谓词逻辑的语法和语义

Wang-Zhou Dai

1 一阶逻辑的语法（syntax）

一阶逻辑语言

一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$ 包括：

1. 括号："(" 和 ")"；
2. （命题）联词；
3. 量词符号：$\forall$；
4. 变元：$v_1, v_2, \ldots$；
5. 常元：$c_1, c_2, \ldots$；
6. 函数符号：f/n 表示 n 元函数；
7. 谓词符号；P/n 表示 n 元谓词；
   - 等号（一种特殊的谓词）。

项（Term）

1. 每个常元是一个项；
2. 每个变元是一个项；
3. 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项，且 f 是一个 n 元函数符，那么 $f(t_1, \ldots, t_n)$ 也是项。

合式公式（Well-formed formula）

1. 如果 $t_1, \ldots, t_n$ 是项，且 P 是一个 n 元谓词，那么 $P(t_1, \ldots, t_n)$ 是一个合式公式，特别地，我们称这种公式为"原子公式"。例如 $=(t_1, t_2)$ 就是一个原子公式，一般记为 $t_1 = t_2$；
2. 如果 φ 和 ϕ 是合式公式，那么 $(\neg\varphi)$ 和 $(\varphi \to \phi)$ 也是合式公式；
3. 如果 φ 是合式公式，而 v_i 是变元，那么 $\forall v_i\, \varphi$ 也是。
   - $\exists x\, \varphi \equiv \neg\forall x\, \neg\varphi$

2 一阶逻辑的语义（semantics）

在 1927 年至 1929 年期间，塔斯基（Alfred Tarski, 1901–1983）在华沙大学的逻辑研讨会上证明了几个涉及后来被称为"语义学"的概念的结果，特别是关于结构中可定义性和"真"（truth）的概念。塔斯基在试图将研讨会中呈现的结果形式化时遇到了某些困难，这促使他寻找一个精确的语义学概念理论。塔斯基说：

> "很明显，所有这些结果只有在接受 [真] 句子的具体而精确的定义作为研究基础后，才能获得清晰的内容并得以准确地证明。"

结构（structure）

一阶语言的一个**结构** $\mathfrak{A}$ 是定义域包括非逻辑符号和量词符号的函数，并且满足以下条件：

1. $\mathfrak{A}$ 给量词符号 $\forall$ 指定一个非空集 $|\mathfrak{A}|$，称做 $\mathfrak{A}$ 的**论域**（universe）；
2. 对每个 n-元谓词符号 P/n，$\mathfrak{A}$ 都指定一个n-**元关系**$P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$，即 $P^{\mathfrak{A}}$ 是由论域中 n-元组所组成的集合；
3. 对每个常数符号 c，$\mathfrak{A}$ 都指定论域中 $|\mathfrak{A}|$ 中的一个元素 $c^{\mathfrak{A}}$；
4. 对每个 n-元函数符号 f/n，$\mathfrak{A}$ 都指定一个论域 $|\mathfrak{A}|$ 上的n-**元函数**$f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \mapsto |\mathfrak{A}|$。

注：关于"关系"和"函数"的介绍我们会在离散数学的后续课程中介绍。此外，由于结构 $\mathfrak{A}$ 中没有规定变元的解释，因此无法讨论含自由变元的公式的真值假。

变元赋值

令 $\mathcal{V}$ 是一阶语言 $\mathcal{L}$ 中所有**自由变元**的集合，$\mathfrak{A}$ 是 $\mathcal{L}$ 的结构，所谓**赋值** s 指的是任意由 $\mathcal{V}$ 到 $\mathfrak{A}$ 的论域上的函数 $s : \mathcal{V} \mapsto |\mathfrak{A}|$。

解释（interpretation）

有了结构 $\mathfrak{A}$ 和变元赋值函数 s，我们就可以对语言中本来"毫无意义"的字符串——合式公式 φ 进行解释，并尝试理解它是否为"真"。这里的定义是一阶逻辑真值理论的核心，它是由 Tarski 在 1933 年给出的。为简便起见这里不再给详细的数学定义，只给一个直观的讲解和一个简单的例子，更进一步的内容大家可以去搜寻相关资料，例如 https://plato.stanford.edu/entries/tarski-truth/.

> 直观上说，$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$ 的含义如下：先把符号串中的谓词符号、函数符号、常数符号等按照结构 $\mathfrak{A}$ 的规定来解释，把量词的论域限制在 $|\mathfrak{A}|$ 上，把自由变元 x 解释称它的赋值 $s(x)$，从而把公式 φ 翻译成一个关于结构 $\mathcal{A}$ 的命题。利用我们关于 $\mathfrak{A}$ 的知识，判断 φ 为真。

例如，固定一个语言 $\mathcal{L} = \{+, \cdot, =, 0, 1\}$（想一想，哪些是常元？谓词？函数？它们应该如何解释？）。考察一阶语句 $\varphi \equiv \forall x\,(x \cdot x \neq 1 + 1)$，就它本身而言，它只是一个字符串，到现在位置尚不具有任何意义。只有当固定好一个 $\mathcal{L}$ 的结构时，才能决定它的真假。就 φ 而言，它在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中为"真"，在实数域 $\mathbb{R}$ 中为"假"，至于为什么这样，则是我们关于数学的知识告诉我们的。

3 语义蕴涵与语法蕴涵

有了上面的讨论，我们现在可以讨论一阶逻辑中的语义蕴涵和语法蕴涵。直观上来看，二者的区别如下：

- **语义蕴涵**指在某些结构（甚至任意结构）下，公式之间关于"真"的一种蕴涵关系；
- **语法蕴涵**指在某个形式系统（如自然演绎系统、希尔伯特系统等）中，公式之间存在的一种推导（证明）关系，与结构——即符号串背后的语义——无关。

二者的数学定义如下。

语义蕴涵（logically implies）

令 Γ 是一个公式集，且 φ 为一个公式。则称 Γ 语义蕴涵（逻辑蕴涵）φ，记作 $\Gamma \models \varphi$，如果对每一个结构 $\mathfrak{A}$ 和每个赋值函数 $s : V \to |\mathfrak{A}|$，都有：如果 $\mathfrak{A}$ 和 s 满足 Γ 中所有公式（令 Γ 为真），则 $\mathfrak{A}$ 和 s 也满足 φ（令 φ 为真）。

注 1：对于命题逻辑而言，其真值往往不太依赖于"结构"的定义，而更直接地依赖于每个命题的真值（即真值表）。因此，在命题逻辑里的重言蕴涵（语义蕴涵）"$\Gamma \models \varphi$"可以简单地理解为"所有令 Γ 为真的真值表项，必然令 φ 为真"。当"$\models$"左边为空时，"$\models \varphi$"表示"无论什么结构和变元赋值"（无论什么真值表项）下，φ 恒为真，即它是一个重言式。

注 2：对于每个一阶逻辑系统都去研究其语义结构实在太复杂，因此逻辑学家们提出了一种叫"Herbrand Structure"的结构，将关于结构的"真"简化为关于一阶逻辑中所有实例化项（ground terms，即不含变元的项）的讨论。关于 Herbrand Universe（它的论域）和 Herbrand Base（它的所有谓词关系）的介绍见：https://en.wikipedia.org/wiki/Herbrand_structure.

语法蕴涵（proves）

$\Gamma \vdash \alpha$ 表示从 Γ 到 α 存在一个**推演**（或者叫做“证明”），当且仅当存在一个**有穷**公式序列

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

满足 $\alpha_n = \alpha$，并且对所有 $i \leq n$：

1. $\alpha_i \in \Gamma \cup \Lambda$，其中 Λ 为系统中的公理；或者
2. 存在 $j, k < i$，α_i 是从 α_j 和 α_k 中由分离规则得到的（即 $\alpha_k \equiv \alpha_j \to \alpha_i$）。

4 完全性（completeness）和可靠性（soundness）

理解了“⊨”和“⊢”的意义后，我们能够更方便地理解数理逻辑里最重要的两个命题。

完全性

如果 $\Gamma \models \varphi$ 则 $\Gamma \vdash \varphi$。

可靠性

如果 $\Gamma \vdash \varphi$ 则 $\Gamma \models \varphi$。