第八章　恒定电流的磁场

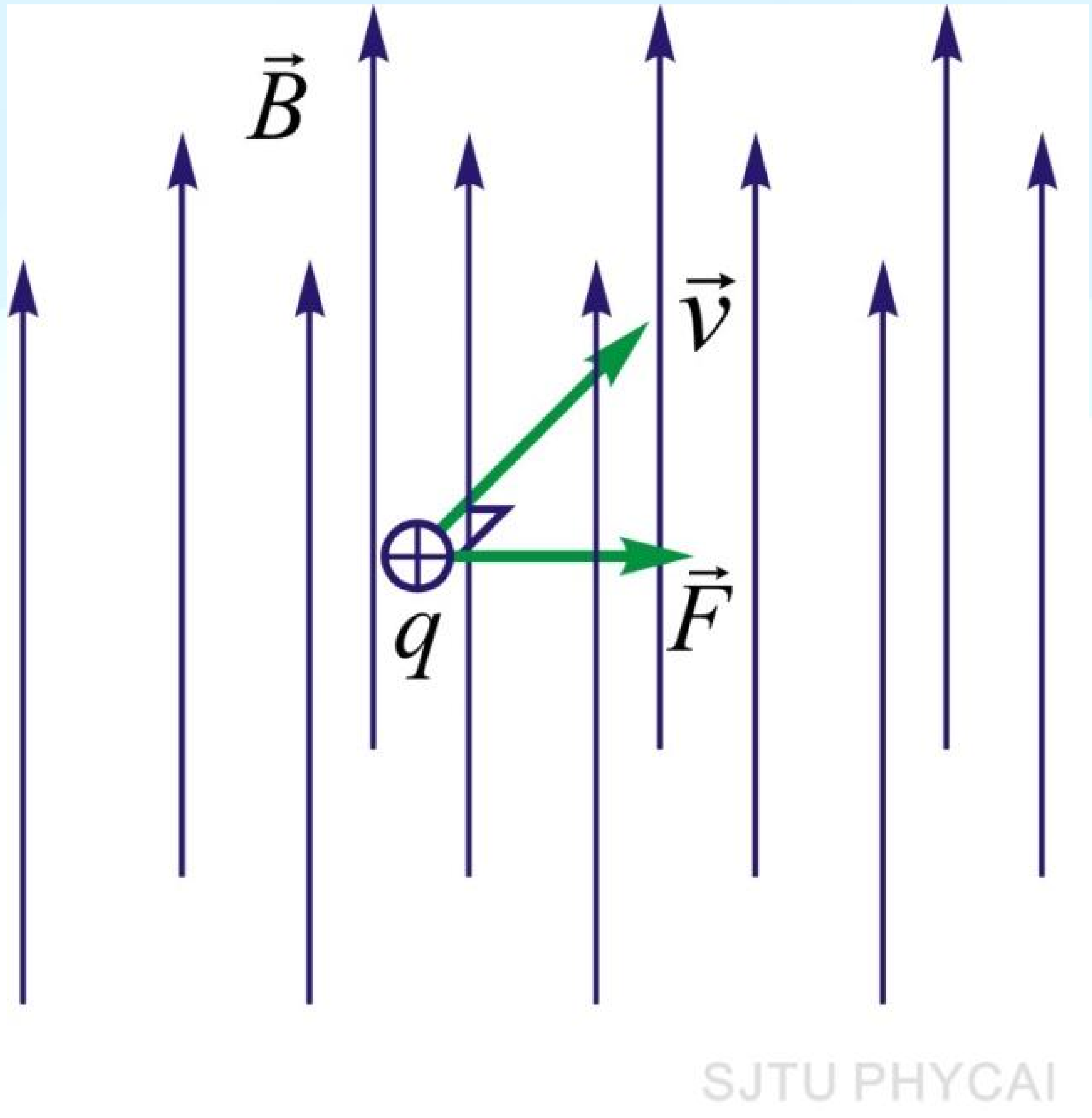
§8-5 带电粒子在电场和磁场中的运动
§8-6 磁场对载流导线的作用
§8-7 磁场中的磁介质
§8-8 有磁介质时的安培环路定理和高斯定理　磁场强度

§8-5 带电粒子在电场和磁场中的运动

一、洛伦兹力

带电粒子运动的方向与磁场方向成夹角θ时，所受磁力：

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$ 洛伦兹力



大小：$F = qvB\sin\theta$

方向：$//(\vec{v} \times \vec{B})$

带电粒子沿磁场方向运动时：$F = 0$

带电粒子的运动方向与磁场方向垂直时：$F_{\mathrm{m}} = qvB$

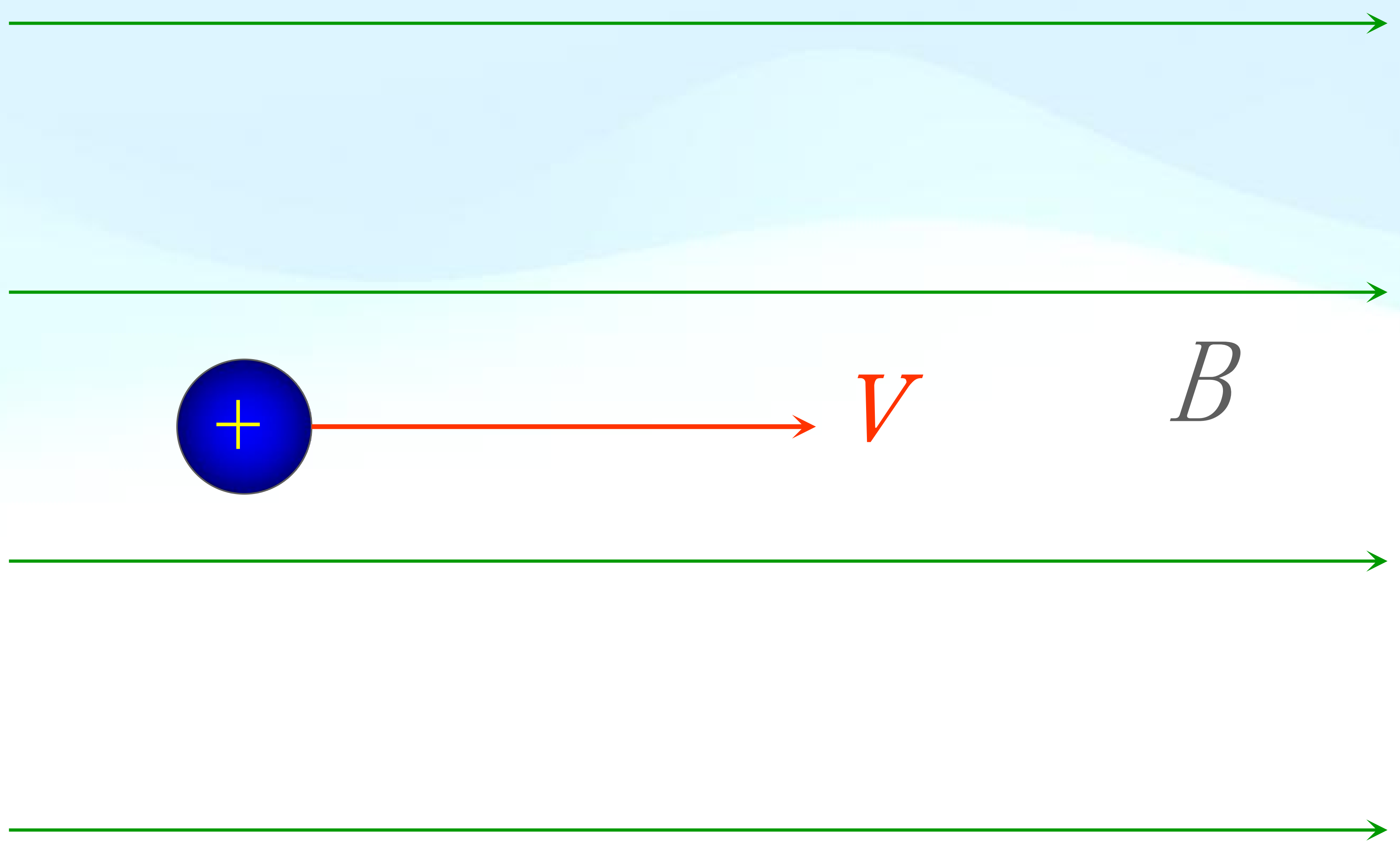
1. 带电粒子在均匀磁场中的运动

设均匀磁场 $\vec{B}$，带电粒子 $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{m}, \vec{\boldsymbol{v}}$

1） 运动方向与磁场方向平行 $(\vec{v} \,//\, \vec{B})$

洛伦兹力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$F = 0$$

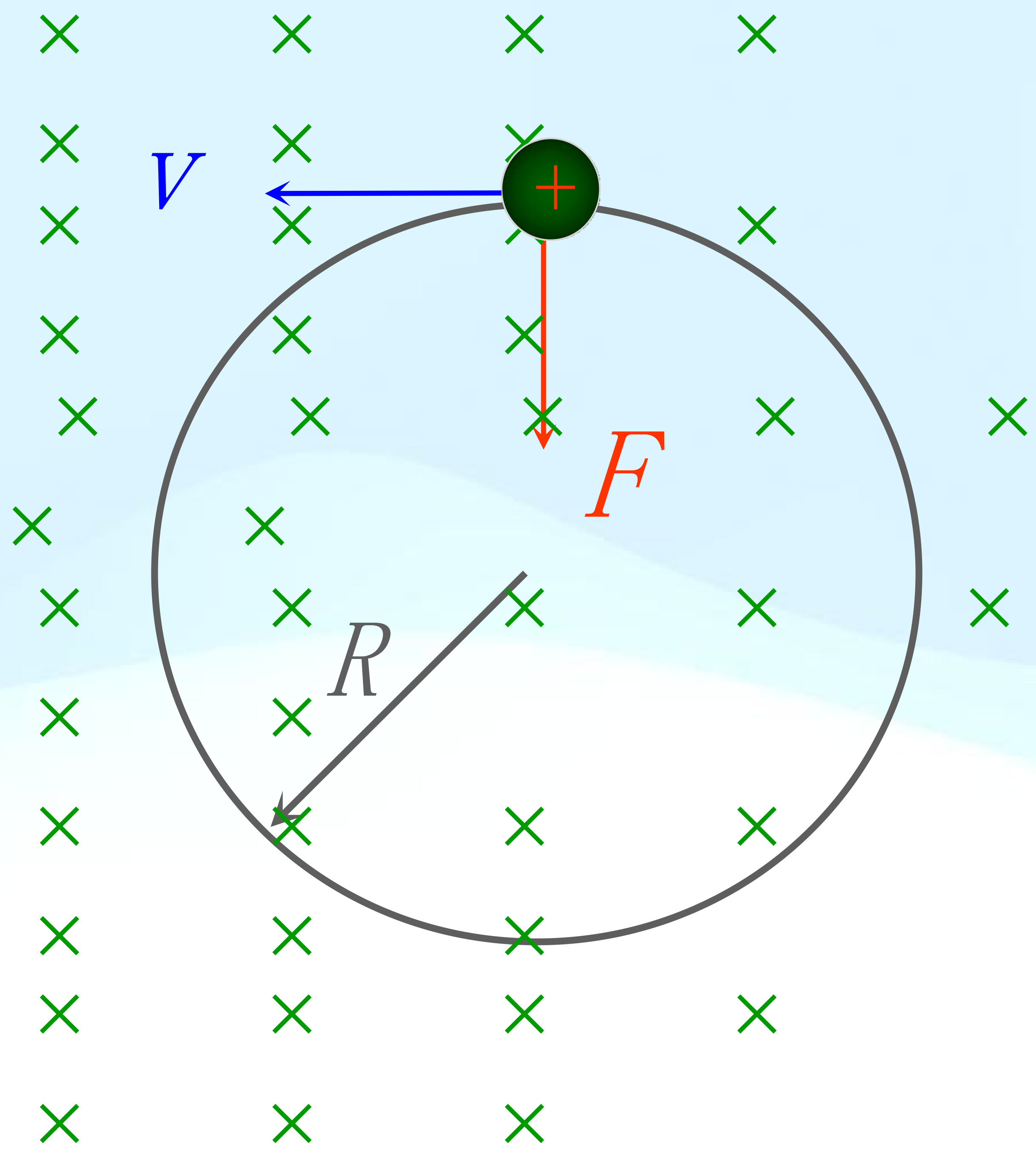


➢ 带电粒子做匀速直线运动。

2） 运动方向与磁场方向垂直 $(\vec{v}\perp\vec{B})$

$$F = qvB$$

$\because\ \vec{F}\perp\vec{v}$ 故带电粒子做匀速圆周运动。



运动方程：$qvB = m\dfrac{v^2}{R}$

运动半径：$R = \dfrac{mv}{qB}$

周期：$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$　　角频率：$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{qB}{m}$

➢ 带电粒子做匀速圆周运动，周期和角频率与速度无关。

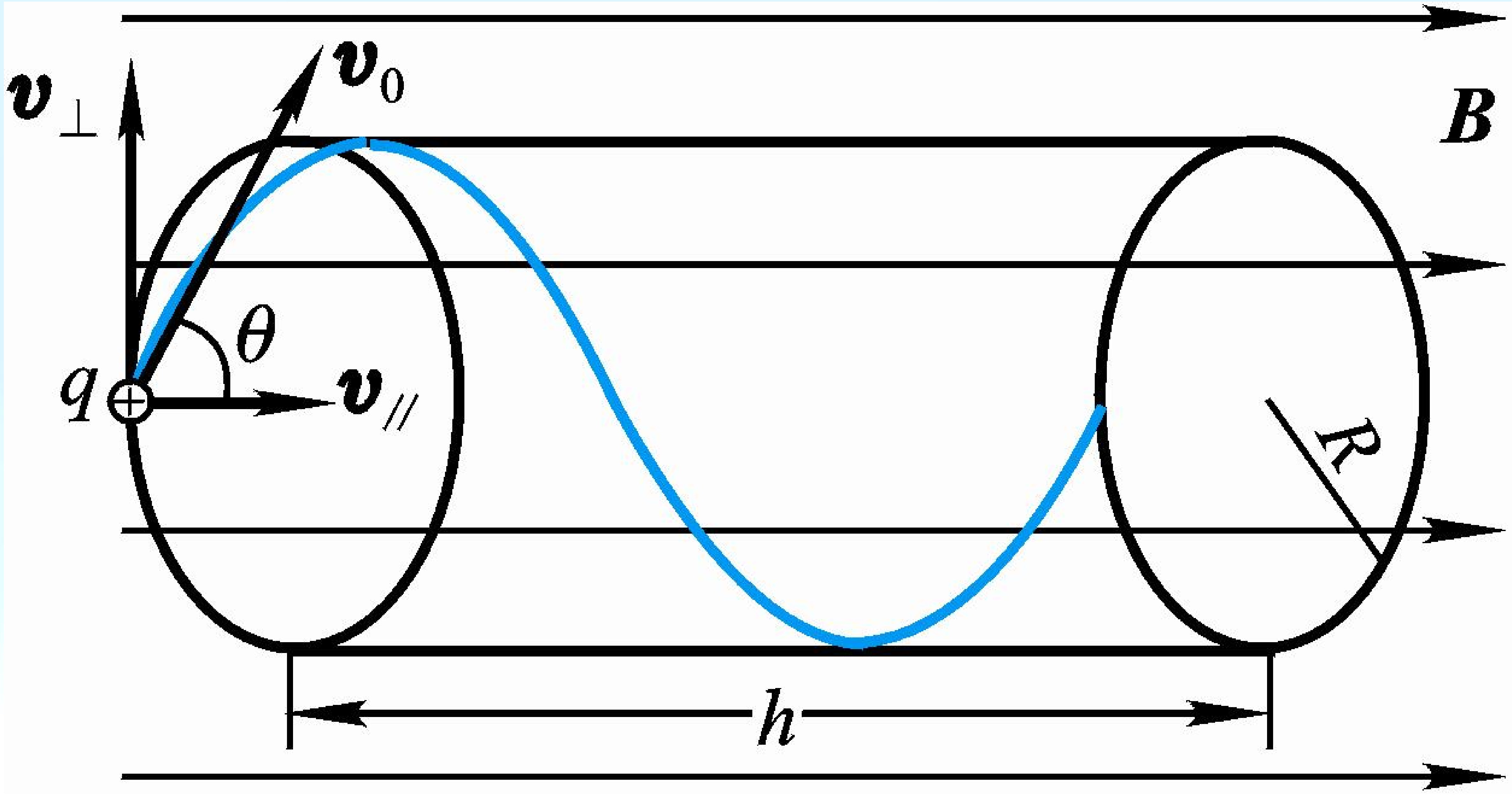
3） 运动方向沿任意方向($\vec{v}$ 与$\vec{B}$ 成θ 角)

分解 $\vec{v}$：

$v_\perp = v\sin\theta$ 匀速圆周运动

$v_{//} = v\cos\theta$ 匀速直线运动

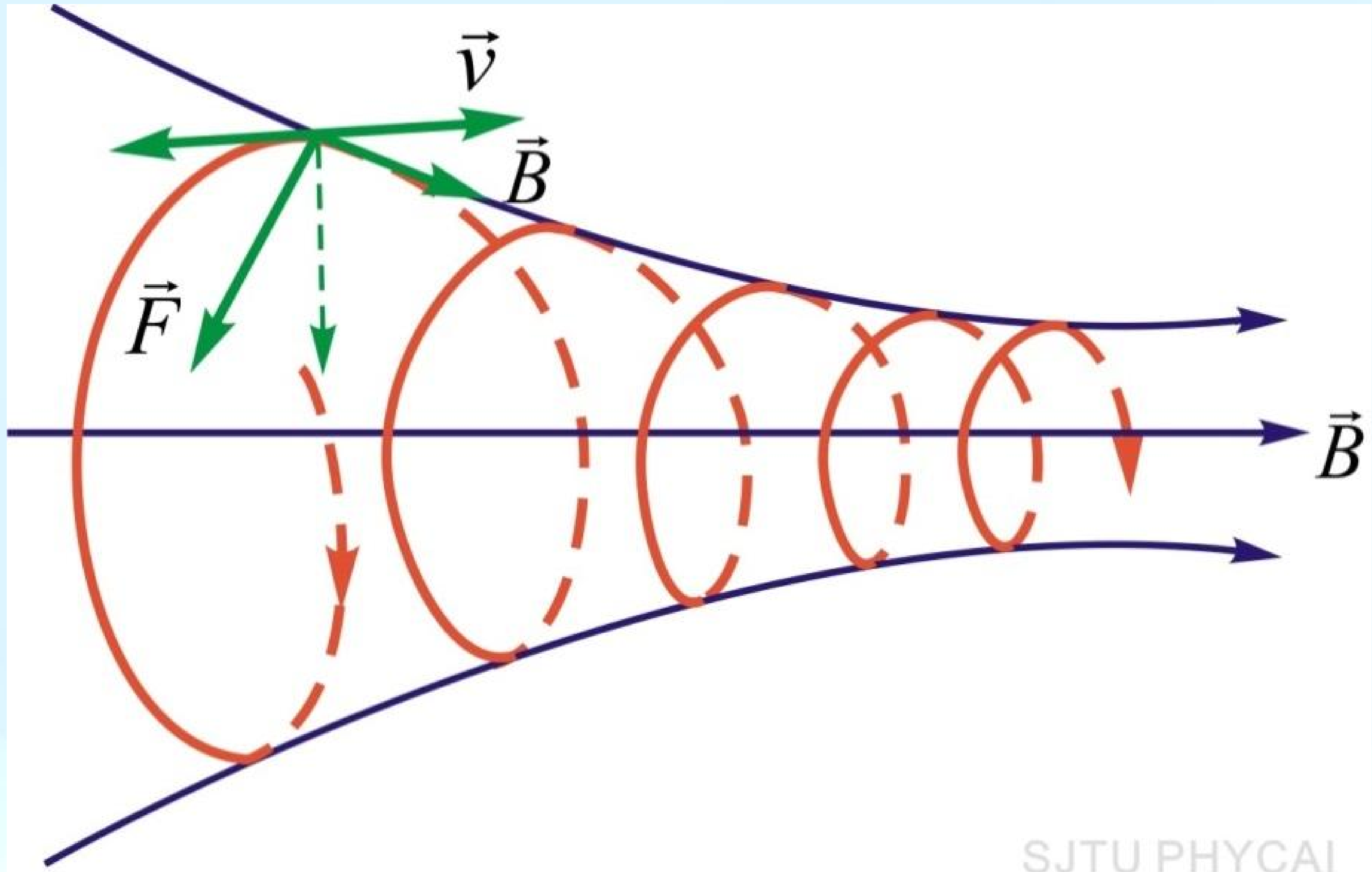
➢ 带电粒子做螺旋线运动。



半径：$R = \dfrac{mv\sin\theta}{qB}$ 周期：$T = \dfrac{2\pi m}{qB}$

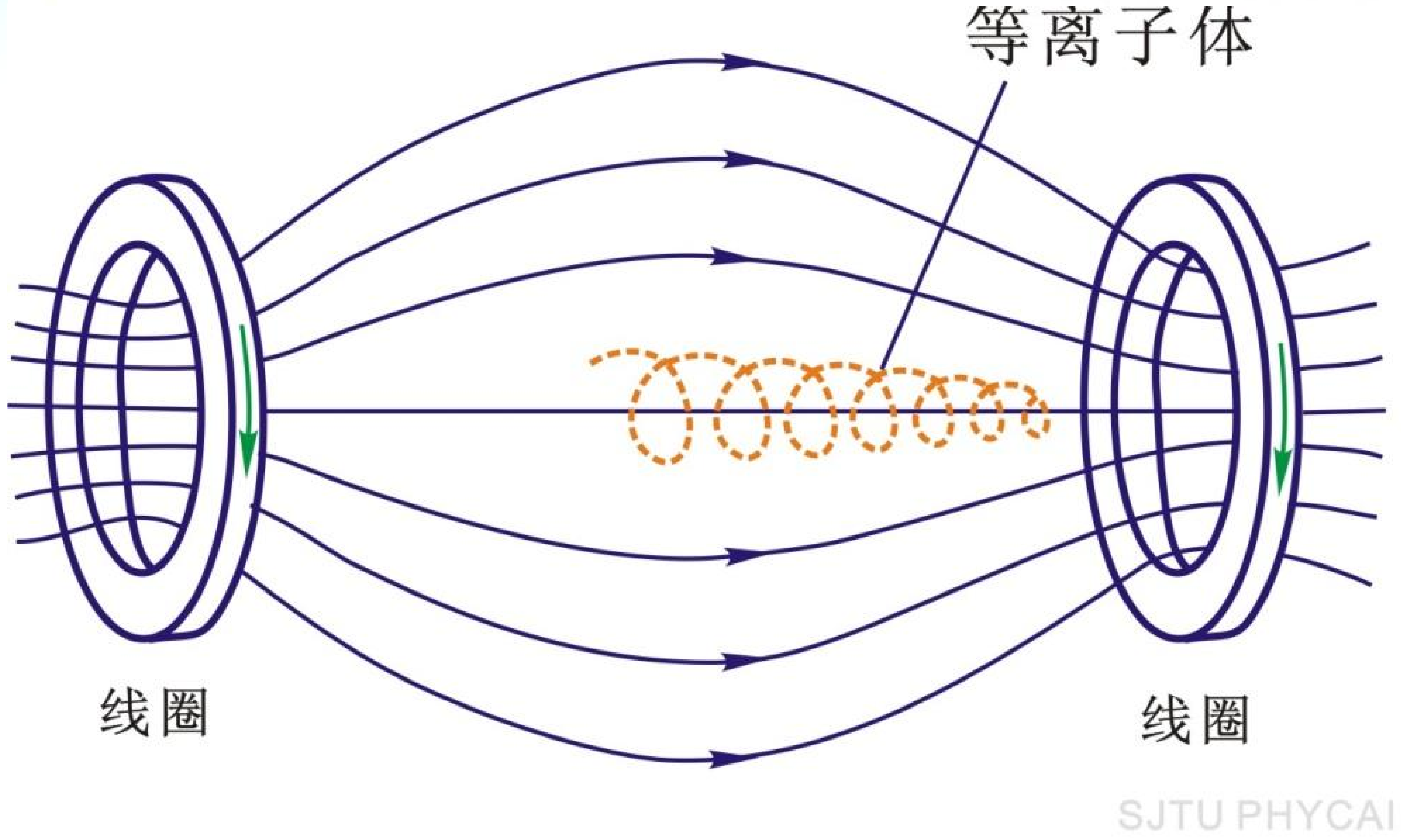
螺距：$h = v_{//}T = \dfrac{2\pi m}{qB} v\cos\theta$

2. 带电粒子在非均匀磁场中运动

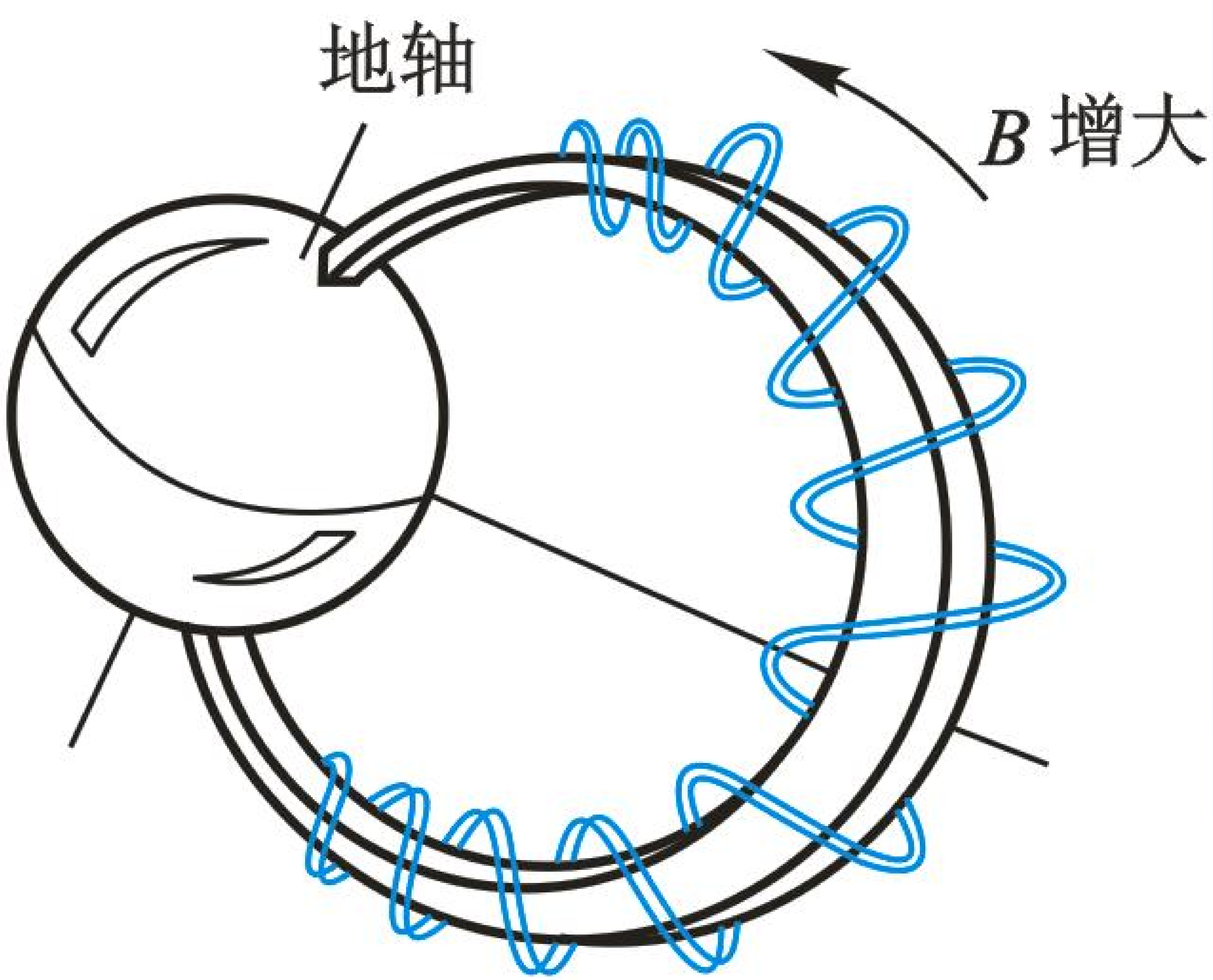


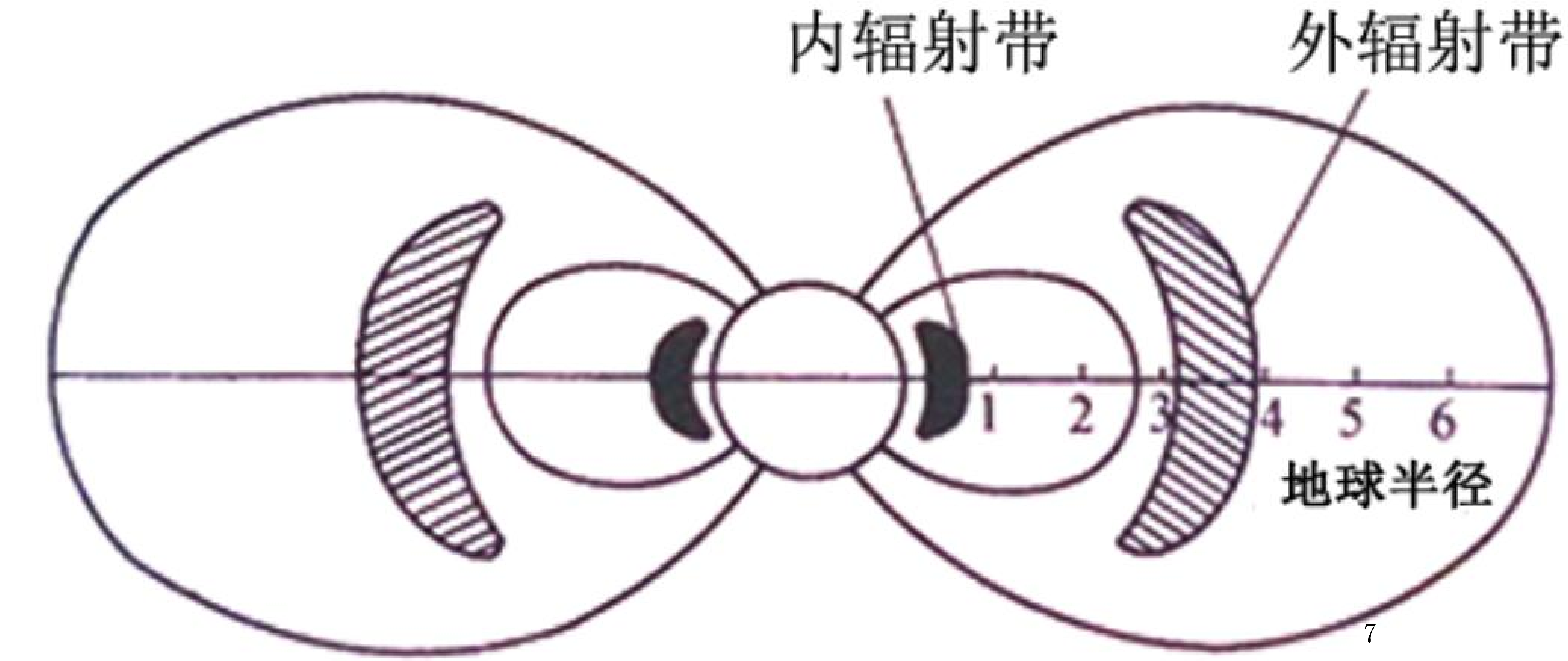
1）磁场越强螺旋半径越小，并且会聚磁场中做螺旋运动的带正电粒子会掉向返转。

2）磁约束装置



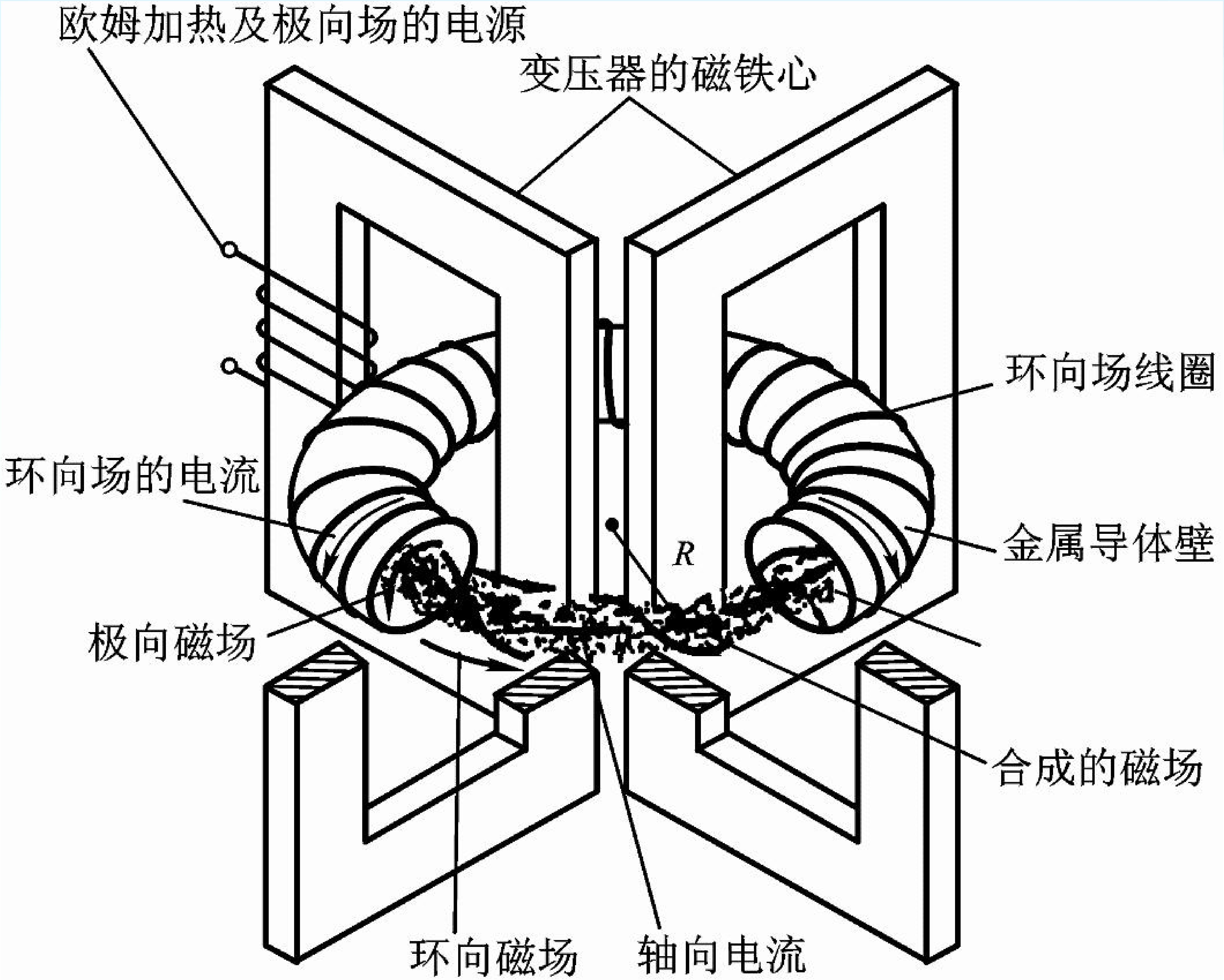
地球磁场构成一个天然的磁约束。来自外层空间的带电粒子被地磁场俘获形成范艾仑(Van Allen)辐射带。





托卡马克(TOKAMAK)

利用一组线圈环形排列，通电后就可形成等离子体磁约束装置，是实现高温等离子体磁约束，进而实现可控核聚变的重要设备。

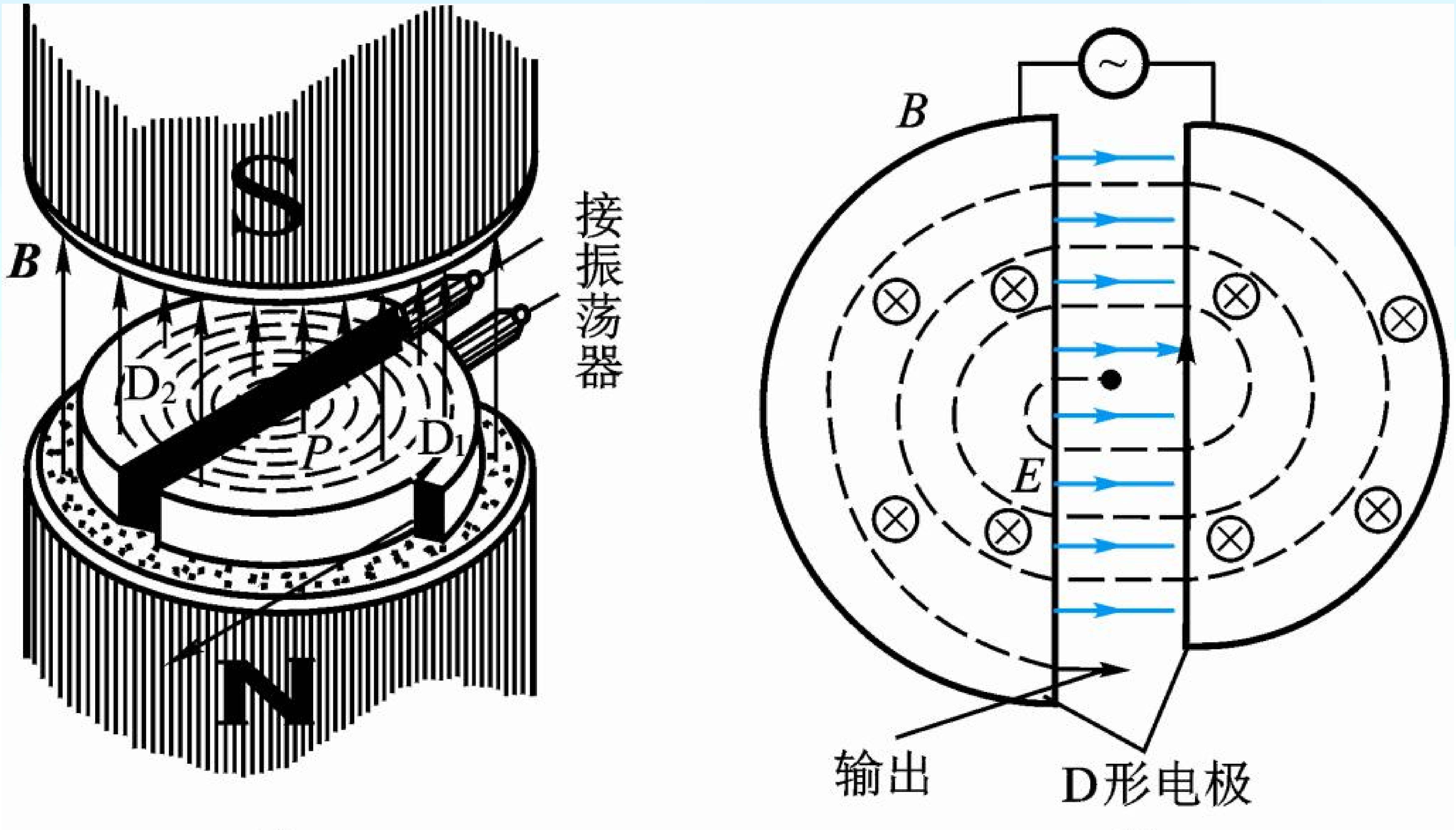


二、带电粒子在电场和磁场中的运动和应用

带有电荷量 q 的粒子在静电场 $\vec{E}$ 和磁场 $\vec{B}$ 中以速度 $\vec{v}$ 运动时受到的作用力将是

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

1. 回旋加速器（cyclotron）



(a) (b)

- 使带电粒子在磁场的作用下做回旋运动。
- 使带电粒子在电场的作用下得到加速。

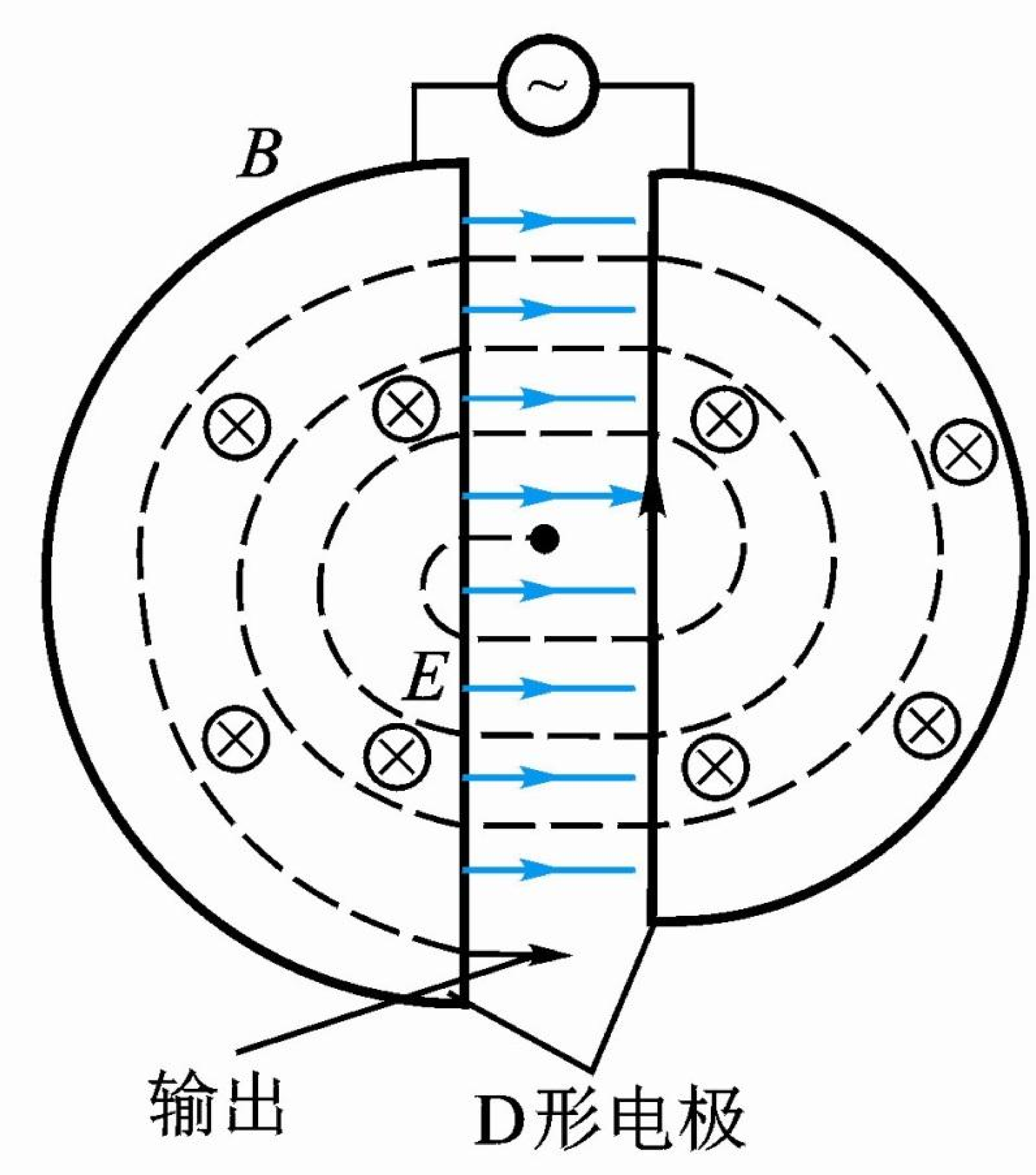
振荡器的周期：$T = 2t = \dfrac{2\pi m}{qB}$

频率：$f = \dfrac{qB}{2\pi m}$

轨道半径：$R = \dfrac{mv}{qB}$

粒子引出速度：$v = \dfrac{q}{m}BR$

粒子的动能：$E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{q^2}{2m}B^2R^2$



回旋加速器一般适用于加速质量较大的粒子，不宜用于加速电子。

2. 质谱仪

质谱仪是分析同位素和测量离子荷质比的重要仪器。

离子源

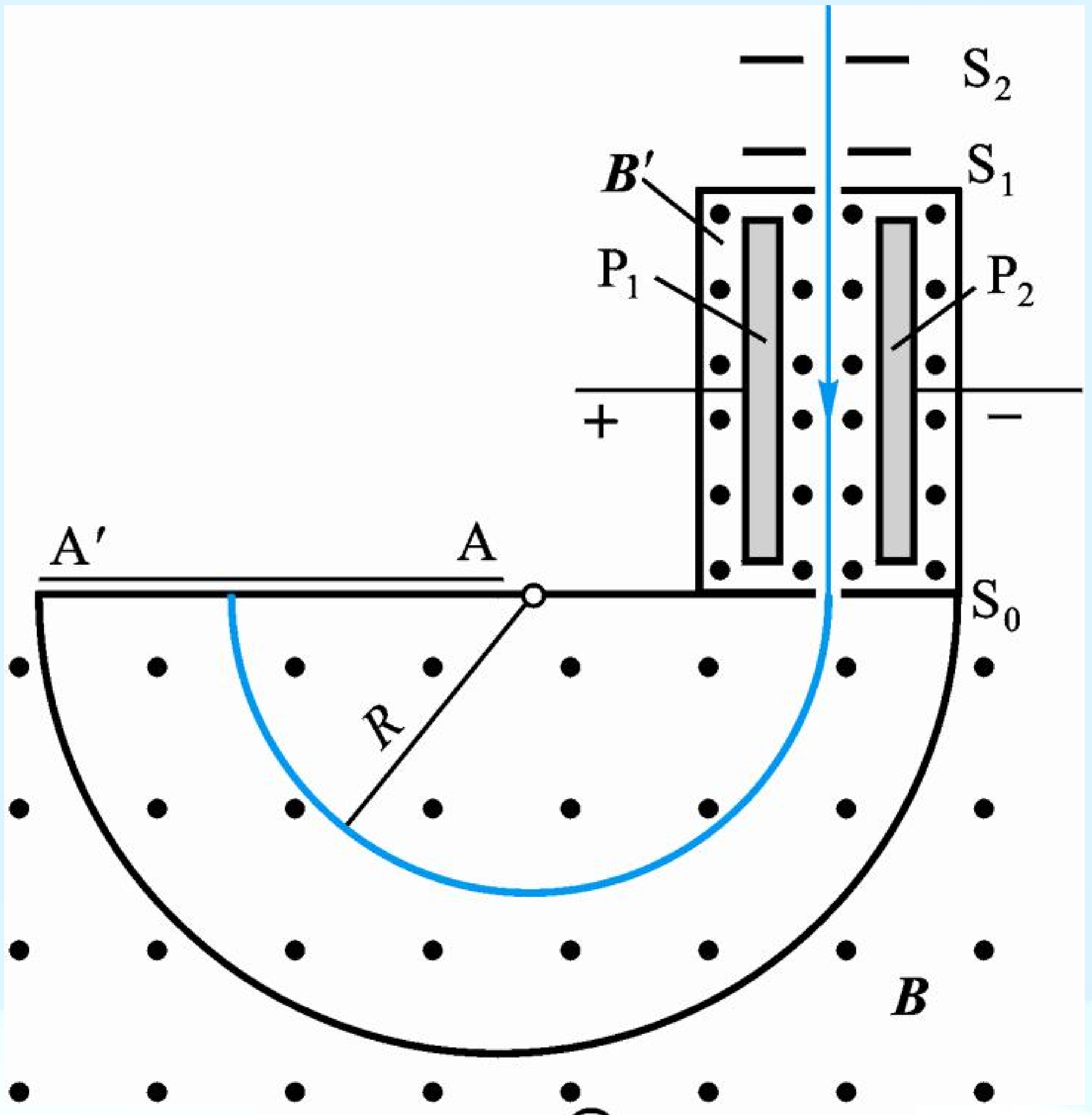
加速电场

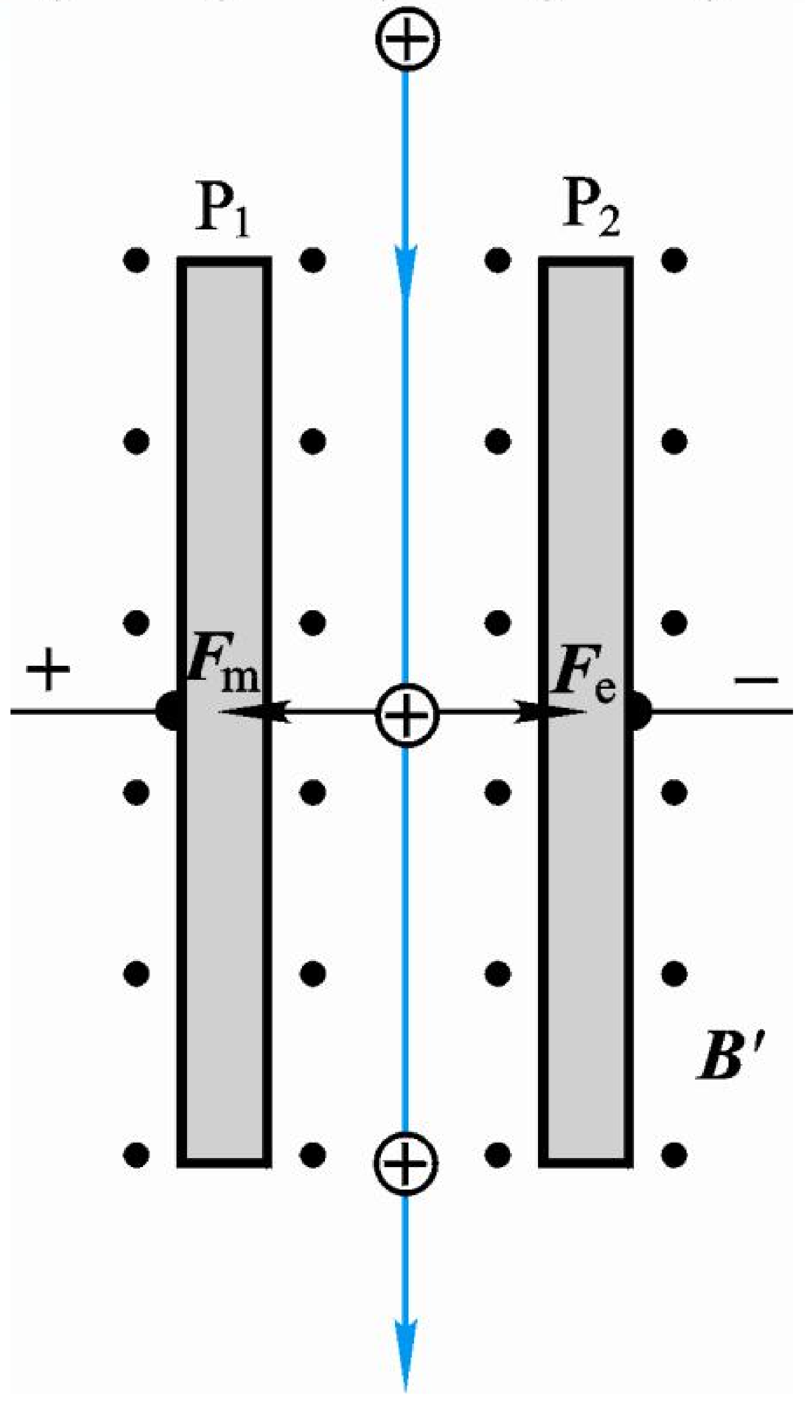
速度选择器 $v = E / B'$

与速度垂直的均匀磁场

$$R = \frac{mv}{qB} \qquad \frac{q}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{E}{RB'B}$$

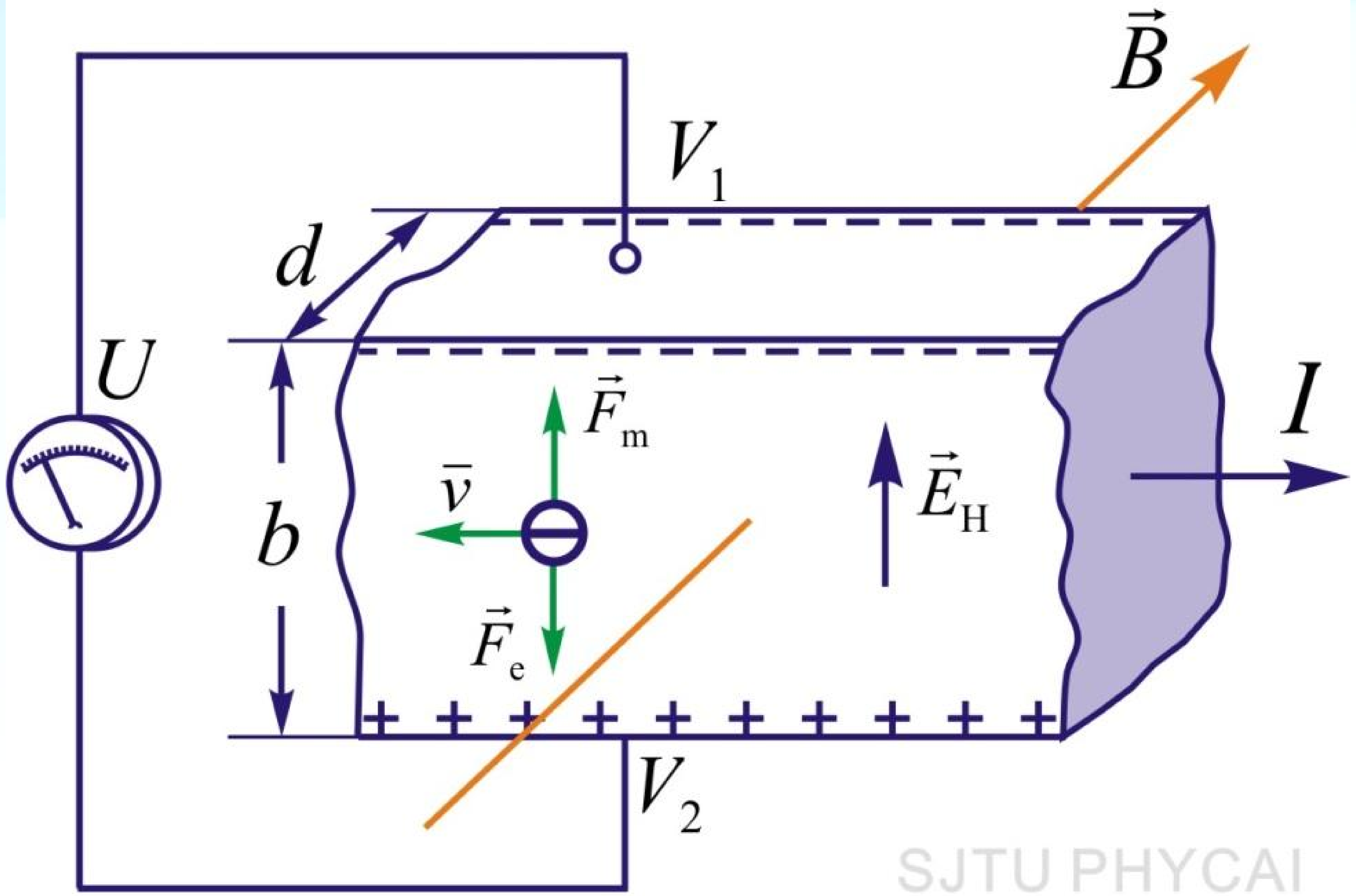
不同质量的离子打在底片上不同位置处。





三、霍耳效应

1879年，霍耳（E. H. Hall）发现，把一载流导体放在磁场中时，如果磁场方向与电流方向垂直，则在与磁场和电流两者垂直的方向上出现横向电势差。称为霍耳效应，这电势差称为霍耳电势差。

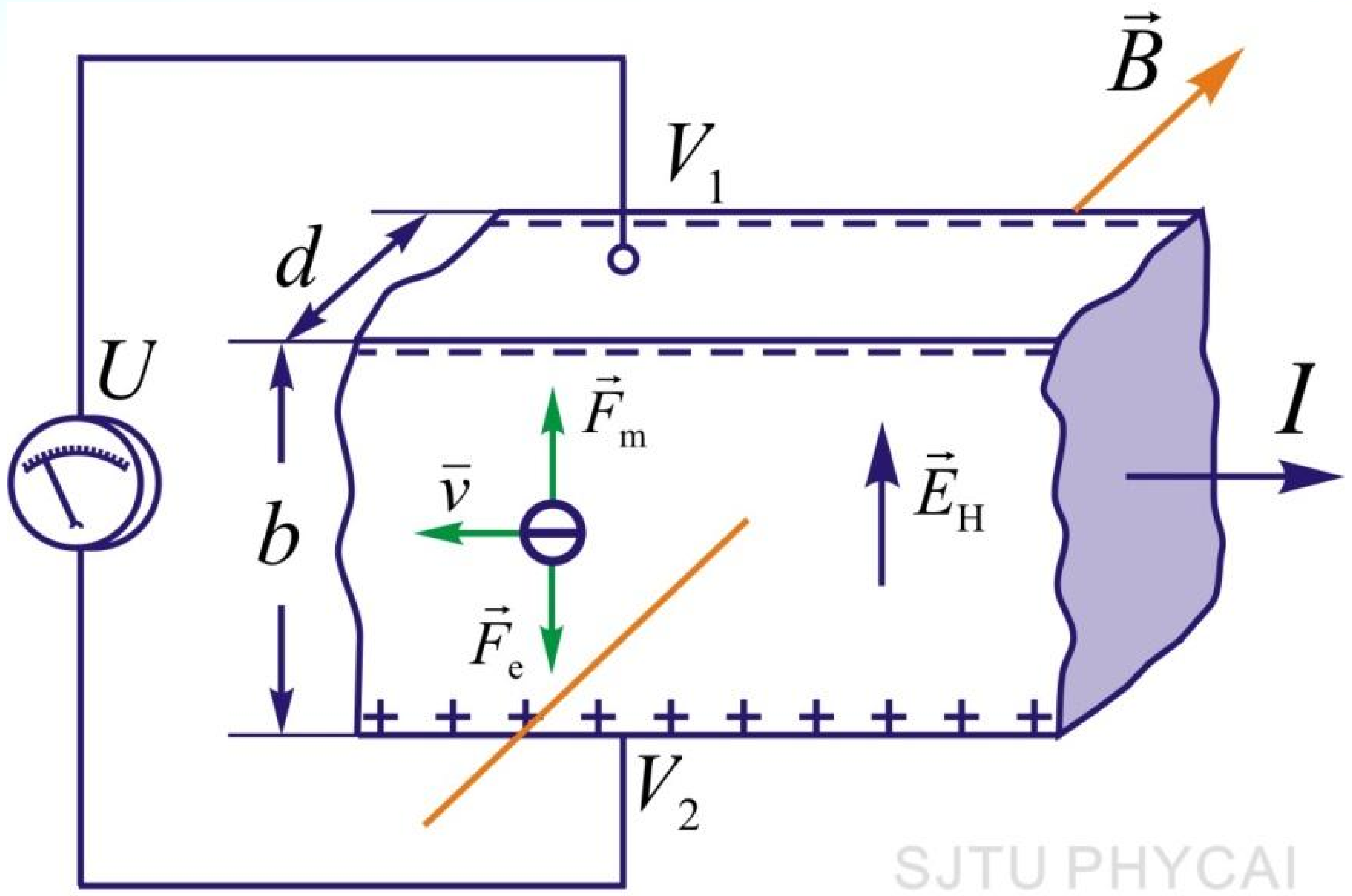


实验指出，在磁场不太强时，霍耳电势差U与电流I和磁感应强度B成正比，与板的宽d成反比。

$$U = V_1 - V_2 = R_H \frac{BI}{d}$$

R_H称为霍耳系数，仅与材料有关。

原因是导体中载流子受到洛伦兹力作用而发生横向漂移的结果。



分析　设载流子：$q, \bar{v}, n$　$F_{\mathrm{m}} = q\bar{v}B$　$F_{\mathrm{e}} = qE_{\mathrm{H}}$

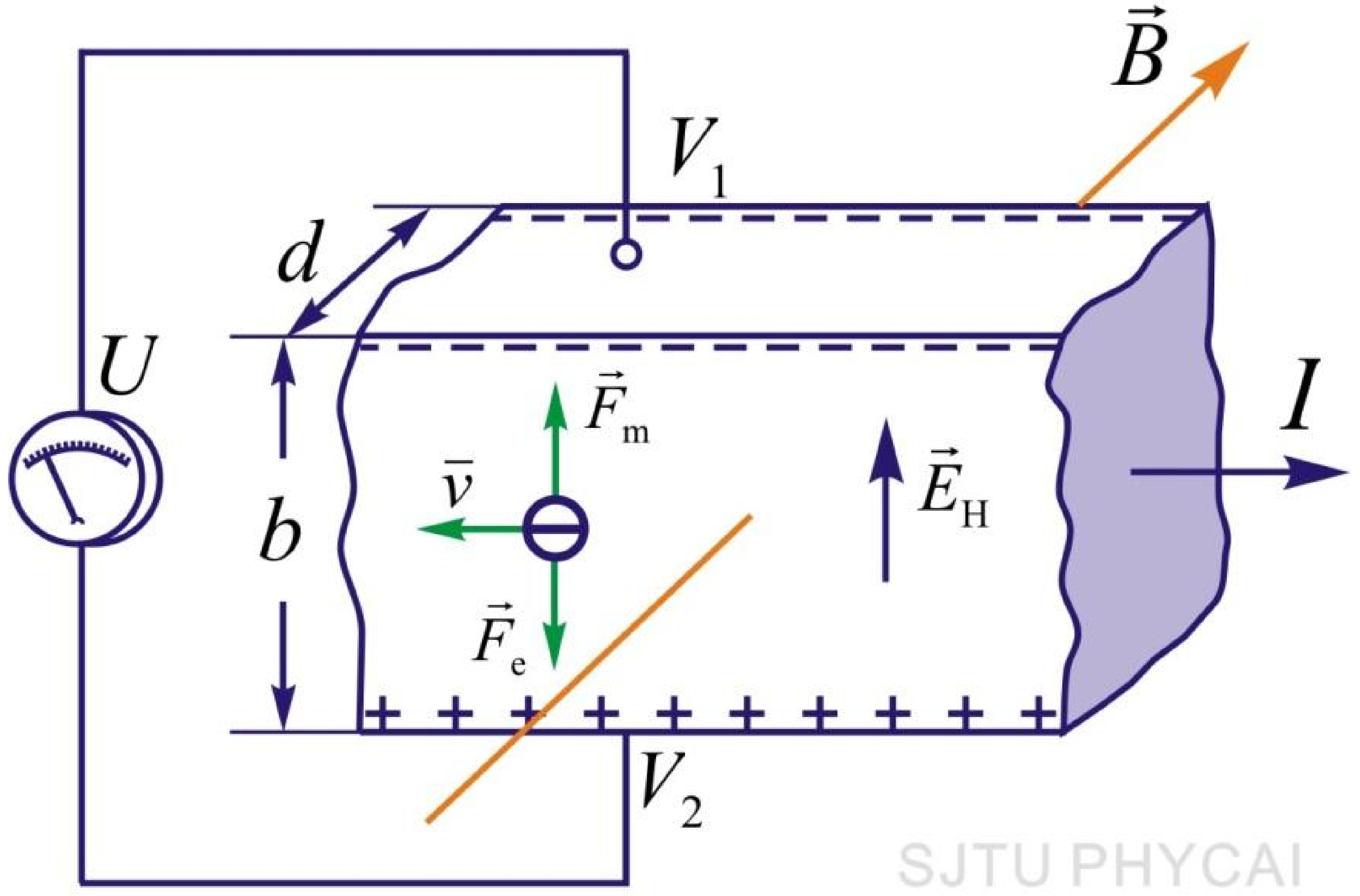
当平衡时：　$qE_{\mathrm{H}} = q\bar{v}B$　$E_{\mathrm{H}} = \bar{v}B$

$$U = V_1 - V_2 = E_{\mathrm{H}}b = \bar{v}Bb$$

$\because \quad I = jbd = qn\bar{v}bd \qquad \therefore U = \dfrac{1}{qn}\dfrac{IB}{d}$

霍耳系数：　$R_{\mathrm{H}} \equiv \dfrac{1}{qn}$

$$U = V_1 - V_2 = R_{\mathrm{H}}\frac{IB}{d}$$



讨论

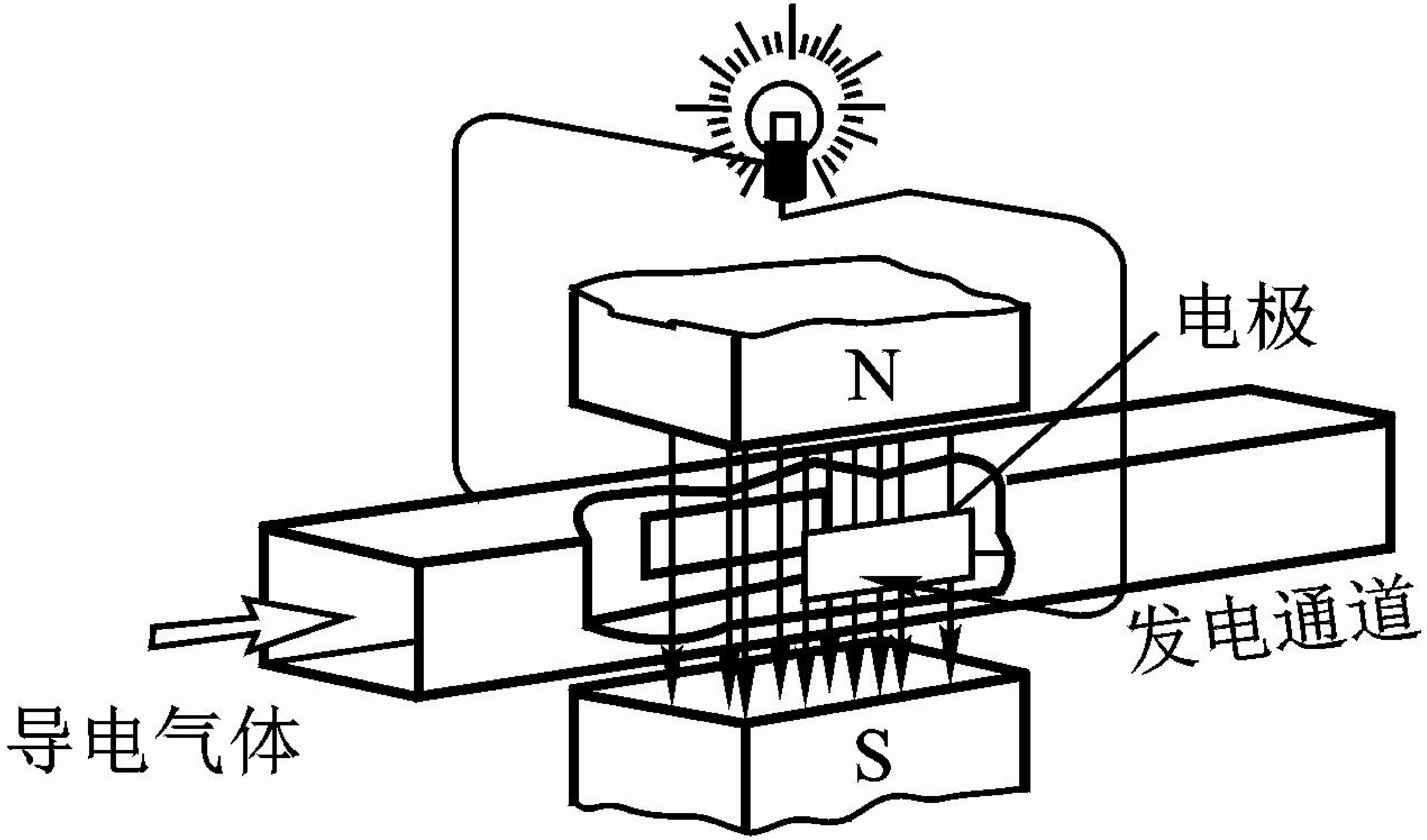
1. 实验确定霍耳系数R_H，就能定出载流子浓度n。
   可用于研究半导体内n的变化。

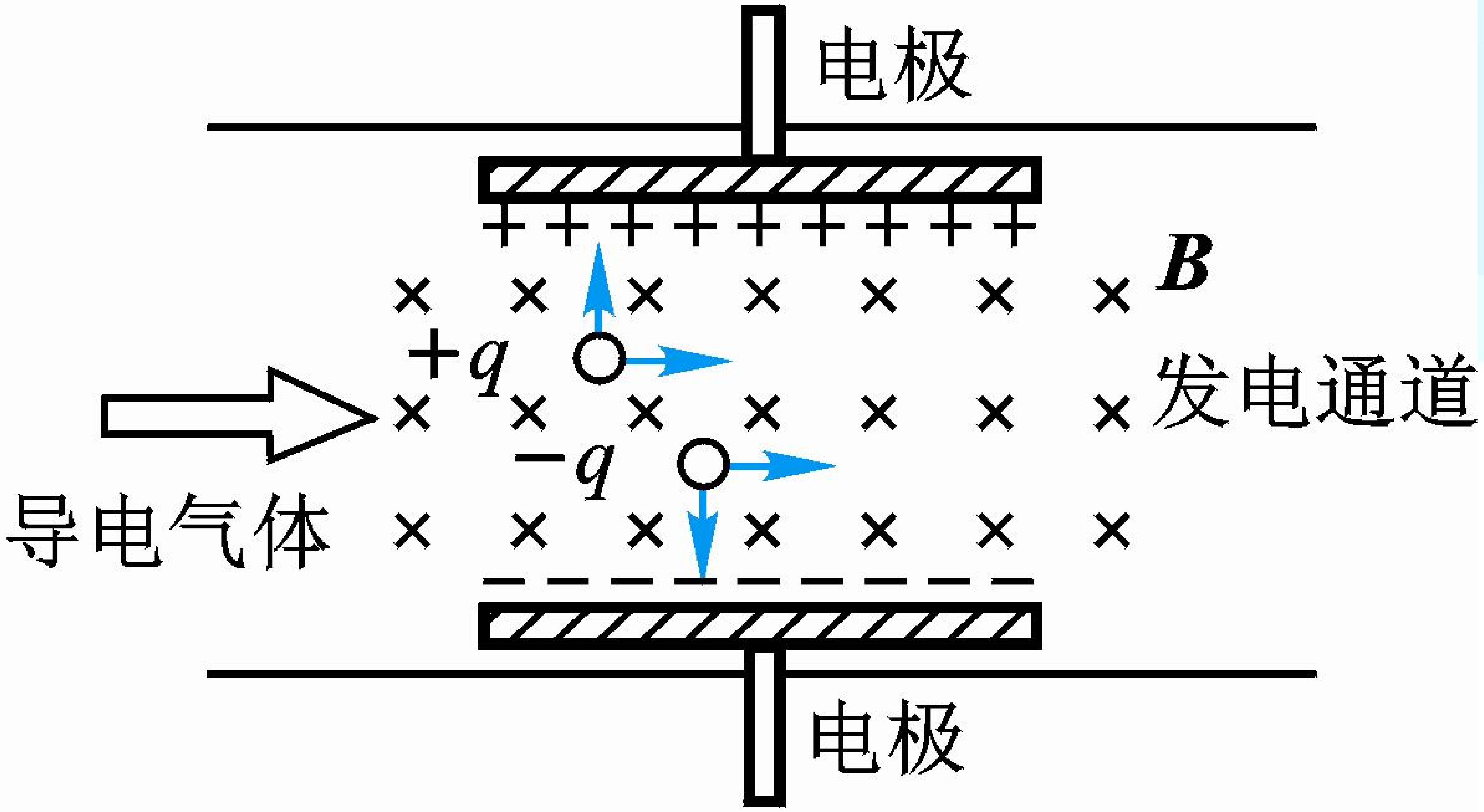
2. $$q > 0 \rightarrow R_{\mathrm{H}} > 0 \rightarrow V_1 > V_2$$
   $$q < 0 \rightarrow R_{\mathrm{H}} < 0 \rightarrow V_1 < V_2$$

   可用于判定半导体内载流子的类型。

3. 霍耳效应传感器。

4. 磁流体发电



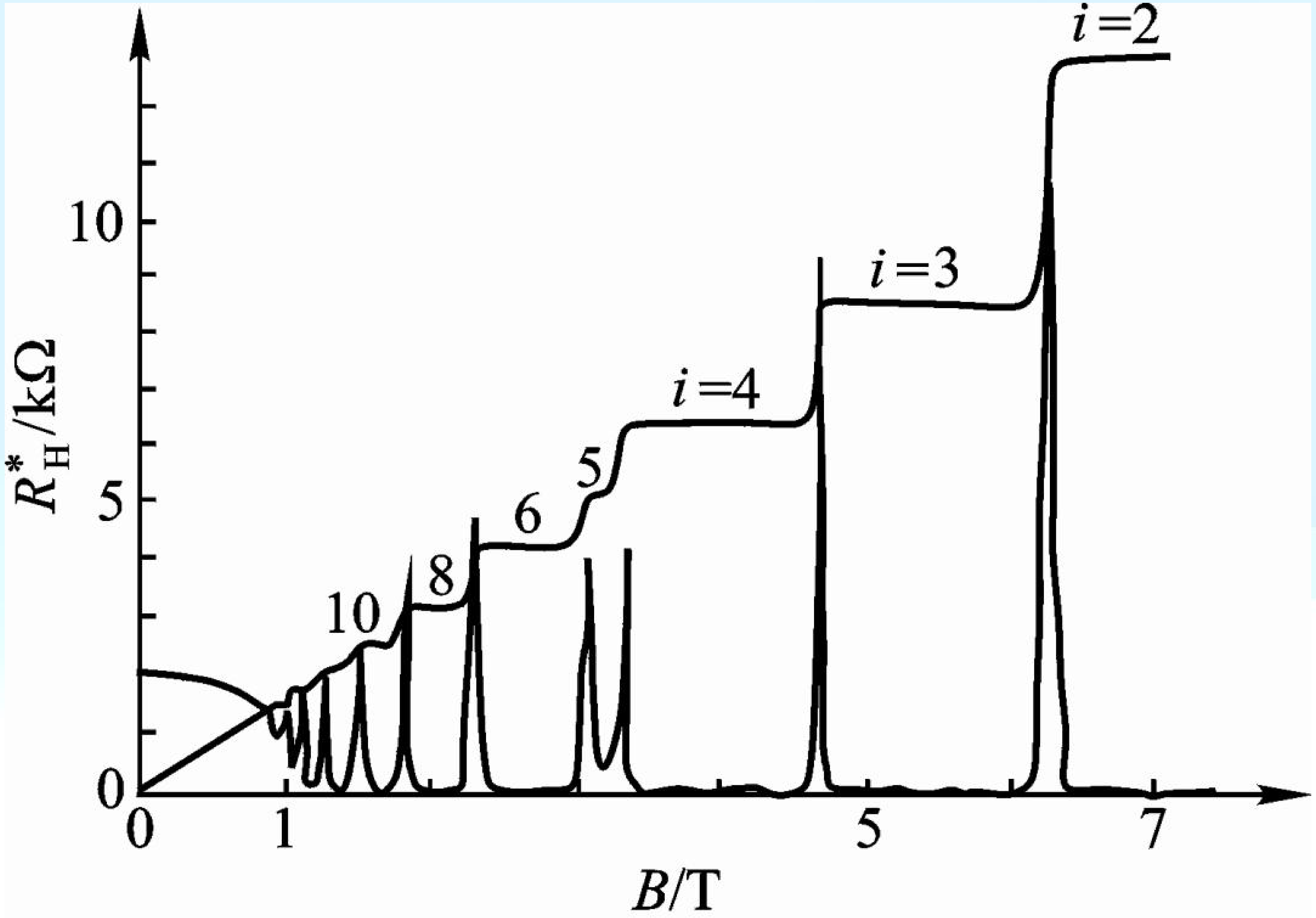


*四、量子霍耳效应

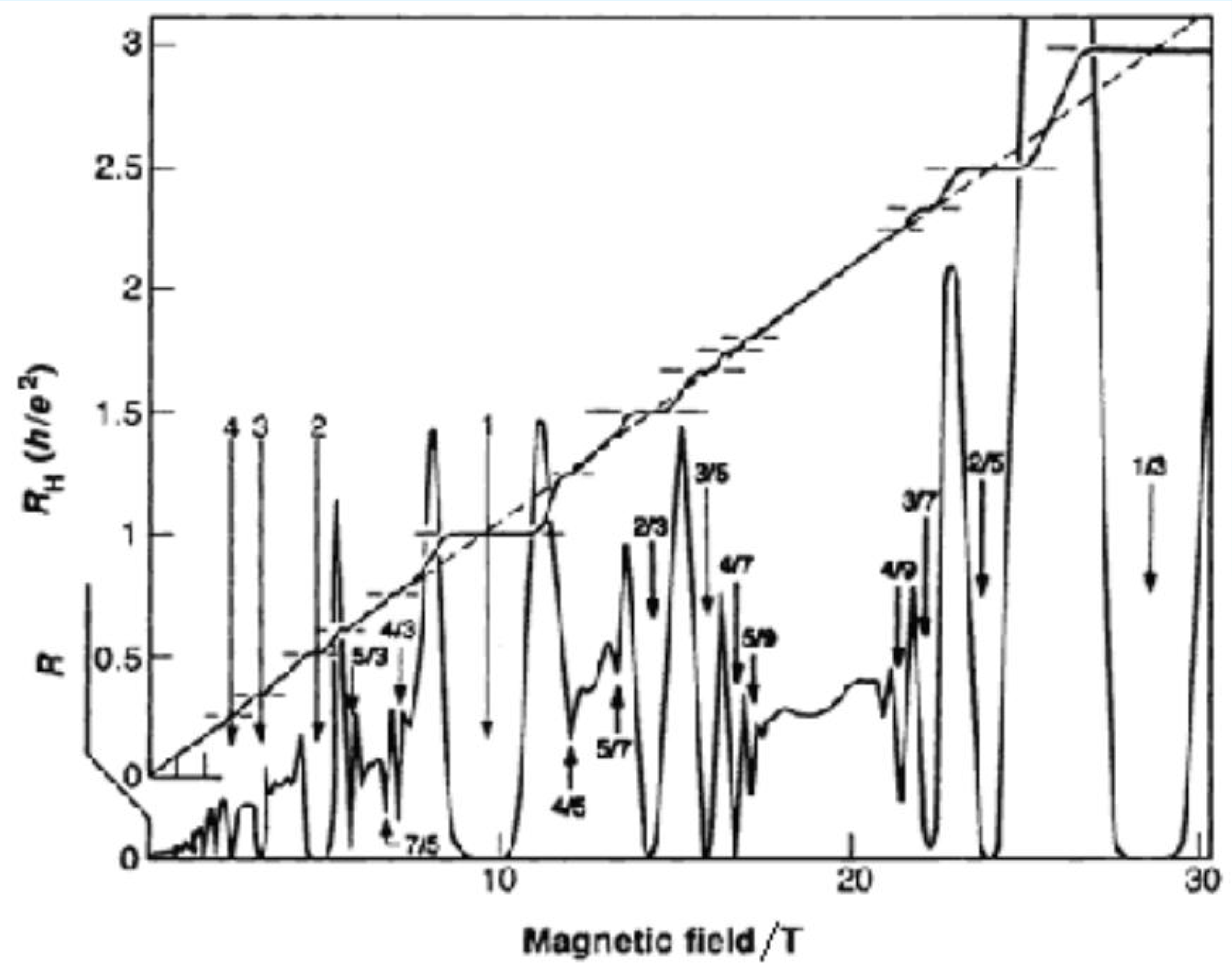
$$U = R_H \frac{IB}{d} = IR_H^*$$

$$R_H^* = \frac{B}{nqd}$$

——霍耳电阻



1980年，克劳斯·冯·克里策金（Klaus Von Klitzing）发现在低温和强磁场下，霍耳常数是量子化的，$R_H=h/ie^2$，i =1，2，3，…，称为整数量耳霍尔效应。获1985年度的诺贝尔奖 。



AT&T的D. Tsui、H. Stormer和A.Gossard发现，随着磁场增强，在 i =1/3, 1/5, 1/7, 等处，霍耳常数出现了新的台阶，称为分数量子霍耳效应。获1998年度诺贝尔物理学奖。

§8-6 磁场对载流导线的作用

一、 安培定律

安培在研究电流与电流之间的相互作用力时发现：

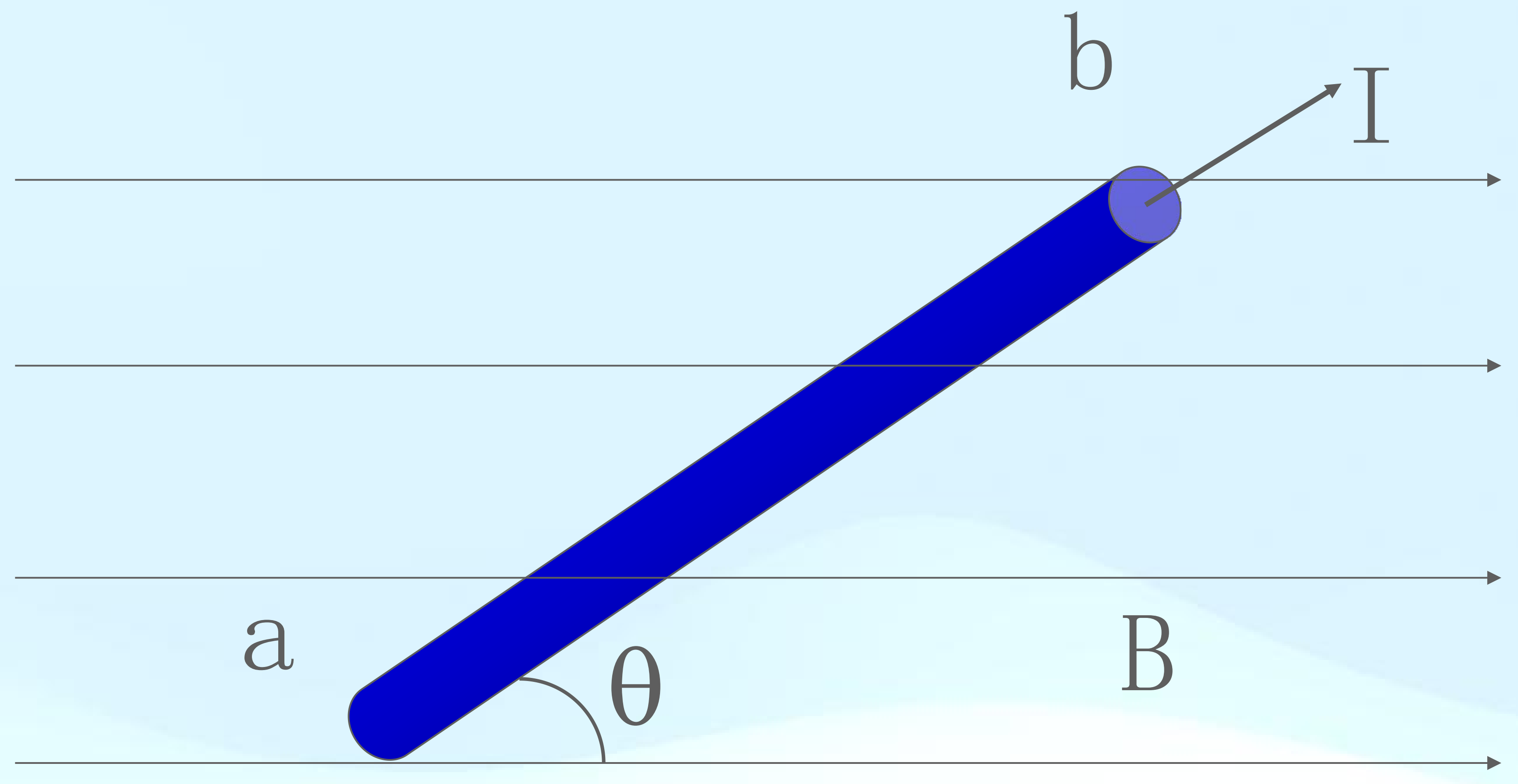
安培定律：电流元Idl在磁场中所受的作用力为

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

磁场对载流导线的作用力：

$$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$ 称为安培力

例如长为L的载流直导线在均匀磁场B中所受的力



$$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I(\int_L \mathrm{d}\vec{l}) \times \vec{B}$$

$$= I\vec{L}_{ab} \times \vec{B}$$

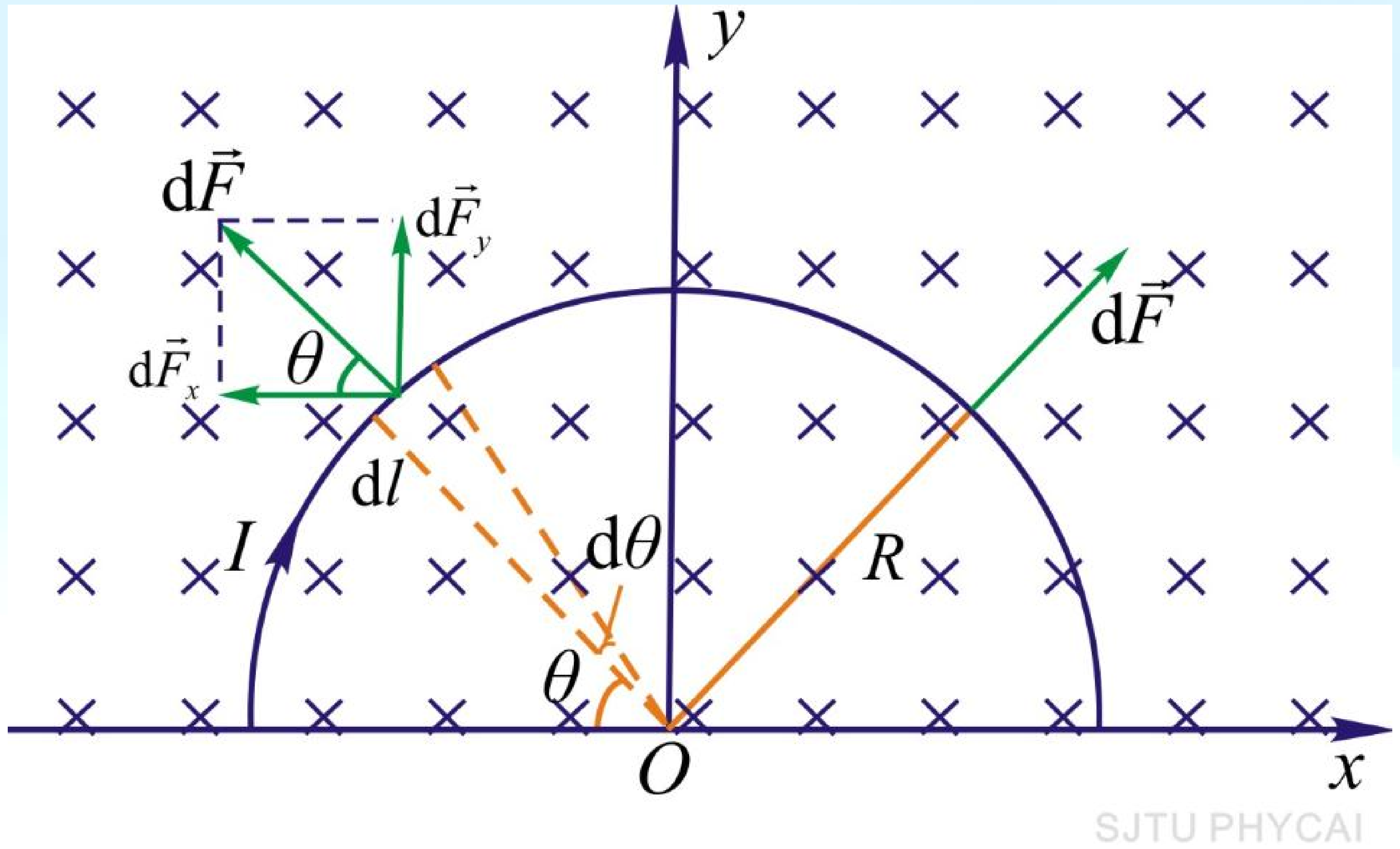
大小： $F = ILB\sin\theta$ 方向： $\otimes$

任意闭合导线在均匀磁场B中所受的力

$$\vec{F} = \oint I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I(\oint \mathrm{d}\vec{l}) \times \vec{B} = 0$$

例8-9　一段半圆形的导线（I，R）放在均匀磁场B中，磁场与导线平面垂直,求磁场作用在半圆形导线上的力。

解：导线上的电流元受到的力dF，
分解成dF_x和dF_y



由于对称性

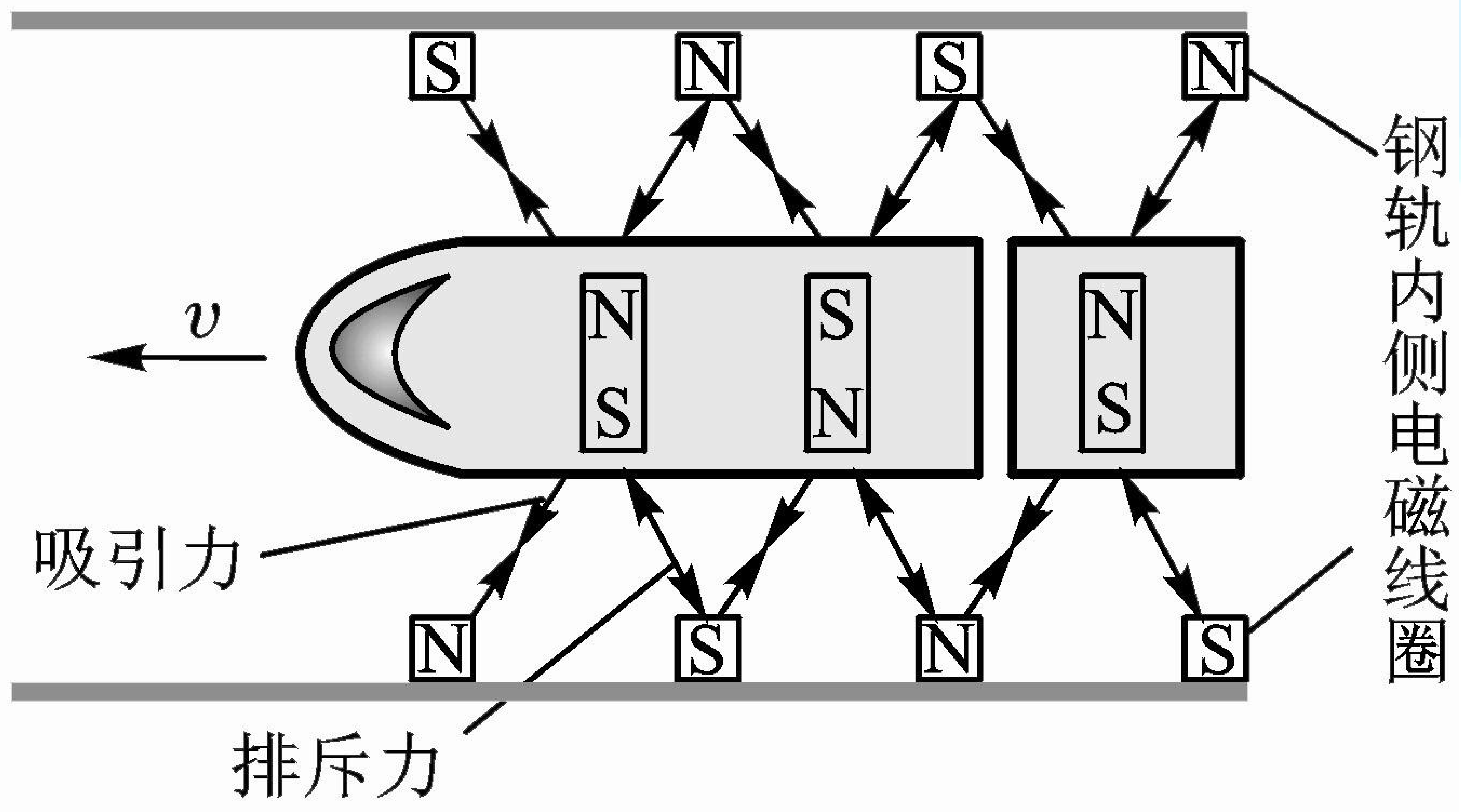
$$\int_L \mathrm{d}F_x = 0$$

只在y方向受到力

$$F = \int_L \mathrm{d}F_y = \int_L BI\mathrm{d}l\sin\theta \qquad \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \quad F = \int_0^{\pi} BIR\mathrm{d}\theta\sin\theta = 2BIR$$

安培力的应用：
磁悬浮列车的电磁驱动力



二、磁场对载流线圈的作用

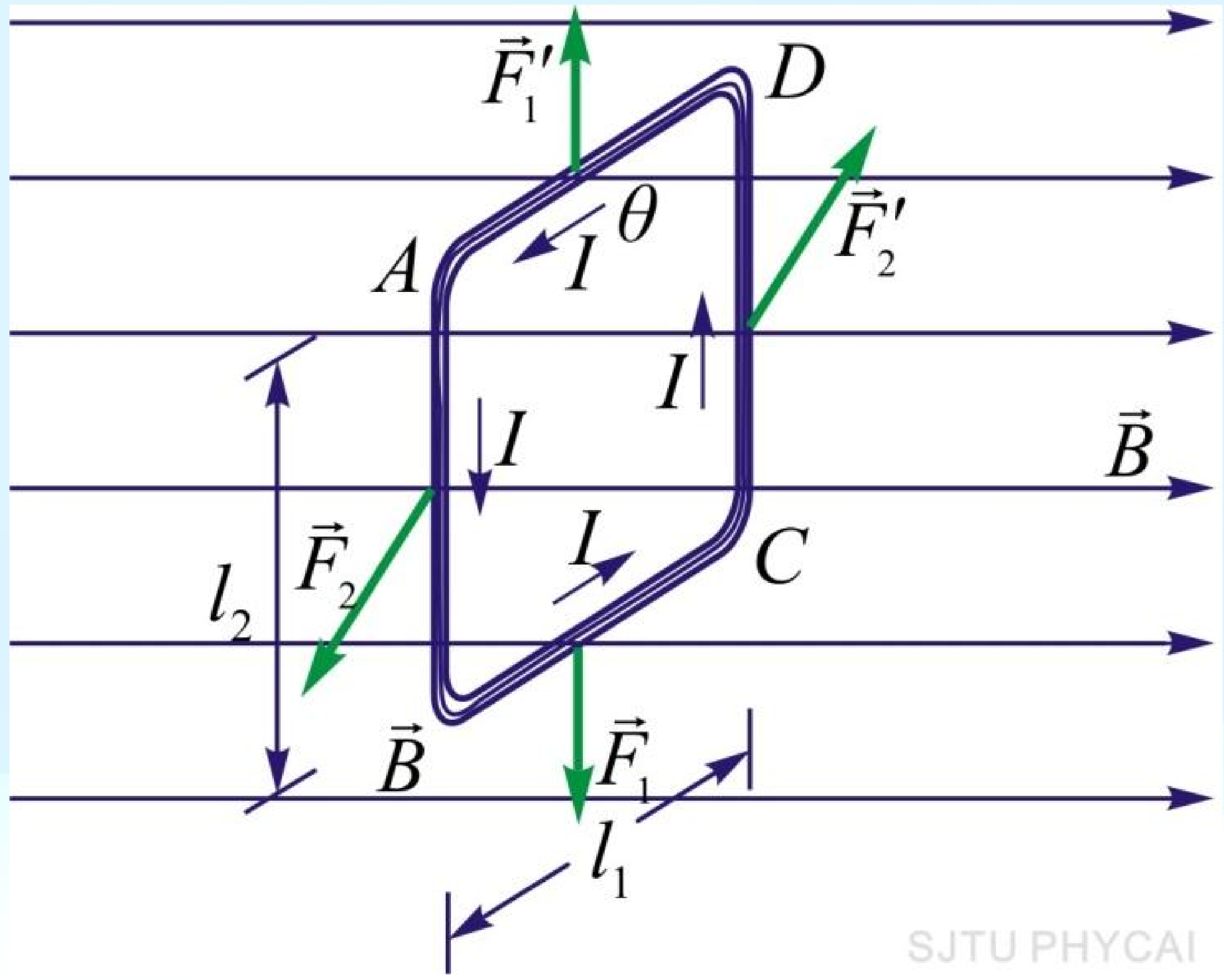
匀强磁场中的矩形载流线圈：

$$F_1 = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin\theta$$

$$F_1' = F_1$$ （ 抵消 ）

$$F_2 = F_2' = BIl_2$$

形成一力偶。

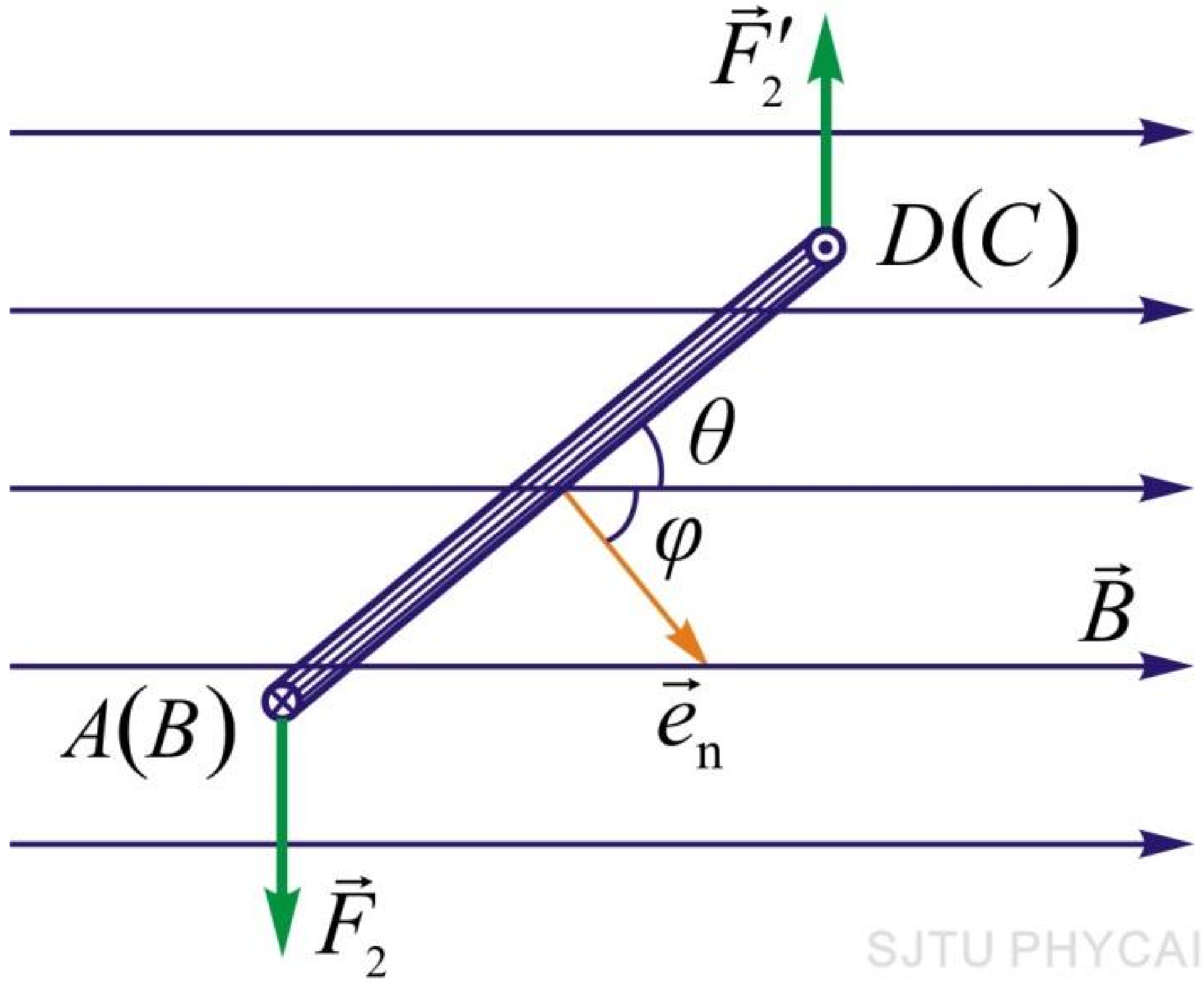


磁力矩：

$$M = F_2 l_1 \cos\theta = F_2 l_1 \sin\varphi$$

$$= BIl_2 l_1 \sin\varphi = BIS \sin\varphi$$

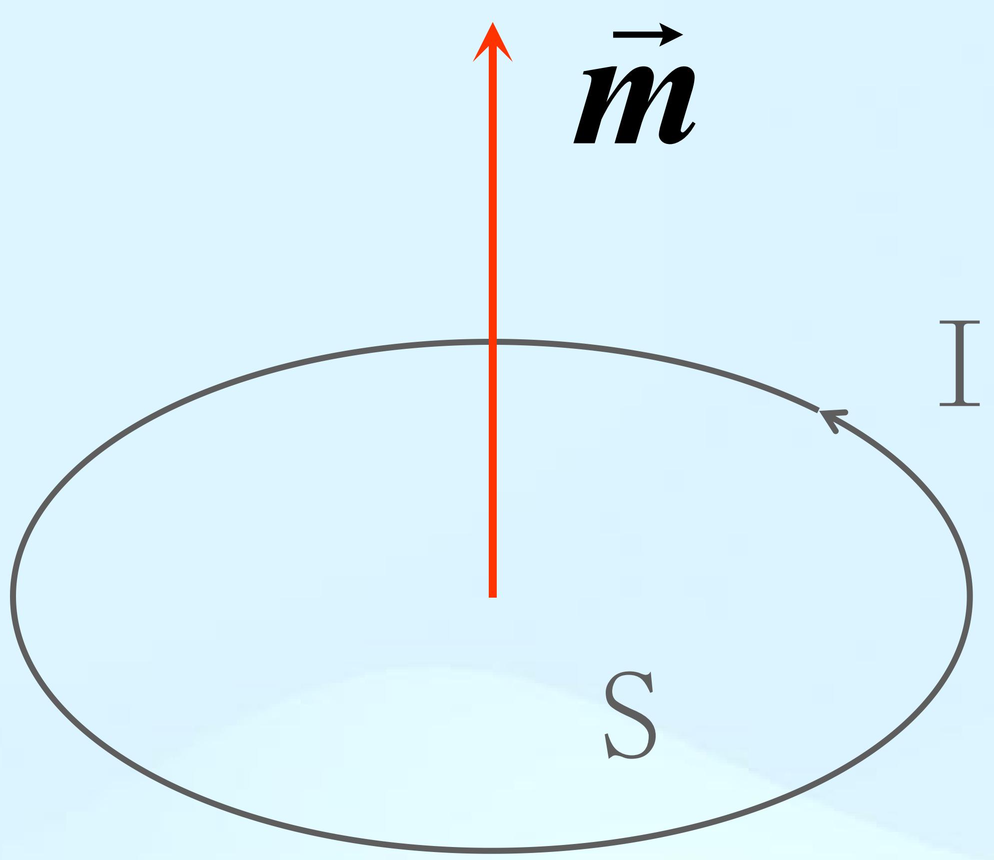
（其中 $S=l_1 l_2$ ）



N匝线圈的磁力矩：

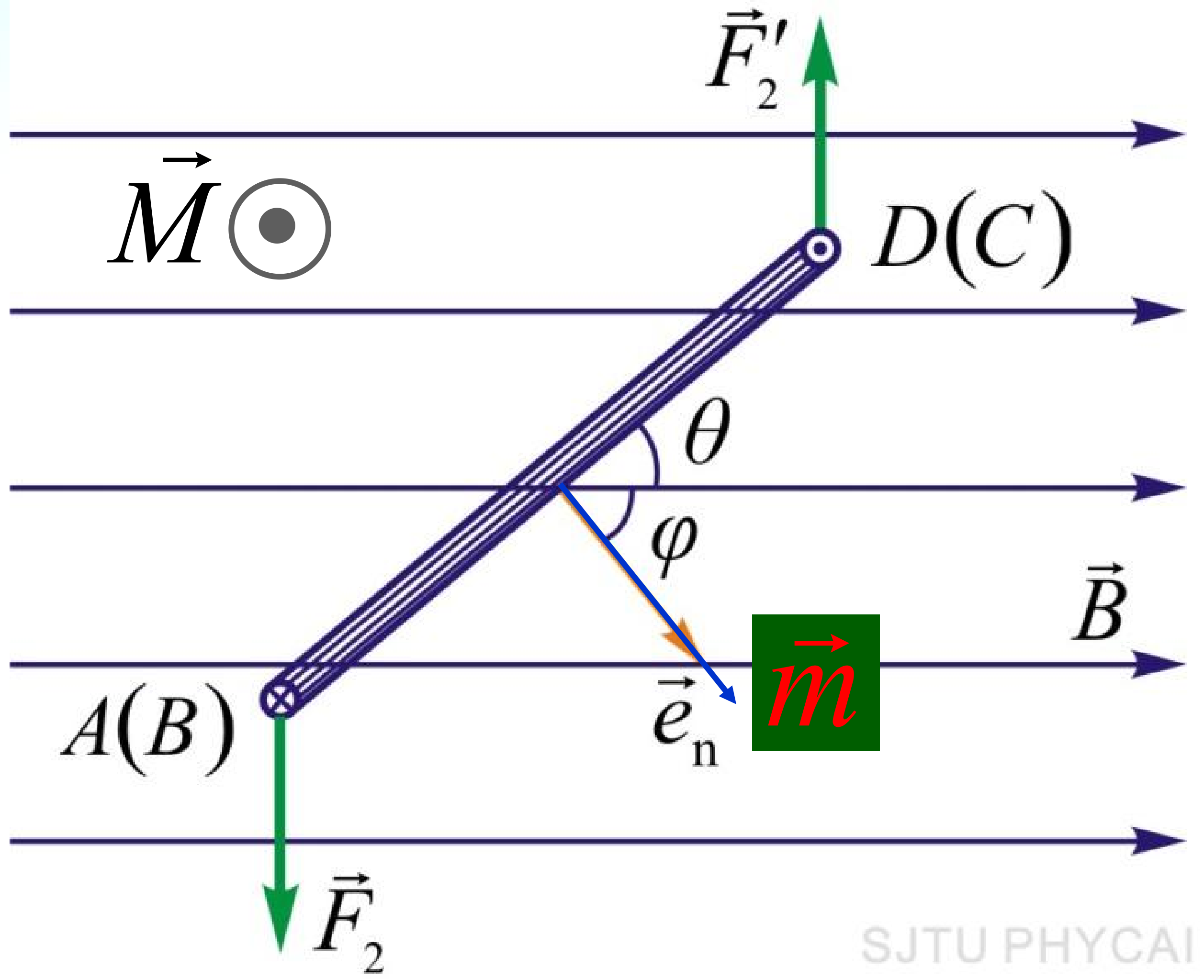
$$M = NBIS\sin\varphi$$

磁矩 $\vec{m} = NIS\vec{e}_{\mathrm{n}}$



载流线圈在磁场中受到的磁力矩：

$$M = mB\sin\varphi$$



磁力矩 $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$

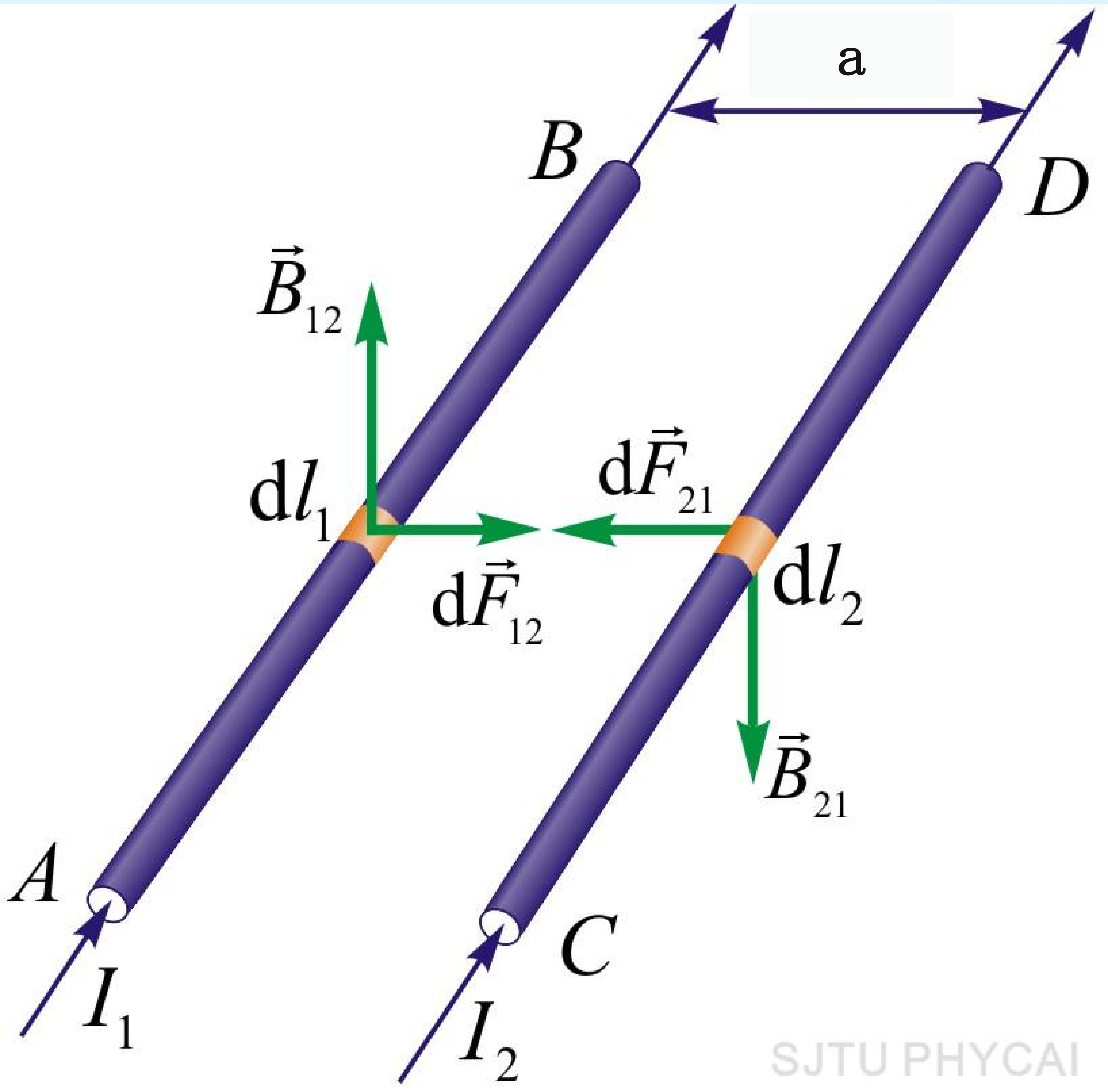
公式适用于任意形状的平面载流线圈。

三、电流单位“安培”的定义

平行电流间的相互作用力：

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$$

$$\mathrm{d}F_{12} = I_1 B_2 \mathrm{d}l_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\mathrm{d}l_1$$



单位长度受力：

$$\frac{\mathrm{d}F_{12}}{\mathrm{d}l_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = \frac{\mathrm{d}F_{21}}{\mathrm{d}l_2}$$

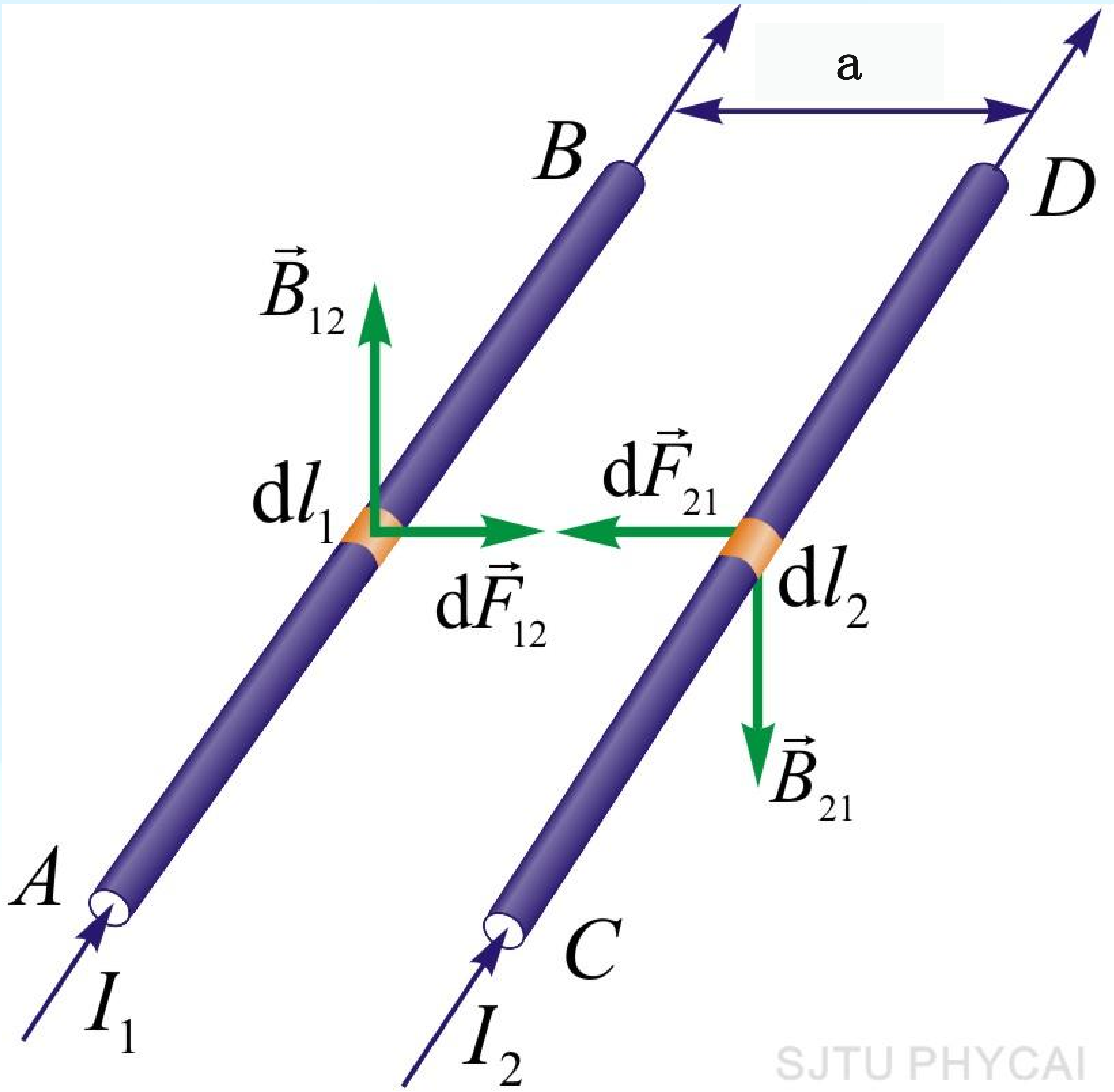
“安培”的定义：

设：$I_1=I_2=1A$，$a=1m$

单位长度导线受到的磁力：

$$\frac{dF}{dl}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times1\times1}{2\pi\times1}$$

$$=2\times10^{-7}(N\cdot m^{-1})$$



两平行长直导线相距1m，通过大小相等的电流，如果这时它们之间单位长度导线受到的磁场力正好是2×10^{-7} N/m时，就把两导线中所通过的电流定义为“1安培”。

四、磁场力的功

1. 载流导线在磁场中运动时磁场力所作的功

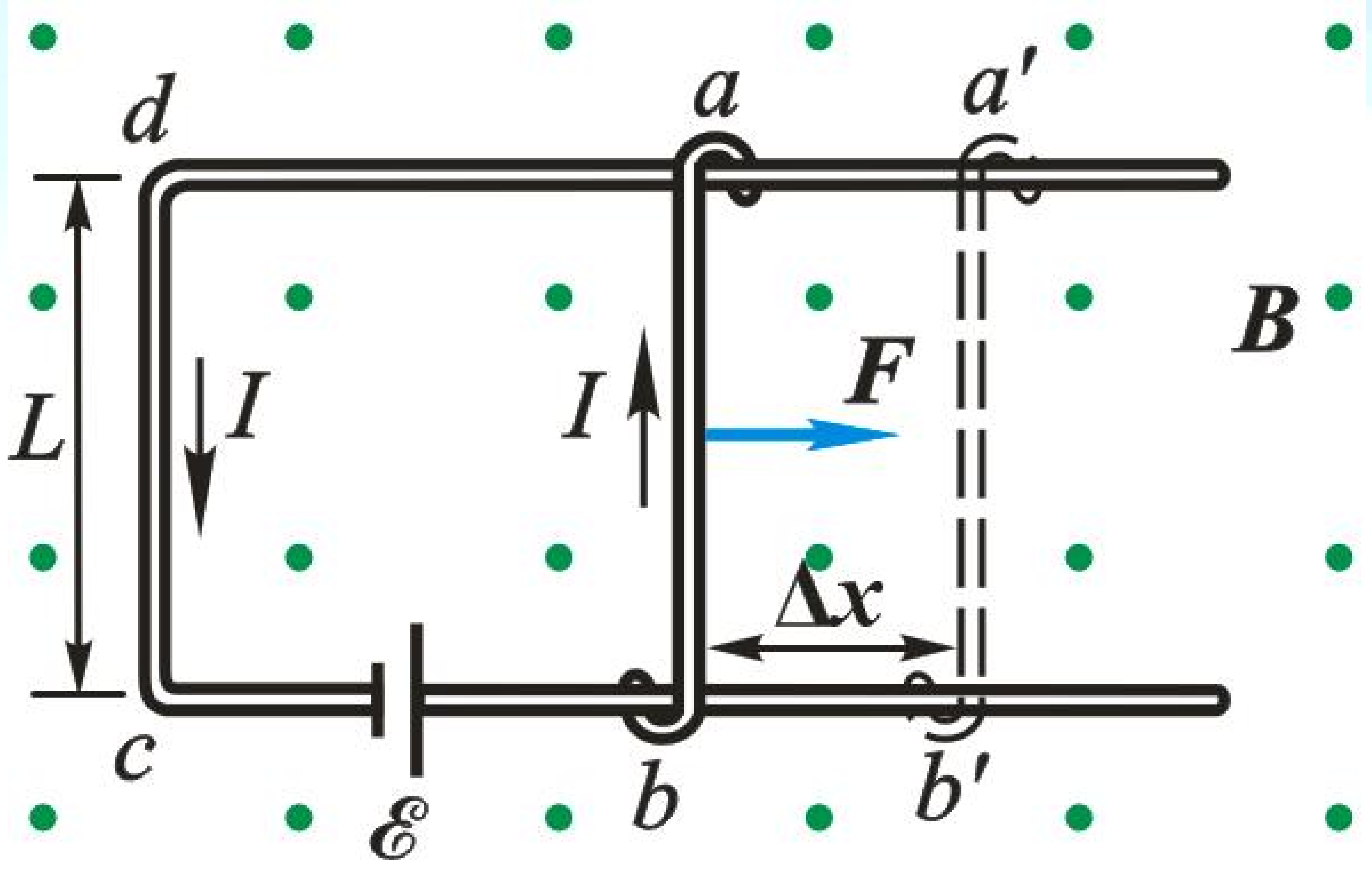
设回路中的电流I保持恒定

磁场力：F=BIL

磁场力的功：

$A=F\Delta x=BIL\Delta x$

其中 $BL\Delta x=B\Delta S=\Delta\Phi$

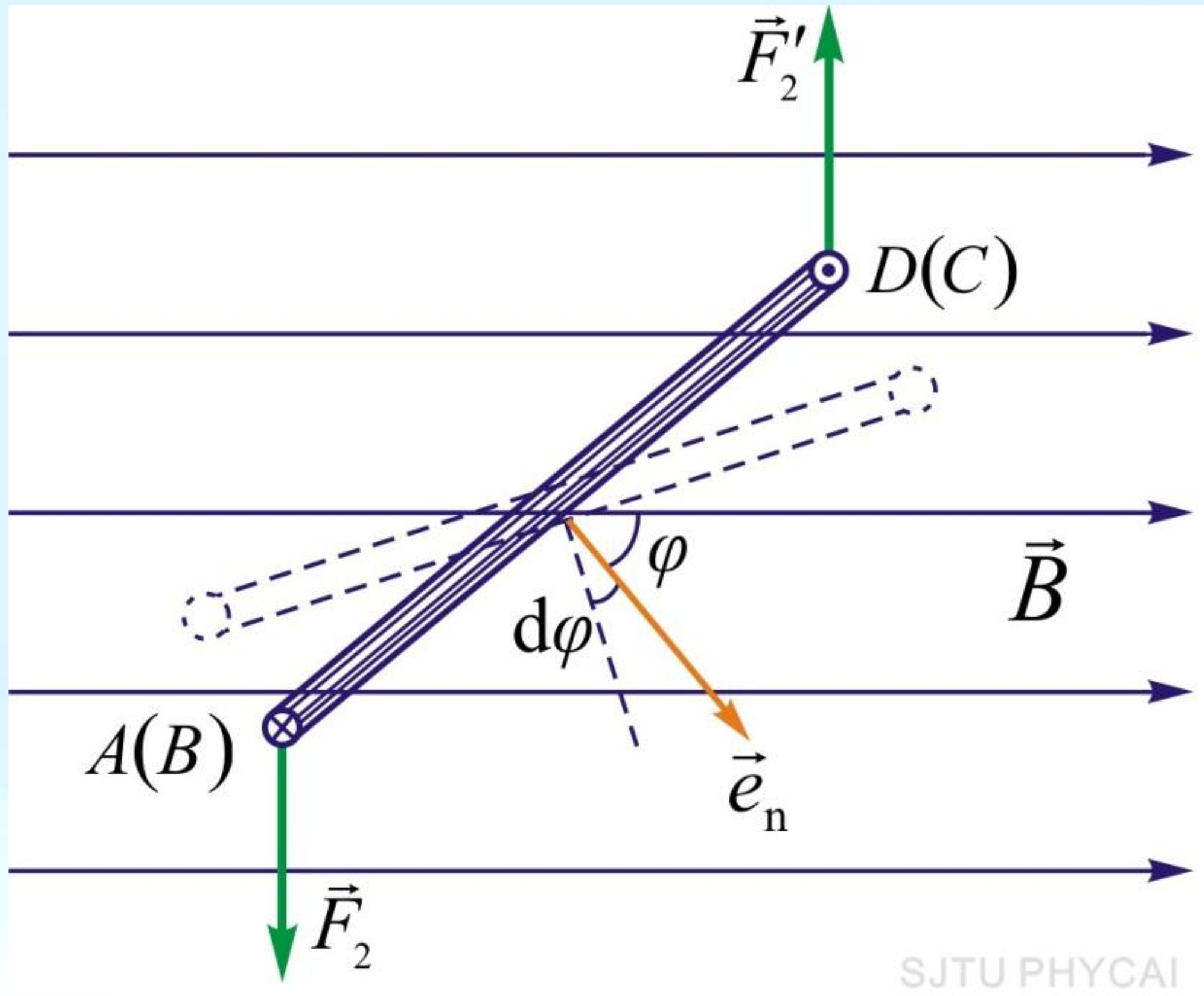


磁力的功：$A=I\Delta\Phi$

2. 载流线圈在磁场内转动时磁场力所作的功

力矩的功：$A=-\int M\cdot \mathrm{d}\varphi$

磁力矩：$M=BIS\sin\varphi$



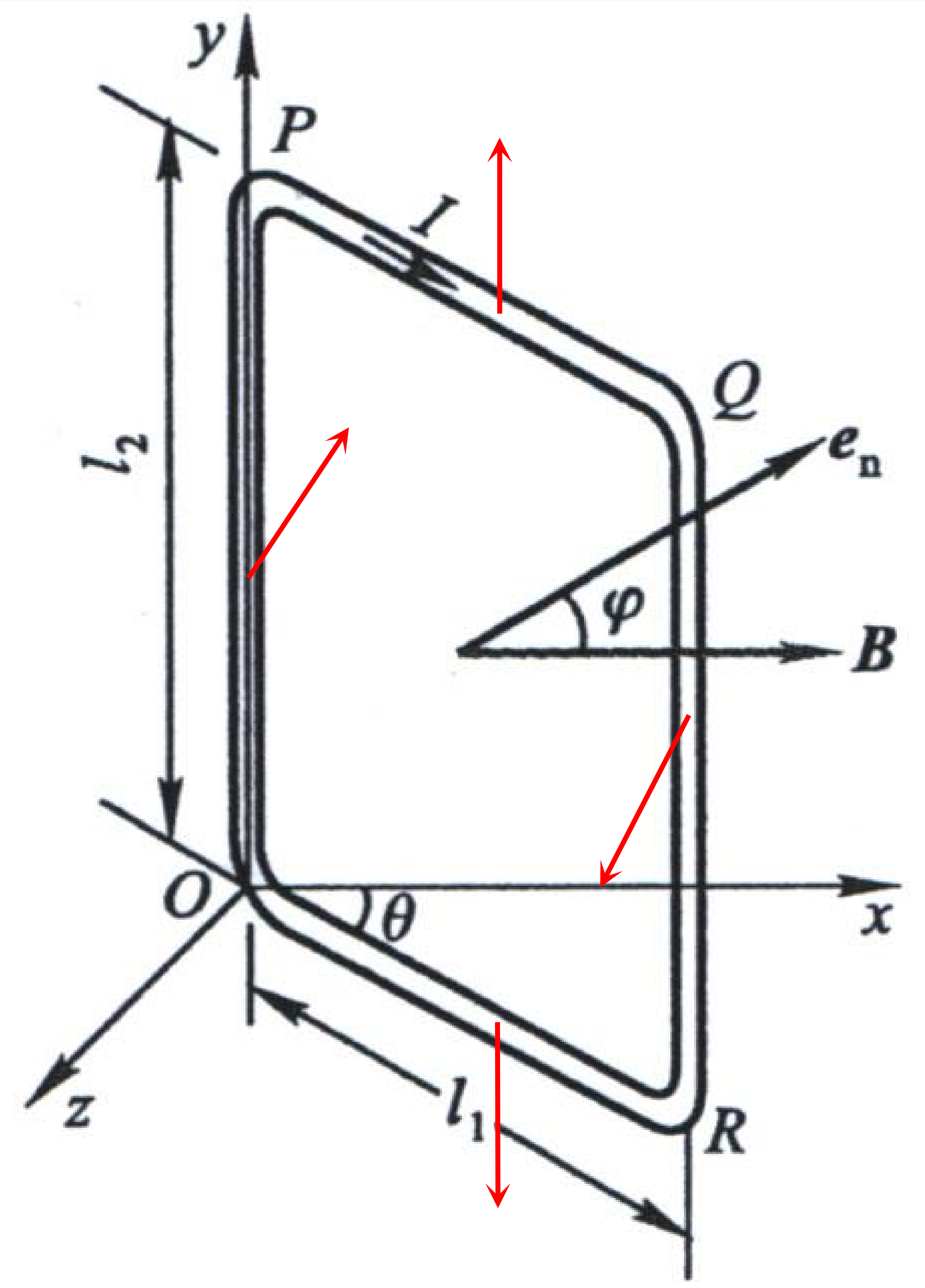
$$A=-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} BIS\sin\varphi \mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I\mathrm{d}(BS\cos\varphi)=\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I\mathrm{d}\Phi$$

$$=I\Delta\Phi=I(\Phi_2-\Phi_1)$$

$A=I\Delta\Phi$ 也适合于非匀强磁场中的电流不变线圈

例8-10 如图在均匀磁场中的长方形线圈可绕y轴转动，（1）如果θ=30°，求线圈每边所受的安培力及线圈所受磁力矩；（2）当线圈由此位置转至平衡位置时，求磁场力的功。



解：（1）根据 $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$

PQ和RO段受到的力

$$F_{PQ} = -F_{RO} = IBl_1 \sin 30^\circ = \frac{IBl_1}{2}$$

QR和OP段受到的力

$$F_{QR} = -F_{OP} = IBl_2 \sin 90^\circ = IBl_2$$

$$M = F_{QR} l_1 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} IBl_2 l_1$$

也可利用磁力矩公式得

$$M = BIS\sin\varphi = BIl_1l_2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}BIl_1l_2$$

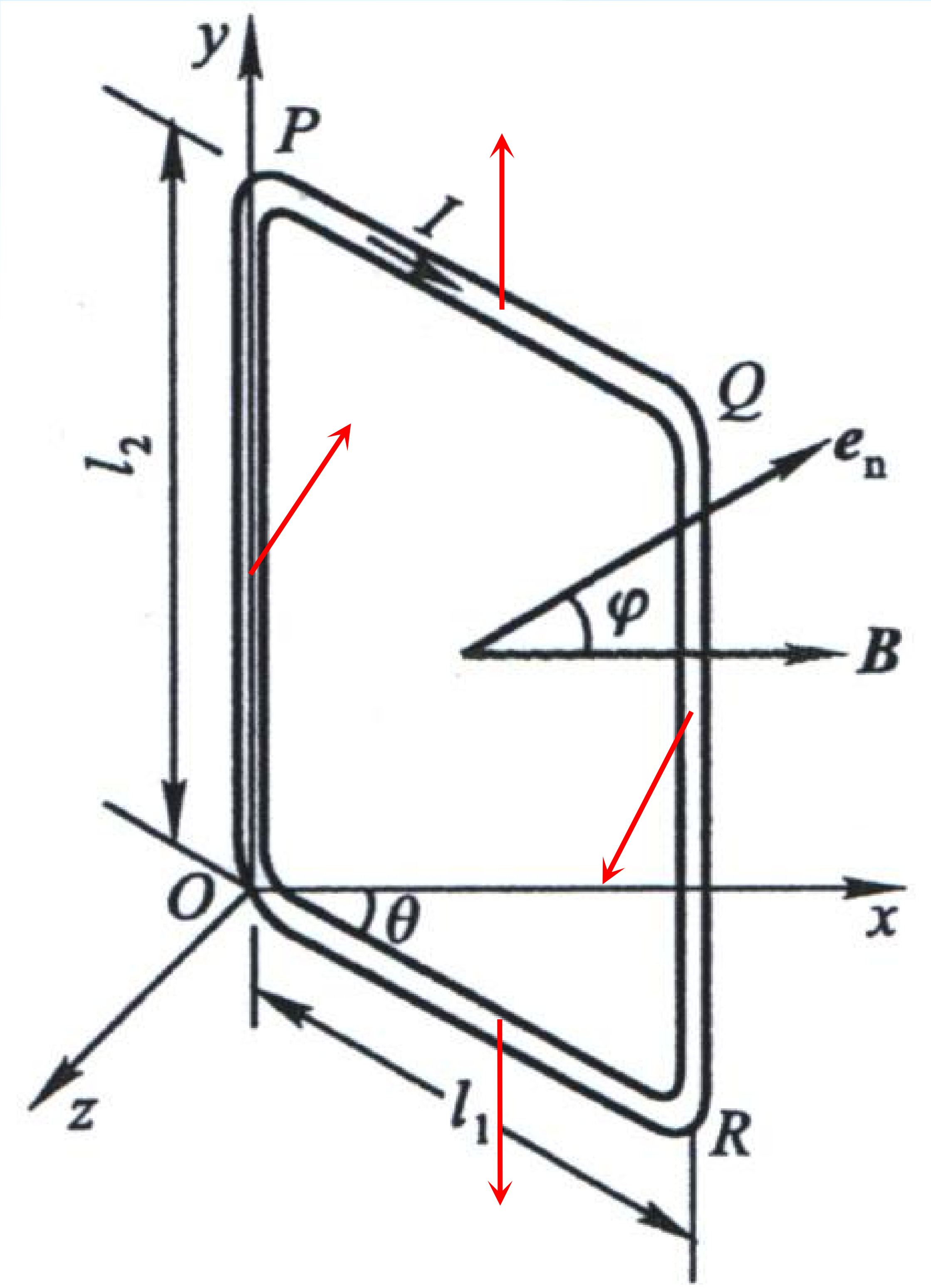
（2）线圈在θ=30°时，磁通量

$$\Phi_1 = BS\cos\varphi = \frac{1}{2}Bl_1l_2$$

线圈转至平衡位置时，磁通量

$$\Phi_2 = BS = Bl_1l_2$$

$$\Rightarrow A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{IBl_1l_2}{2}$$



§8-7 磁场中的磁介质

一、磁介质

磁　化：物质具有磁性的过程。

磁介质：一切能够被磁化的实物。

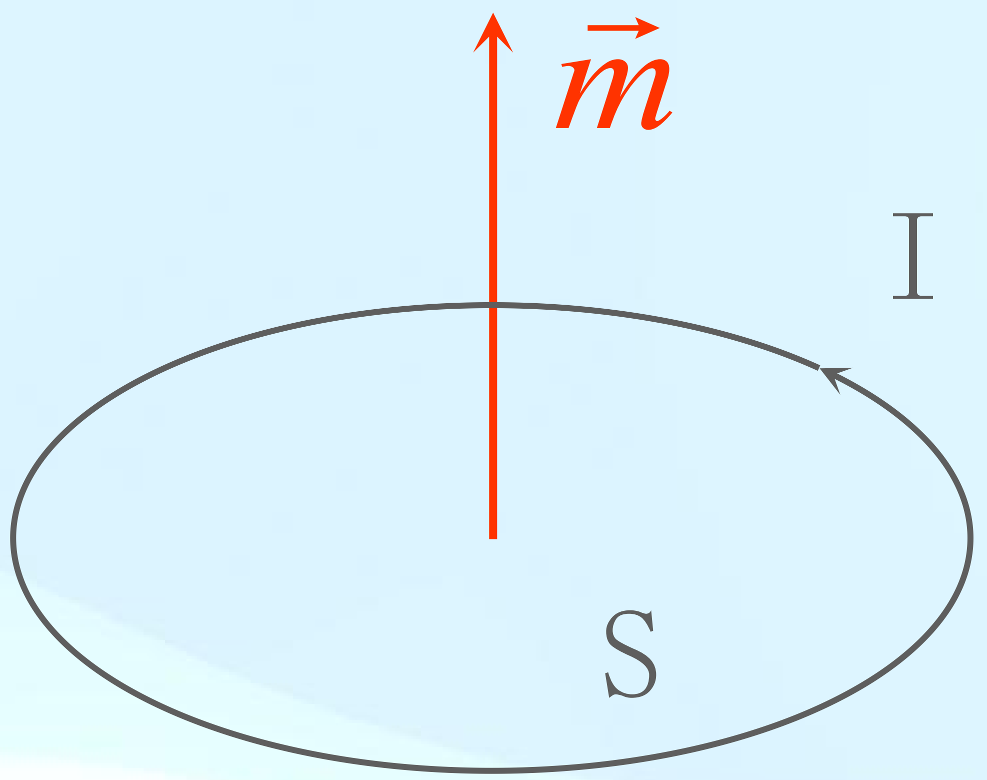
真空中： $\vec{B}_0$

磁介质中：$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

$$\begin{cases} B > B_0 & \text{顺磁质（锰、铬、铂、氧、氮等）} \\ B < B_0 & \text{抗磁质（铜、铋、硫、氢、银等）} \\ B >> B_0 & \text{铁磁质（铁、钴、镍等）} \end{cases}$$

*二、分子电流和分子磁矩

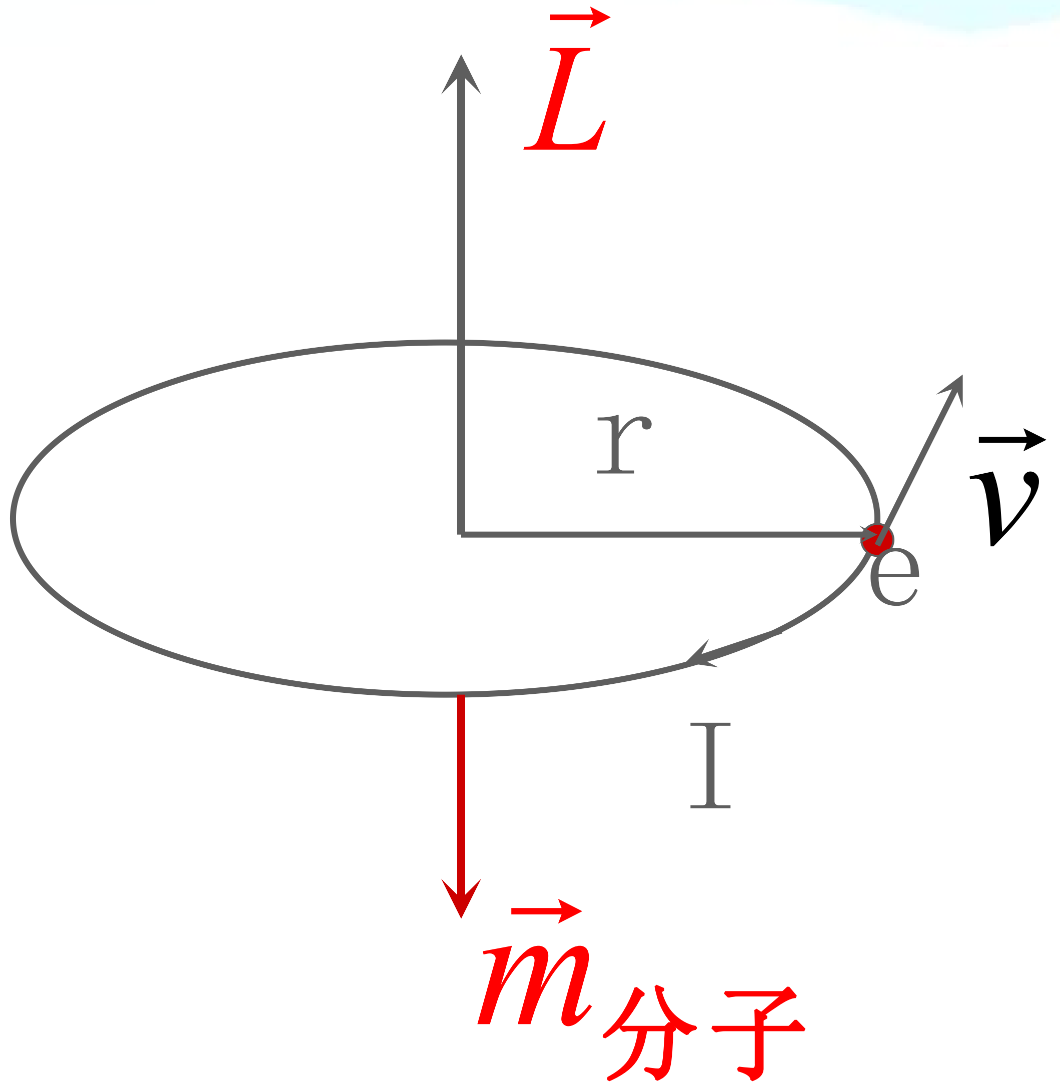
分子电流：分子或原子中各个电子对外界所产生磁效应的总和，可用一个等效的圆电流表示，称为分子电流。



分子磁矩：把分子所具有的磁矩称为分子磁矩，用符号 $\vec{m}_{分子}$ 表示。

外磁场中电子将受到磁力矩作用：

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$



§8-8 有磁介质时的安培环路定理和高斯定理　磁场强度

一、磁化强度

反映磁介质磁化程度(大小与方向)的物理量。

磁化强度:

固有磁矩　　附加磁矩

$$\vec{M} = \frac{(\sum \vec{m}_{分子} + \sum \Delta\vec{m}_{分子})_{\Delta V}}{\Delta V}$$

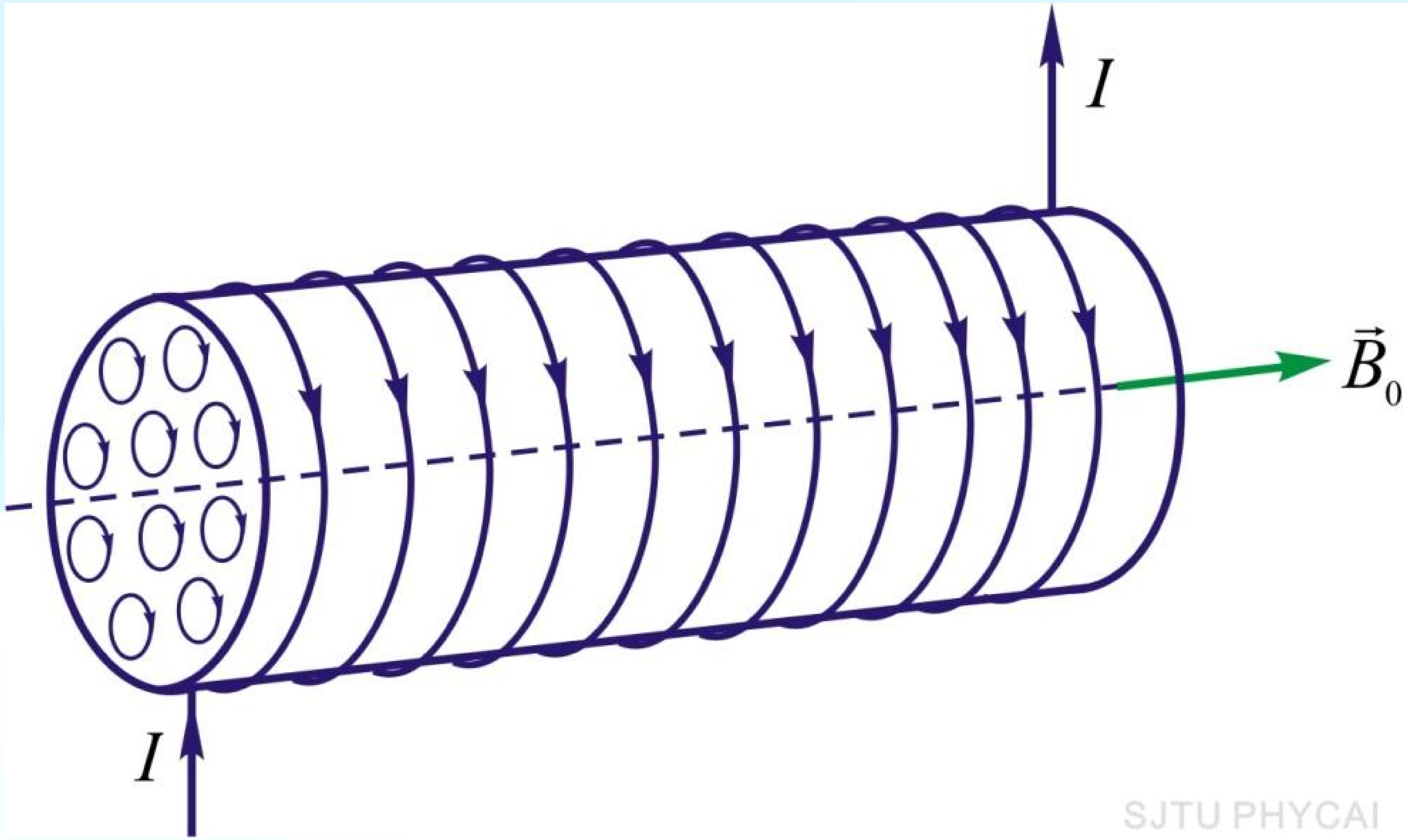
单位: A/m

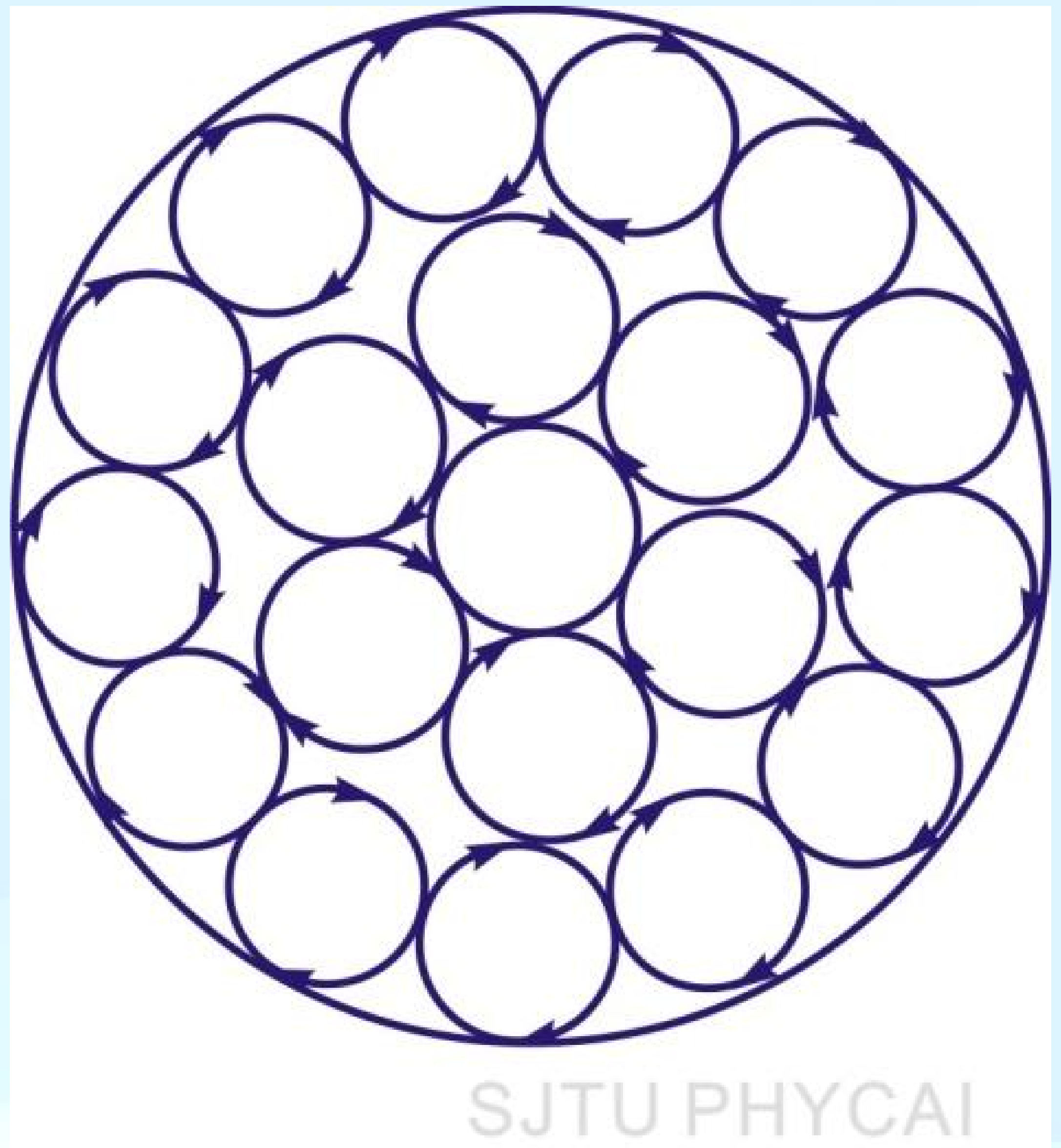
对顺磁质, $\sum \Delta\vec{m}_{分子}$ 可以忽略, $\vec{M} \,//\, \vec{B}_0$ 。

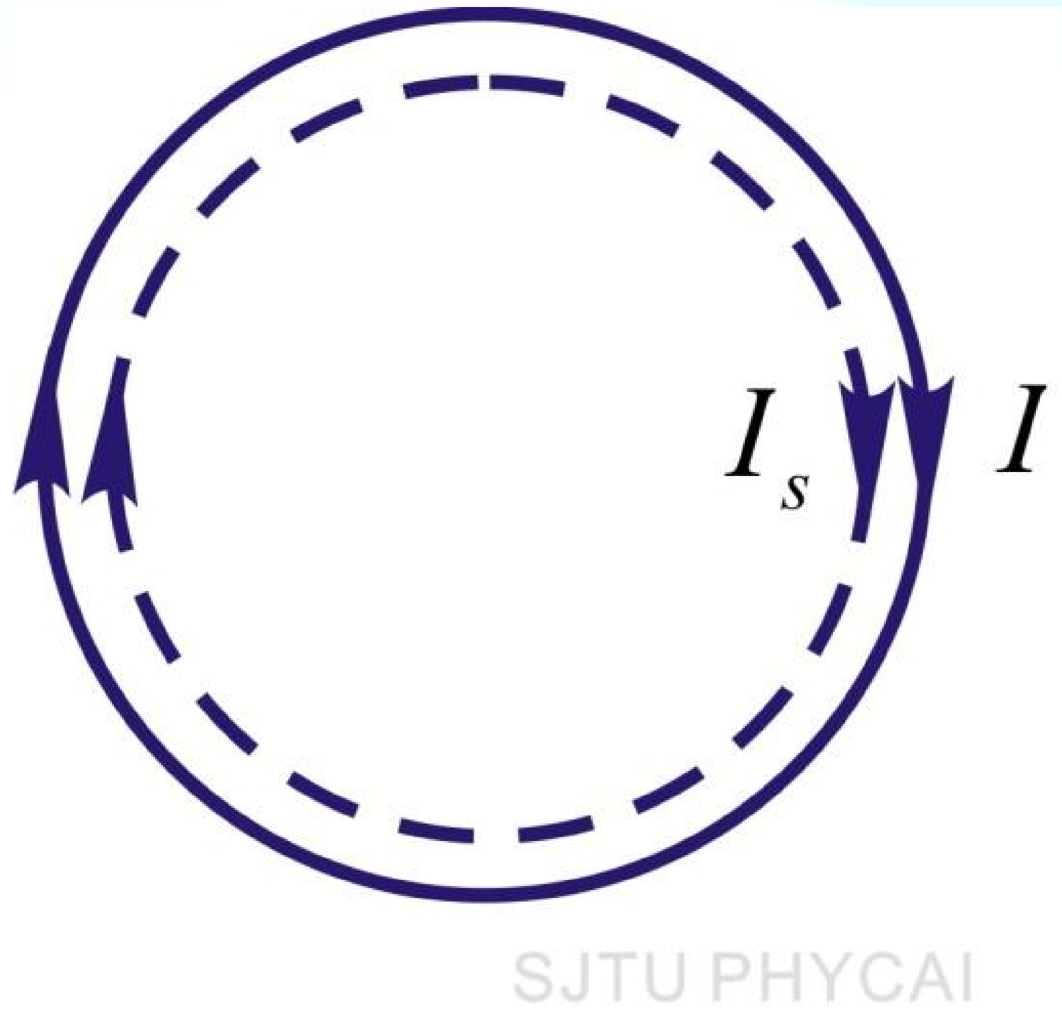
对抗磁质, $\sum \vec{m}_{分子} = 0$, $\vec{M} \,//\, -\vec{B}_0$ 。

对于真空, $\vec{M} = 0$ 。

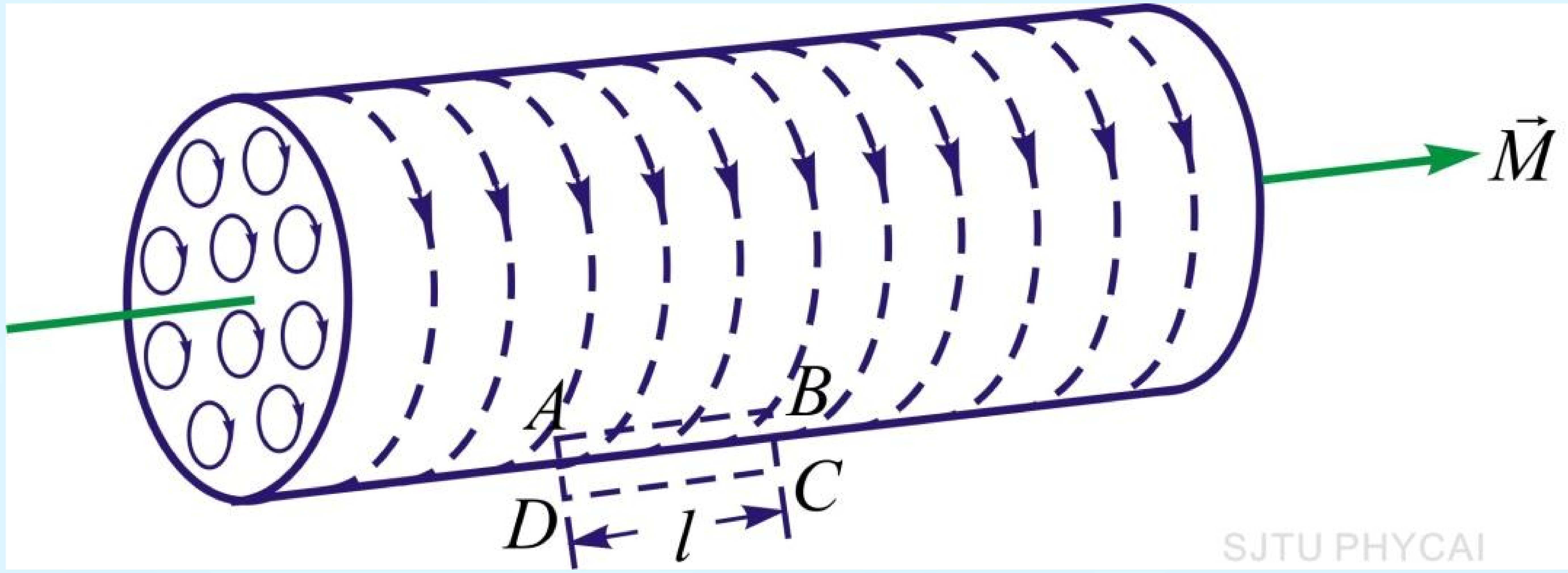
考虑无限长载流螺线管（充满顺磁质）

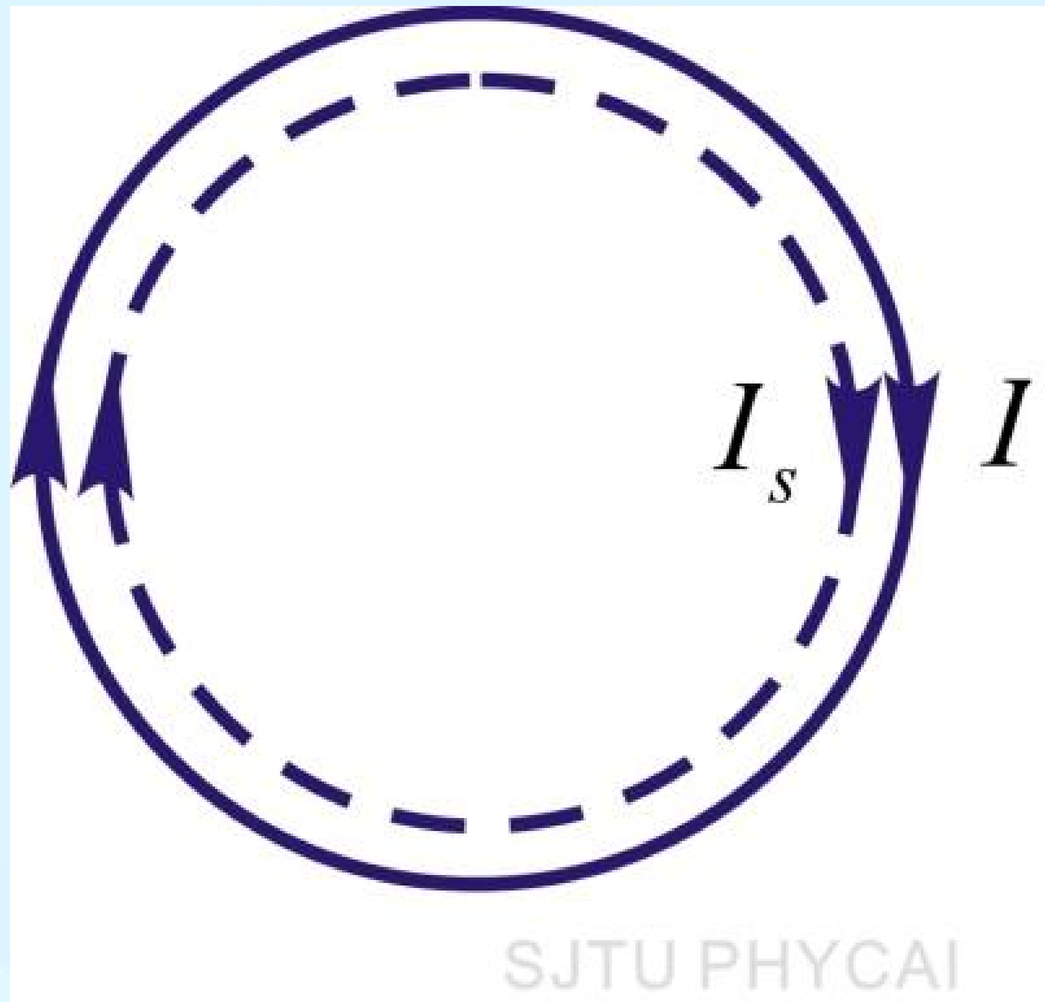






磁化结果：对于各向同性的均匀介质，在介质表面出现一层电流，称为磁化（面）电流I_s。



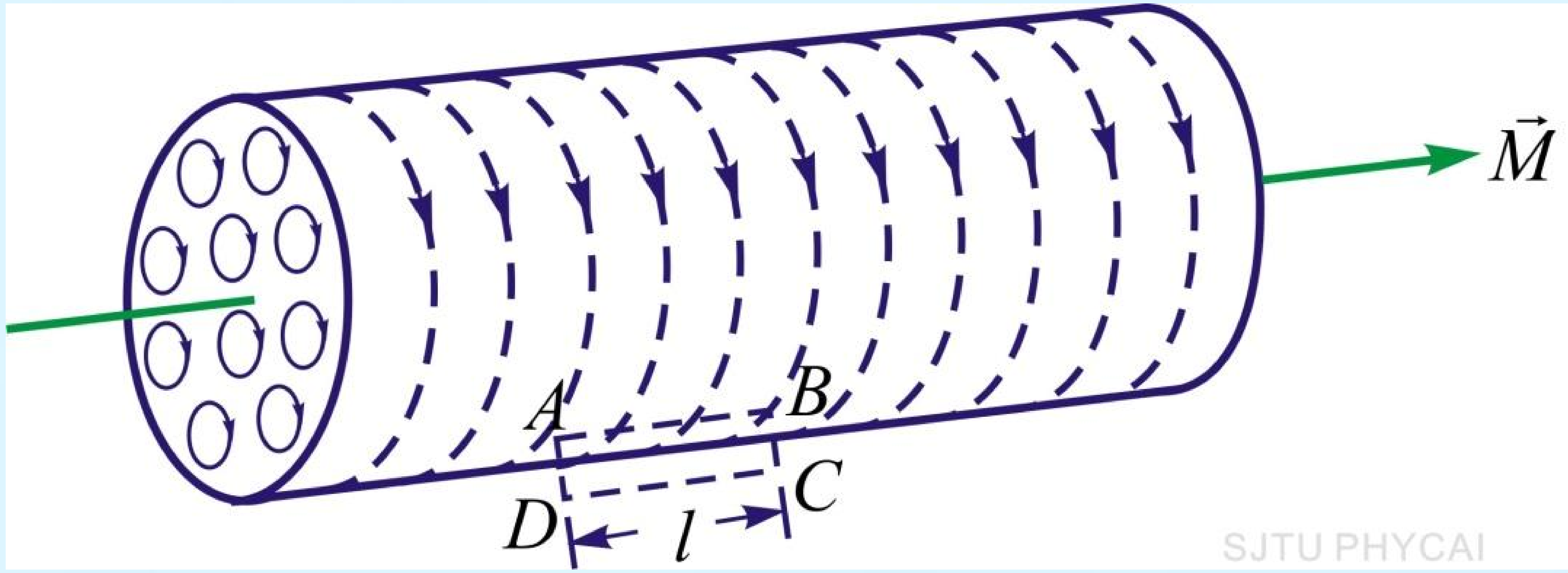


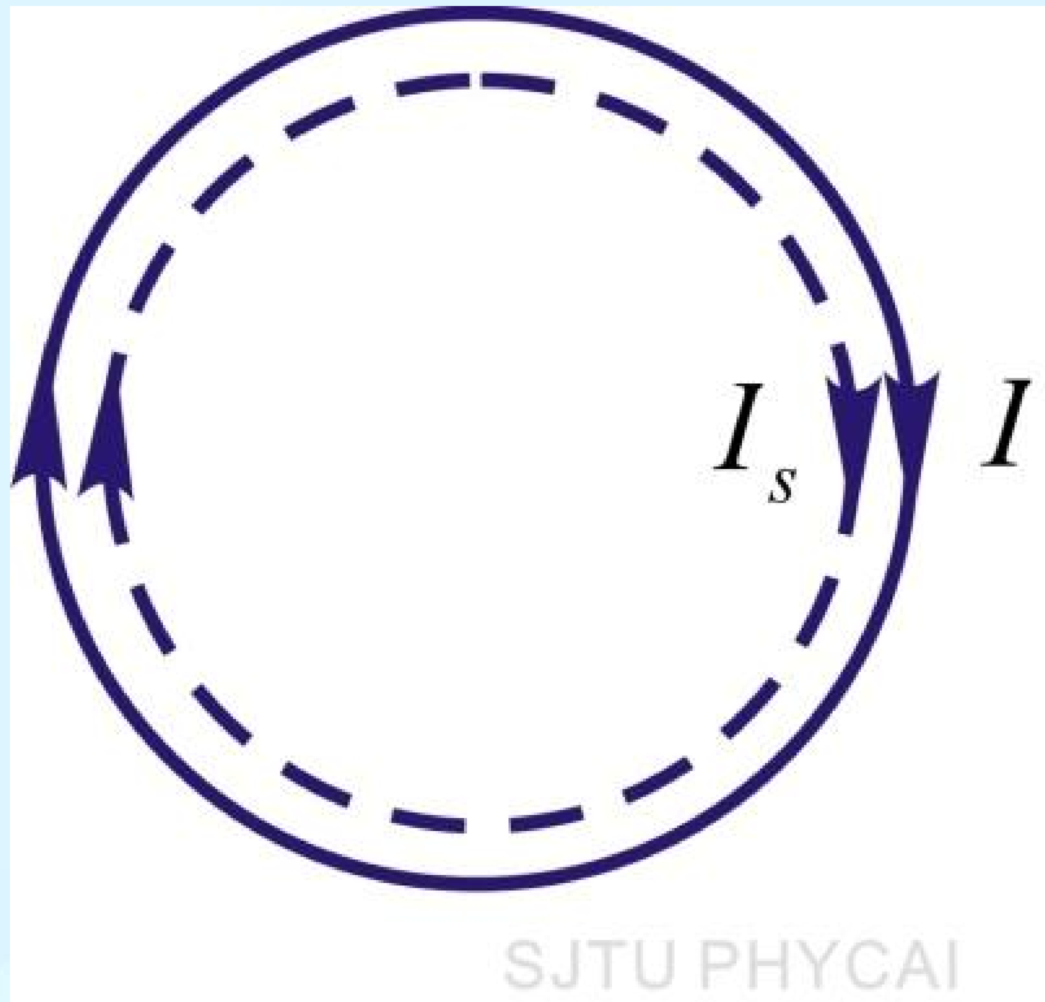
设介质表面沿轴线方向单位长度上的磁化电流为α_s（磁化面电流的线密度），则长为l的一段介质上的磁化电流为

$$I_s = \alpha_s l$$

$$\Rightarrow \quad \sum \vec{m}_{分子} = I_s \cdot S = \alpha_s S l$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{\left|\sum \vec{m}_{分子}\right|}{\Delta V} = \frac{\alpha_s S l}{S l} = \alpha_s$$





如图取长方形闭合回路ABCD，长度为l：

$$\oint \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = M\cdot \overline{AB} = Ml$$

$$M = \alpha_s \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \alpha_s l = I_s$$

普适关系

二、有磁介质时的安培环路定理

无磁介质时 $$\oint_L \vec{B}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{(L内)} I_0$$

有磁介质时 $$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i + \mu_0 I_s$$

I_i :传导电流　　I_s :磁化电流

$$\because \ I_s = \oint \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \ \oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \left(\sum I_i + \oint \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

或 $$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum I_i$$

定义：

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$$ 磁场强度

$$\oint\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum I_i$$

$$\Rightarrow \oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum I_i$$ 有磁介质时的安培环路定理

讨论

1. 磁场强度矢量的环流只和传导电流I有关，而在形式上与磁介质的磁性无关。
2. 利用有磁介质时的安培环路定理可计算具有高度对称性分布的磁场。

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

实验证明：对于各向同性的介质，

$$\vec{M} = \chi_{\mathrm{m}} \vec{H}$$

χ_{m}称为磁介质的磁化率（纯数）

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_{\mathrm{m}})\vec{H}$$

$\mu_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_{\mathrm{m}}$ 相对磁导率

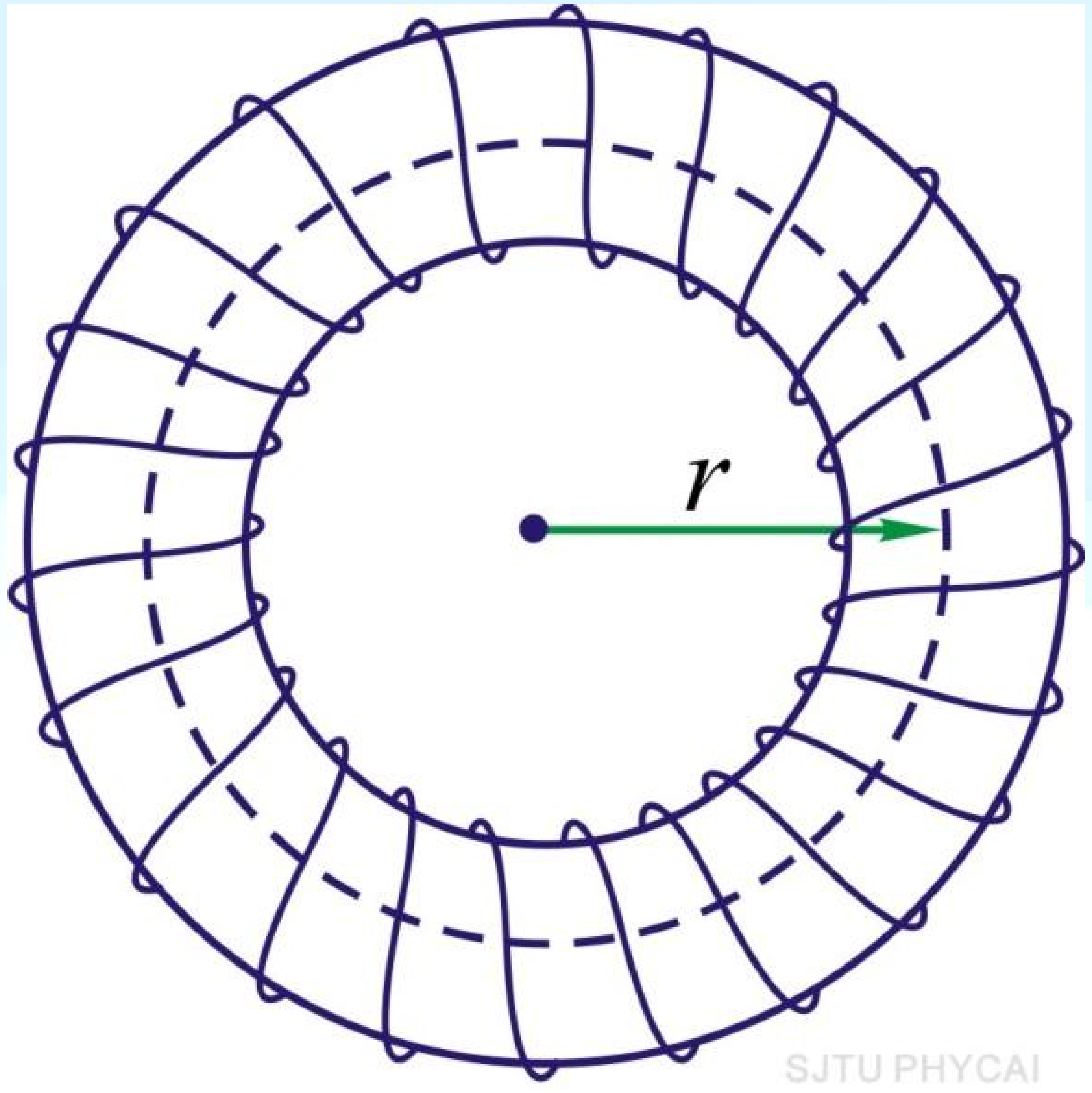
$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}} \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$\mu = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}}$ 磁导率

$\mu_{\mathrm{r}} > 1 \quad \chi_{\mathrm{m}} > 0$ 顺磁质

$\mu_{\mathrm{r}} < 1 \quad \chi_{\mathrm{m}} < 0$ 抗磁质

例8-11　均匀密绕的细螺绕环内充满均匀顺磁质，已知螺绕环中的传导电流I，单位长度内匝数n，磁介质的相对磁导率为μ_r。求环内的磁场强度和磁感应强度。



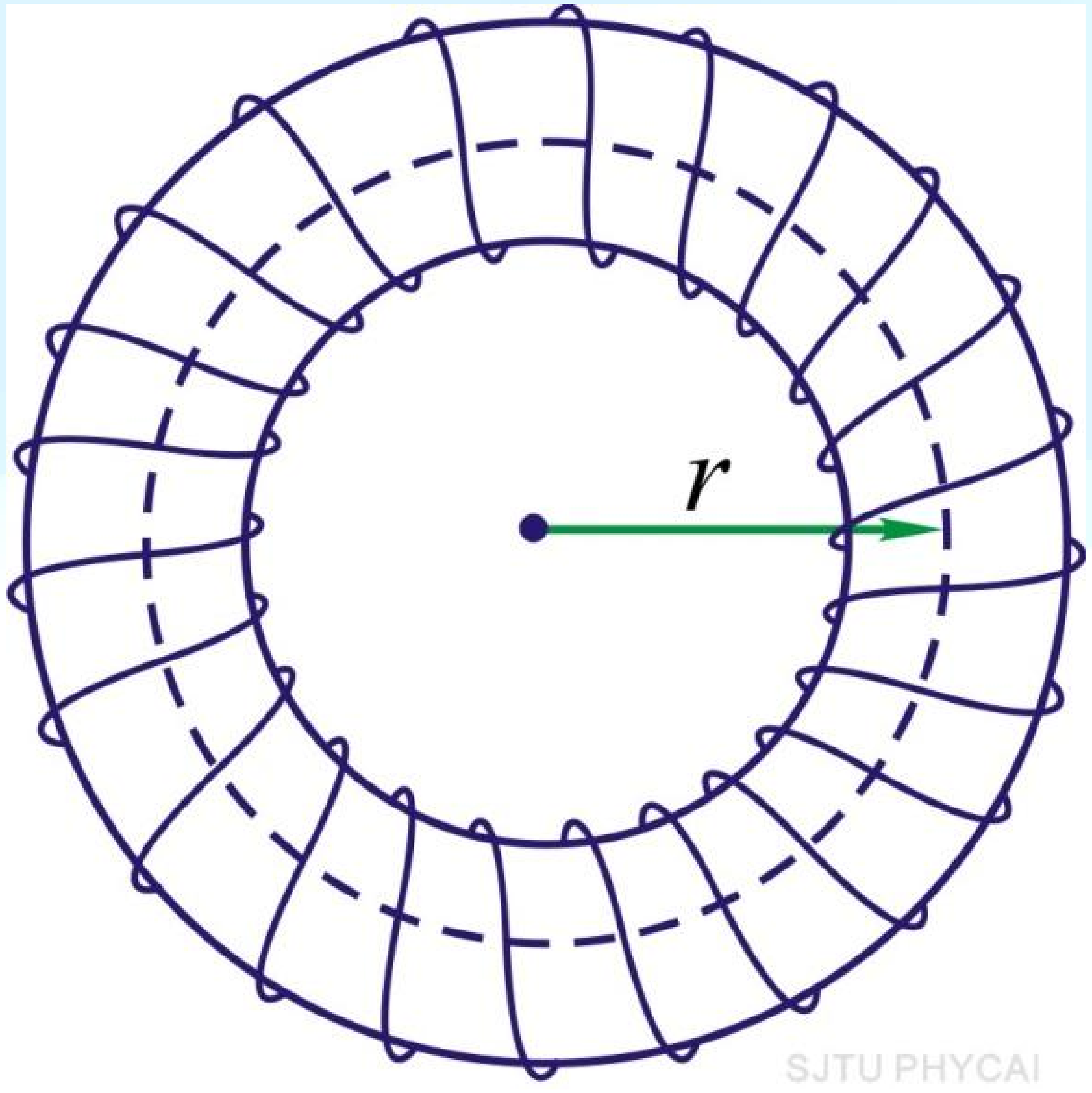
解：　在环内任取一点，过该点作一和环同心、半径为r的圆形回路。

由对称性可知，回路上各点的磁感应强度的大小相等，方向都沿切线。

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = NI \Rightarrow H\,2\pi r = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = nI \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

例8-12　上例中磁介质的磁导率 $\mu = 5.0\times10^{-4}\,\mathrm{Wb/(A\cdot m)}$ 单位长度内的匝数n=1000匝/m，电流I=2.0A。计算环内的磁场强度H，磁感应强度B，磁介质的磁化强度M.



解：

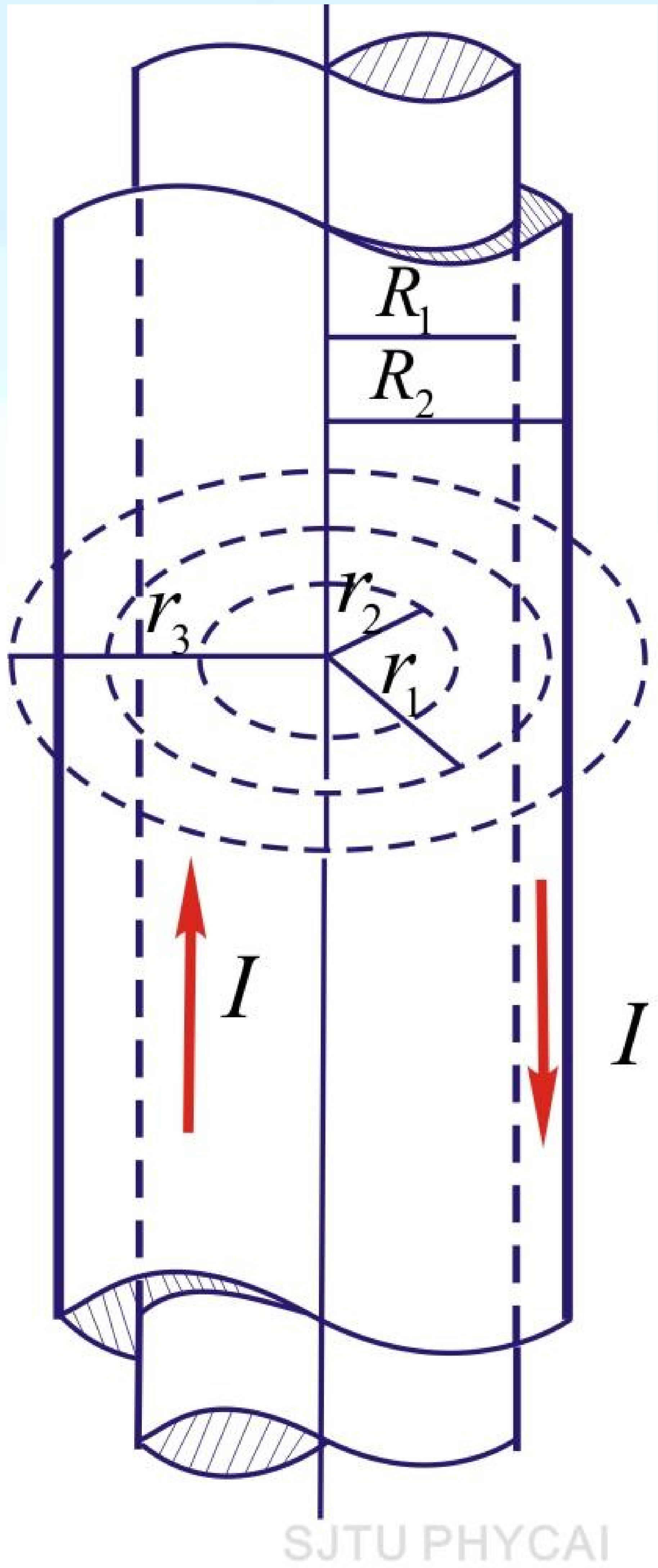
$$H = nI = 2.0\times10^{3}\,\mathrm{A/m}$$

$$B = \mu H = 1\,\mathrm{Wb/m^2}$$

H与B的方向与电流I的方向　构成右手螺旋关系

$$M = \frac{B-\mu_0 H}{\mu_0} = 7.9\times10^{5}\,\mathrm{A/m}$$

例8-13 半径为R_1的无限长圆柱体（导体$\mu \approx \mu_0$）中通有均匀电流I，外面有半径为R_2的无限长同轴圆柱面，两者之间充满着磁导率为μ的均匀磁介质，在圆柱面上通有相反方向的电流I。试求空间各点的磁场。



解： 磁场、磁介质均是轴对称分布。

（1）过圆柱体外圆柱面内一点作半径为r_1 ($R_1 < r_1 < R_2$)的圆为积分回路：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$\Rightarrow H = \frac{I}{2\pi r_1} \qquad B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r_1}$$

（2）过圆柱体内一点作半径为r_2的圆：

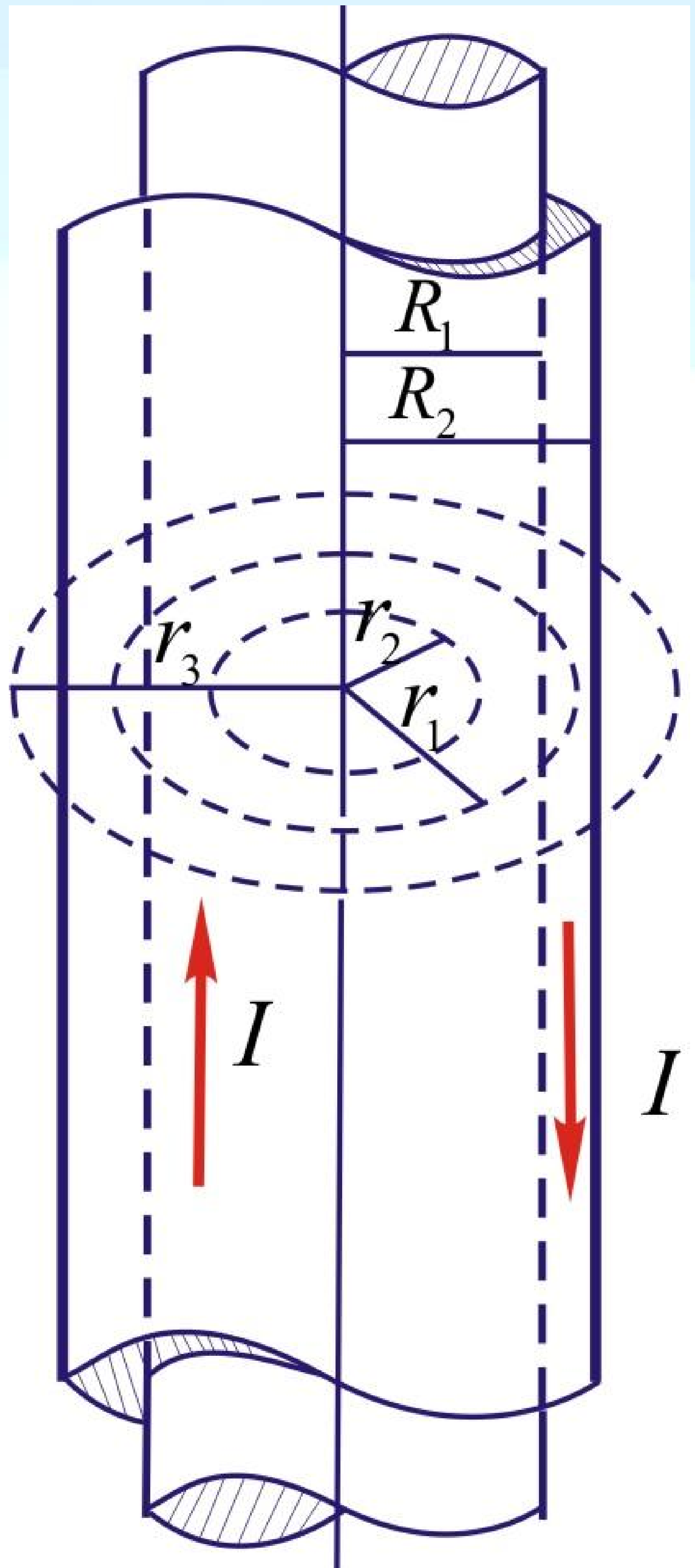
$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = H2\pi r_2 = I\frac{\pi r_2^2}{\pi R_1^2} = I\frac{r_2^2}{R_1^2}$$

$$\Rightarrow \quad H = \frac{Ir_2}{2\pi R_1^2} \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir_2}{R_1^2}$$

（3）过圆柱面外一点作半径为r_3的圆：

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \quad H = 0 \qquad B = 0$$



三、有磁介质时的高斯定理

无磁介质时 $$\oiint_S \vec{\boldsymbol{B}}_0 \cdot \mathbf{d}\,\vec{\boldsymbol{S}} = \mathbf{0}$$

有磁介质时 $$\oiint_S (\vec{B}_0 + \vec{B}') \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = 0$$

$\boldsymbol{B}_0$ **:传导电流所激发的磁场**

$\boldsymbol{B}'$ **:磁化电流所激发的附加磁场**