

# 第七章 静止电荷的电场

§7-0 电磁现象的早期发现

§7-1 库仑定律

§7-2 静电场 电场强度

§7-3 静电场的高斯定理

§7-4 静电场的环路定理 电势

§7-5 电场强度与电势梯度的关系

§7-6 静电场中的导体

§7-7 电容器的电容

§7-8 静电场中的电介质

§7-9 有电介质时的高斯定理和环路定理 电位移矢量

## § 7-0 电磁现象的早期发现



科学祖师塞里斯



- 公元前6世纪，**塞里斯**记述了磁石吸铁、摩擦后的琥珀吸引轻小物体的现象。
- 中国古代，公元前3世纪，《韩非子》记载有司南，《吕氏春秋》记载有磁石召铁。西汉末年（公元前20年）记载有玳瑁吸引轻小物体的记载（顿牟掇芥 dùn móu duō gài）。人们也认识到了两种现象的不同，形成了对电学和磁学的研究。

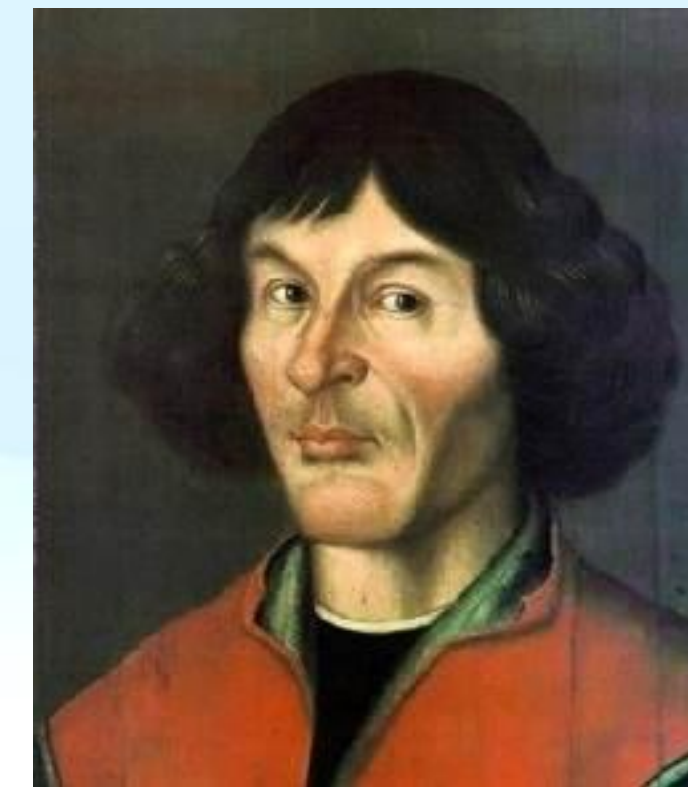


■17世纪之前，多属于定性的观察和零碎的知识。到了17世纪，才有了一些系统的有研究：发生了什么？。

## 文艺复兴（14至16世纪）、第一次科学革命（16至17世纪）



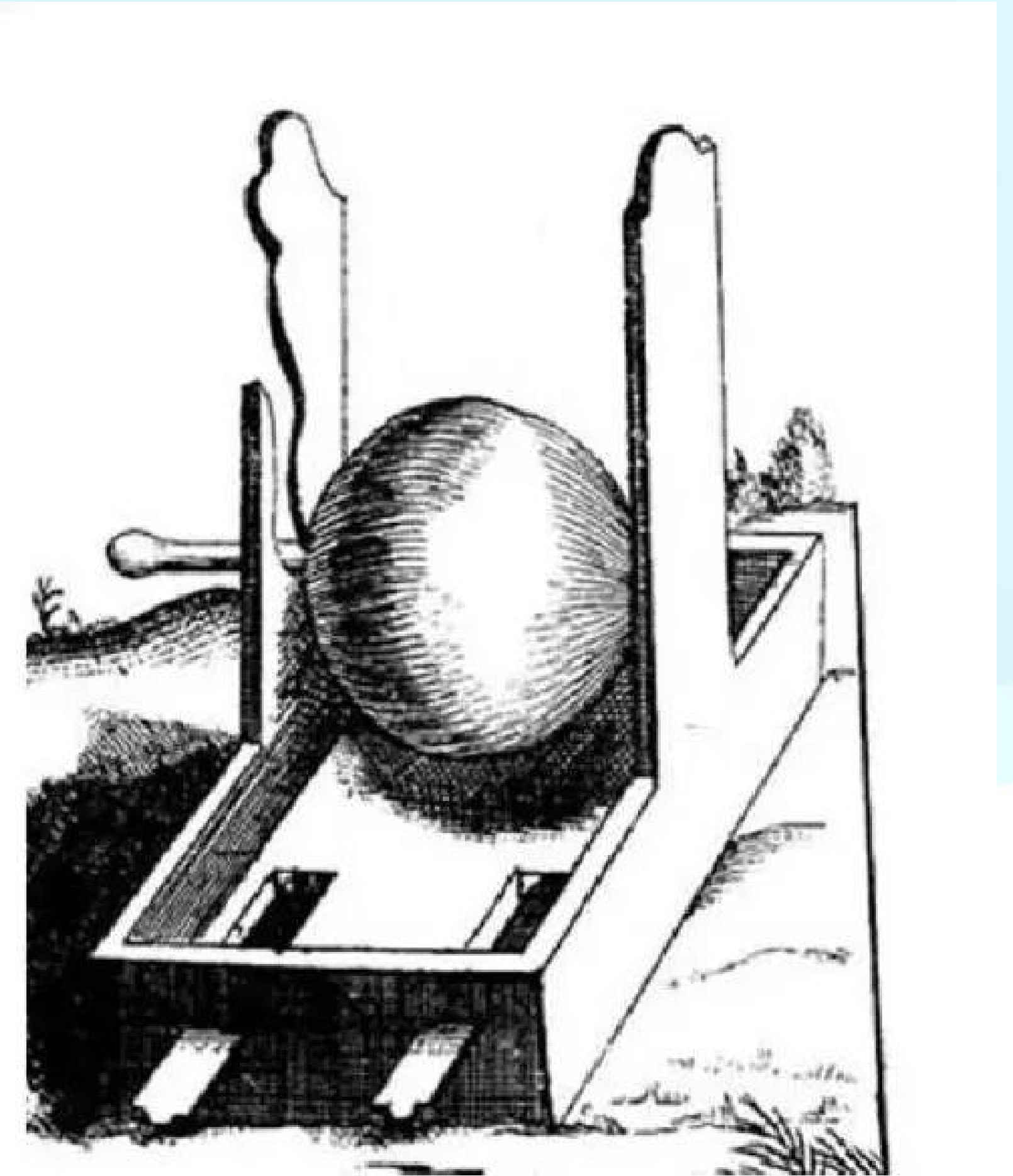
牛顿（自然哲学的数学原理）



哥白尼（天体运行论）

■17世纪开始系统研究磁现象，1600年，英国医生Gilbert发表了《论磁、磁体和地球作为一个巨大的磁体》，亲自制作磁针磁球，进行磁性实验（沿地磁方向锻打铁块，可以得到磁针）。自然界可以获得磁体，早期磁学研究更加便捷，更易于做实验。

■**造出了“轮子”**：到了1660年，盖里克（Otto von Guericke）发明了摩擦起电机，电学研究开始系统化（绕中心旋转的大硫磺球）。（地球的引力乃是星际的精气，只是实验和地球引力还是不同，**还存在排斥**）



■**第一条电学基本原理**：1720年，格雷（S. Gray）研究了电的传导现象，发现了导体和绝缘体的差别，随后发现了**静电感应**的现象。

摩擦起电机

摩擦起电机演示实验





■**第二条电学基本原理：**1733年，杜菲（Charles du Fay）经过实验区分出两种电荷，松脂电（负）玻璃电（正），**得到同性相斥，异性相吸。**

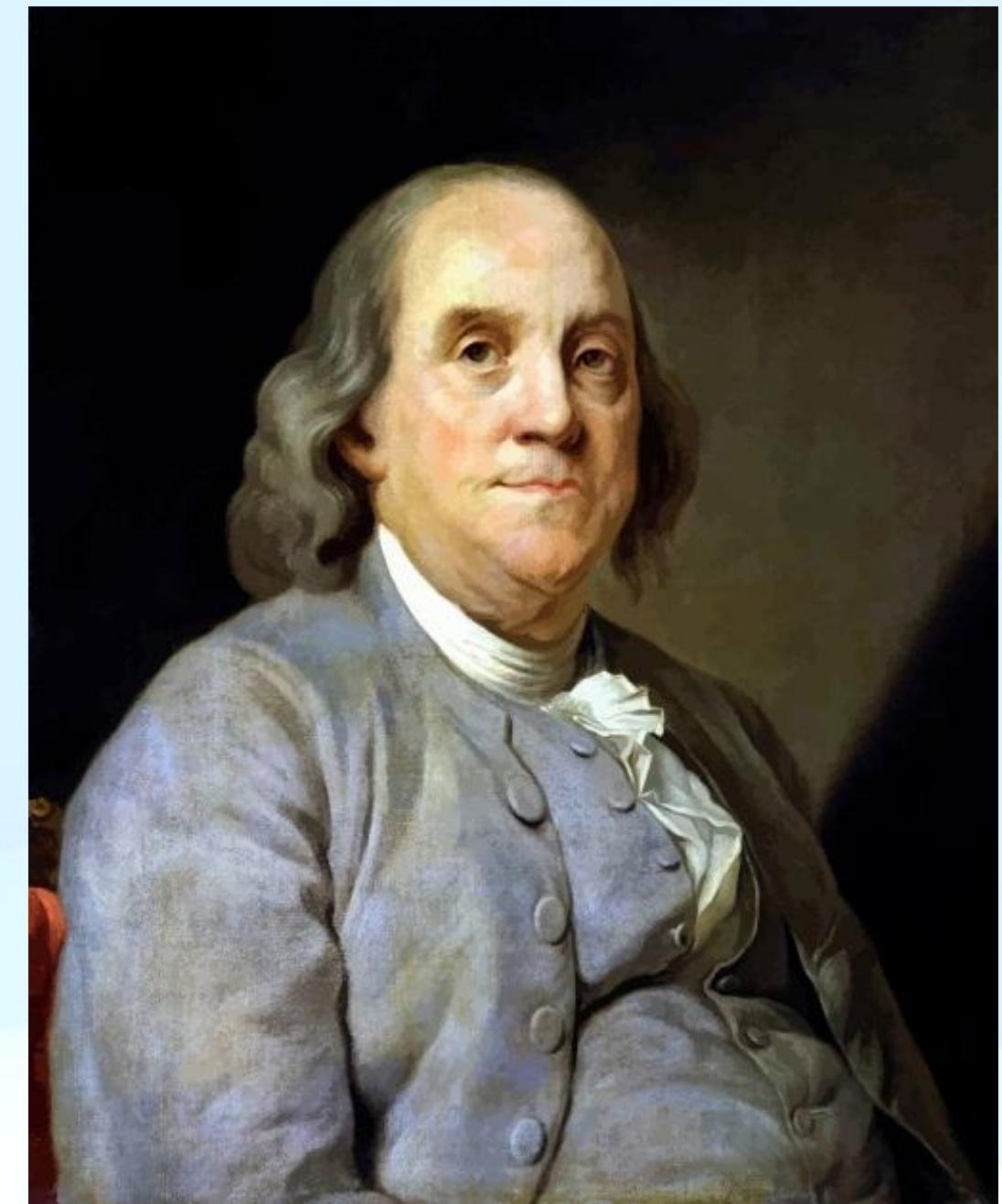
■直到18世纪末，静电学研究的“**轮子**”摩擦起电机一直是研究电现象的基本工具。

■**第二个“轮子”莱顿瓶：**1745、1746年，克莱斯特（E. G. v. Kleist）和马森布洛克（P. van. Musschenbrock）分别独立做出。

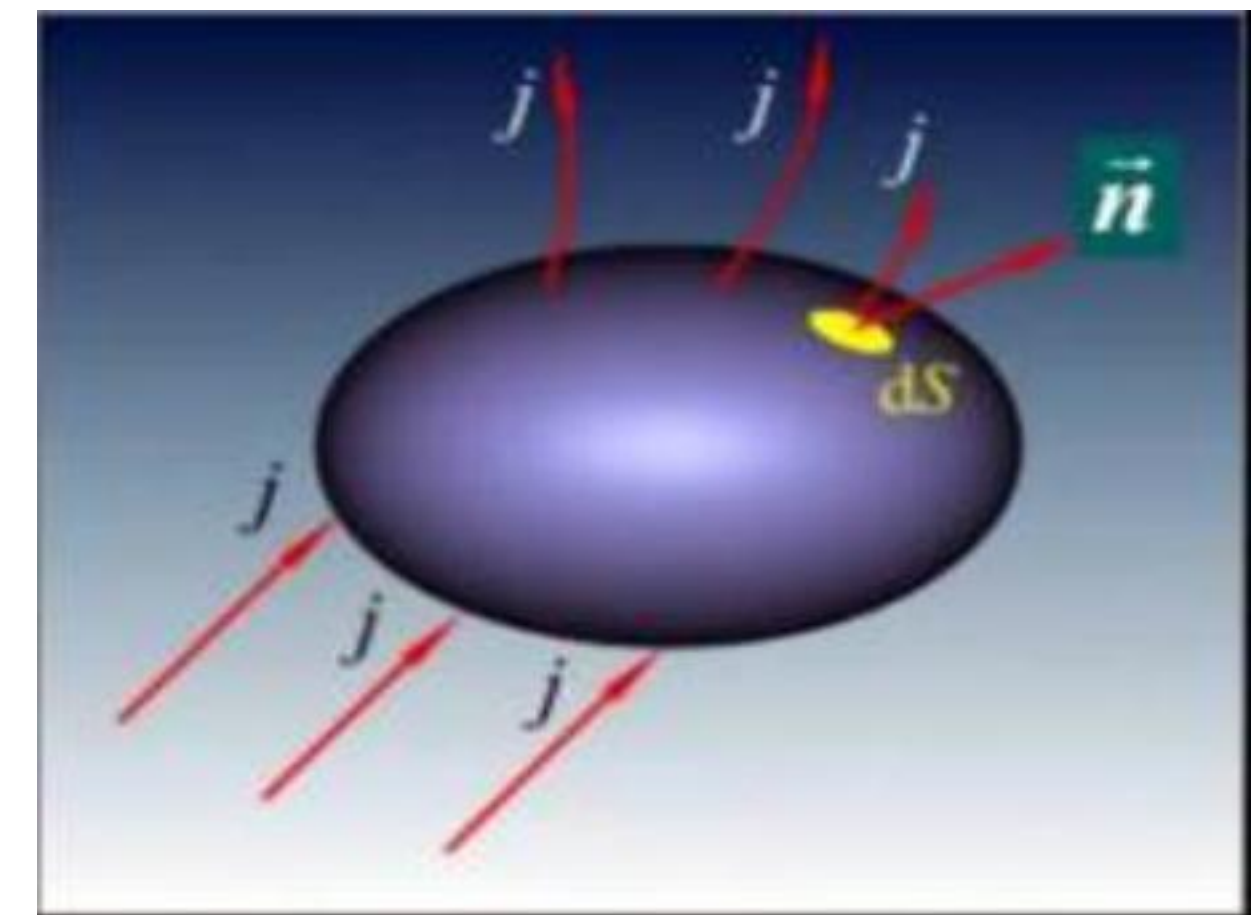


■**第三条电学基本原理**：1747年，富兰克林根据实验提出了**电荷守恒原理（公设）**。实验发表于1750年的《哲学杂志》上。为了解释实验，他提出了**电的单流度假说**。他的解释可以表述为：在任一封闭系统中，电基质的总量不变，它只能被重新分配而不能被创生，这就是电荷守恒原理。富兰克林的这些贡献，使电学的研究从单纯的现象观察进入**精确的定量描述**（提供了一种定量的基准），人们可以用**数学的方法**来表示和研究电现象。后人把富兰克林看作电学理论的**奠基人**。

■1754年，康顿（John Canton）用单流度假说解释了静电感应现象。



电学之父富兰克林



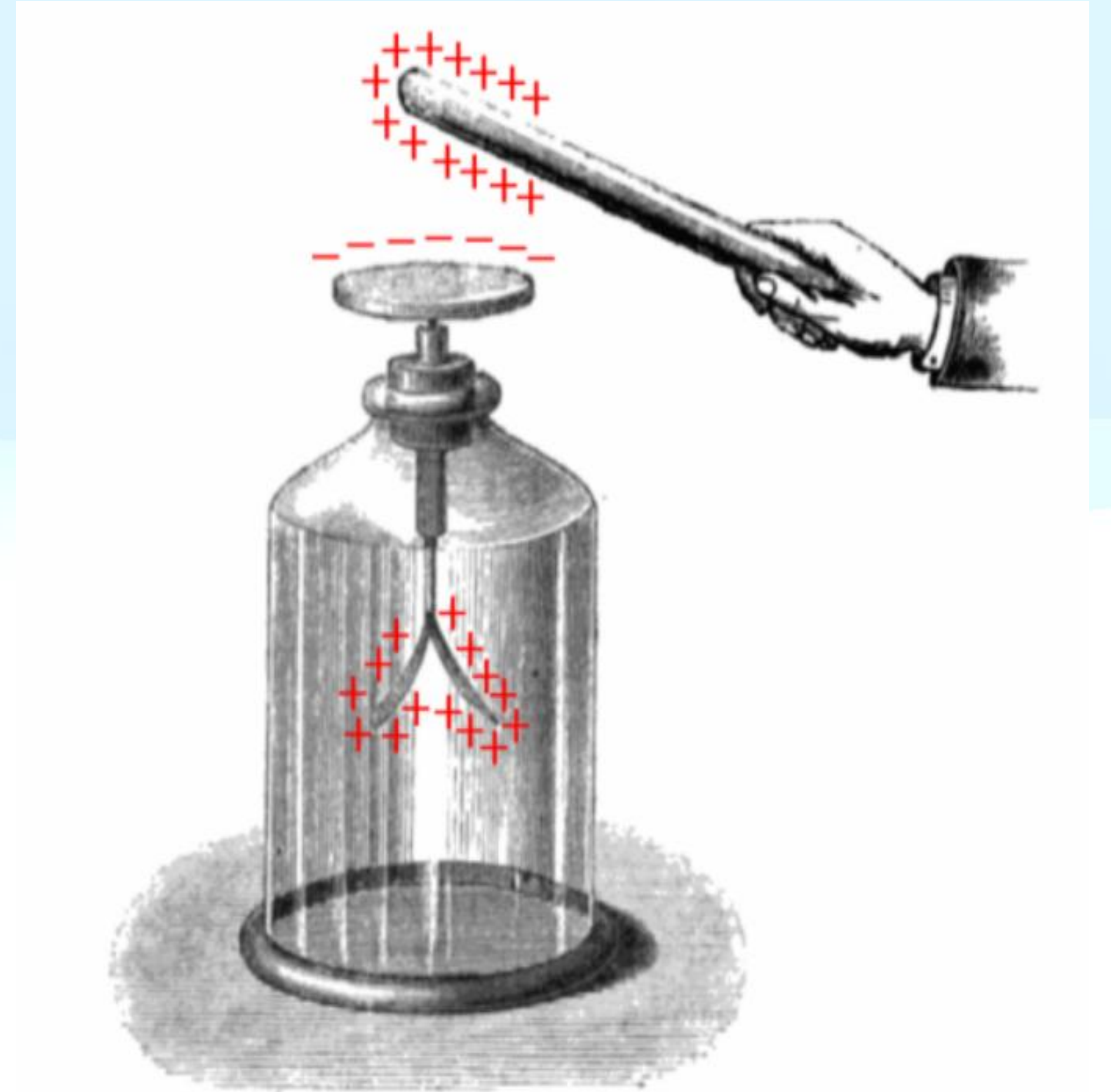
静电学的三条基本原理：静电力基本特征、电荷守恒、静电感应原理都已经建立，对电的认识有了初步成果，具备了定量化的基础，静电学的基本定律开始孕育！

1785年，发现静电学第一条基本定律：库仑定律。

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

## § 7-1 库仑定律

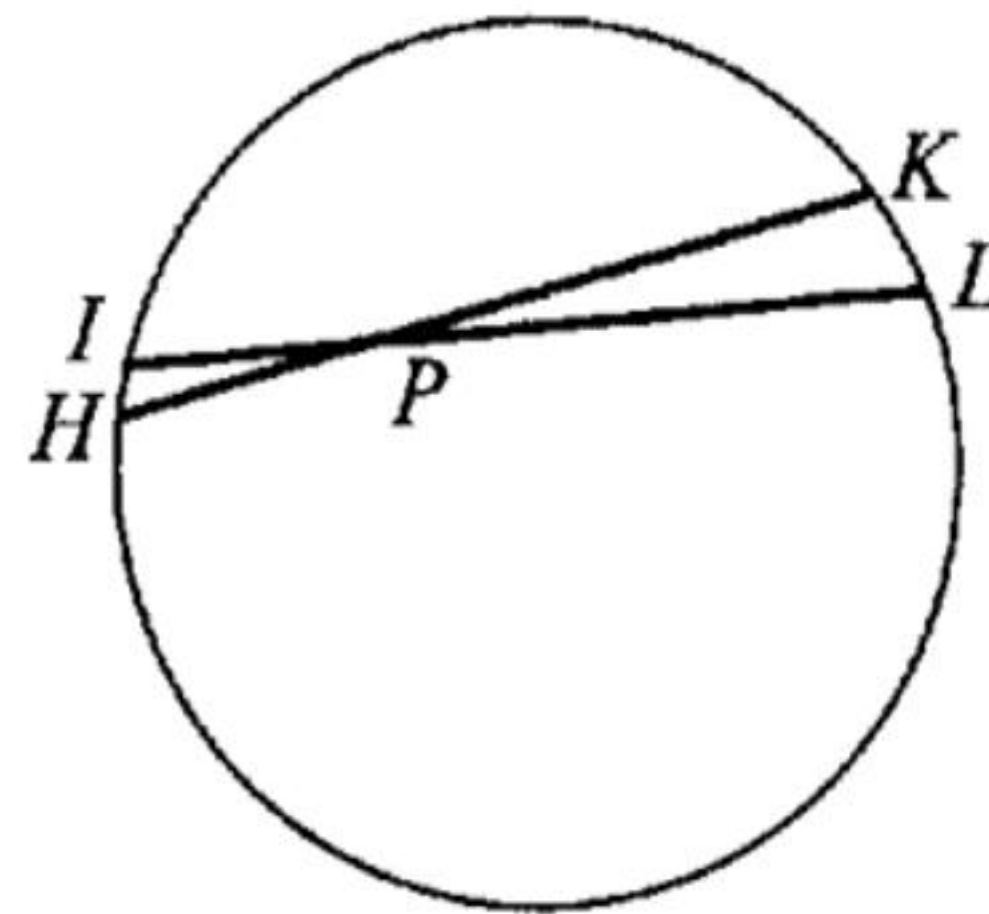
德国科学院院士爱皮努斯 (F. U. U. Aepinus) 1759年对电力做了研究。他假设电荷之间的斥力和引力随带电物体的距离减少而增大，对静电感应现象作了更完善的解释。 (还是定性的猜测)





# 万有引力定律的启示：牛顿时空观对研究的指引

- 1760年，D. 伯努利猜测电力会不会和万有引力（当时最成功的理论）一样服从平方反比率。
- 1755年，富兰克林的空罐实验（带电银罐内部无电）对这个规律有重要启示，只是不知如何解释。他的朋友英国人普里斯特利（Joseph Priestley）在1767年的《电学历史和现状及原始实验》：电的吸引力和万有引力服从同一定律，即距离的平方，因为很容易证明，假如地球是一个球壳，在壳内的物体受到一边的吸引作用，绝不会大于另一边（呼应了牛顿的定理）。只是普仍停留在猜测的阶段。



- 1769年，罗比逊(John Robison)受爱皮努斯书启发，设计了一个转臂装置，进行平方反比率的验证。仅仅验证了同号力，装置不能验证异号力。使用了 $f = \frac{1}{r^{2+\delta}}$ 表示式，根据实验推算出 $\delta = 0.06$ 。
- 1773年，卡文迪许用两个同心金属壳做实验（**对牛顿工作的类比**），可以精确验证平方反比率。（卡的工作没有公开发表，包括同心球壳实验，19世纪中叶开尔文爵士发现了他的手稿工作的价值，1879年由麦克斯韦整理发表）

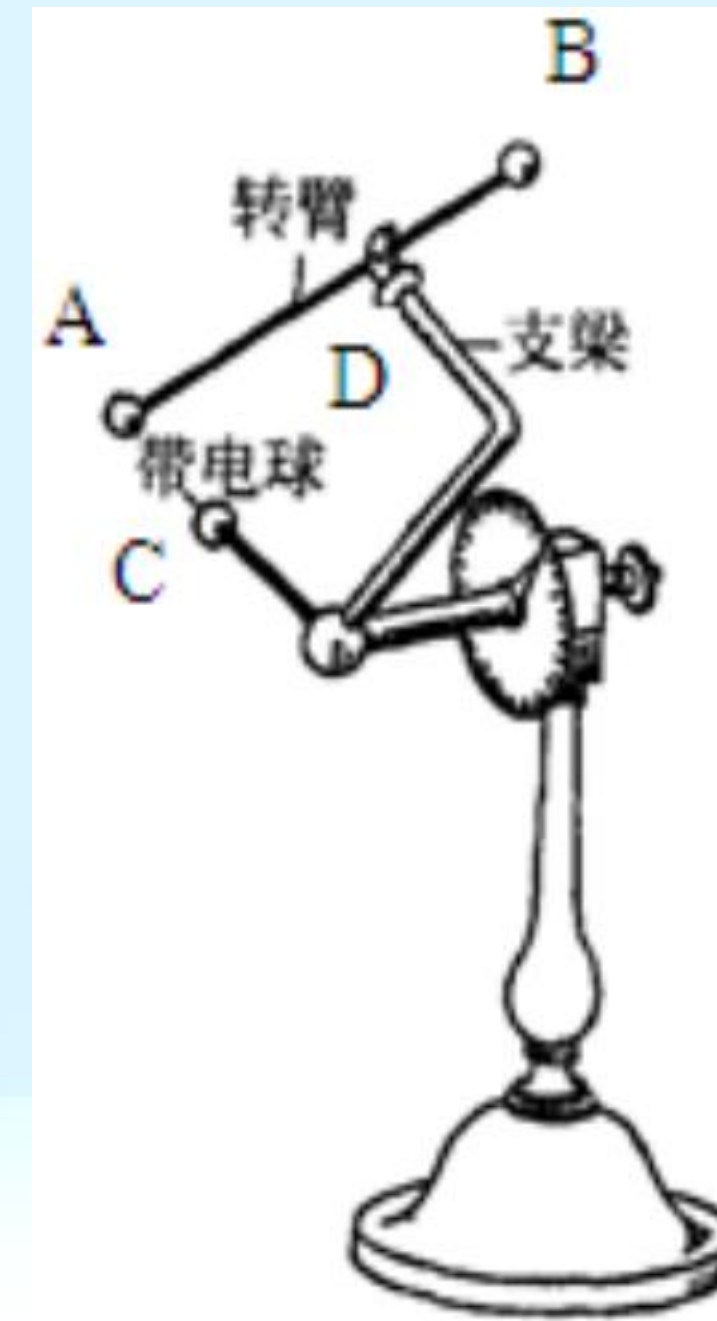


图 1

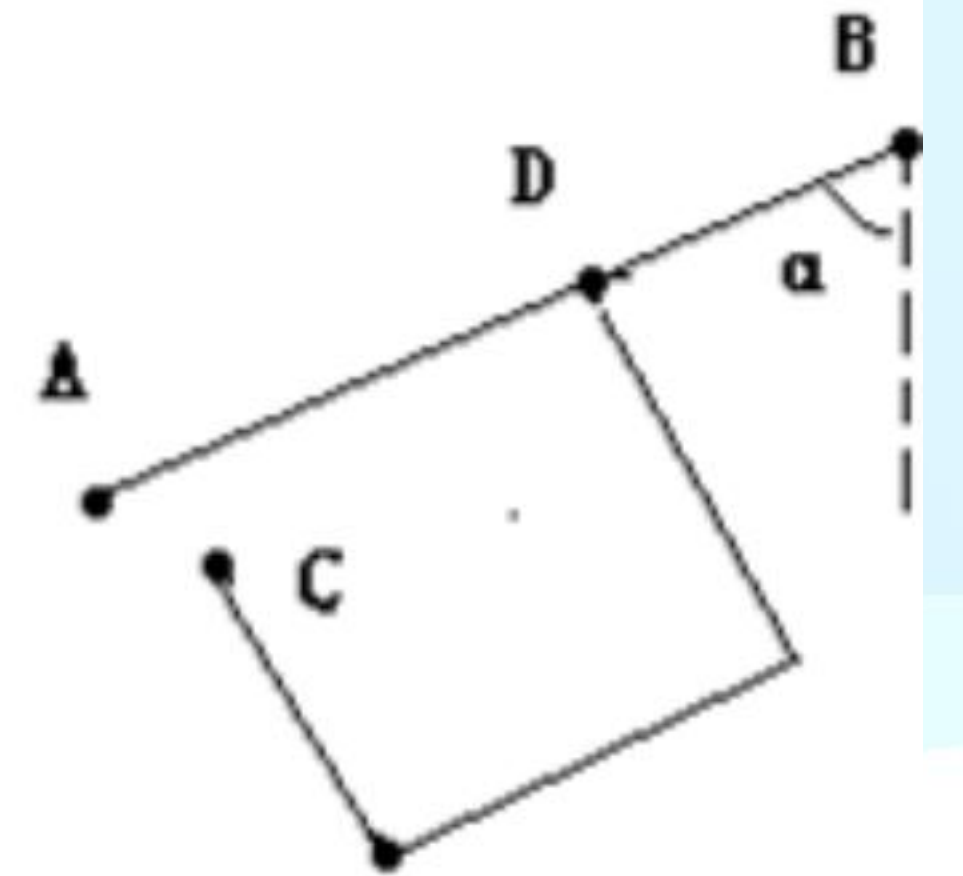
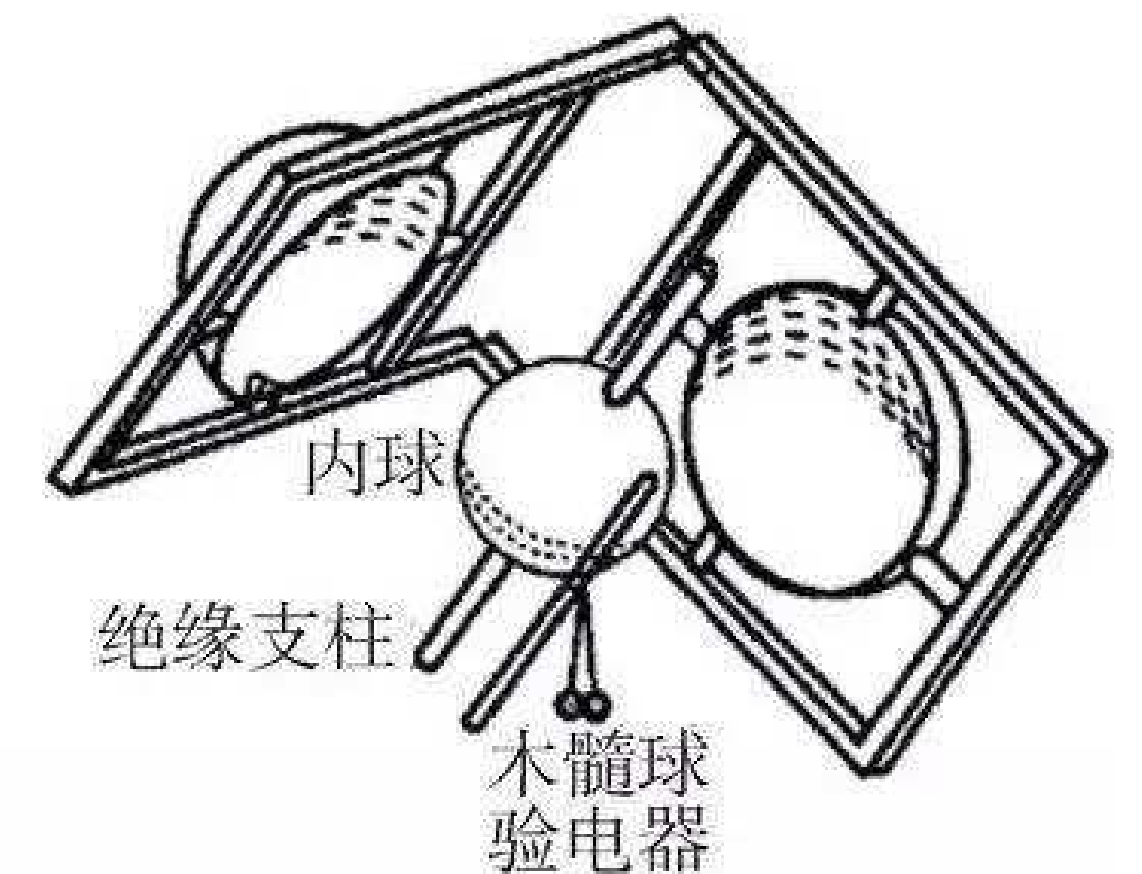


图 2

公认的库伦定律1785年由库伦发现，他使用  
由自己发明的扭秤得到了平方反比率，精度  
和卡文迪许相比有差距。





库仑定律：两个**静止点电荷**之间相互作用力（静电力）的大小与两个点电荷的电荷量 $q_1$ 和 $q_2$ 的乘积成**正比**，而与两个点电荷之间的距离 $r_{12}$  ( $r_{21}$ ) 的**平方成反比**，作用力的方向沿着这两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$$

■库伦同时还通过扭秤法和摆动法测定磁力，也得出平方反比定律。他也是按照**万有引力**的模式来探讨电力的规律性。他说，“我们必须归结于那些人们为了解释物体重量和天体物理现象时不得不采用的吸引力和排斥力性质”。

实际上整个静电学的发展都是借鉴和利用引力理论的已有成果



# 电学定量化又一原理：静电力的叠加原理

- 当空间有两个以上点电荷时，作用在某一点电荷的总静电力等于其他各点电荷单独存在时对该点电荷所施静电力的矢量和

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{qq_i}{r_i^2} \vec{e}_{r_i}$$

对于两带电体之间的静电力：先把带电体看作是由许多电荷元组成，先应用库仑定律再应用叠加原理，这是处理连续带电体相互作用的理论基础。

至此，**静电学定量化得以实现。**

**条件：相互作用不改变电荷元自身性质**



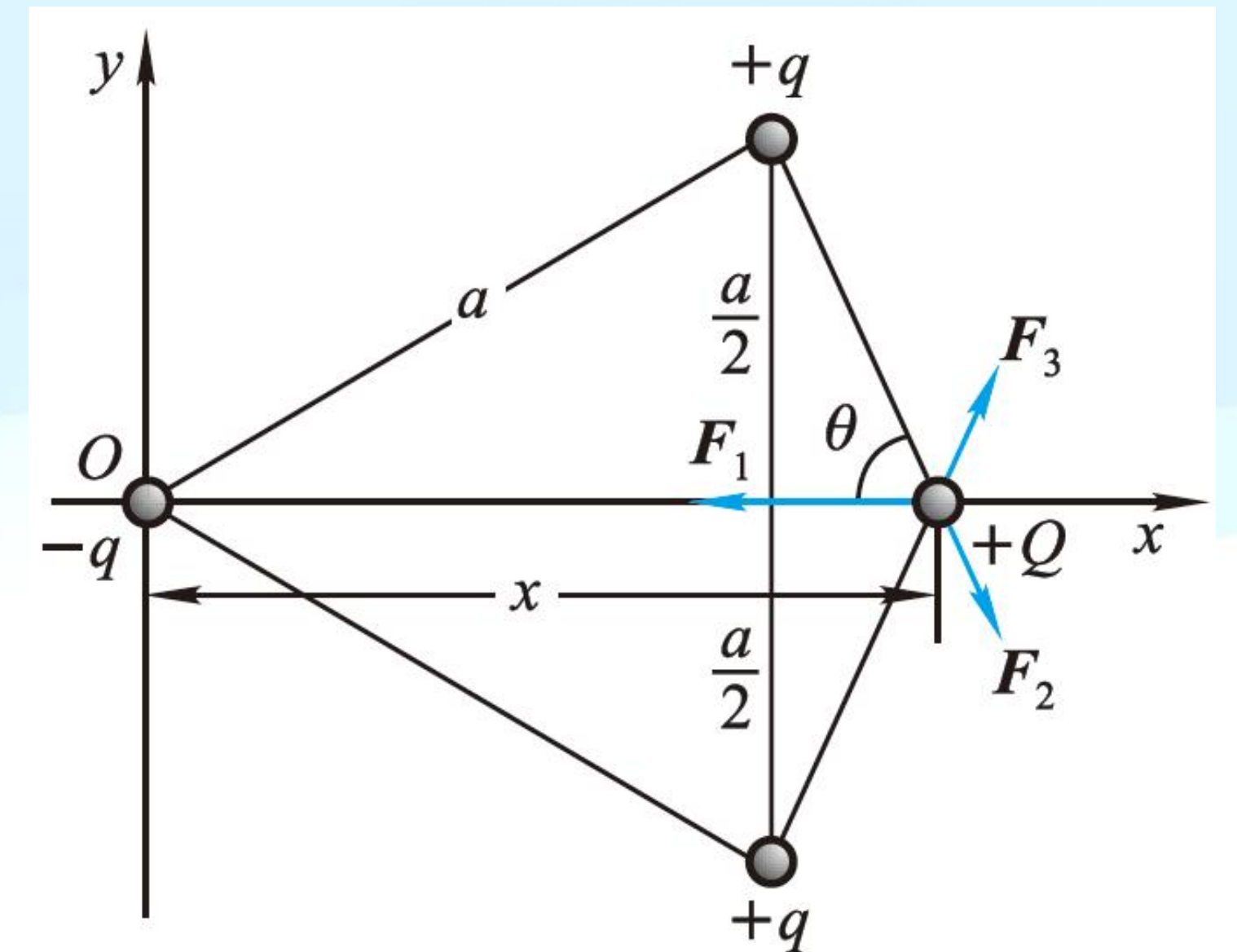
**\*例7-1** 三个电荷量均为 $q$ 的正负电荷，固定在一边长 $a=1\text{m}$ 的等边三角形的顶角上，另一个电荷 $+Q$ 在这三个电荷的静电力作用下可沿其对称轴 $Ox$ 自由移动，求电荷 $Q$ 所受到的力。

**解：** 作用在正电荷 $Q$ 上的总合力为

$$F = 2 \times \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x - \frac{\sqrt{3}a}{2}}{r}$$



$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2\left(x - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)}{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{x^2} \right\}$$

$F(x) = 0$  可求出电荷  $Q$  的平衡位置

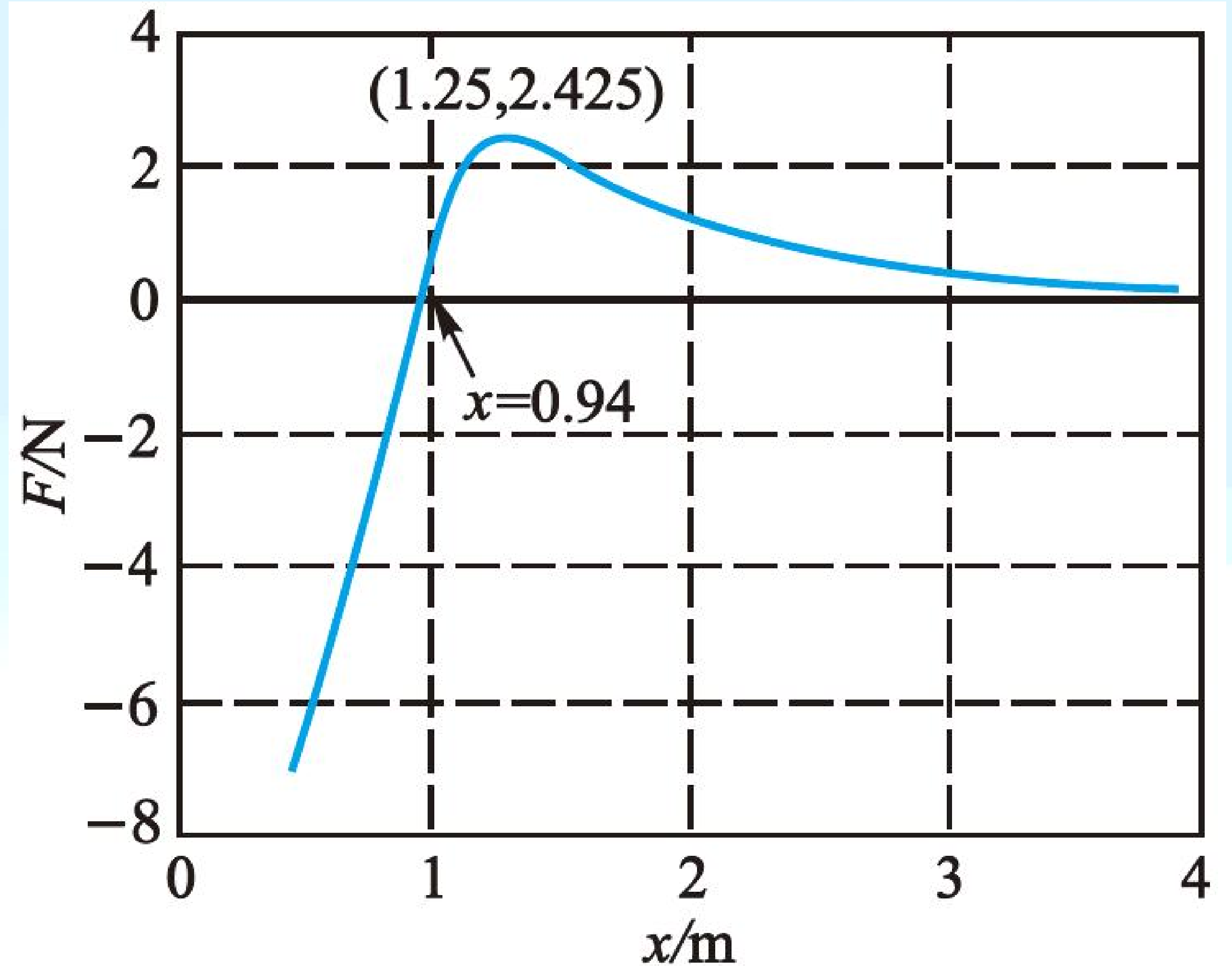
$\frac{dF(x)}{dx} = 0$  可求出电荷  $Q$  受到最大排斥力的位置



使用Matlab求解得到的两个超越方程

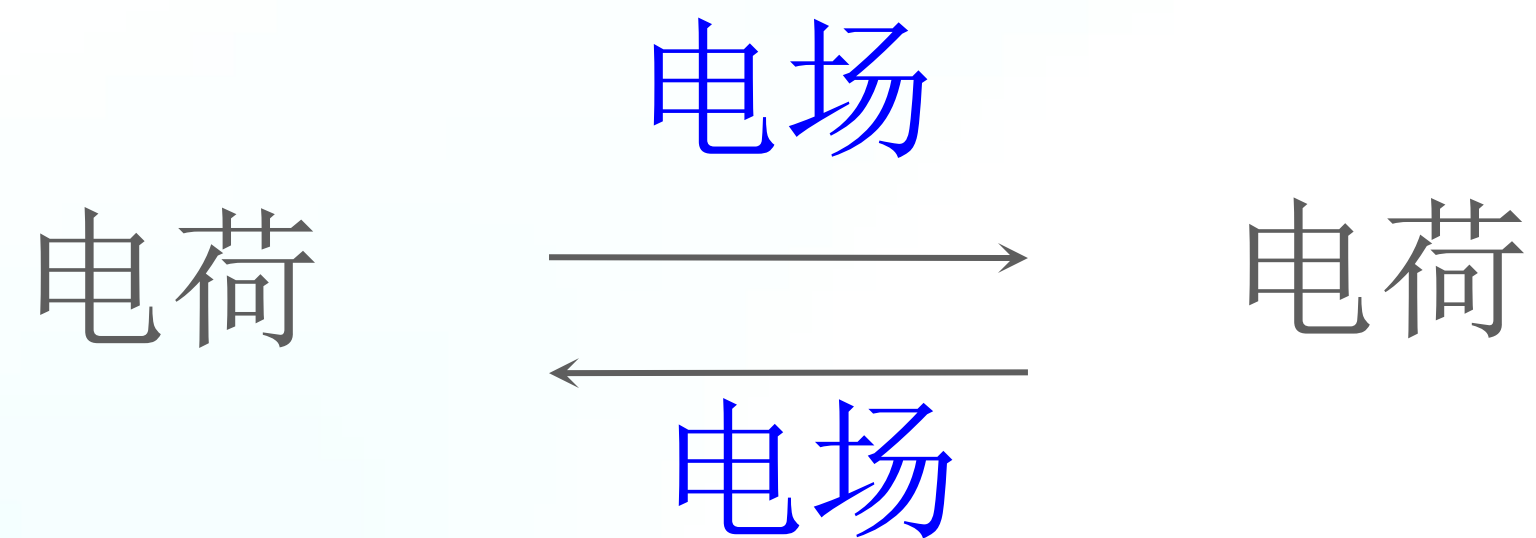
$F = 0$ 的位置  $x = 0.94\text{m}$

排斥力最大的位置  $x = 1.25\text{m}$



## § 7-2 静电场 电场强度

- 1832年，法拉第明确提出了著名的**力线**概念（本质是场）。这是**超距**和**近距**作用争议的核心焦点。
- 1839年，高斯在他的著作《与距离平方成反比的吸引力和排斥力的普遍理论》里阐明了势理论的原理，其中包括静电学的基本定理—高斯定理，还提出应该**由库仑定律本身来定义电荷的量度**。



两个重要性质：

- 电荷在电场中要受到电场力的作用。
- 电场力对电荷有做功的本领



# 电场强度(数学描述)

试验电荷  $q_0$ : (1) 正电荷 (2) 电荷量足够小 (3) 线度小

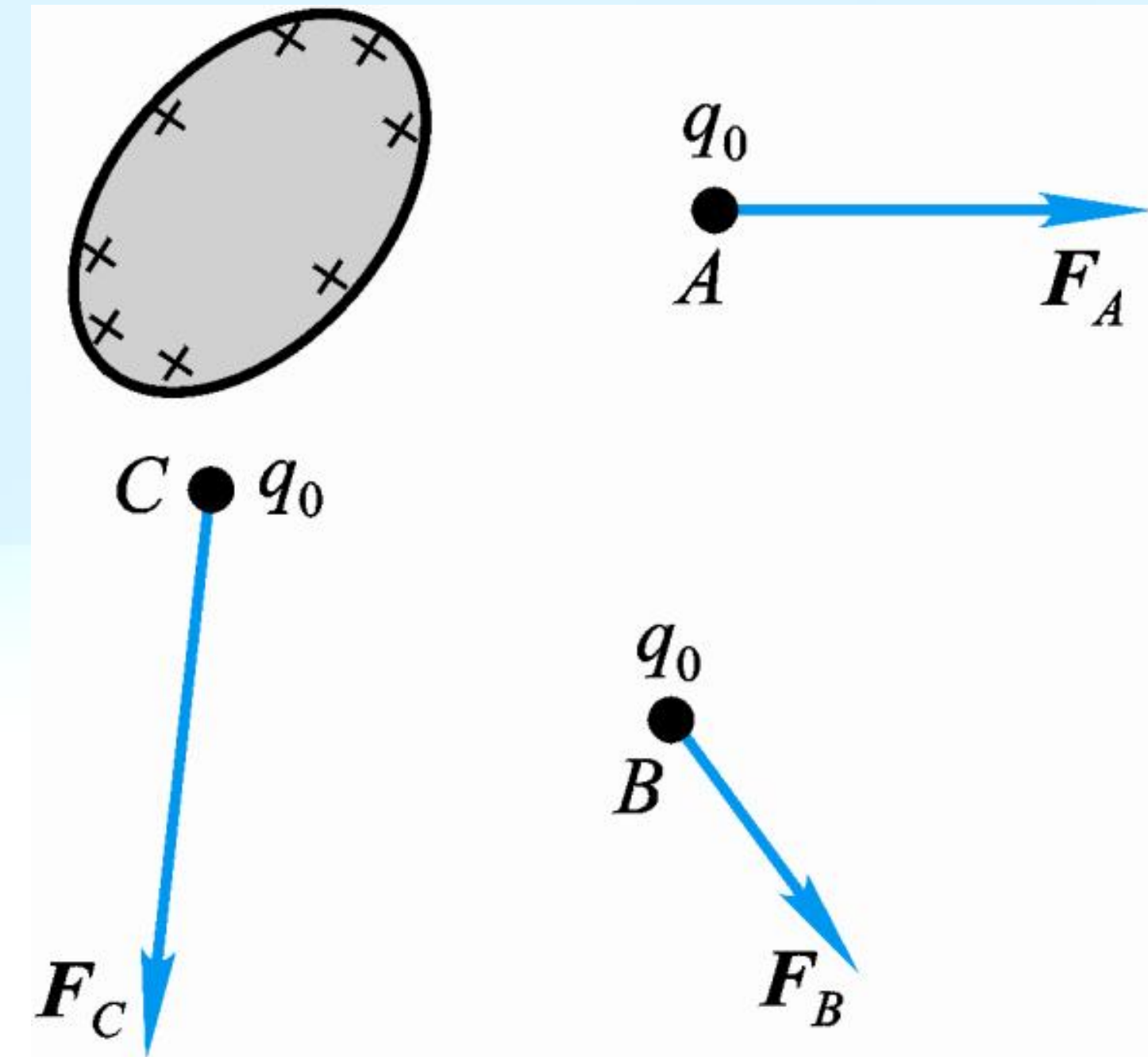
实验:

1. 在电场的不同点上放同样的试验电荷  $q_0$ , 电场中各处的力学性质不同。
2. 在电场的同一点上放不同的试验电荷,

$\frac{\vec{F}}{q_0}$  与  $q_0$  无关

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- 矢量场: 方向为正电荷在该处所受电场力的方向
- 大小为  $\frac{F}{q_0}$
- SI单位:  $N/C$  或  $V/m$



# 电场强度的叠加原理

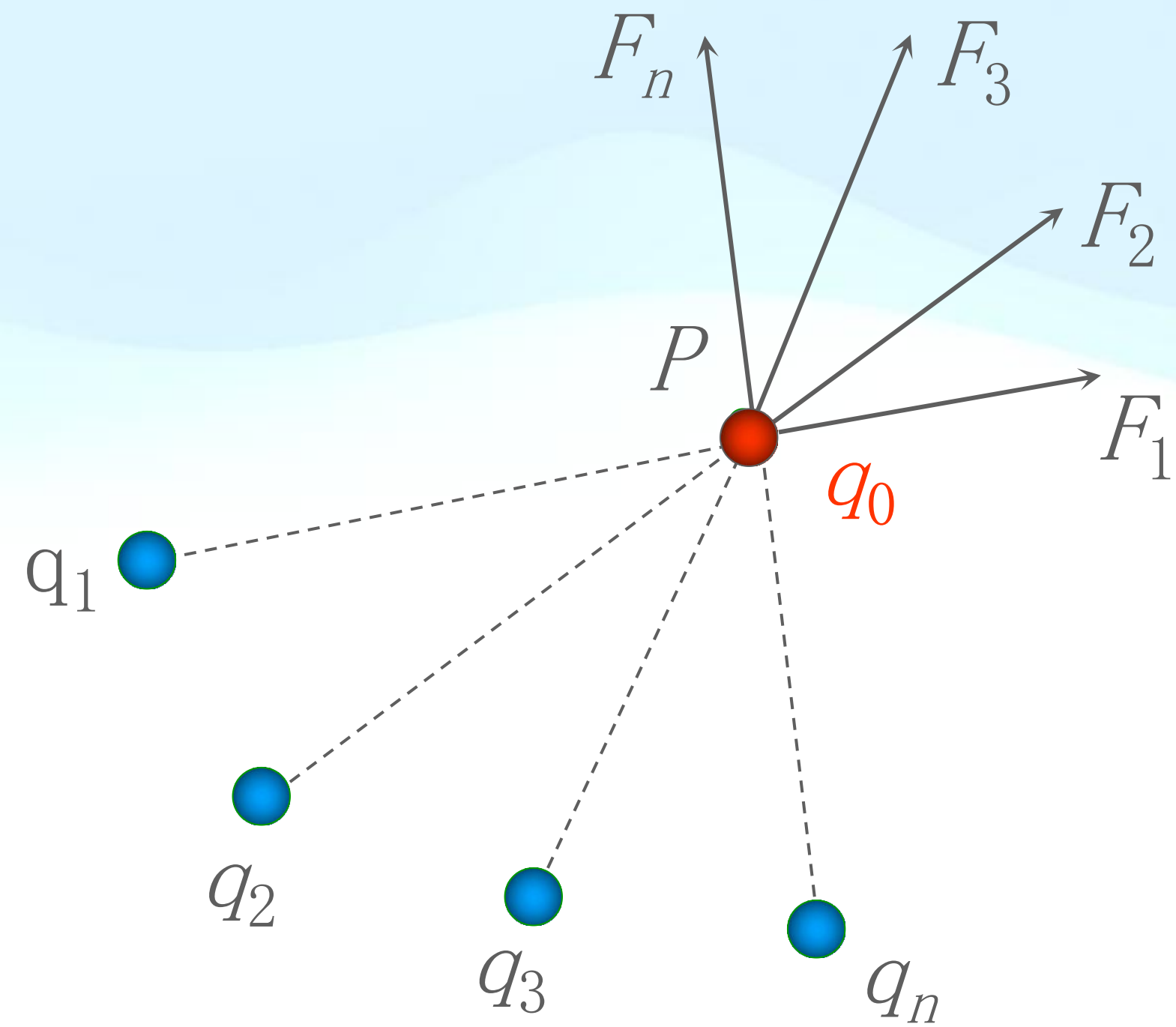
电场力可以叠加，所以和力成正比的电场强度也可以叠加

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

场强叠加原理：

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n = \sum_i \vec{E}_i$$





## 点电荷系的电场强度

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \vec{e}_{r1}$$

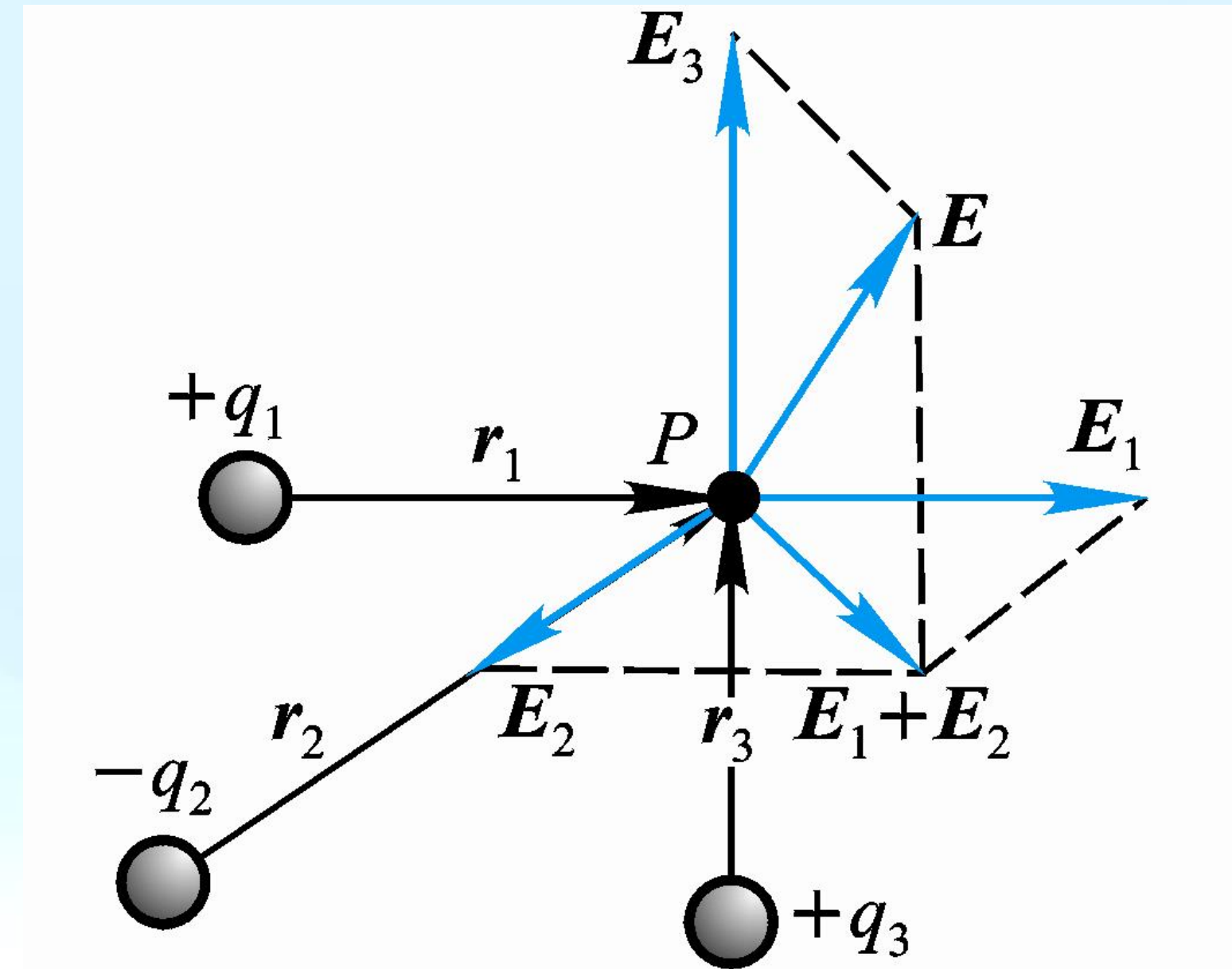
$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \vec{e}_{r2}$$

.....

根据场强叠加原理

点电荷系的电场强度：

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

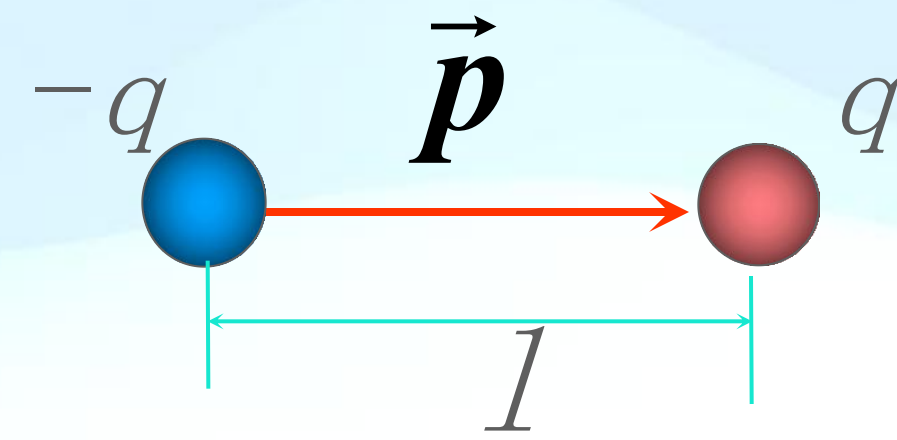


电偶极子 (electric dipole) :

大小相等、符号相反并有一微小间距的两个点电荷构成的复合体。

电偶极矩 (electric moment) :

$$\vec{p} = q\vec{l}$$



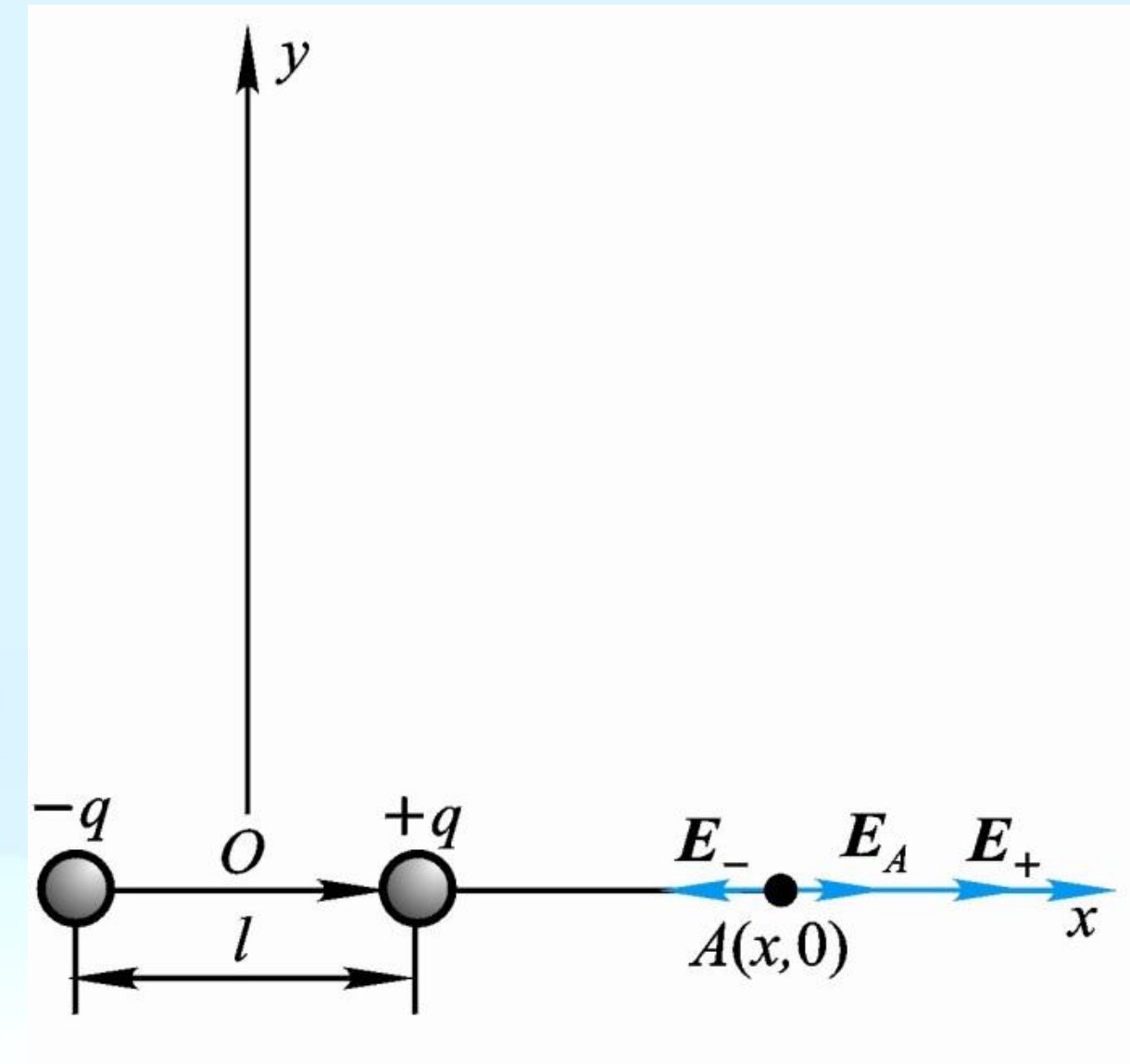
电偶极子是个很重要的物理模型，在研究电极化、电磁波的发射和接收都会用到。

例7-2 计算在电偶极子延长线和中垂线上任一点的电场强度。

解： 延长线上任一点：

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x - l/2)^2}$$

$$E_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(x + l/2)^2}$$



$$E_A = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2xl}{x^4} \frac{1}{(1 - l^2/4x^2)^2}$$

$$(\because x \gg l \therefore l^2/4x^2 \approx 0)$$

$$E_A \approx \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$

$$\vec{E}_A = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$



中垂线上任一点：

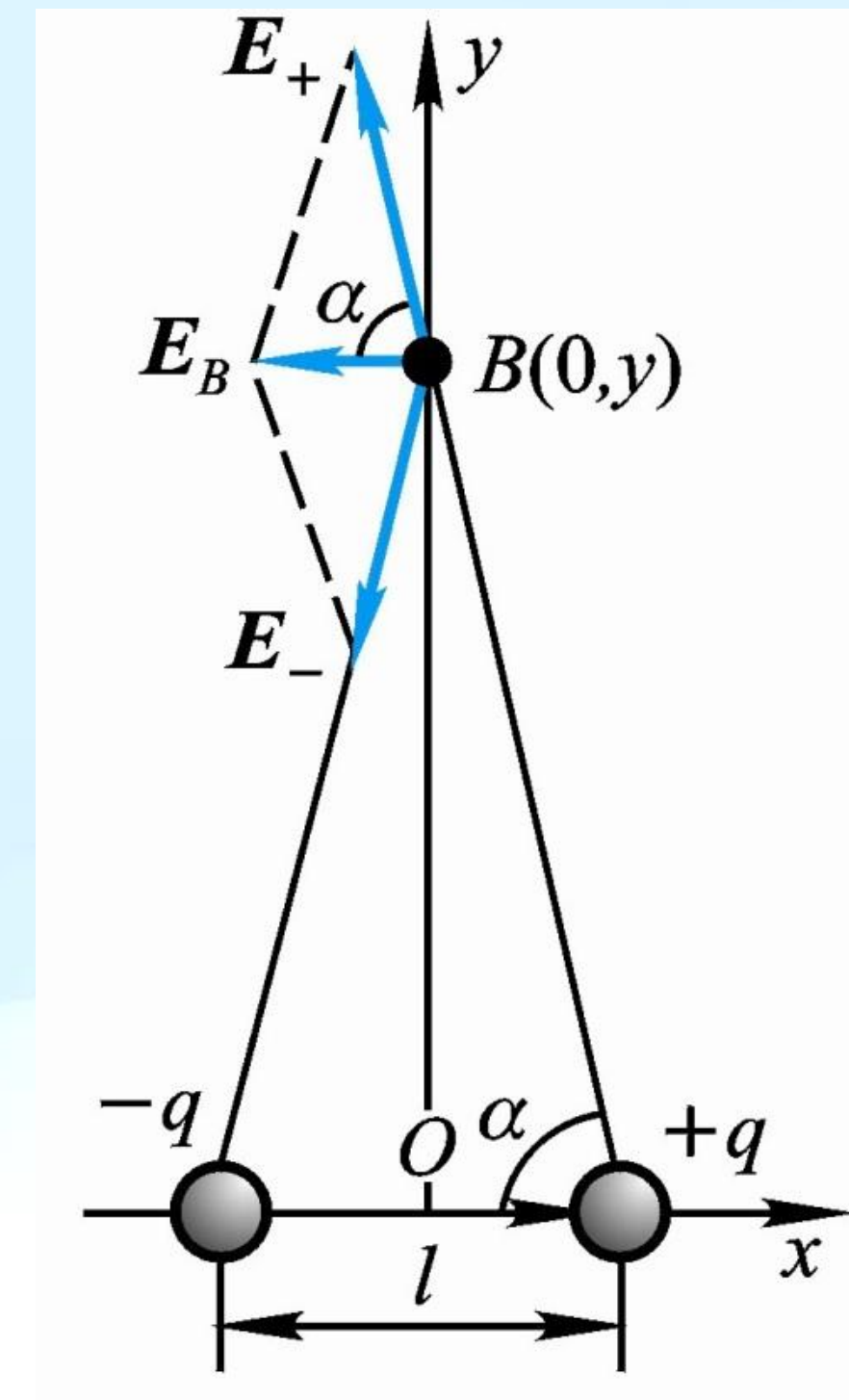
$$E_B = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha$$

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(y^2 + l^2/4)}$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{2\sqrt{y^2 + l^2/4}}$$

$$E_B = 2E_+ \cos \theta = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0(y^2 + l^2/4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow E_B = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 y^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 y^3}$$



$$\vec{E}_B = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 y^3}$$

# 连续分布电荷的电场强度

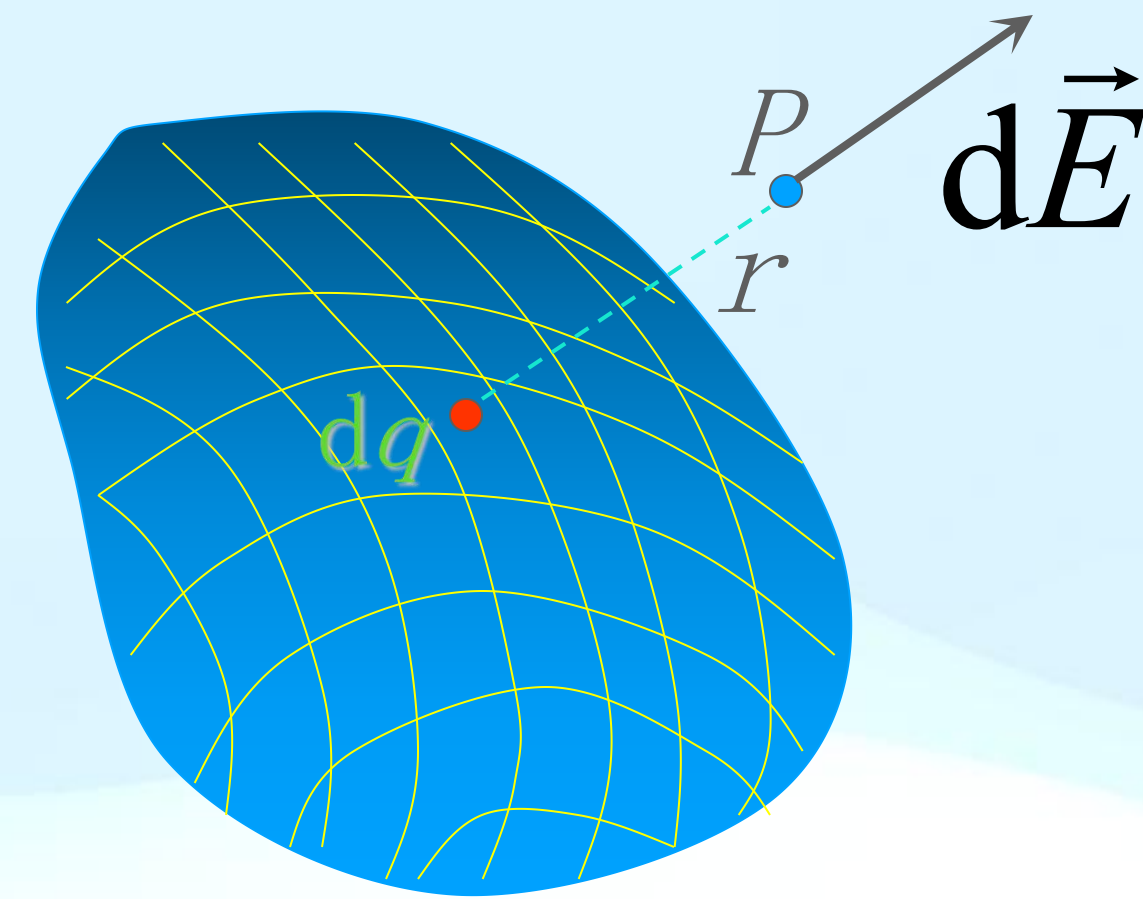
电荷元 $dq$ 在 $P$ 点的电场强度:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

带电体在 $P$ 点的电场强度:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- 体电荷:  $dq = \rho dV$ ,  $\rho$ 是体电荷密度,  $C/m^3$
- 面电荷:  $dq = \sigma dS$ ,  $\sigma$ 是面电荷密度,  $C/m^2$
- 线电荷:  $dq = \lambda dl$ ,  $\lambda$ 是线电荷密度,  $C/m$



**例7-3** 真空中有均匀带电直线，长为 $L$ ，总电荷为 $q$ 。线外有一点 $P$ ，离开直线的垂直距离为 $a$ ， $P$ 点和直线两端连线的夹角分别为 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ ，求 $P$ 点的电场强度。（设电荷线密度为 $\lambda$ ）

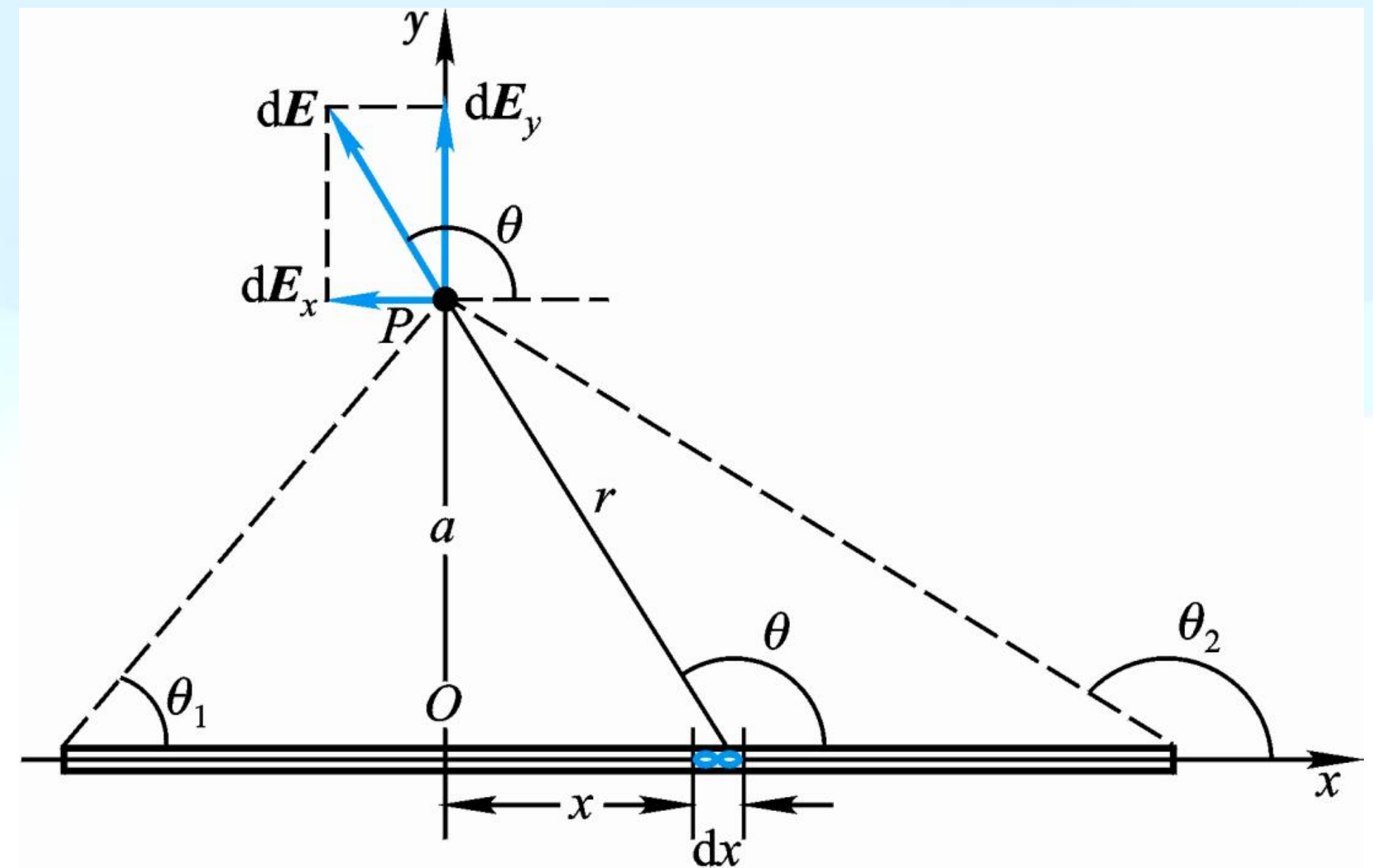
**解：** 建立直角坐标系  
取线元 $dx$

$$\lambda = \frac{q}{L} \quad dq = \lambda dx$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \cos\theta$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \sin\theta$$





$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta dx \quad E_y = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \sin \theta dx$$

统一变量:  $(r, x, \theta) \rightarrow \theta$

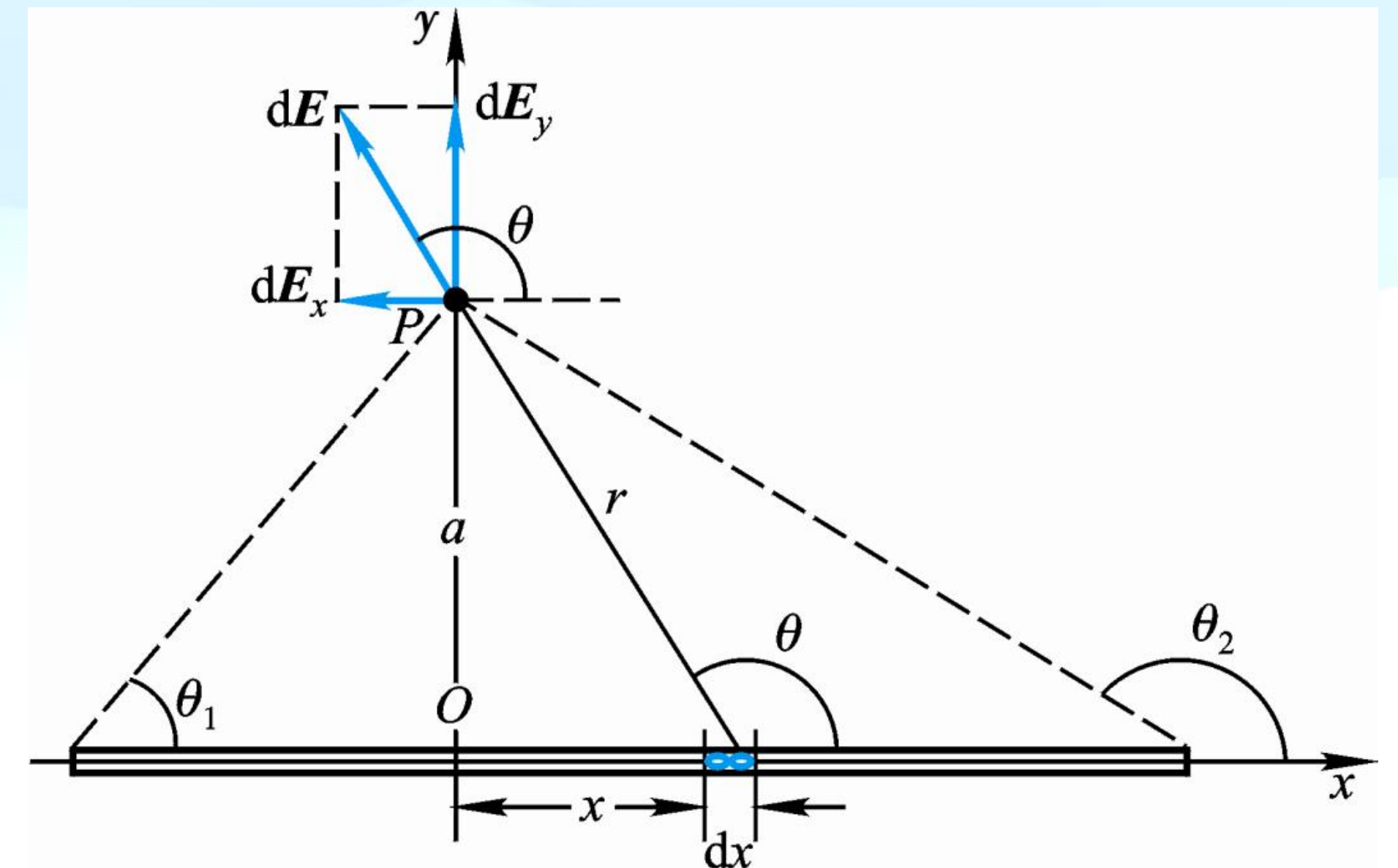
$$r = a / \sin \theta \quad x = -a \cot \theta$$

$$dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{a^2 \csc^2 \theta} a \csc^2 \theta d\theta$$

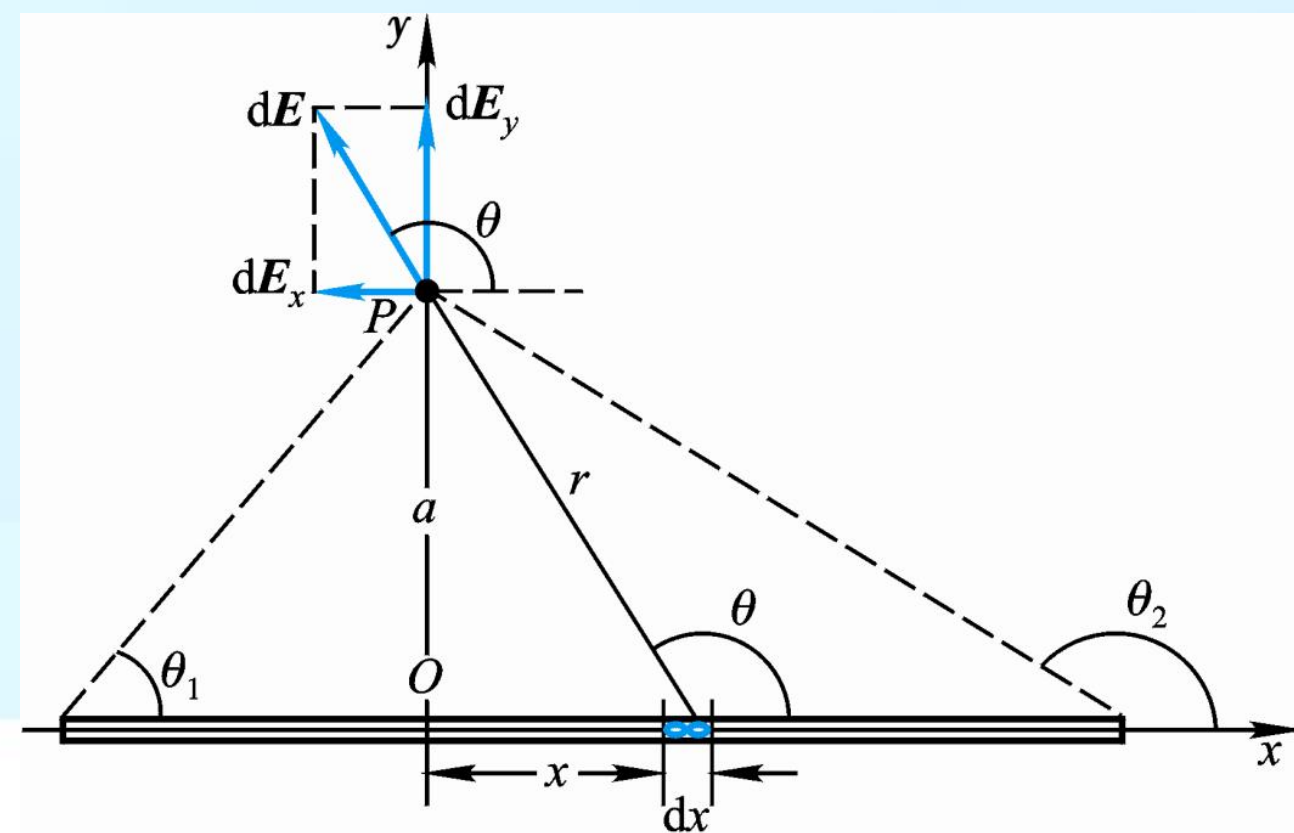
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

同理  $E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$



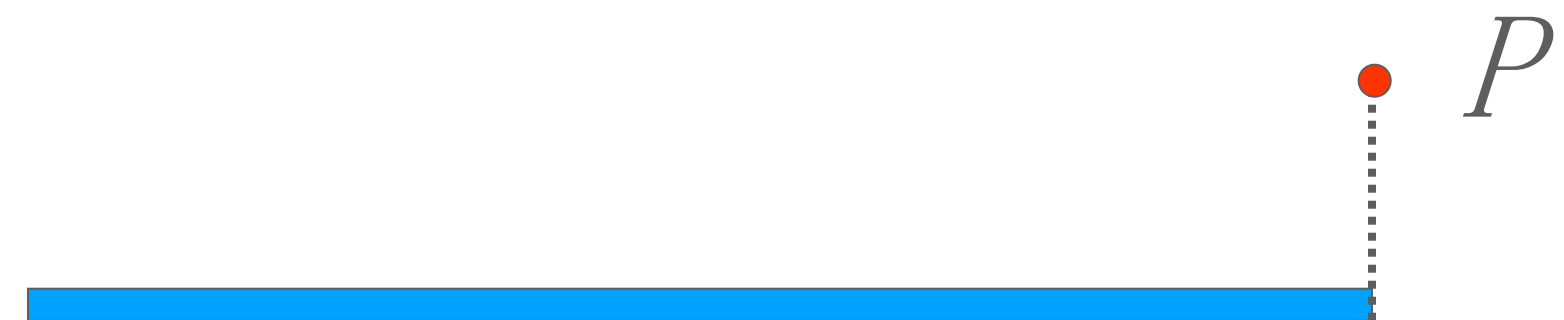
$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

讨论 1. 无限长带电直线:  $\theta_1 = 0$  ,  $\theta_2 = \pi$



$$E_x = 0 \quad E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

2. 半无限长带电直线:  $\theta_1 = 0$  ,  $\theta_2 = \pi/2$

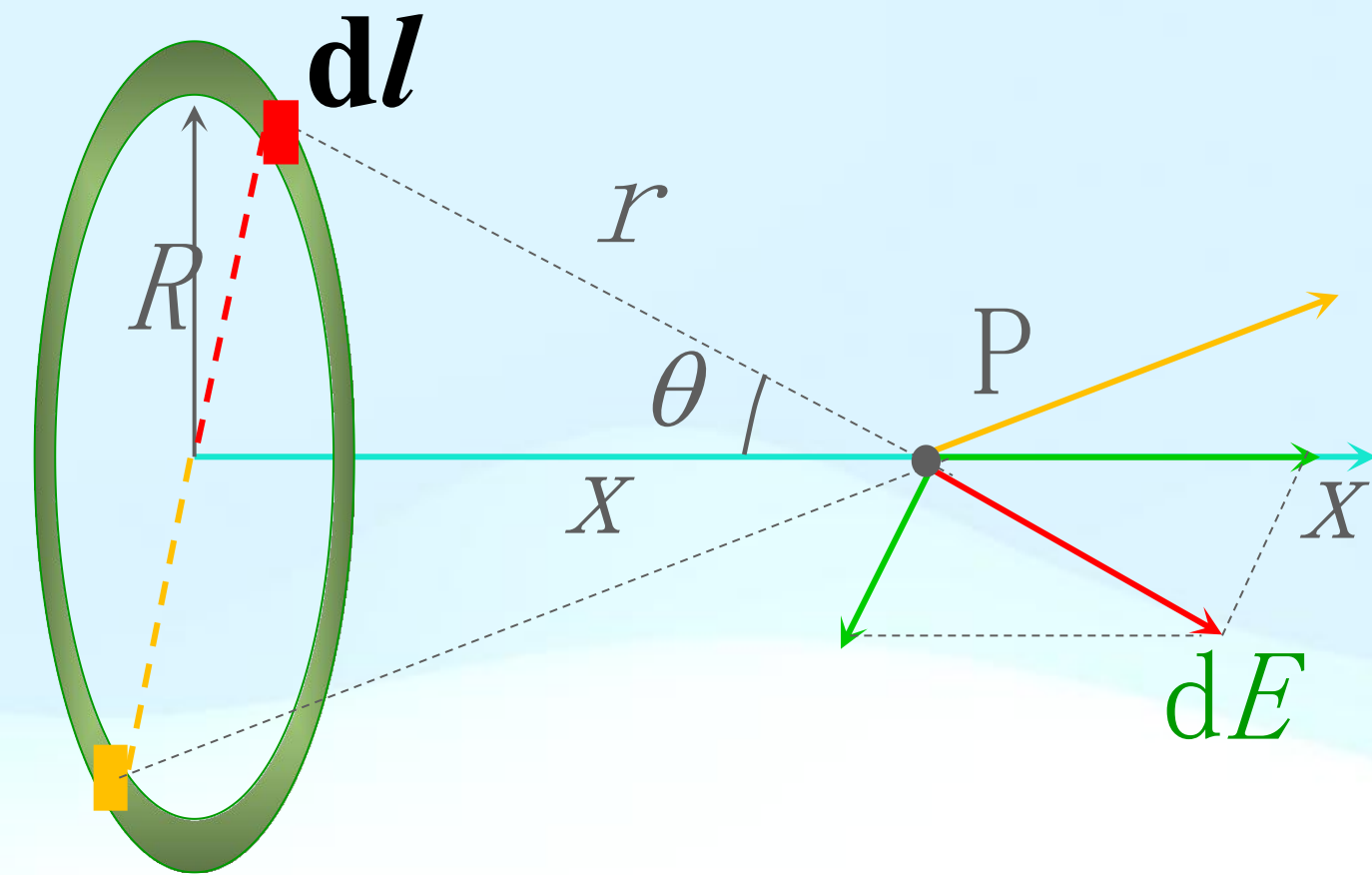


$$E_x = E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$

例7-4 电荷 $q$  均匀地分布在一半径为 $R$  的圆环上，计算在圆环的轴线上任一给定点 $P$  的电场强度。

解:  $\mathrm{d}q = \frac{q}{2\pi R} \mathrm{d}l$

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q \mathrm{d}l}{8\pi^2 R \epsilon_0 r^2}$$



根据圆环的对称性,  $E_{\perp x} = \int \mathrm{d}E_{\perp x} = 0$

$$\therefore E = E_{\parallel x} = \int_L \mathrm{d}E_{\parallel x} = \int_L \mathrm{d}E \cos \theta = \int_L \frac{x}{r} \cdot \mathrm{d}E$$

$$E = \int_0^{2\pi R} \frac{qx \mathrm{d}l}{8\pi^2 \epsilon_0 R r^3} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

方向?



讨论 
$$\mathbf{E} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

1. 若  $x = 0$ , 则  $E = 0$ , 环心处的电场强度为零。

2. 若  $x \gg R$ , 则有 
$$\mathbf{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

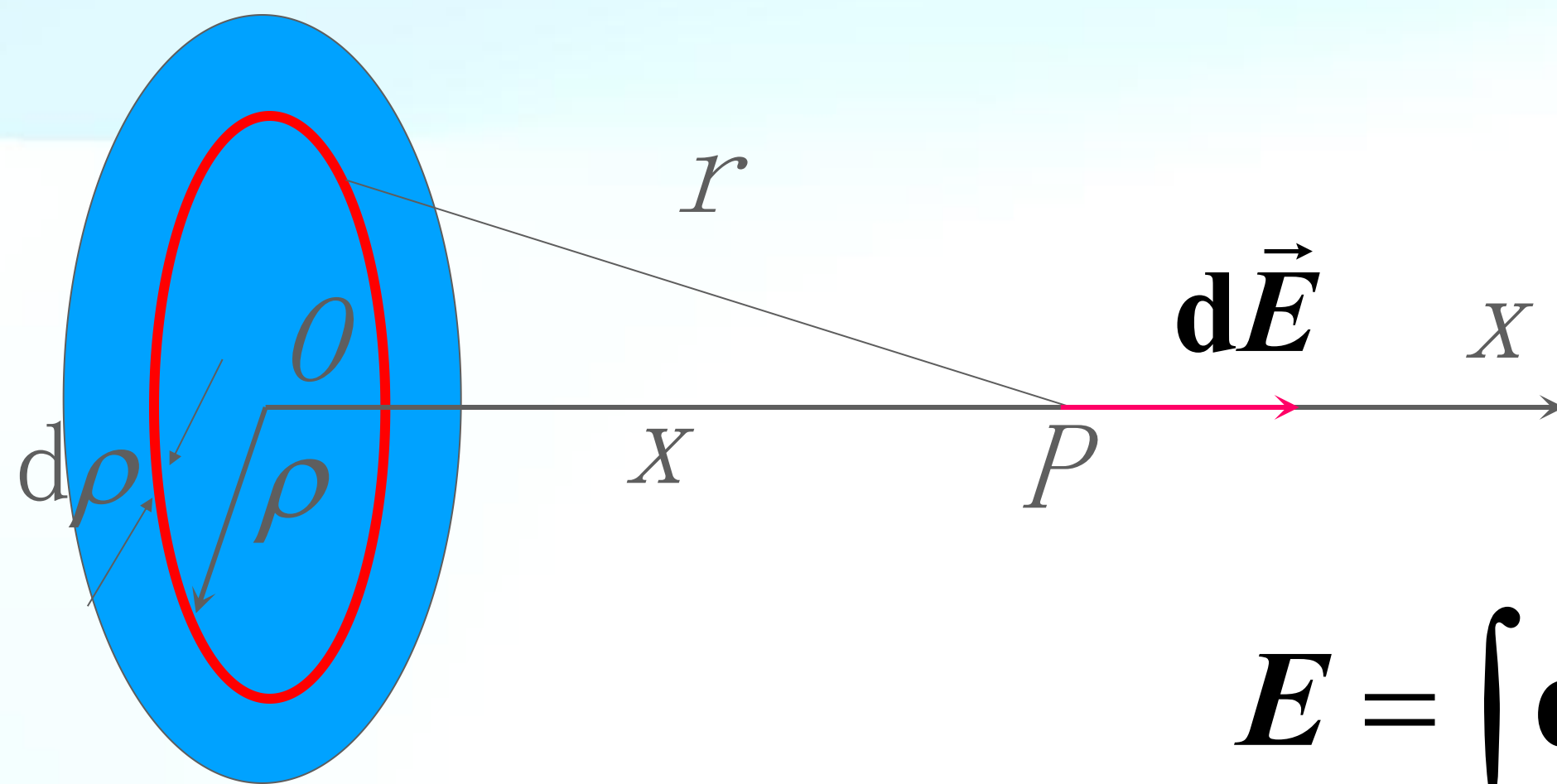
远离圆环处的场强近似等于点电荷的电场强度。

例7-5 求均匀带电圆盘轴线上任一点的电场。设盘半径为 $R$ ，电荷面密度为 $\sigma(\text{C}/\text{m}^2)$ 。

解：均匀带电的薄圆盘可看成由许多带电细圆环组成。

$$dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi \rho d\rho$$

$$dE = \frac{dq \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$$

方向……

讨论  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)$

1. 当  $R \gg x \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

无限大均匀带电平面的电场强度——匀强电场。

2. 当  $R \ll x$

$$\therefore \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = \left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2 + \dots$$

$$\therefore E = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \quad \text{可视为点电荷的电场。}$$



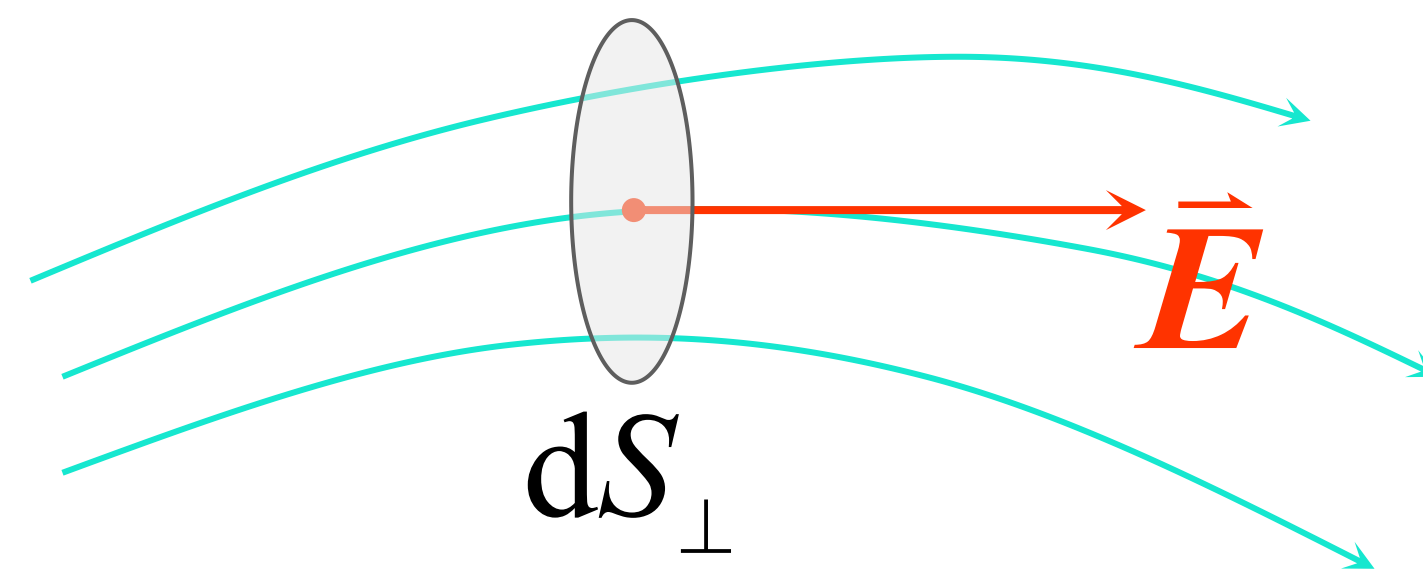
# 电场线（几何描述）

# 电场强度通量

电场线：形象描述电场在空间分布的一系列有向曲线（并不存在，一种假设）。

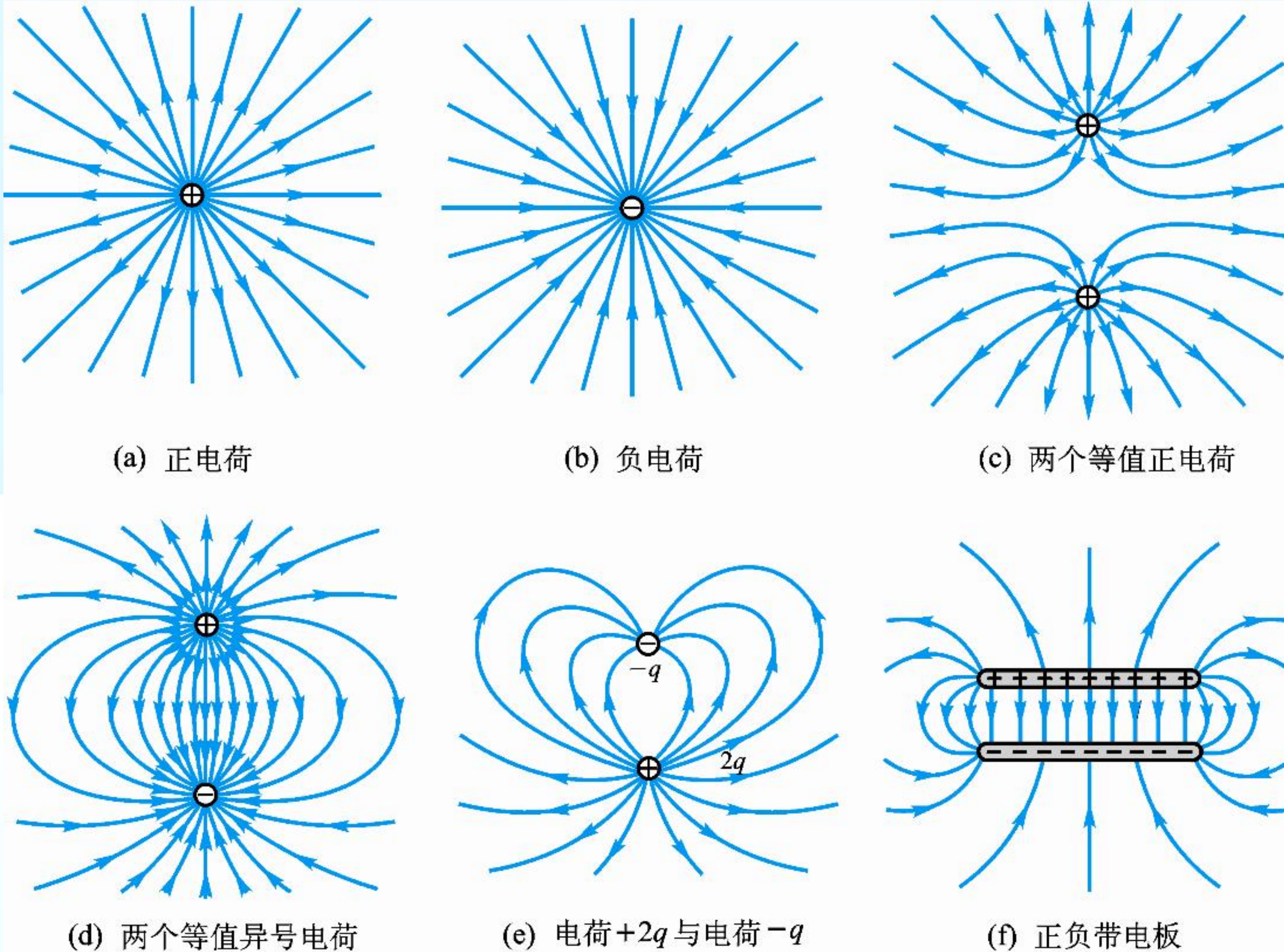
- 曲线上每一点的切线方向表示该点电场强度的方向
- 曲线的疏密表示该点处场强的大小。即：通过垂直单位面积的电场线条数，在数值上就等于该点处电场强度的大小

$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}}$$





## 几种常见的电场线：



## 静电场中电场线的特点：

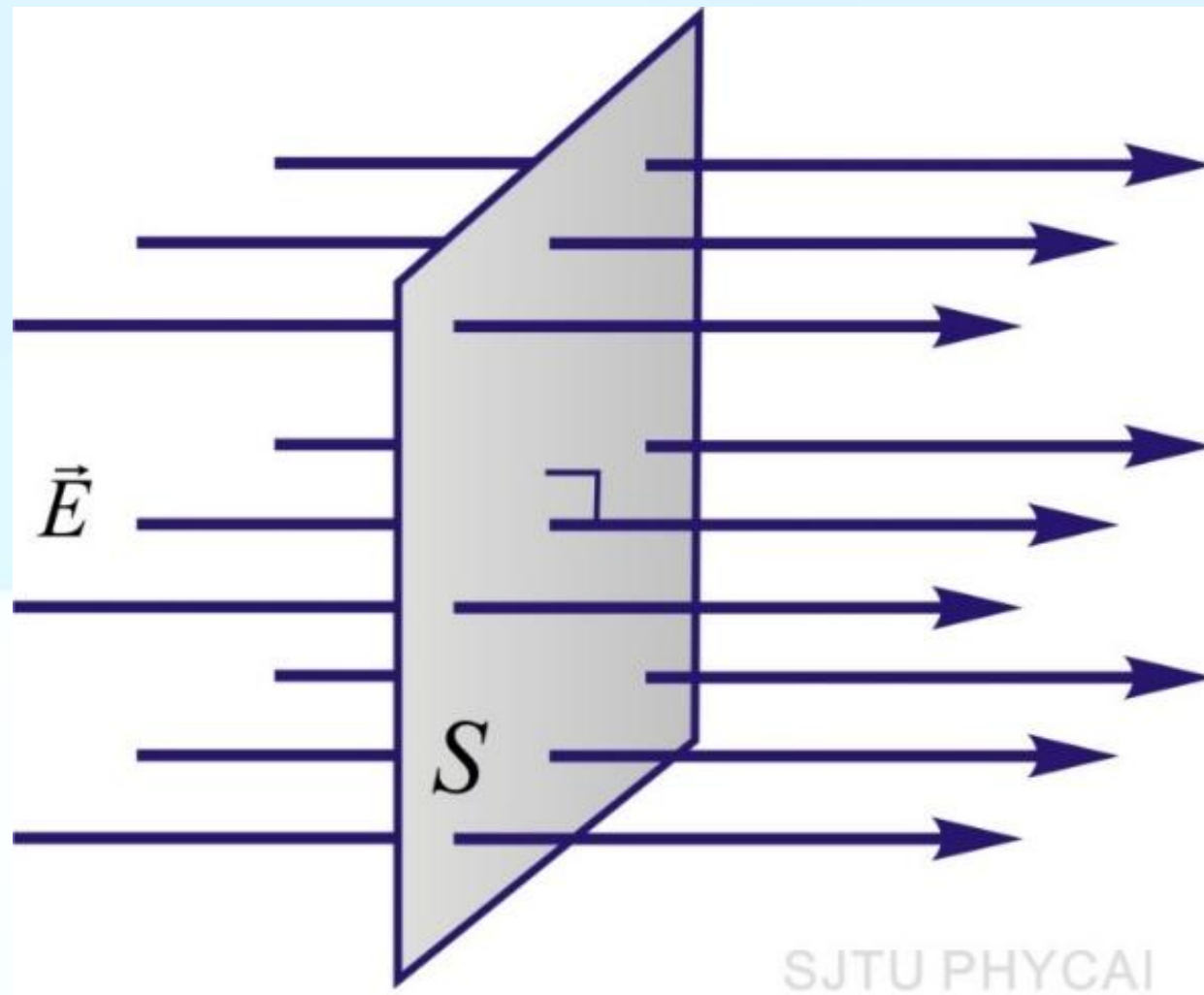
- 静电场 电场线起始于正电荷，终止于负电荷，在没有电荷处不中断
- 静电场 电场线不闭合，不相交
- 电场线密集处电场强，电场线稀疏处电场弱



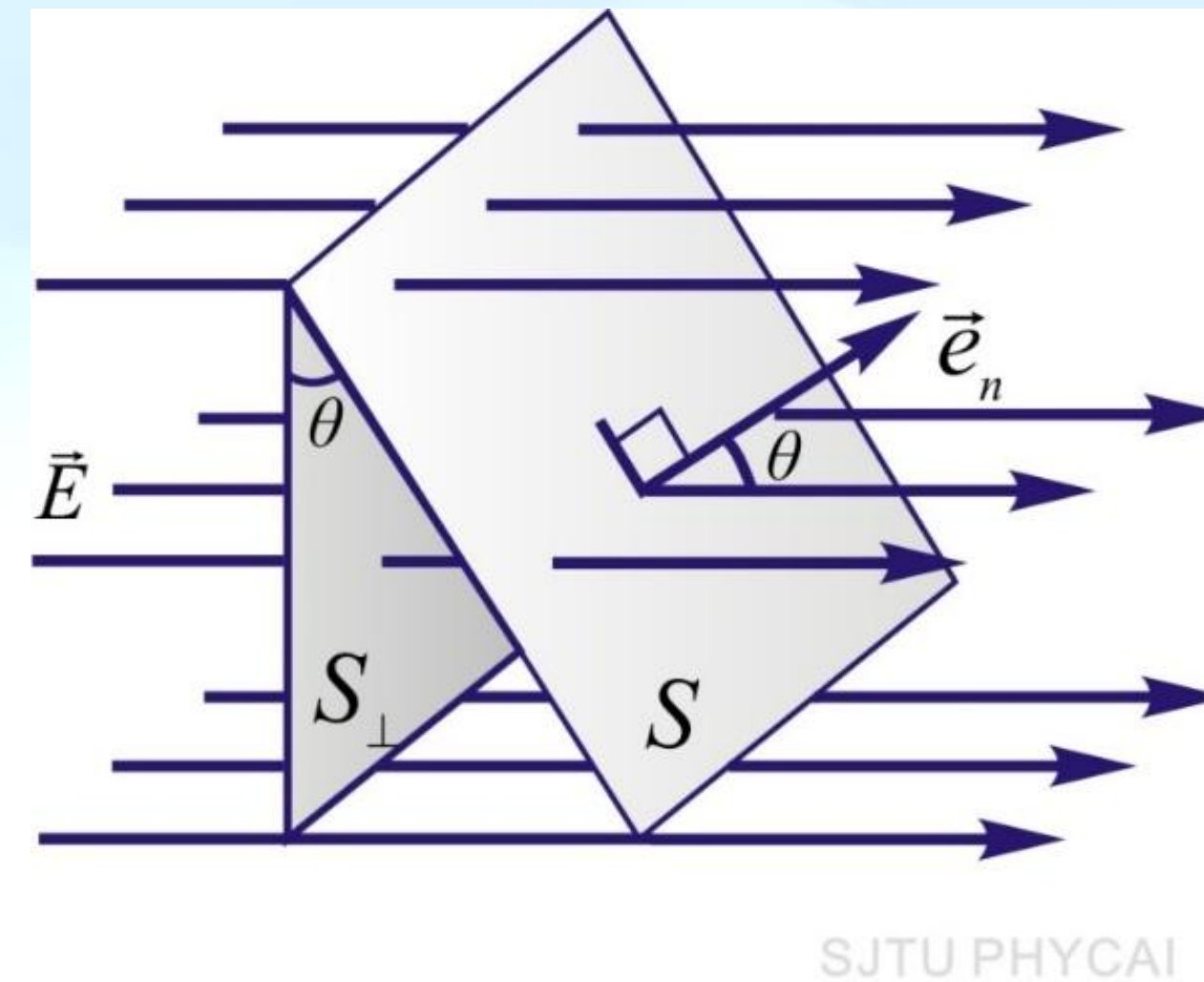
## 电场强度通量 $\Psi_E$ :

通过电场中任一曲面的电场线条数。

### 1. 均匀电场中通过平面 $S$ 的电场强度通量（标量）



$$\Psi_E = ES$$



$$\Psi_E = ES \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

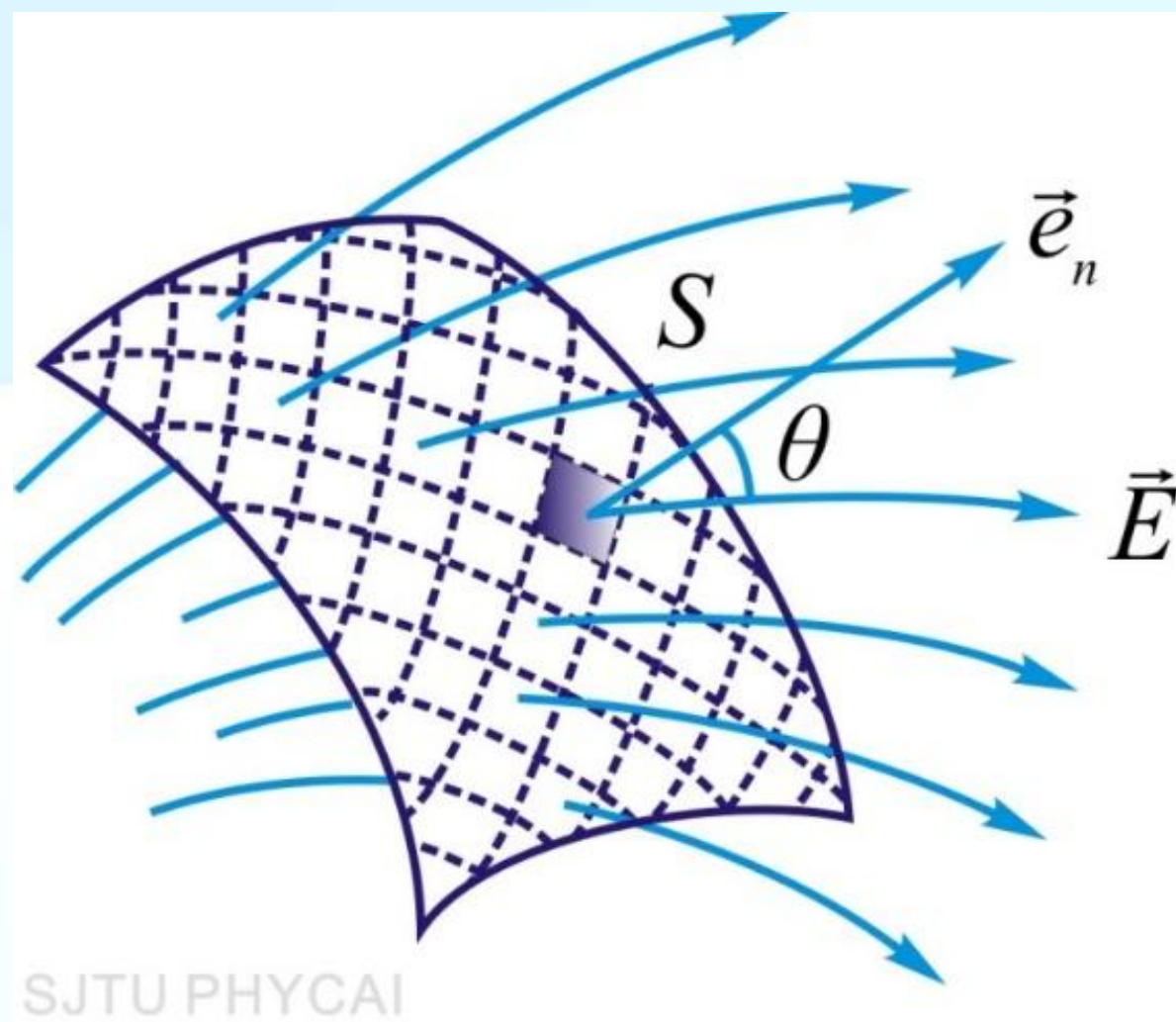


## 2. 非均匀电场的电场强度通量

$$d\Psi_E = E \cos \theta \cdot dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Psi_E = \int_S E \cos \theta dS = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

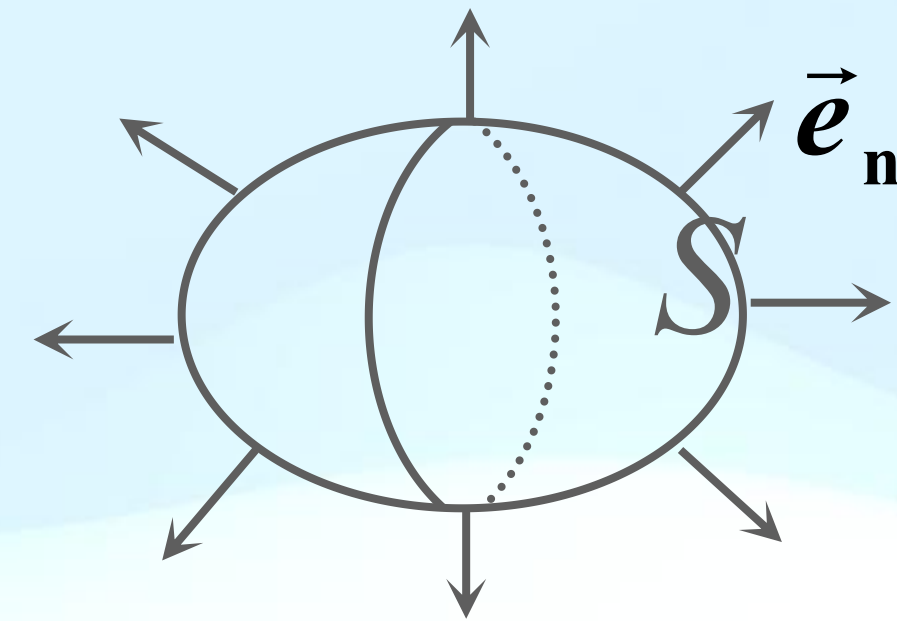
$$d\Psi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



正、负取决于面元的法线方向与电场强度方向夹角的大小

## 闭合曲面的通量

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cos \theta dS$$



- 当 $\theta < 90^\circ$ 时，电场线穿出闭合曲面，对电场强度通量的贡献为正
- 当 $\theta > 90^\circ$ 时，电场线穿入闭合曲面，对电场强度通量的贡献为负
- 当 $\theta = 90^\circ$ 时，电场线与曲面相切，对电场强度通量的贡献为零

## § 7-3 静电场的高斯定理

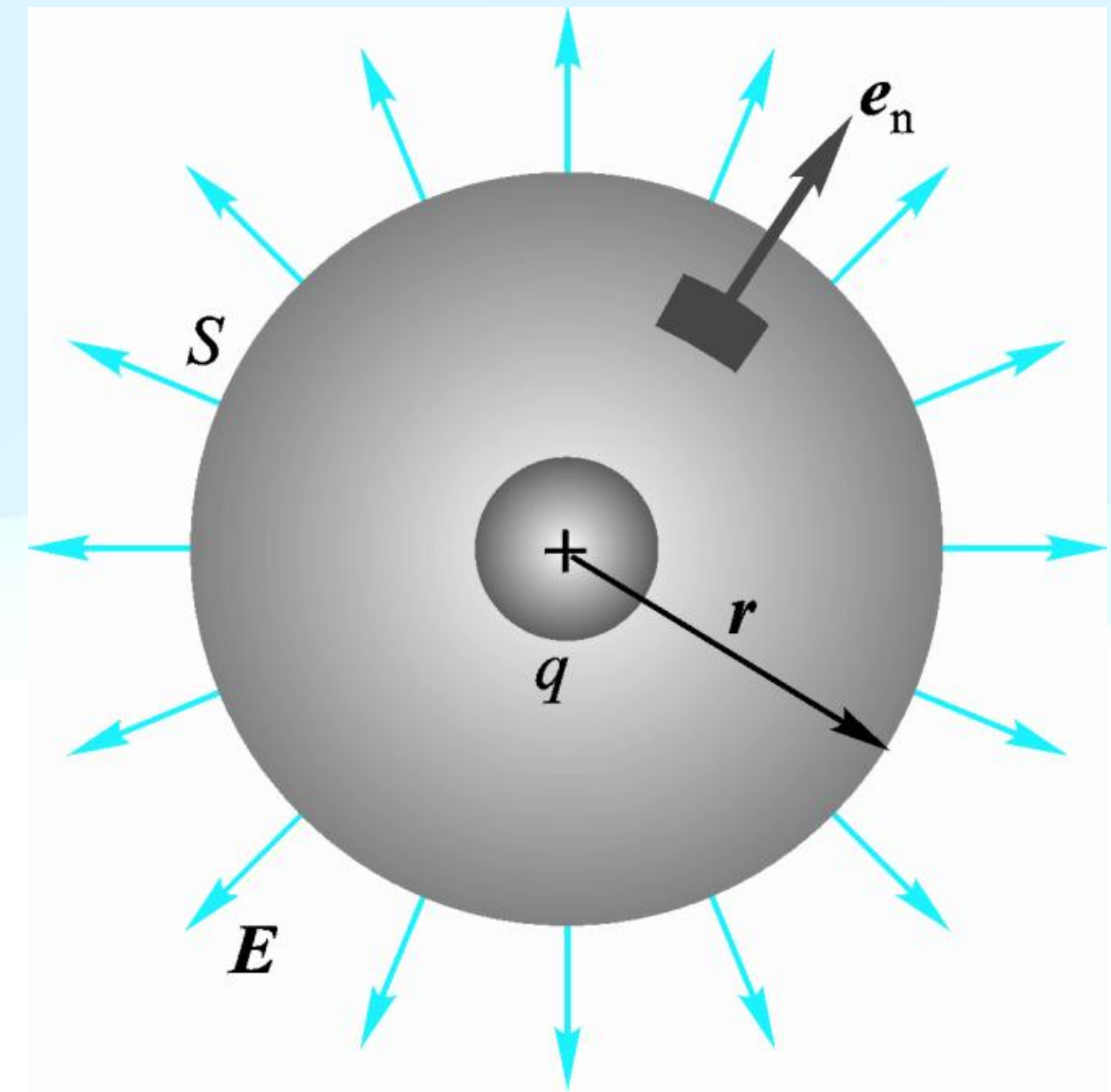
1839年，高斯提出，反映了电场通量和源电荷之间的关系

➤ 简单情形：点电荷在球形高斯面的圆心处

球面场强：
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$d\Psi_E = E \cos 0^\circ dS = \frac{q \cdot dS}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\Psi_E = \oint_S \frac{q dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$



平方反比率在此处的表现？

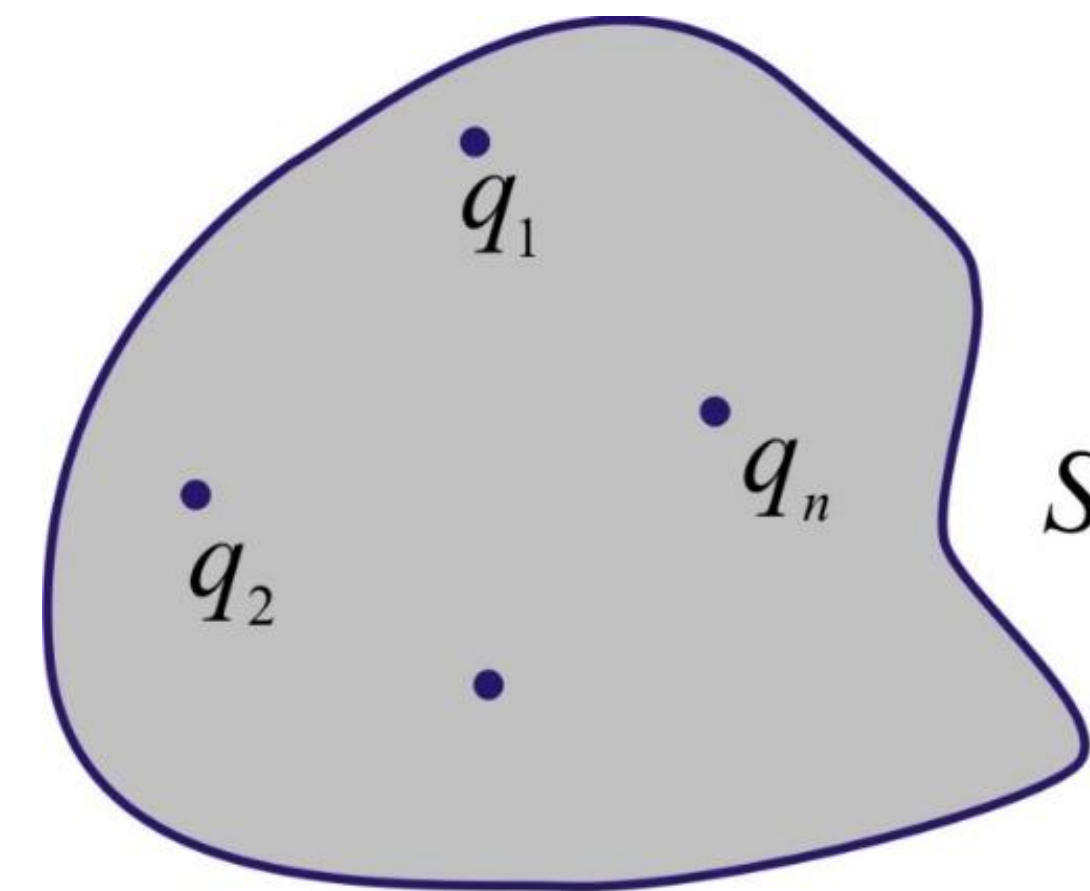
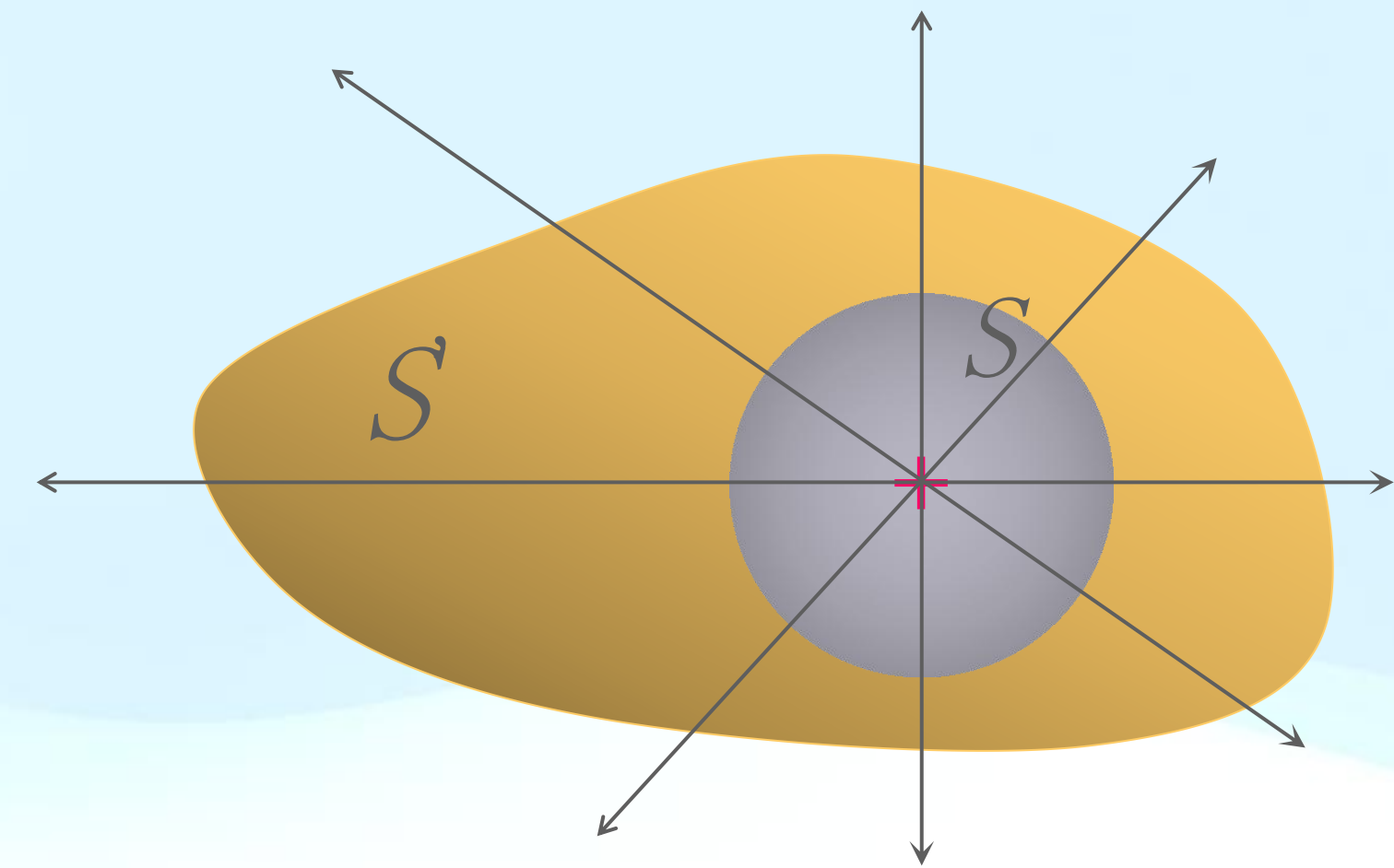
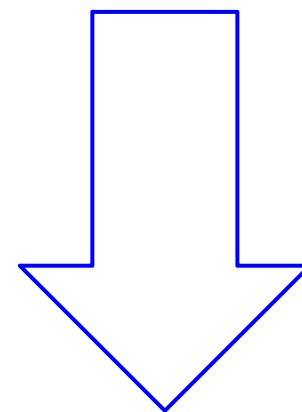
## ➤ 点电荷在任意形状的高斯面内

通过球面 $S$  的电场线也必通过任意曲面 $S'$ ，即它们的电场强度通量相等，为  $q / \epsilon_0$ 。

$$\Psi_E = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned}\Psi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

更严谨的判断方式



SJTU PHYCAI



需要证明通过这个表面的通量和通过球形表面的通量是一样的。

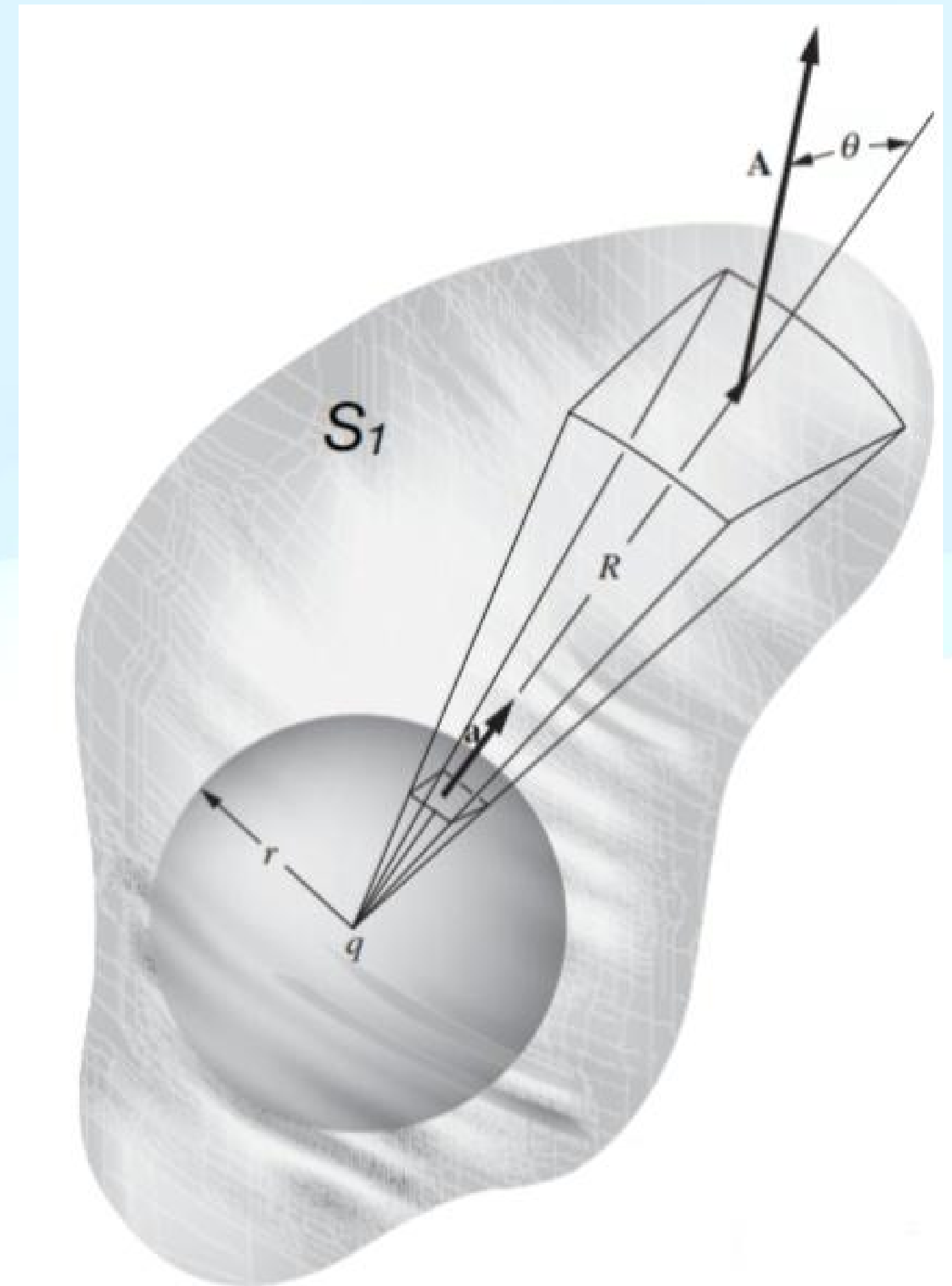
椎体在圆球上所截面积为 $a$ ，在外部曲面所截面积为 $A$ 。 $A$ 法向和球的径向夹角为 $\theta$ 。所以：

$$\text{通过外侧小块的通量} = \vec{E}_R \cdot \vec{A} = E_R A \cos \theta$$

$$\text{通过内侧小块的通量} = \vec{E}_r \cdot \vec{a} = E_r a$$

$$\text{有： } E_R = E_r \left( \frac{r}{R} \right)^2, \quad A = a \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{则可以得到： } E_R A \cos \theta = E_r a$$



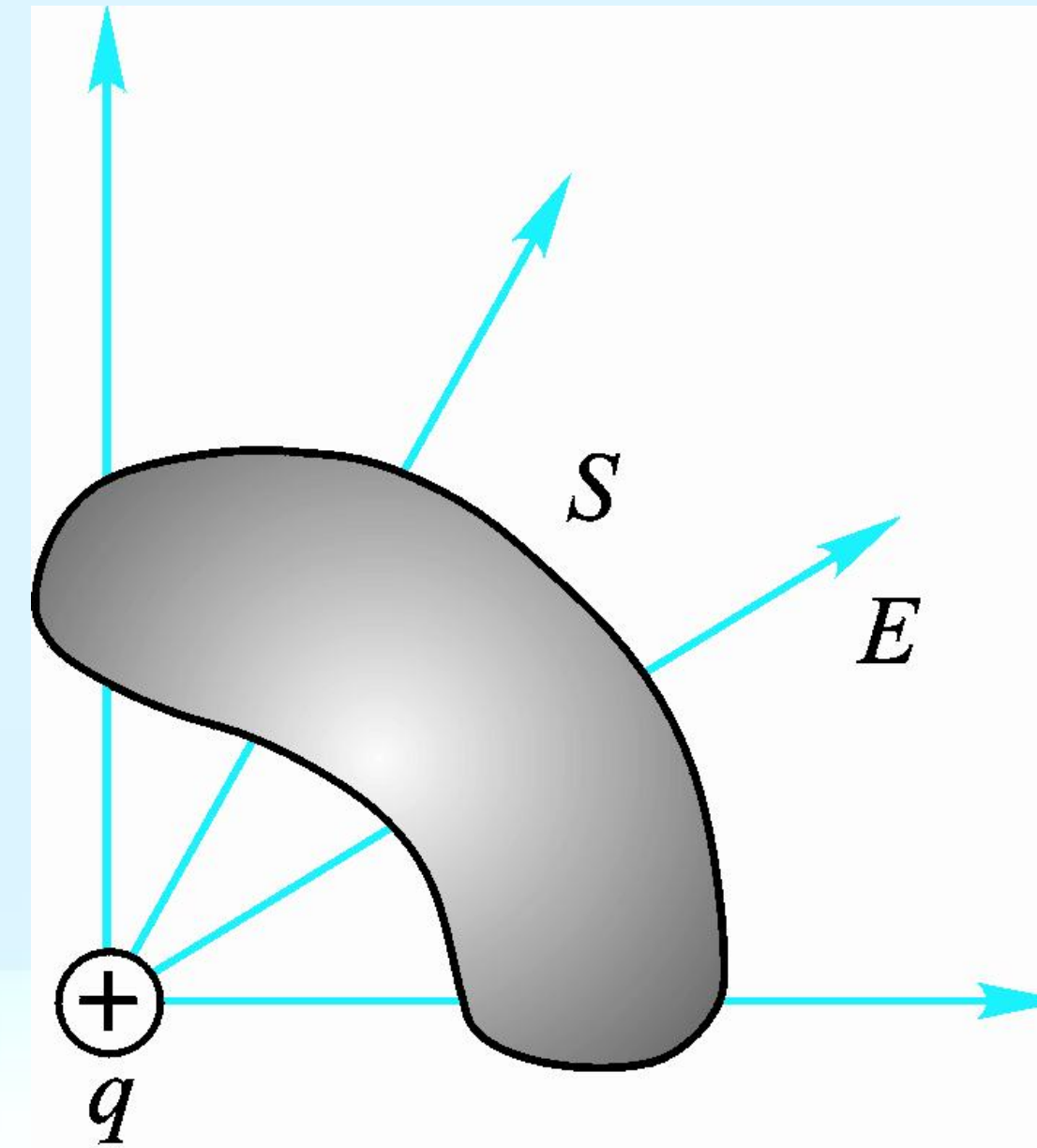
这是更严谨的处理方式，因为电场线其实是不存在的！

## ■ 电荷 $q$ 在闭合曲面以外

穿进曲面的电场线条数等于穿出曲面的电场线条数。

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

高斯定理：



静电场中，通过任一闭合曲面的电场强度通量等于该曲面所包围的所有电荷量的代数和的 $1/\epsilon_0$ 倍。

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_{i\text{内}}$$

$$\Psi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_{i\text{内}}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

通量和源电荷的关系

# 关于高斯定理的讨论

- 物理意义：静电场是有源场，电场线有始有终。
- 闭合曲面上的电场强度是所有电荷共同产生的，但只有闭合面内的电荷对电场强度**通量有贡献**！多数情况下，使用高斯定理并不能直接得出面上电场强度。
- 高斯定理可由库仑定律及叠加原理推得。库仑定律只适用于静电场，而高斯定理不仅适用于静电场，也适用于运动电荷和迅速变化的电场。
- 任何满足平方反比定律的场都可以使用高斯定理，如重力场。



## § 7-4 静电场的环路定理 电势

1813年，泊松根据万有引力定律和库伦定律都遵从平方反比关系，认为静电学也可以找到万有引力情况相似的势函数，并把拉普拉斯方程推广为泊松方程。

静电场力做功： $\mathbf{dA} = q_0 \vec{E} \cdot \mathbf{dl} = q_0 E \cos \theta \mathbf{dl}$

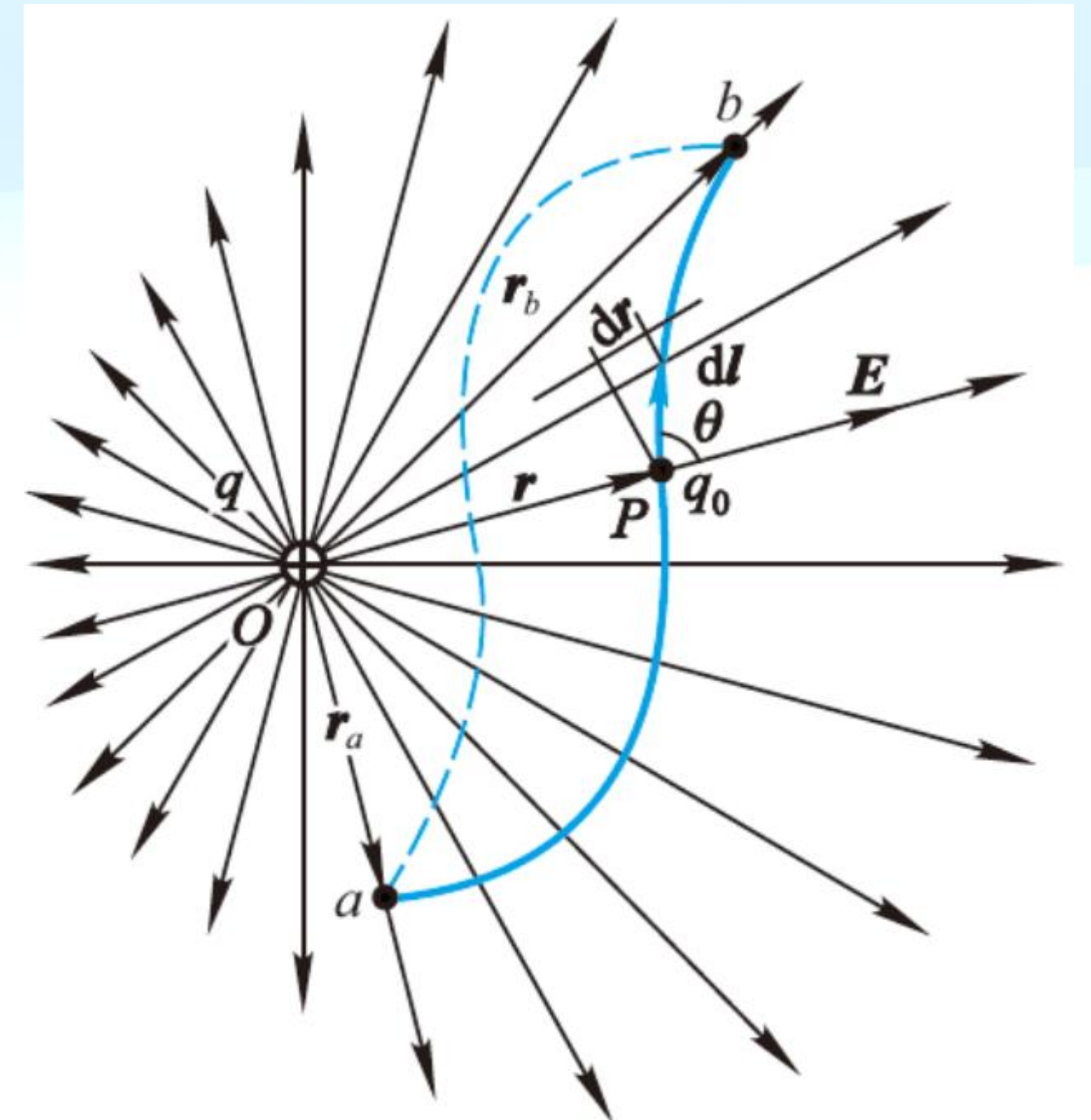
➤ 点电荷的静电场中： $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\mathbf{dA} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \mathbf{dl} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{dr}$$

试探电荷从a运动到b电场力做的功：

$$A_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{dr} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

➤ 点电荷场力做功与具体路径无关！



➤一般电荷分布的静电场中

$$A_{ab} = \int_a^b (q_0 \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \int_a^b (q_0 \sum_i \vec{E}_i) \cdot d\vec{l} = \sum_i \int_a^b (q_0 \vec{E}_i) \cdot d\vec{l}$$

因  $\int_a^b (q_0 \vec{E}) \cdot d\vec{l}$  与路径无关, 所以  $A_{ab}$   
与路径无关

➤试验电荷在静电场中移动时, 电场力所做的功只与试验电荷的起点和终点的位置有关, 而与路径无关, 即静电场力是保守力。

保守力做功的特点:

$$A = \oint_l q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场第二条基本定理:  
环路定理

$$A = \oint_l q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\because q_0 \neq 0 \quad \therefore \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场中电场强度的环流为零, 称静电场的环流定理。

➤静电场为保守力场, 可以引入电势能。

# 电势

对于保守力场，可以引入势能的概念——电势能。

$$A_{ab} = \int_a^b (q_0 \vec{E}) \cdot d\vec{l} = -(W_b - W_a)$$

$$\Rightarrow -(W_b - W_a) = \int_a^b (q_0 \vec{E}) \cdot d\vec{l}$$

如果设  $b$  点为电势能的零点，即  $W_b = 0$

$$\Rightarrow W_a = \int_a^{W_b=0} (q_0 \vec{E}) \cdot d\vec{l}$$

通过连接  $a$ 、 $b$  间的任意一条路径，都可以确定出  $a$  点的电势能。

$$\Rightarrow \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{W_b}{q_0} - \frac{W_a}{q_0}\right)$$

——与试验电荷无关，只与电场在  $a$ 、 $b$  两点间的分布有关。

引入一个新的物理量——电势  
(electric potential)

$V = \frac{W}{q_0}$  标量，单位：伏特 (V=J/C)

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_a - V_b = U_{ab}$$

—— $a$ 、 $b$  两点间电势差，常称电压。

若选  $b$  点的电势为参考零点（电势零点），则  $a$  点的电势为

$$V_a = \overset{\text{电势零点}}{\int_a} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

➤ 静电场中某点的电势依赖于电势零点的选取。但任意两点间的电势差是确定的！

(1)在理论计算时，对有限带电体电势选无限远为参考点；

$$V_\infty = 0 \quad V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(2)在实际应用中，取大地、仪器外壳等为电势零点。

## 电势的叠加原理

电场满足叠加原理：

$$V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_P^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_P^\infty \vec{E}_n \cdot d\vec{l}$$

即一个电荷系的电场中任一点的电势等于每一个带电体单独在该点所产生的电势的代数和这称为电势叠加原理。



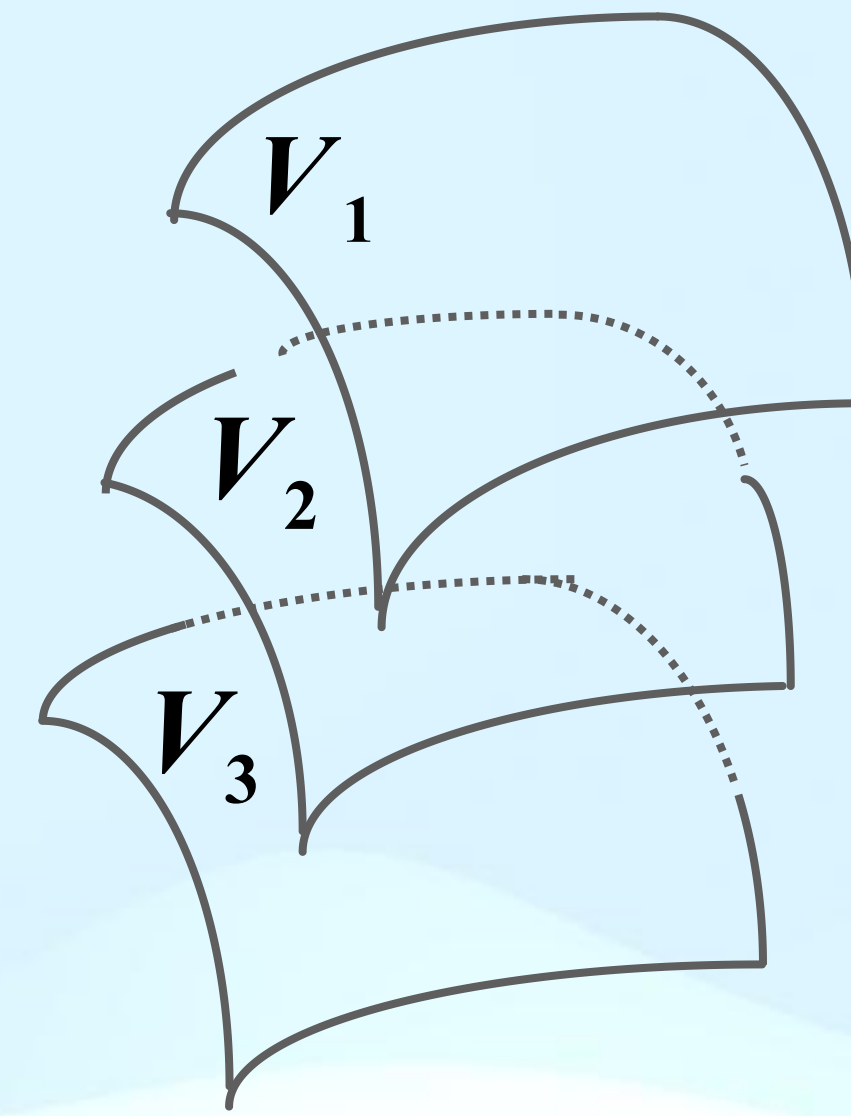
## § 7-5 电场强度与电势梯度的关系

将电势相等的场点连成连续的曲面——等势面

满足方程：

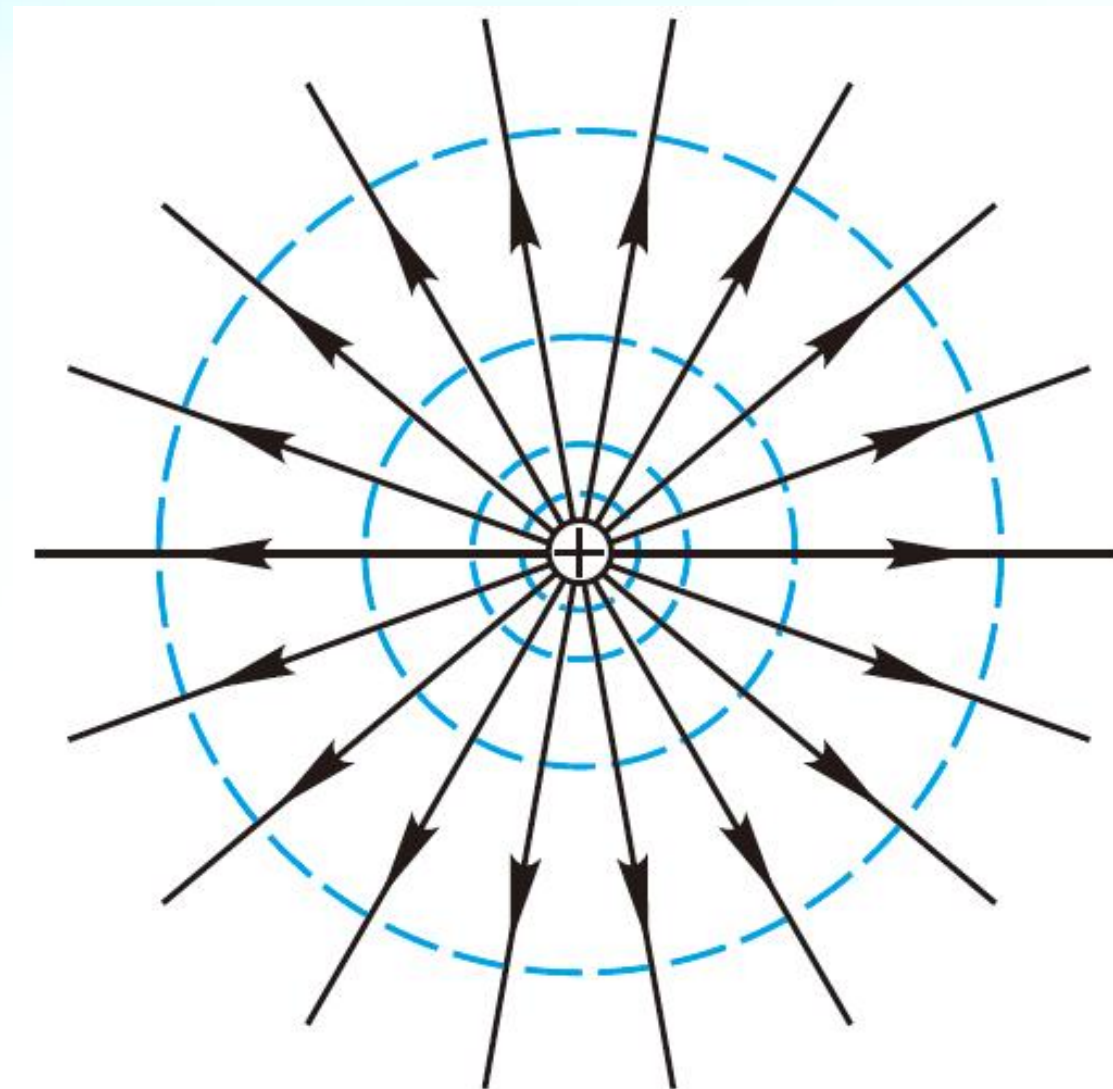
$$V(x, y, z) = c$$

约定：相邻等势面的电势差为常量，可以得到一系列的等势面  $V_1, V_2 \dots$



点电荷的电势

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



性质：

➤ 电荷沿等势面移动，电场力不做功

$$A = q\Delta V = 0$$

➤ 电场强度与等势面正交：电场线由电势高处指向电势低处

$$dA = q\vec{E} \cdot d\vec{l} \equiv 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

➤ 等势面密集处场强量值大，稀疏处场强量值小

$$\Delta V = \vec{E} \cdot d\vec{l} = \text{const} \Rightarrow E \propto \frac{1}{\Delta l}$$

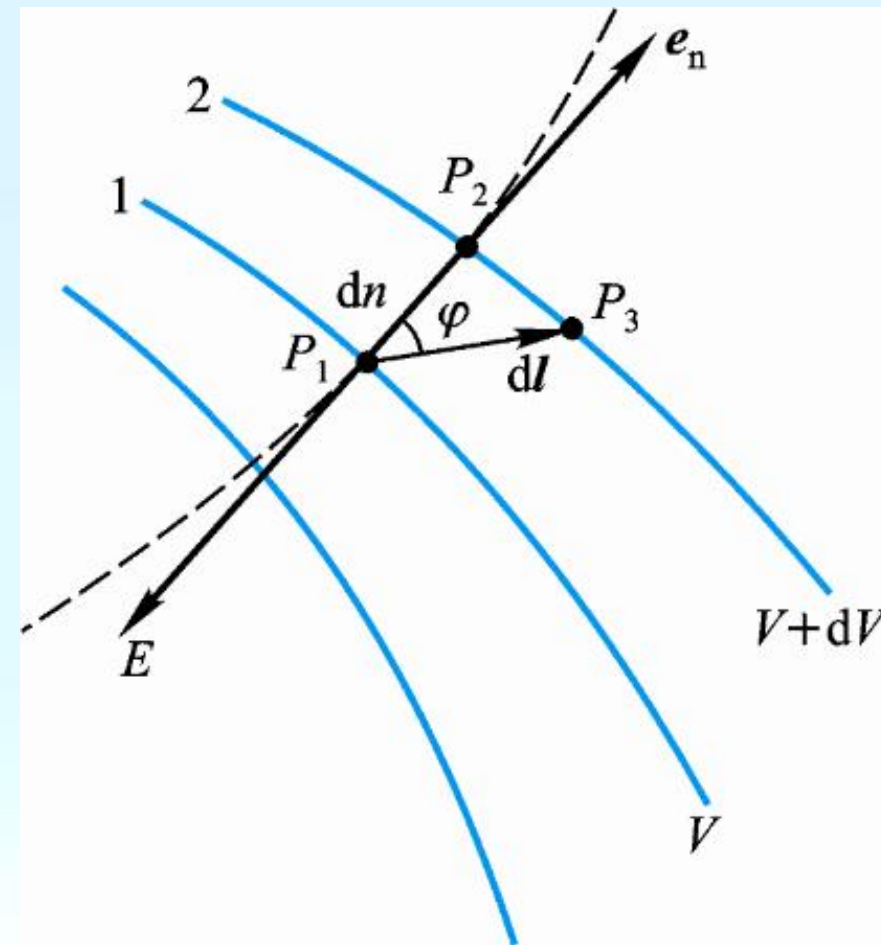
# 电场强度和电势的微分关系

根据等势面的性质：

$$dA_{ab} = q_0[V - (V + dV)] = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$-dV = E \cos \varphi dl$$

$$E \cos \varphi = E_l = -\frac{dV}{dl}$$



- 电势在某一方向上变化率（方向导数）与电场强度沿该方向的分量大小相等，方向相反。

由于电场强度垂直于等势面，指向电势下降的方向，所以有

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dn} \vec{e}_n$$

引入电势梯度（矢量）：

$$\text{grad } V = \frac{dV}{dn} \vec{e}_n \text{ 或记为 } \nabla V$$

- 电势梯度的大小等于电势在该点最大空间变化率；方向沿等势面法向，指向电势增加的方向。

- 电场强度与电势梯度的关系

$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\nabla V$$

直角坐标系中：

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

## 更普适的数学推导

- 设 $M_0$ 为标量场中一点，从点 $M_0$ 出发引一条射线 $l$ ，点 $M$ 是射线 $l$ 上的动点，到 $M_0$ 的距离是 $\Delta l$ 。当点 $M$ 沿射线 $l$ 趋近于 $M_0$ 时（即 $\Delta l \rightarrow 0$ ）时，比值 $\frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$ 的极限称为标量场 $u(M)$ 在点 $M_0$ 处沿 $l$ 方向的方向导数，记作 $\frac{\partial u}{\partial l} \big|_{M_0}$ ，即

$$\frac{\partial u}{\partial l} \big|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$$

- 方向导数的计算公式是与坐标系无关的，但方向导数的具体计算公式与坐标系有关。根据复合函数求导的法则，在直角坐标系中

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dl}$$

- 假设 $l$ 方向的方向余弦是 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ ，即：

$$\frac{dx}{dl} = \cos \alpha, \frac{dy}{dl} = \cos \beta, \frac{dz}{dl} = \cos \gamma$$



- 则可以得到直角坐标系中方向导数的计算公式为：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

由这个式子可以进一步得到梯度。

- 在矢量分析中，经常使用哈密顿算符“ $\nabla$ ”，在直角坐标系中

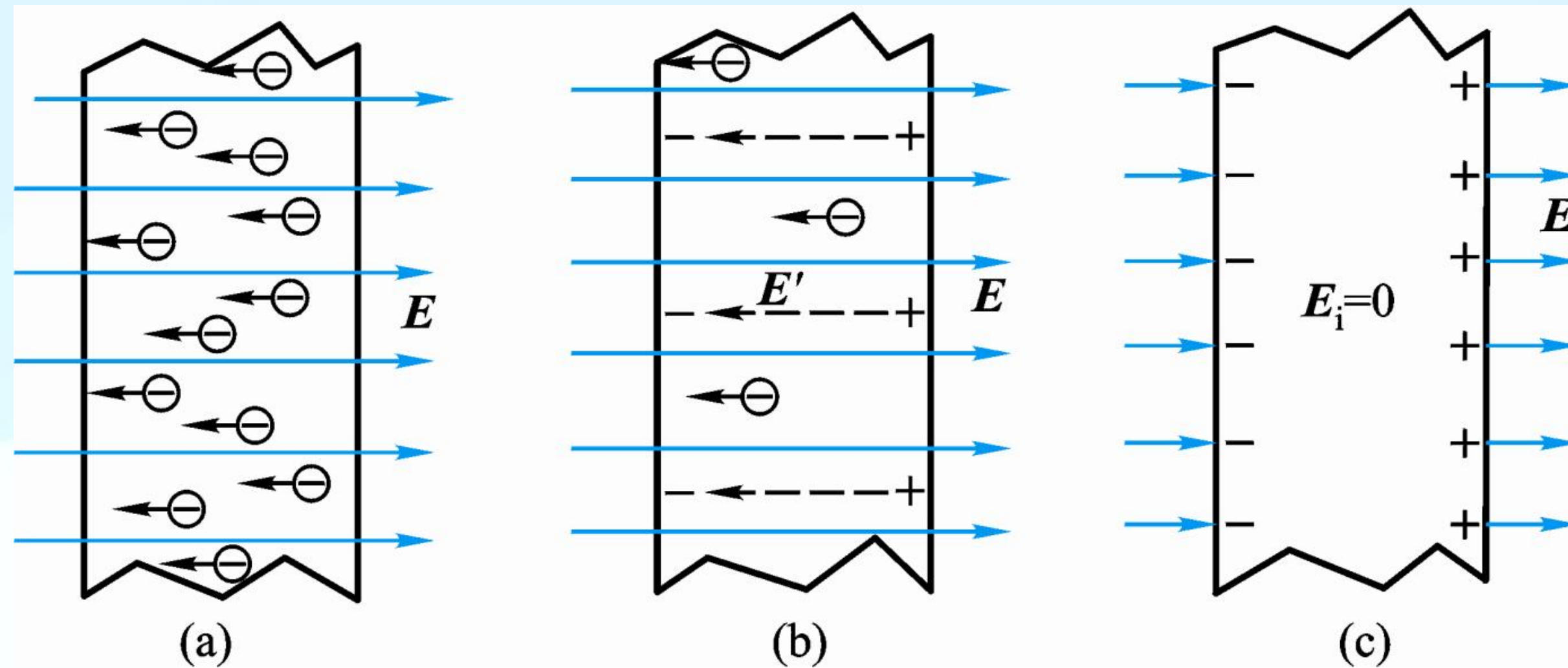
$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- 算符 $\nabla$ 具有矢量和微分的双重性质，故又称为矢性微分算符。

## § 7-6 静电场中的导体

### ■ 导体的静电平衡

- **静电感应现象：** 在外电场影响下，导体表面不同部分出现正负电荷的现象。

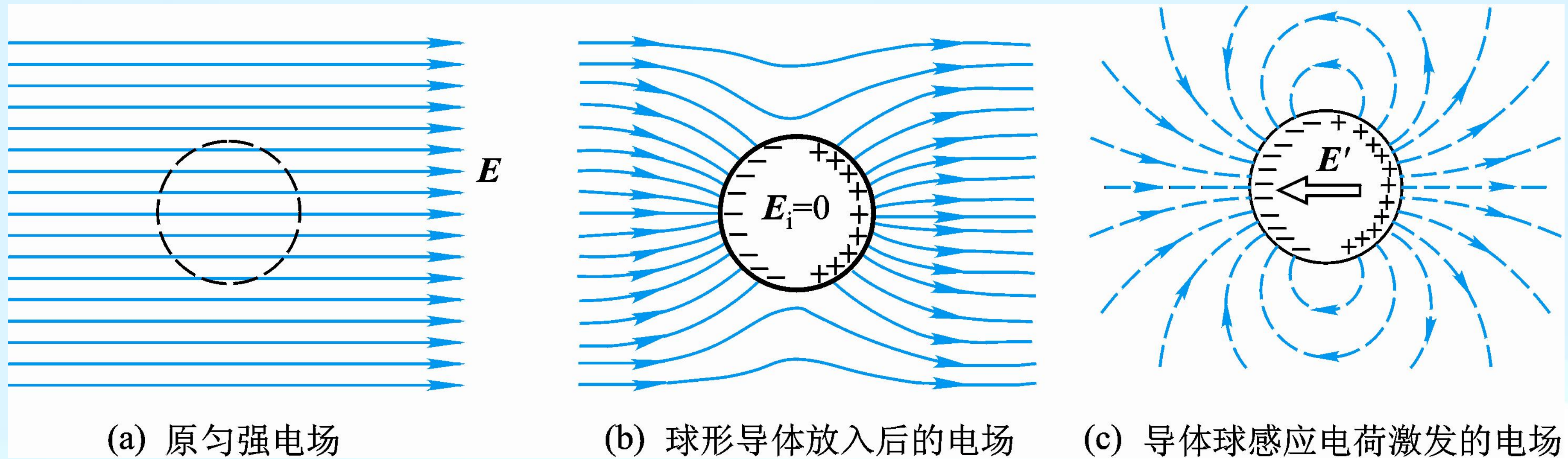


- **静电平衡状态：** 感应电荷产生的附加电场与外加电场在导体内部相抵消。此时，导体内部和表面没有电荷的宏观定向运动。

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$



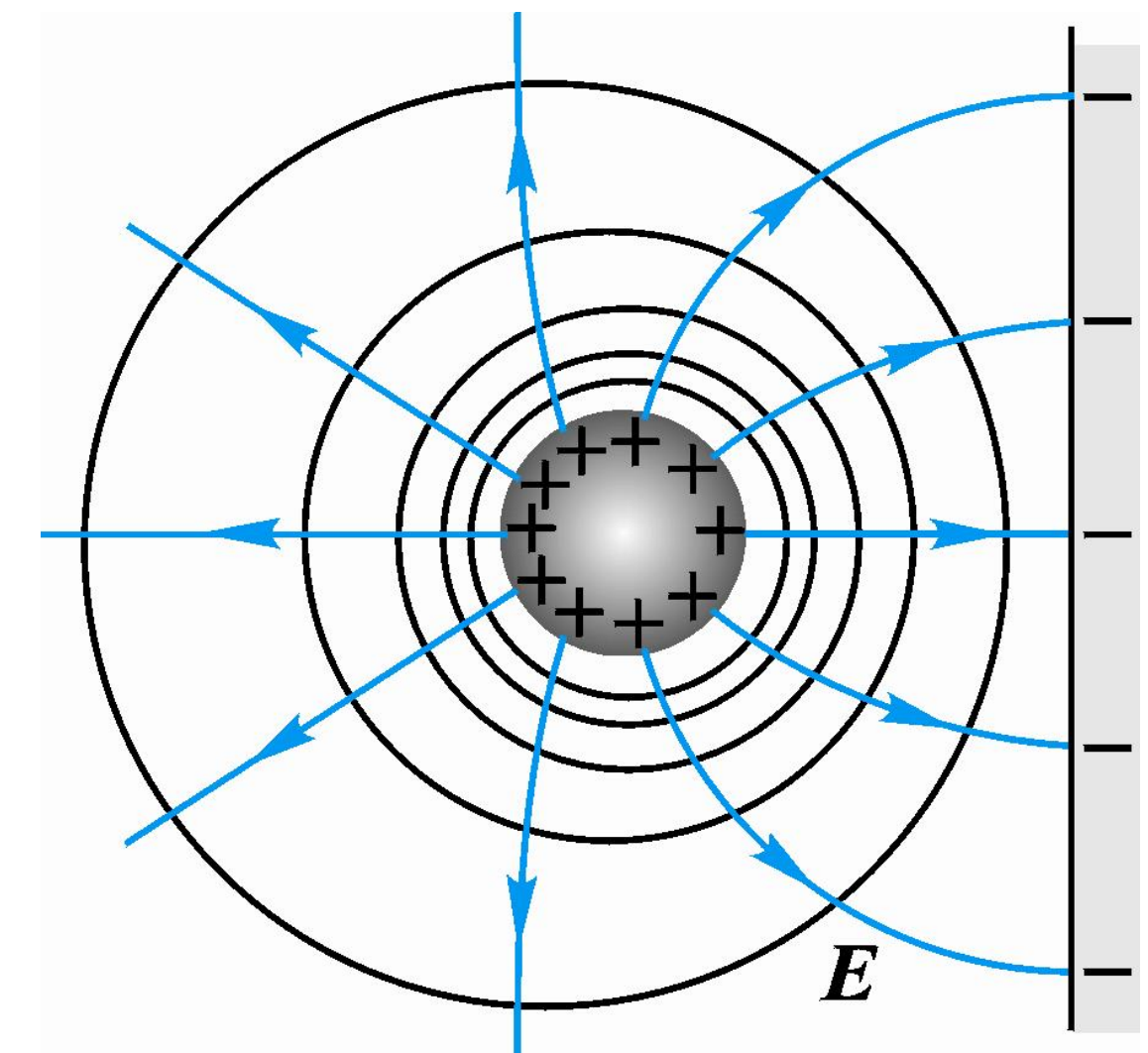
## 感应电荷将影响外电场的分布



## 导体的静电平衡性质：

- 导体内部和导体表面处处电势相等，整个导体是个等势体，导体表面成为等势面。
- 导体内部的电场强度处处为零，导体表面的电场强度

垂直于导体表面  $\vec{E}_{\text{表面}} \cdot d\vec{l} = 0$



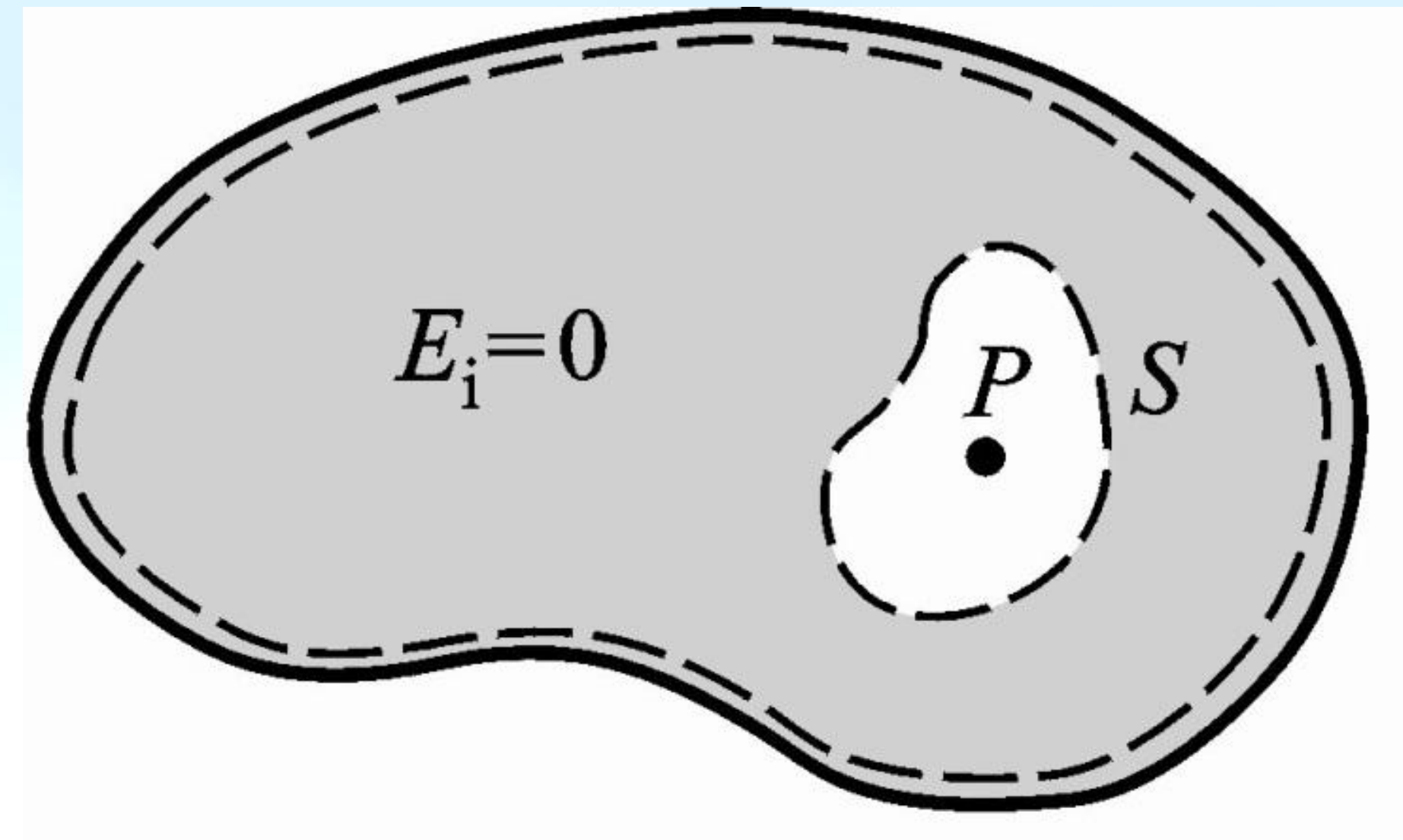


# 静电平衡时导体上的电荷分布

## 1. 电荷分布

在静电平衡下，导体所带的电荷只能分布在导体的外表面，导体内部没有净电荷。

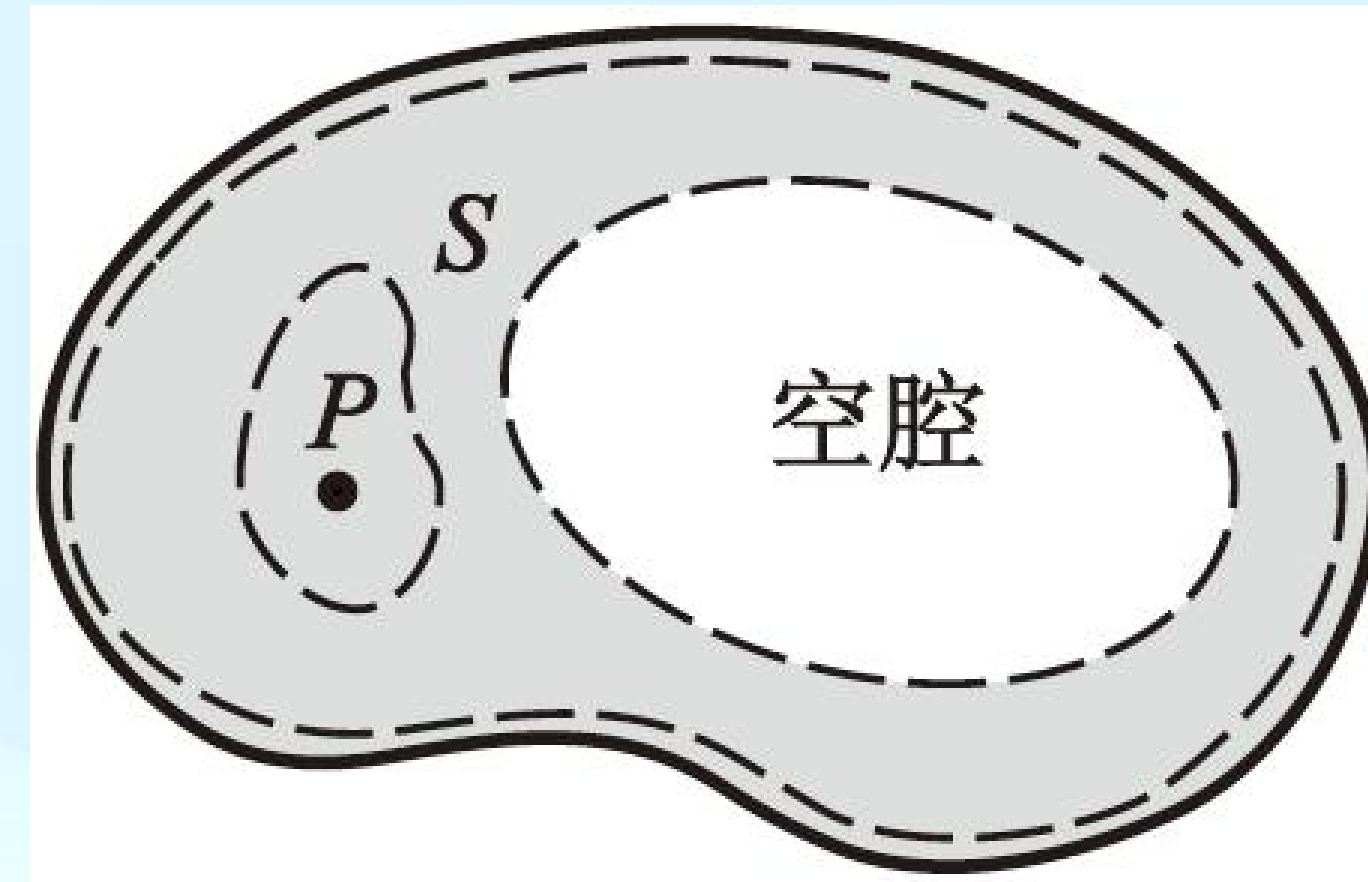
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$
$$\because \vec{E} = 0 \quad \therefore \sum q_i = 0$$



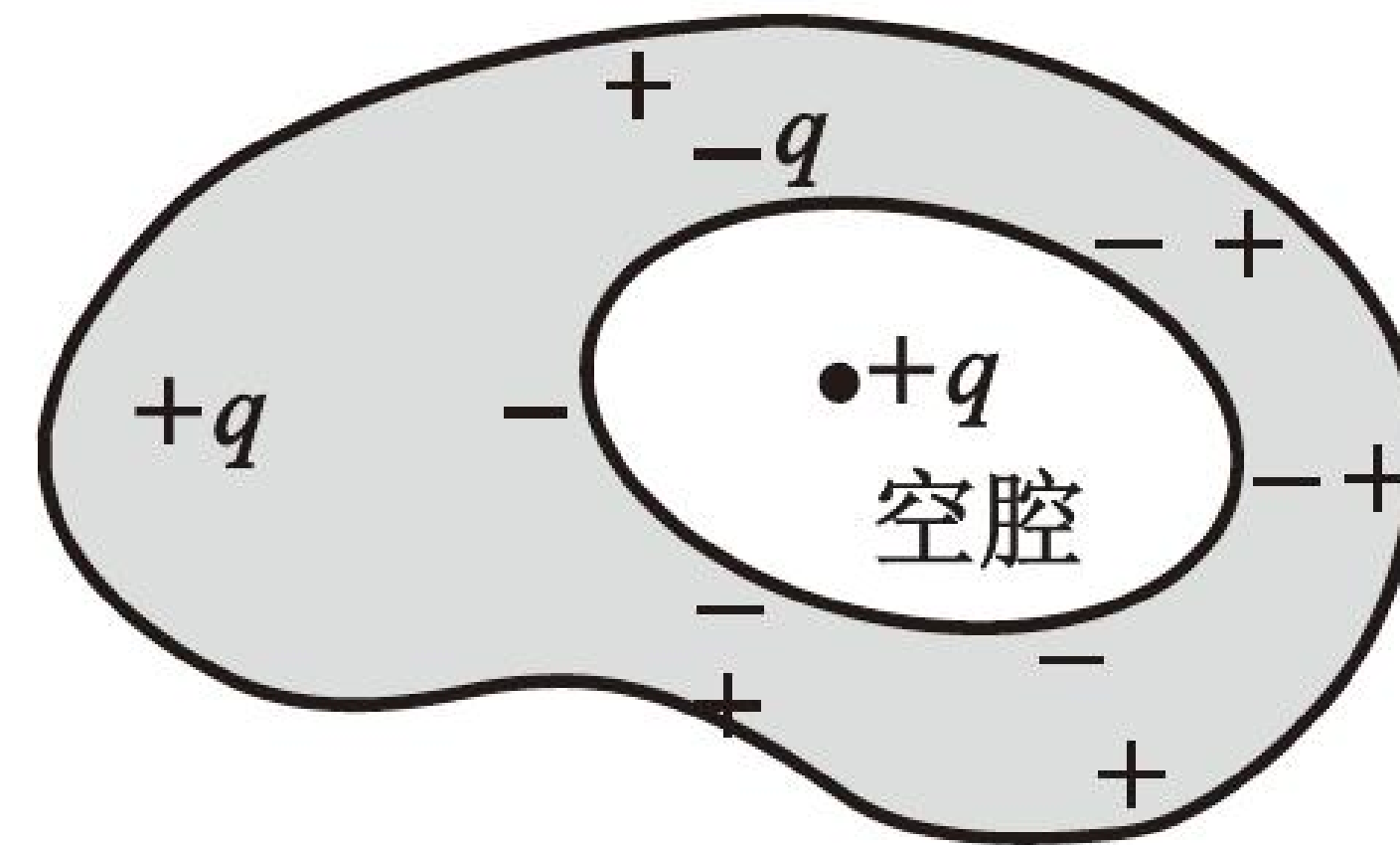
闭合面内有空腔的情况：

- 若闭合面内有空腔，且空腔内无带电体。
- 若闭合面内有空腔，且空腔内有带电体 $q$ ，空腔内表面感应出等值异号电荷 $-q$ 。

- 若闭合面内有空腔，且空腔内无带电体，由高斯定理可得导体内部及空腔内表面没有净电荷。



- 若闭合面内有空腔，且空腔内有带电体 $q$ 。空腔内表面感应出等值异号电荷 $-q$ 。



## 2. 电荷面密度与场强的关系

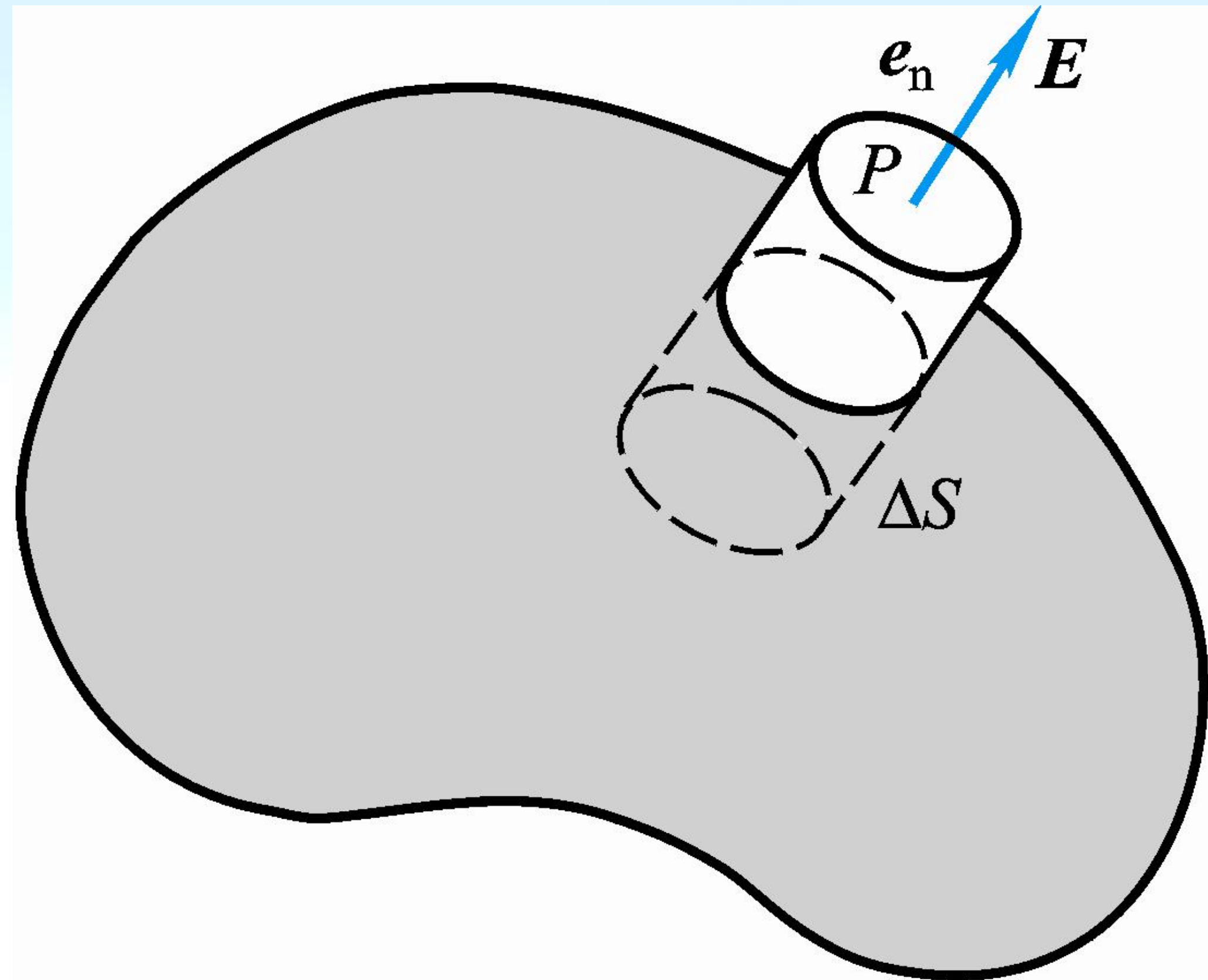
处于静电平衡的导体，其表面上各点的电荷密度与表面邻近处场强的大小成正比。

由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_n$$

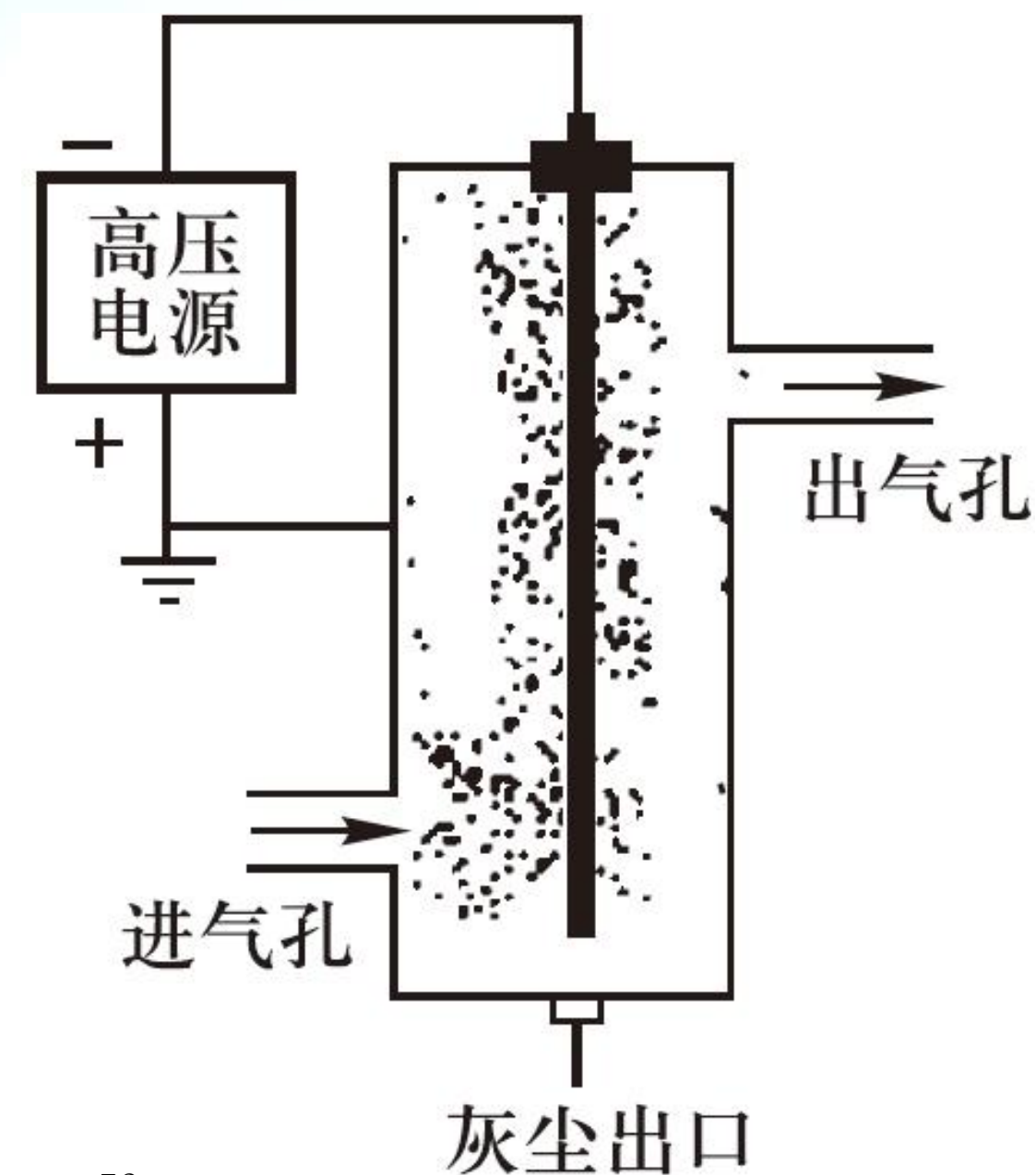




### 3. 电荷面密度与导体表面曲率的关系

静电平衡下的孤立导体，其表面处电荷面密度 $\sigma$ 与该表面曲率有关，曲率（ $1/R$ ）越大的地方电荷面密度也越大，曲率越小的地方电荷面密度也小。

应用：避雷针 静电喷漆 静电除尘



导体平衡问题可以依据以下结论：

导体静电平衡的条件  $\boldsymbol{E}_{\text{导体内部}} = \mathbf{0}$

静电场基本方程  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

电荷守恒定律  $\sum_i q_i = \text{常量}$

例7-18 人们在地毯上行走，鞋底因与地毯摩擦聚集了大量负电荷。把人体看成导体，他的足底可感应出正电荷，手指感应出负电荷。

(1) 如果人体感应出 $1\mu\text{C}$ 的电荷，试以一个最简单的模型估计人体的电势可达多少？

(2) 在干燥的天气里，空气的击穿电场强度为 $3.0\text{MV/m}$ ，当手指在接近门上金属手柄时可能产生的电火花有多长？



解：（1）把人体简化为一个半径为1m（设人体高度为2m）的球

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = 9 \times 10^3 \text{ V}$$

（2）由  $E = V/d$ ，可得放电火花长为

$$d = \frac{V}{E} = 3\text{mm}$$