南京大學
NANJING UNIVERSITY

第十章 机械振动和电磁振荡

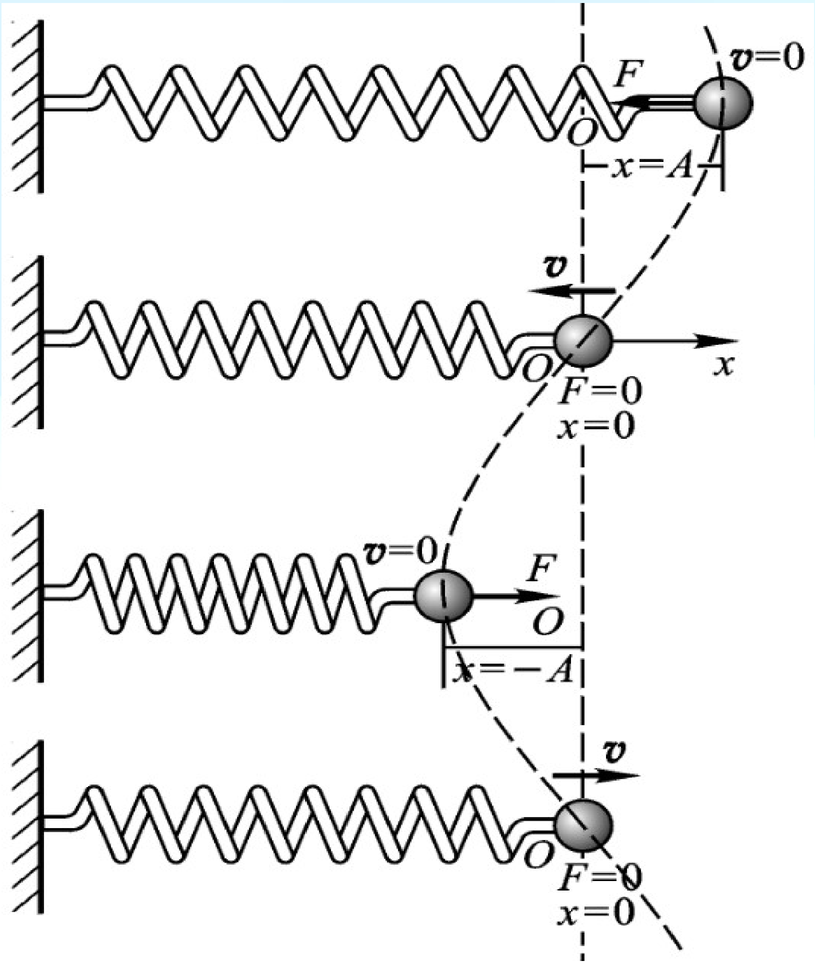
§10-1 谐振动
§10-2 阻尼振动
§10-3 受迫振动 共振
§10-4 电磁振荡
§10-5 一维谐振动的合成

§10-1 谐振动

一、谐振动的特征及其表达式

简谐振动（simple harmonic motion, SHM）：

物体运动时，离开平衡位置的位移(或角位移)按余弦(或正弦)规律随时间变化。



受力特点：线性回复力

$$F = -kx$$

这是简谐振动动力学特征

由 $F = ma = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ 及 $F = -kx$ 有

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

令 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$ 简谐振动的特征方程

其解为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 简谐振动表达式

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

简谐振动的速度和加速度：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = v_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

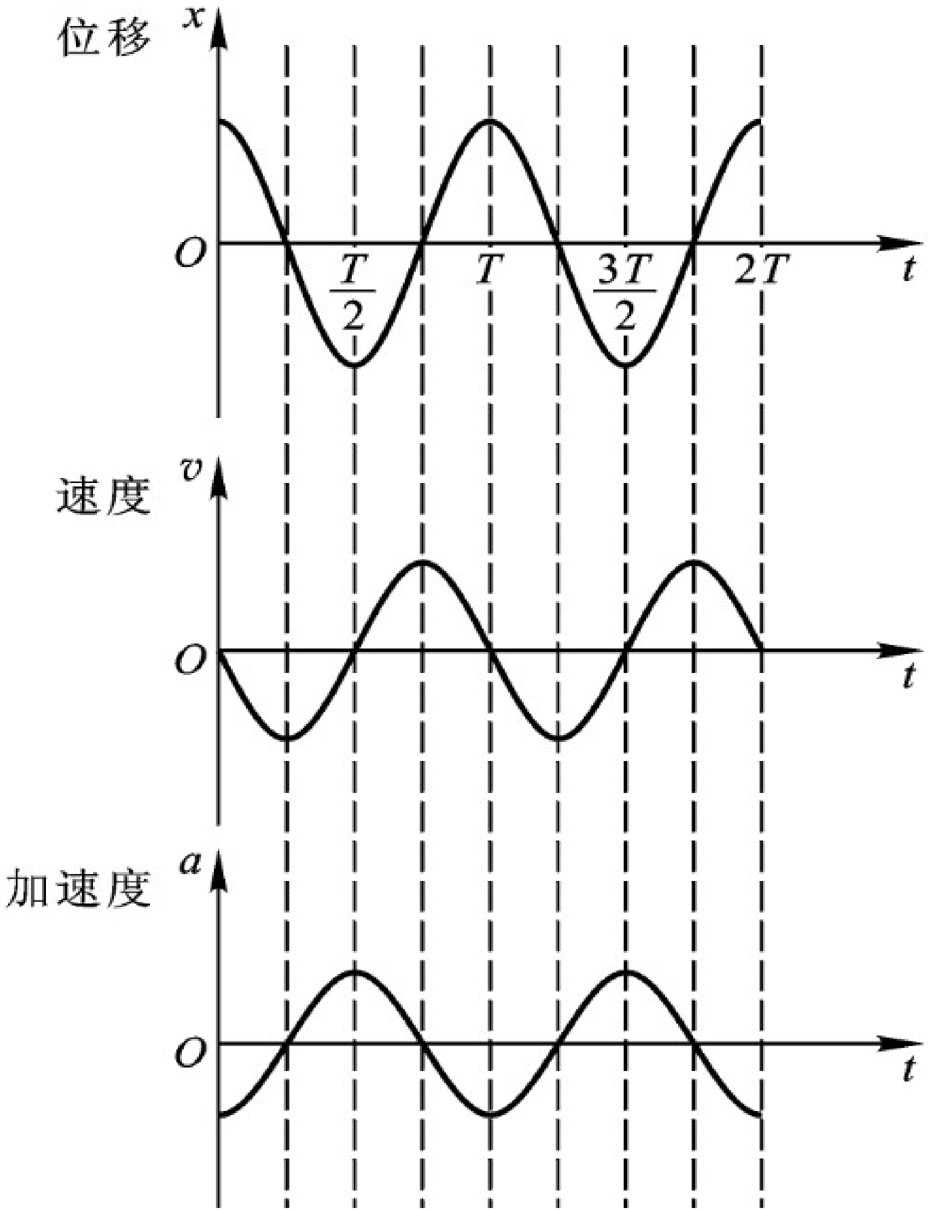
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi)$$

$v_m=\omega A$ 称为速度幅值；

$a_m=\omega^2 A$ 称为加速度幅值。

简谐振动的运动学特征方程

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$$



由初始条件(x_0，v_0)求解振幅和初相位：

设t=0时，振动位移：$x=x_0$，振动速度：$v=v_0$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad x_0 = A\cos\varphi_0$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi_0$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0) = A^2$$

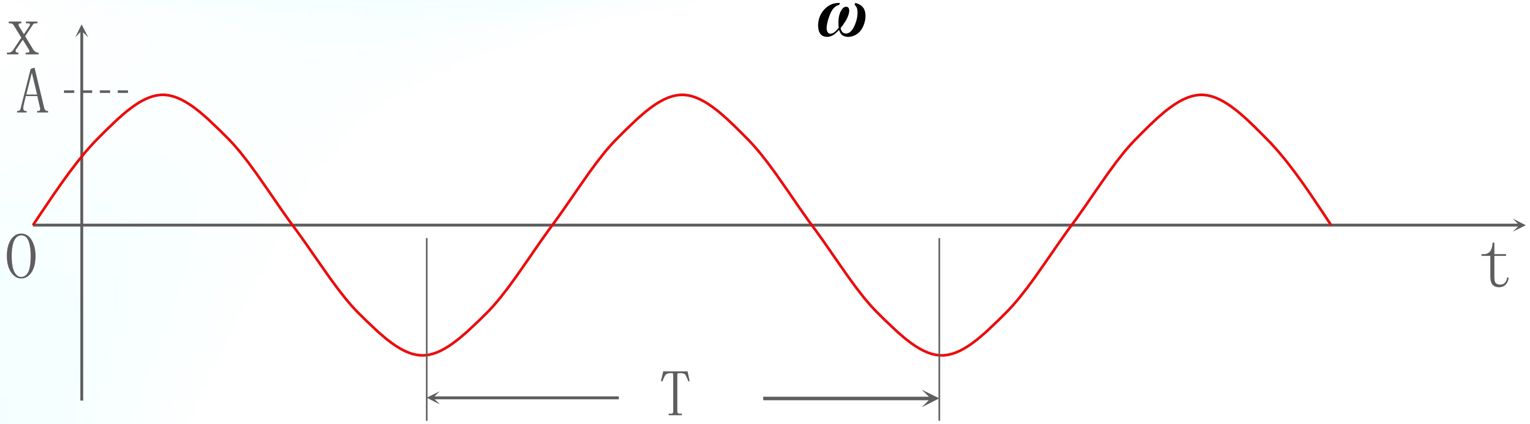
$$A = \sqrt{x_0^{\,2} + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \tan\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

二、描述谐振动的特征量

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

1. 振幅(amplitude)A:（即最大位移，x=±A）
2. 周期(period)T:完成一次完全振动所经历的时间。
3. 频率(frequency)ν:单位时间内完成完全振动的次数:ν=1/T。

角频率（或称圆频率）ω: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$， $\omega = 2\pi\nu$



3. 相位（phase）：（$\omega t+\varphi_0$）——描述振动状态

初相位（initial phase）：φ_0

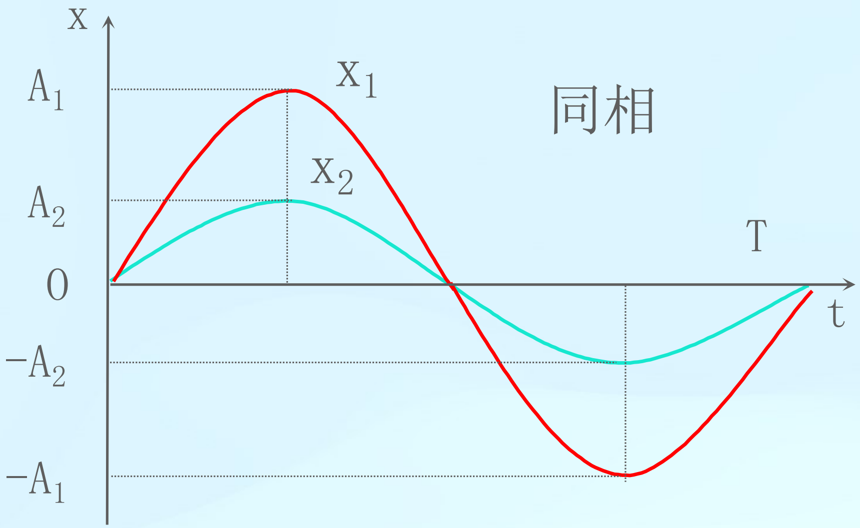
相位差：$\Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_{20})-(\omega_1 t+\varphi_{10})$

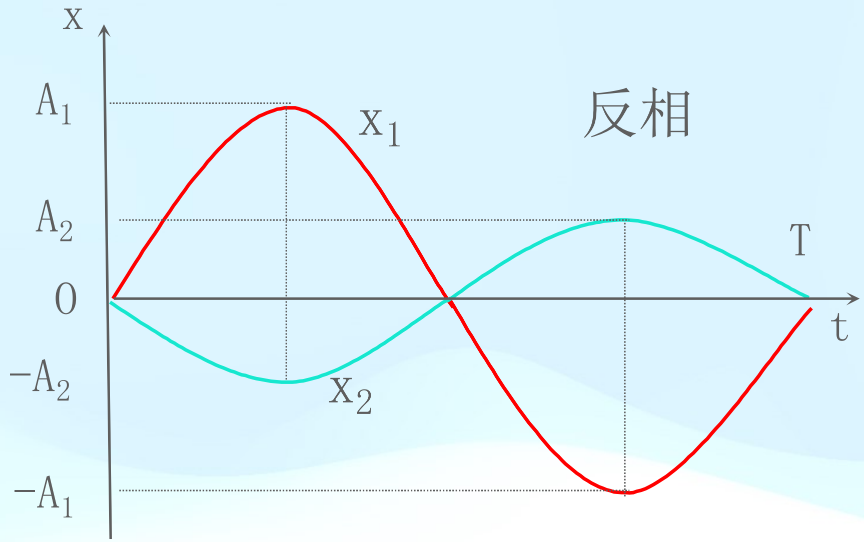
对两同频率的谐振动 $\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}$　初相差

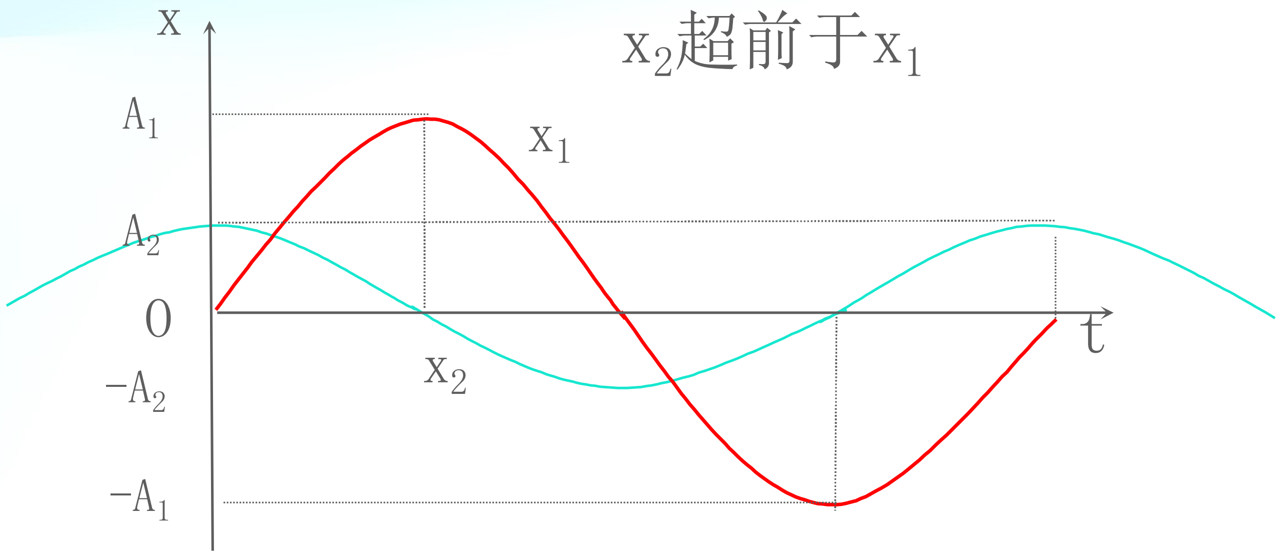
当$\Delta\varphi=\pm 2k\pi$，（$k=0, 1, 2, \cdots$），两振动步调相同，称同相。

当$\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi$，（$k=0, 1, 2, \cdots$），两振动步调相反，称反相。

若$0<\varphi_{20}-\varphi_{10}<\pi$，则$x_2$比$x_1$较早达到正最大，称$x_2$比$x_1$超前(或$x_1$比$x_2$落后)。


x
A1
x1
同相
A2
x2
T
0
t
-A2
-A1

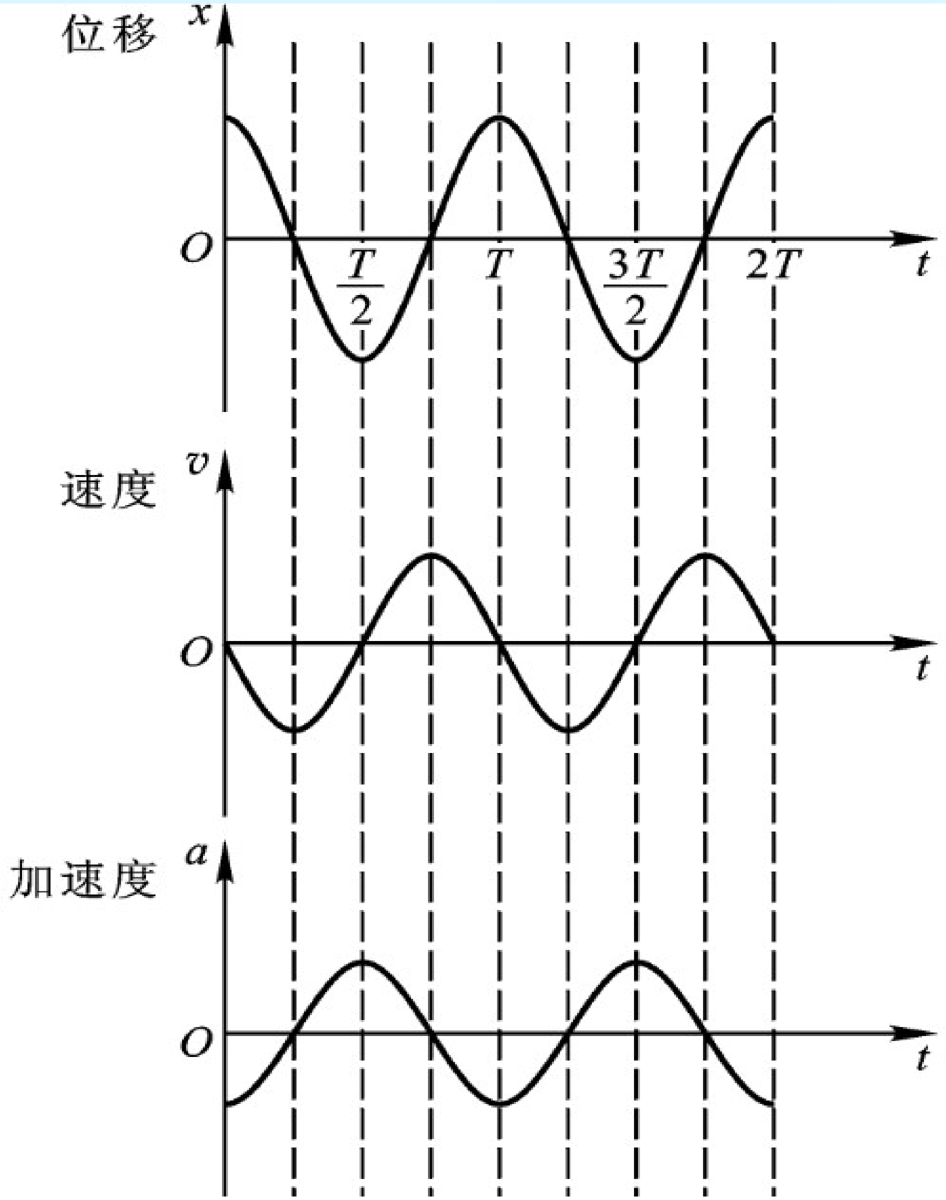

x
A1
x1
反相
A2
T
0
t
-A2
x2
-A1


x
x2超前于x1
A1
x1
A2
0
t
x2
-A2
-A1

$$v = v_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

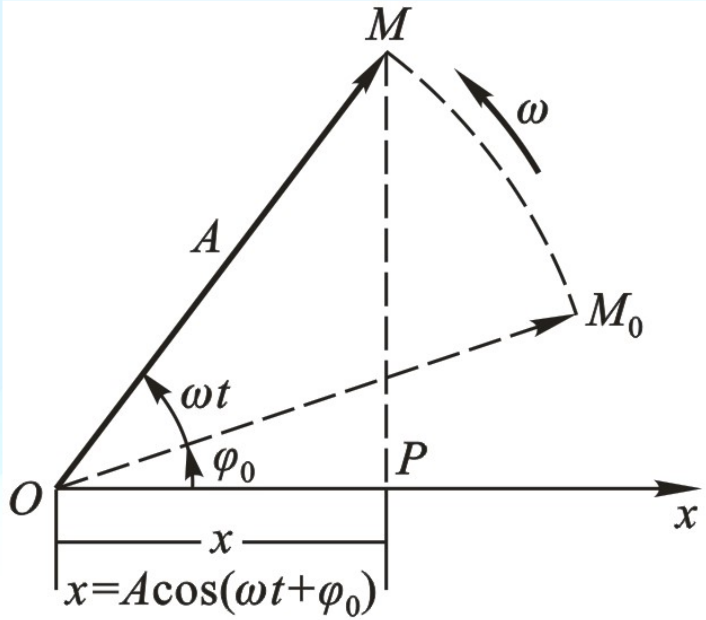
$$a = a_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_0 \pm \pi)$$

速度相位比位移相位超前π/2。
加速度与位移反相位。



三、谐振动的旋转矢量图示法

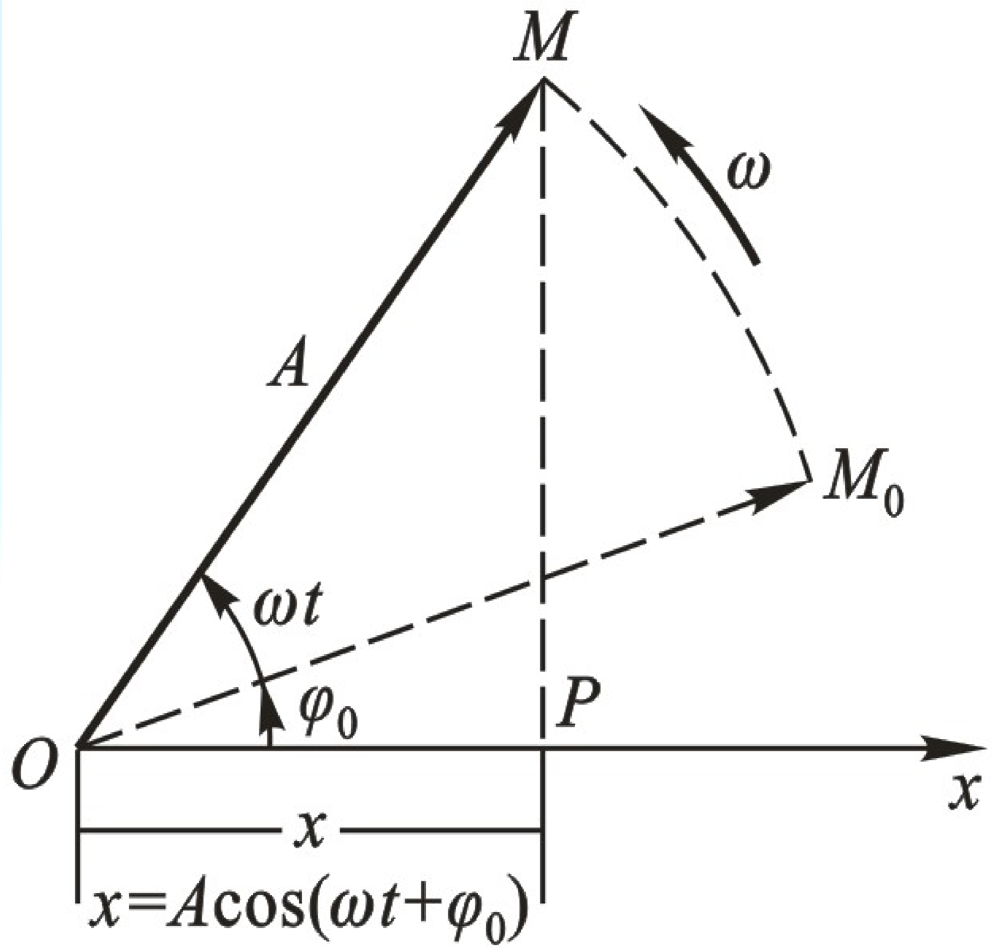
旋转矢量$\vec{A}$绕原点逆时针方向旋转



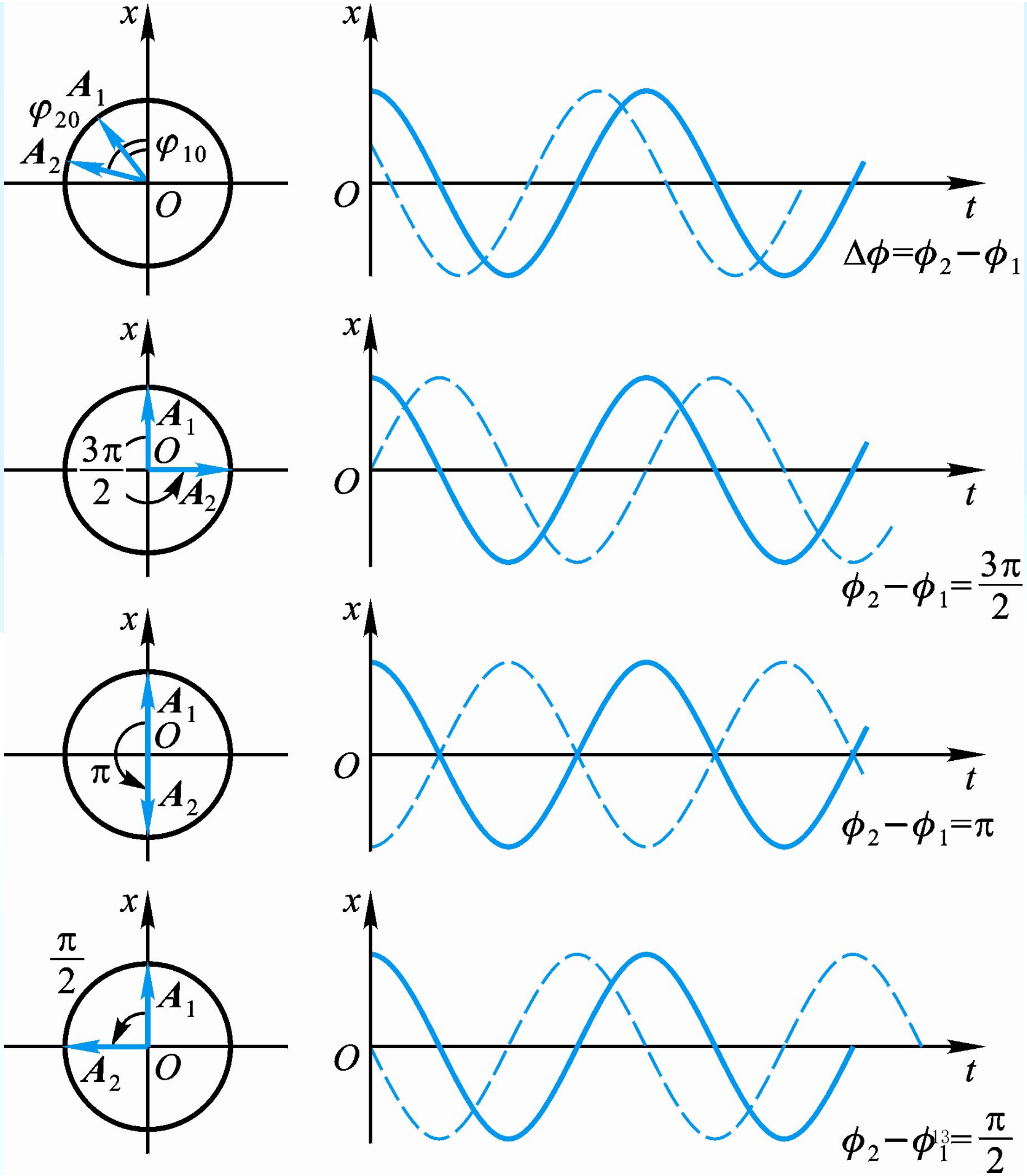
- 旋转矢量$\vec{A}$的模即为简谐振动的振幅。
- 旋转矢量$\vec{A}$的角速度ω即为振动的角频率。
- 旋转矢量$\vec{A}$与x轴的夹角$(\omega t+\varphi_0)$，为简谐振动的相位。
- $t=0$时，$\vec{A}$与x轴的夹角φ_0即为简谐振动的初相位。

旋转矢量$\vec{A}$的端点在x轴上的投影点P的位移：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



- 投影点P的运动为简谐振动。



两简谐振动同频率同振幅
初相位不同

例10-1 一物体沿x轴作简谐振动，振幅A=0.12m,周期T=2s。当t=0时,物体的位移x=0.06m,且向x轴正向运动。求：(1)简谐振动表达式;(2)t=T/4时物体的位置、速度和加速度;(3)物体从x=-0.06m处向x轴负方向运动，第一次回到平衡位置所需时间。

解：(1) 设简谐振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \mathrm{rad\,s^{-1}}$$

由初始条件：

$$\left.\begin{aligned} 0.06 = 0.12\cos\varphi_0 &\rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3} \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi > 0 &\rightarrow \sin\varphi_0 < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$

简谐振动表达式：

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3}) \quad (\mathrm{m})$$

(2)

$$x\Big|_{t=0.5} = 0.12\cos(0.5\pi - \frac{\pi}{3}) = 0.10\,(\mathrm{m})$$

$$v\Big|_{t=0.5} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0.5} = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5} = -0.18\,(\mathrm{m/s})$$

$$a\Big|_{t=0.5} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0.5} = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})\Big|_{t=0.5} = -1.03\,(\mathrm{m/s^2})$$

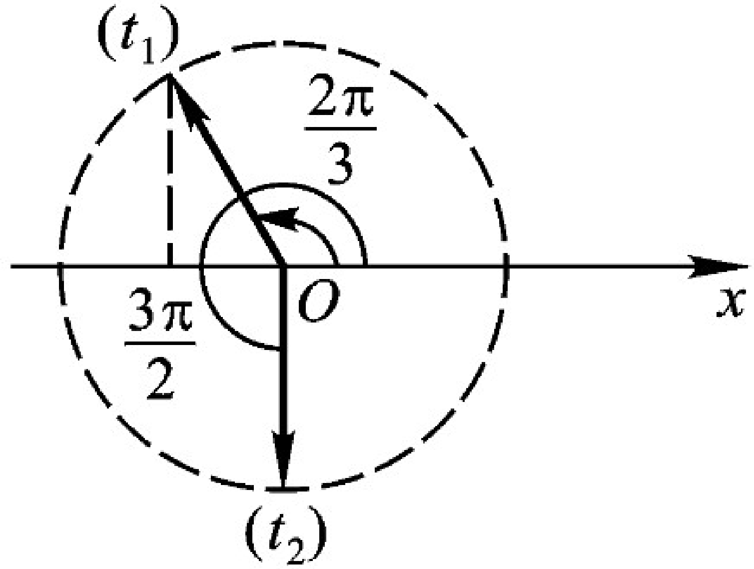
或 $a\Big|_{t=0.5} = \omega^2 x\Big|_{t=0.5} = -1.03\ \mathrm{m/s^2}$

$$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

(3) 从x=-0.06m处向Ox轴负方向运动

第一次回到平衡位置，

振幅矢量转过 $\frac{5}{6}\pi$



$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi_0) - (\omega t_1 + \varphi_0) = \omega(t_2 - t_1) = \frac{5}{6}\pi$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\frac{5}{6}\pi}{\pi} = 0.83\ \text{s}$$

四、几种常见的谐振动

1. 单摆

重物所受合外力矩：

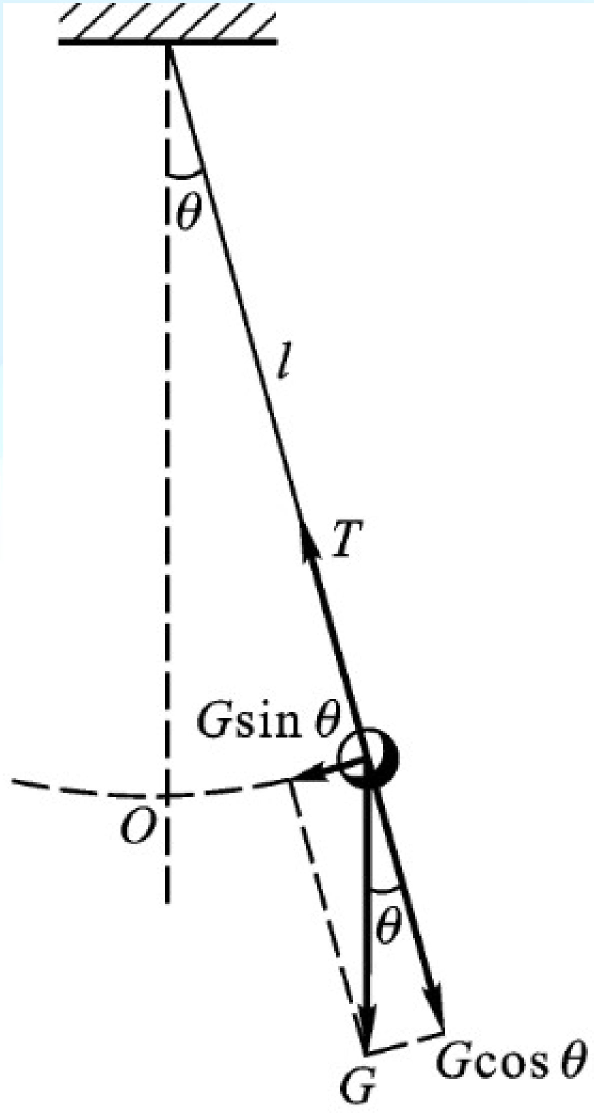
$$M = -mgl\sin\theta$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \approx \theta$$ （θ很小时）

$$M = -mgl\theta$$

由转动定律 $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{M}{J} = -\frac{mgl\theta}{ml^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

令 $\omega^2 = \frac{g}{l}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$



振动表达式为 $\theta = \theta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_0)$

角振幅 θ_{m}和初相 φ_0由初始条件求得。

当θ不是很小时：

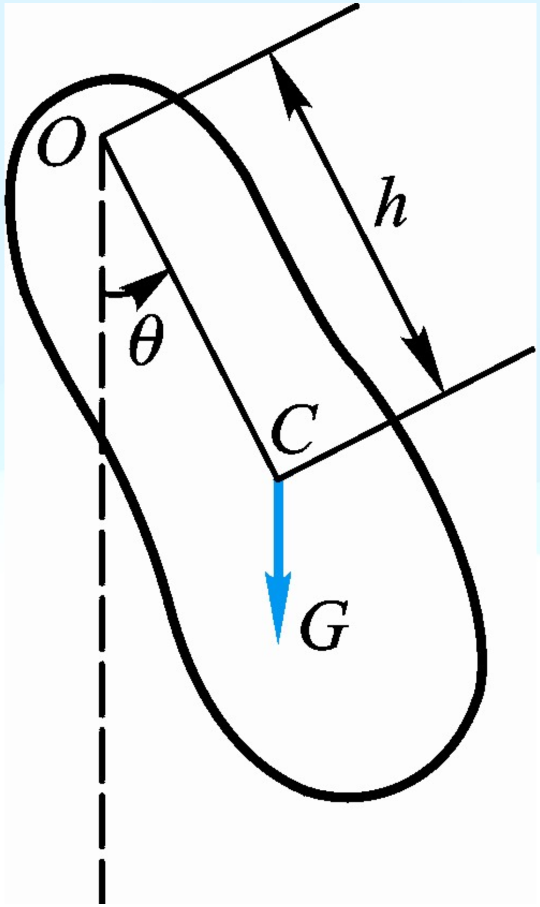
单摆周期T与角振幅的关系为

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_{\mathrm{m}}}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_{\mathrm{m}}}{2} + \cdots\right)$$

T_0为θ_{m}很小时单摆的周期。

2. 复摆

一个可绕固定轴摆动的刚体称为复摆。



$$-mgh\sin\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

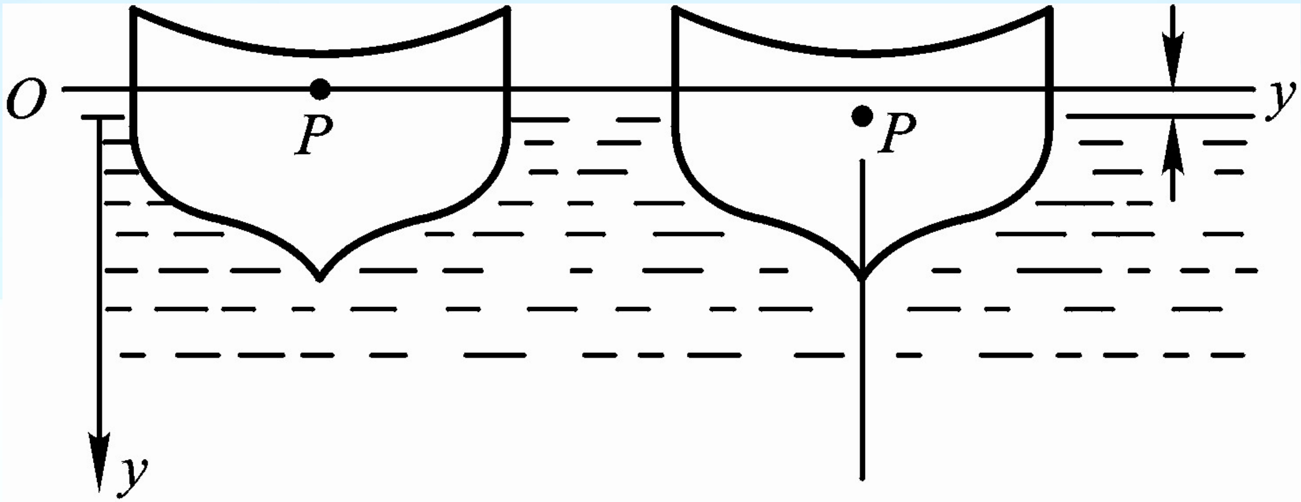
θ 很小时 $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgh}{J}\theta=0$$

$$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}$$

例10-2 一质量为m的平底船，其平均水平截面积为S，吃水深度为h，如不计水的阻力，求此船在竖直方向的振动周期。

解：船静止时浮力与重力平衡，



船在任一位置时，以水面为坐标原点，竖直向下的坐标轴为y轴，船的位移用y表示。

船的位移为y时船所受合力为

$$F = -(h + y)\rho Sg + mg = -y\rho Sg$$

$$F = -\omega^2 y$$

⇨ 船在竖直方向做简谐振动，其角频率和周期为

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho Sg}{m}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$$

$$m = \rho Sh \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

五、谐振动的能量

以水平弹簧振子为例 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

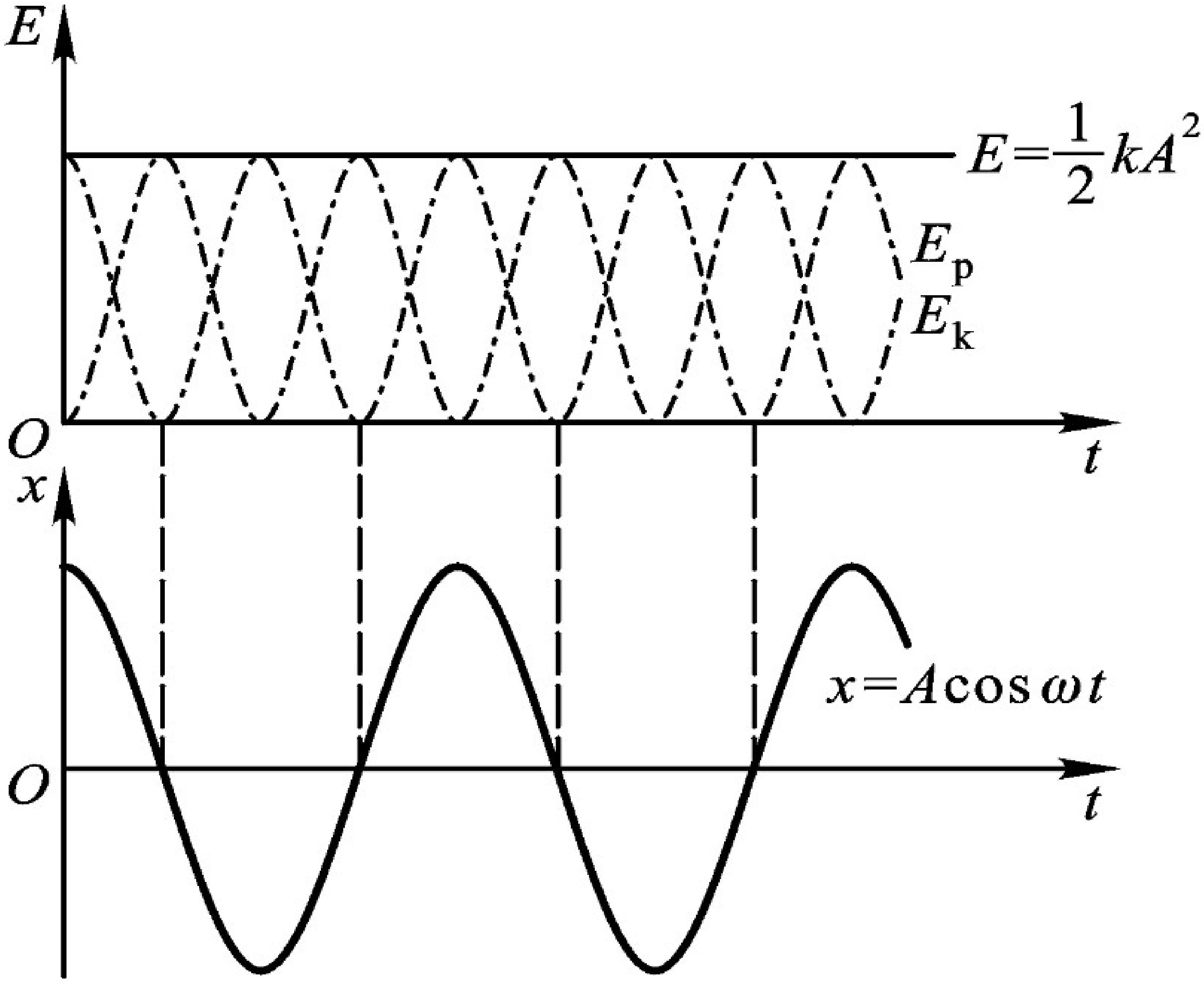
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

动能 $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$

势能 $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$

机械能 $E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2$

➢简谐振动系统机械能守恒。


E
$E=\frac{1}{2}kA^2$
E_p
E_k
O
t
x
$x=A\cos\omega t$
O
t

*六、用能量法解谐振动问题

以水平弹簧振子为例

系统机械能守恒： $$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

对t求导： $$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

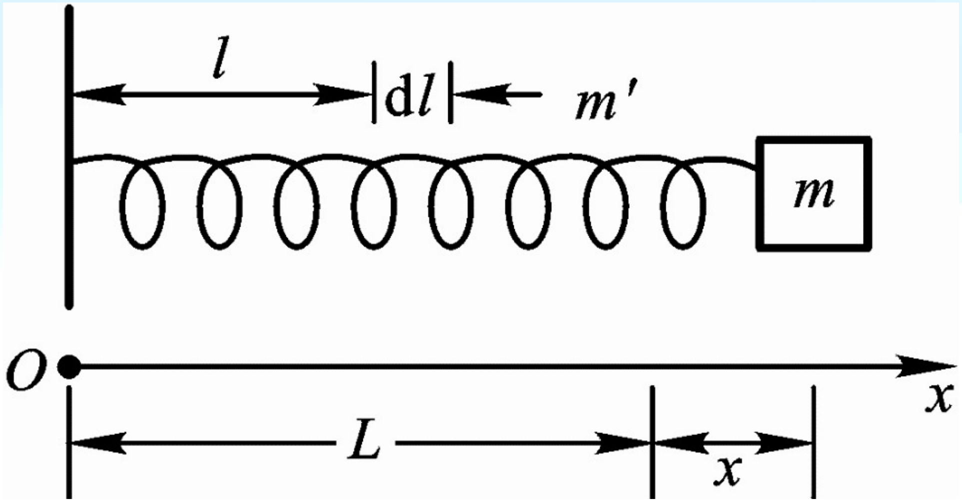
代入 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\xrightarrow{\frac{k}{m}=\omega^2}\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

谐振动的运动方程

例10-3 劲度系数为k，原长为L，质量为m’的均匀弹簧，一端固定，另一端系一质量为m>m’的物体，在光滑水平面内做直线运动。求解其运动。

解：当物体处于位移x速度为v时，



弹簧元dl的质量为

$$\mathrm{d}m' = m' \cdot \frac{\mathrm{d}l}{L}$$

位移为 $x\dfrac{l}{L}$ 速度为 $v\dfrac{l}{L}$

弹簧、物体的动能分别为

$$E_{k1} = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{m'}{l}\mathrm{d}\,l\right)\left(\frac{l}{L}v\right)^2 = \frac{1}{6}m'v^2 \qquad E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$$

系统弹性势能为 $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$

系统机械能守恒，有 $\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{6}m'v^2 + \dfrac{1}{2}kx^2 =$ 常量

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{m'}{3}\right)v^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{常量}$$

$$\frac{1}{2}(m+\frac{m'}{3})v^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

对时间求导，$(m+\frac{m'}{3})\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx=0$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m+\frac{m'}{3}}x=0$$

仍为简谐振动

$$\omega^2=\frac{k}{m+\frac{m'}{3}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{m'}{3}}{k}}$$