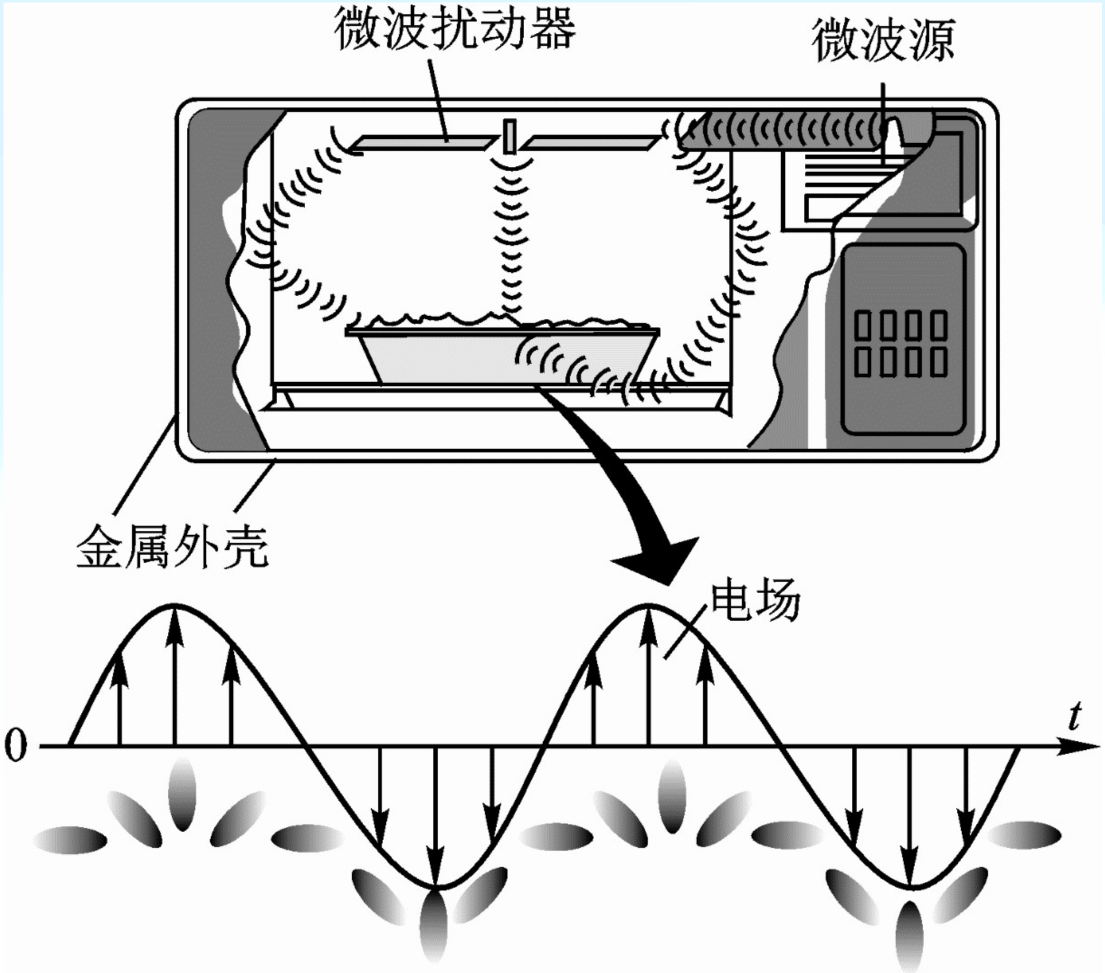


(a) (b) (c)

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

有极分子在外场中发生偏转而产生的极化称为取向极化。

家用微波炉加热的原理——介质分子的反复极化



三、电极化强度

电极化强度矢量 $\vec{P}$ 是反映电介质极化程度的物理量。

定义： $$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$ （C· m^{-2} ）

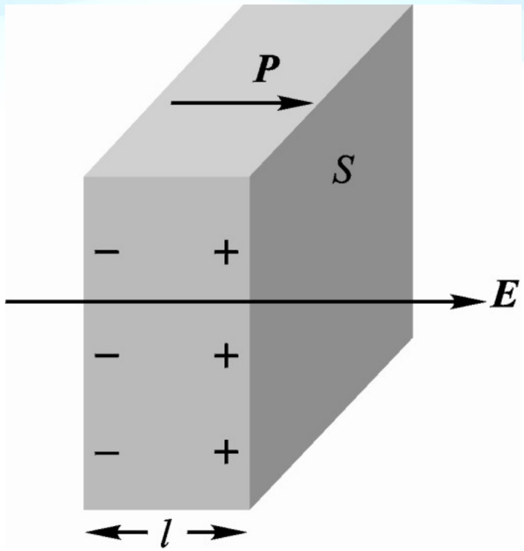
真空中： $\vec{P} = 0$

均匀极化： $\vec{P} = \vec{c}$

四、电极化强度与极化电荷的关系

在均匀介质中，极化电荷只出现在介质表面或两种介质的分界面上。

设一均匀电介质薄片（垂直于电场方向的面积S、厚度l）置于电场（E）中，表面将出现极化电荷。



$$\sum \vec{p} = q'\vec{l}$$

$$P = \left|\vec{P}\right| = \left|\frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}\right| = \frac{q'l}{Sl} = \sigma'$$

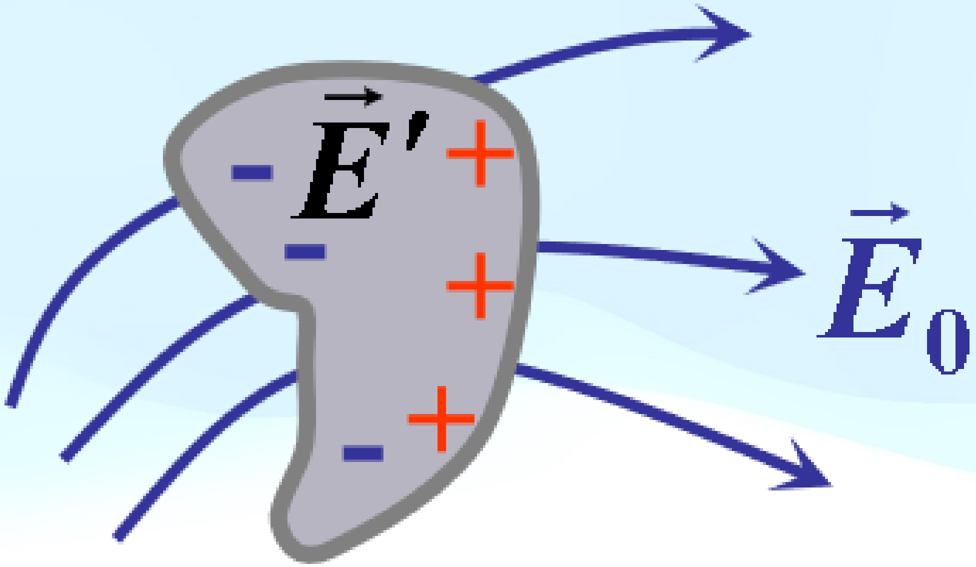
一般情形： $\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_{\mathrm{n}} = P\cos\theta = P_{\mathrm{n}}$

$\vec{e}_{\mathrm{n}}$为薄片表面法向单位矢量

五、介质中的静电场

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

q_0 源电荷（自由电荷）　　q' 极化电荷



实验表明：　对于各向同性的电介质，在E_0不太大的情况下，有

$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$（$\chi_e$ 称为介质的极化率）

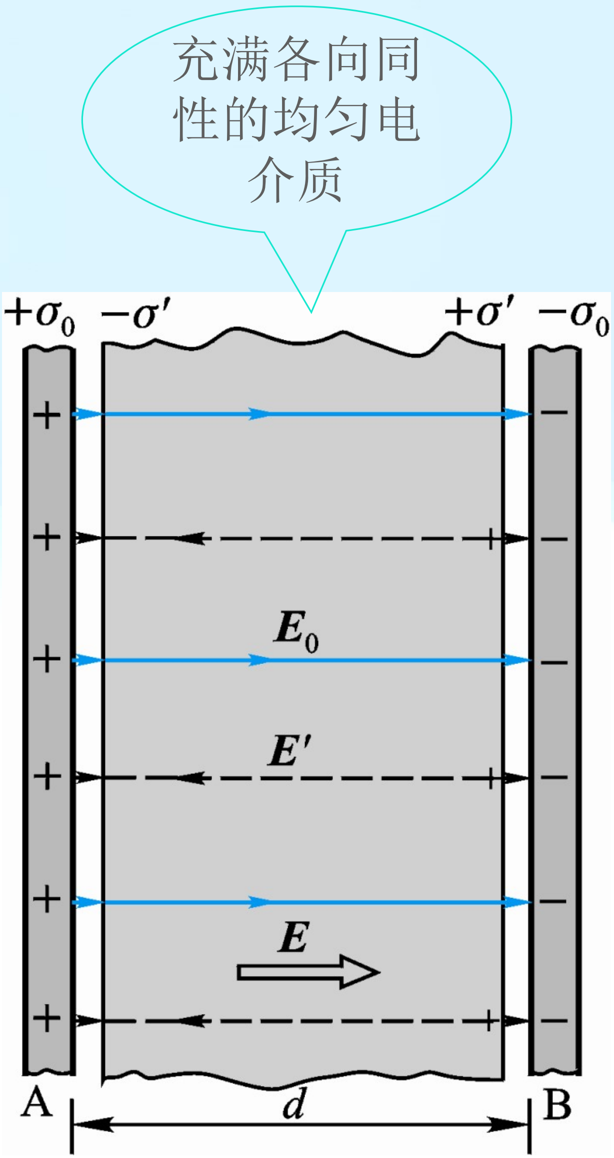
$$E = E_0 - E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$= E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi_e E$$

$$\therefore \quad E = \frac{E_0}{1+\chi_e}$$

两板间电势差：

$$U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}$$



充满电介质时的电容为

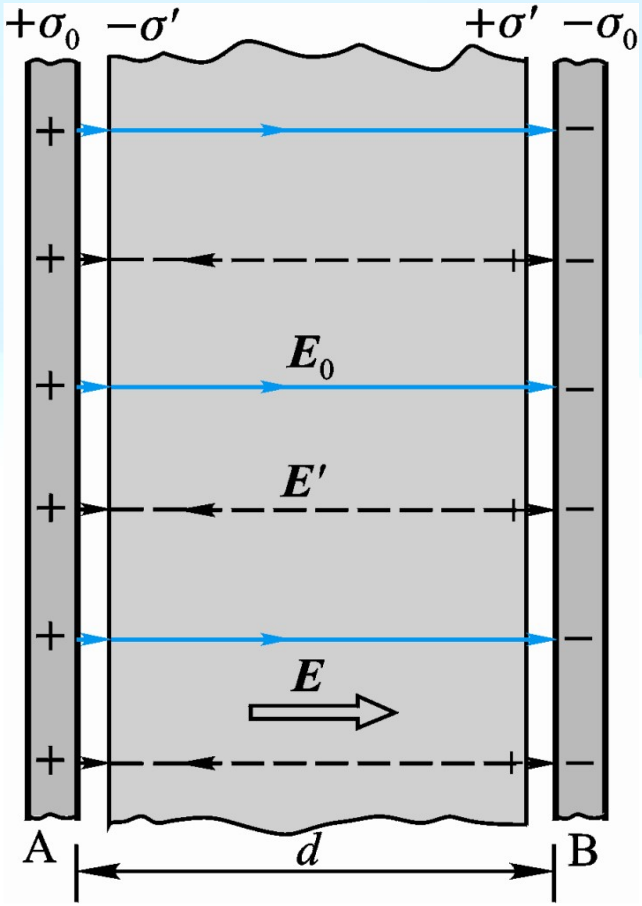
$$C=\frac{q}{U}=\frac{\sigma S}{U}=\frac{\varepsilon_0(1+\chi_e)S}{d}$$

$$=(1+\chi_e)C_0$$

$$\varepsilon_r=1+\chi_e$$ 普遍适应

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0=(1+\chi_e)\varepsilon_0$$

电容率或介电常量



§7-9 有电介质时的高斯定理和环路定理　电位移

一、有电介质时的高斯定理　电位移

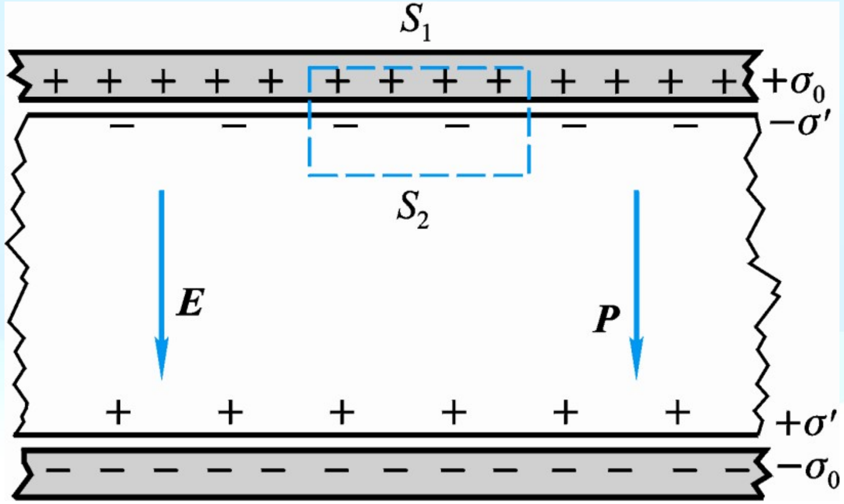
真空中的高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

介质中的高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sum q_0 + \sum q')$

$$\vec{E} \leftarrow q_0 + q' \leftarrow \vec{P}$$

考虑无限大平板电容器中充满均匀电介质。

设两极板所带自由电荷的面密度分别为 $\pm\sigma_0$，电介质两表面上分别产生极化电荷，面密度为 $\pm\sigma'$ 。



作一圆柱形闭合面，上下底面与极板平行，则有

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 S_1 - \sigma' S_2)$$

$$\sigma' = P \quad \Longrightarrow \quad \oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{S_2} \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = PS_2 = \sigma' S_2$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_0 S_1 - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$$

电位移矢量(electric displacement)：

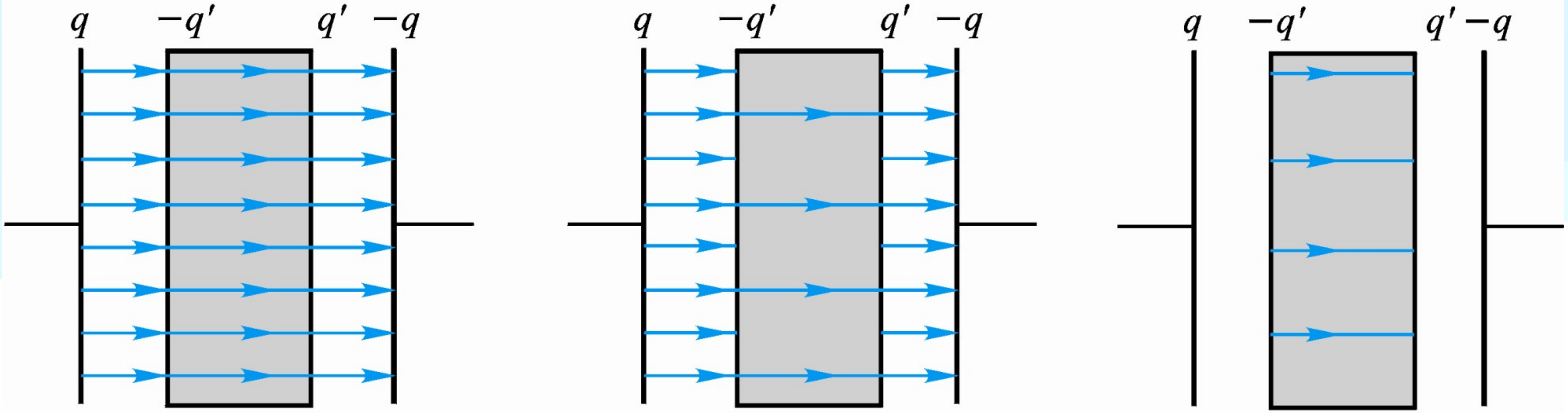
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$$ 有电介质时的高斯定理

$\vec{D}$ 线起始于正自由电荷，终止于负自由电荷，在没有自由电荷处不中断。

$\vec{D}$ 线分布由 q_0、q' 共同决定。

电位移线与电场线



(a) ***D*** 线均匀分布　(b) 电介质内部***E*** 线较稀疏　(c) ***P*** 线只在电介质内部

二、$\vec{D}$、$\vec{E}$ 、$\vec{P}$ 三矢量之间的关系

对于各向同性的电介质：

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$$

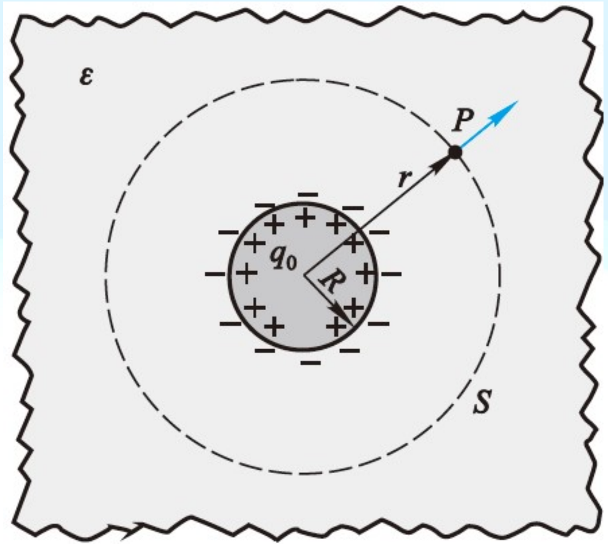
三、有电介质时的环路定理

无论是自由电荷还是极化电荷，从激发电场的角度看，它们所激发的静电场特性应是一样的，所以有电介质存在时，电场强度的环路定理仍然成立。

$$\oint_L \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathbf{0}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}$是所有电荷（自由电荷和极化电荷）激发的合电场强度。

例7-28 金属球半径为R，带电荷q_0，浸泡在均匀“无限大”电介质中（电容率为 ε ），求球外任一点P处的电场场强及极化电荷分布。



解： $$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot D = q_0$$

$$D = \frac{q_0}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

方向：$\vec{e}_r$

电场强度减弱到真空时的 $\dfrac{1}{\varepsilon_r}$