# 离散数学 (2023) 作业 01 - 命题逻辑

March 6, 2023

# Problem 1

p	q	r	$\neg p$	$(p \rightarrow q)$	$(\neg p \to r)$	$(p \to q) \land (\neg p \to r)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Table 1: **Problem 1 真值表** 

### Problem 2

- 1.  $r \wedge \neg p$
- 2.  $\neg p \land q \land r$
- 3.  $r \to (q \leftrightarrow \neg p)$
- 4.  $\neg q \land \neg p \land r$
- 5.  $(\neg r \land \neg p) \rightarrow q$
- 6.  $(p \wedge r) \rightarrow \neg q$

## Problem 3

- 1. Jennifer 和 Teja 不是朋友。
- 2. 面包师说的"一打"不是 13 个。
- 3. Abby 每天发送的短信数量少于 100 条。
- 4. 121 不是一个完全平方数。

#### Problem 4

- 1. 真。假 ↔ 假。
- 2. 假。真→假。
- 3. 真。假 → 假。
- 4. 真。假 → 真。

#### Problem 5

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \lor q$	$\neg (p \lor q)$	$\neg p \land \neg q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Table 2: Problem 5 真值表

由于  $\neg (p \lor q)$  和  $\neg p \land \neg q$  的真值一样, 所以  $\neg (p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$ 

#### Problem 6

令 p、q、r 为如下命题:

- p: TA 是理科学生
- q: TA 是文科学生
- r: TA 学好了数学

原题可形式化为:  $\{p \rightarrow r, \neg q \rightarrow p, \neg r\} \vdash q$ 

证明.

1. 
$$p \rightarrow r$$
premise2.  $\neg r$ premise3.  $\neg p$ MT 1,24.  $\neg q \rightarrow p$ premise5.  $q$ MT 3,4

#### Problem 7

设:

- p: 矿样为铁;
- q: 矿样为铜;
- r: 矿样为锡;

那么,三人的判断分别可以形式化为命题逻辑公式  $F_1, F_2, F_3$ :

- $\mathbb{H}: F_1 \equiv \neg p \land \neg q.$
- $Z: F_2 \equiv \neg p \wedge r$ .
- $\overline{\mathsf{M}}$ :  $F_3 \equiv p \land \neg r$ .

显然,命题 p,q,r 至多只有一项成立,它们的真值指派记为"T"和"F"。另外,分别记每人判断正确率"错了"、"对一半"和"全对"为 0 , 0.5 , 1 。那么,可以构建由  $\{p,q,r\}$  的真值到  $\{F_1,F_2,F_3\}$  正确率的映射如表??,并得到:该矿样本为铁。甲对一半,乙全错,丙全对。

p	q	r	$F_1$	_	$F_3$
F	F	Τ	1	1	0
$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$	$0.5 \\ 0.5$	0.5	0.5
$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	0.5	0	1

Table 3: Problem 7 的命题真值-判断正确率映射关系

#### Problem 8

记:

$$A \equiv (\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma))$$

$$B \equiv ((\alpha \land (\beta \land \gamma)) \lor ((\neg \alpha) \land ((\neg \beta) \land (\neg \gamma))))$$

根据两公式的真值表??可知,两公式并不互为重言蕴含

$\alpha$	β	$\gamma$	A	B	$A \rightarrow B$	$B \to A$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Table 4: Problem 8 的真值表

#### Problem 9

#### 证明.

- $(1 \Rightarrow 2)$ : 根据定义, $\alpha \models \beta$  说明当  $\alpha$  为真时  $\beta$  也为真。因此  $\alpha \to \beta \equiv \neg \alpha \lor \beta$  恒真,因此  $\alpha \to \beta$  为重言式,即  $\models (\alpha \to \beta)$ .
- $(2 \Rightarrow 3)$ :
  - $-(\models)$ : 由于  $\alpha \to \beta$  为重言式, 那么  $\alpha$  为真时  $\beta$  必为真, 此时  $(\alpha \land \beta)$  亦为真, 因此  $\alpha \models (\alpha \land \beta)$ ;
  - (=): 显然,  $(\alpha \land \beta)$  为真时有  $\alpha$  为真, 故  $(\alpha \land \beta)$  |=  $\alpha$  。

所以,  $\alpha$  与  $(\alpha \land \beta)$  重言等价。

- $(3 \Rightarrow 4)$ :
  - $-(\models)$ : 显然  $\beta$  为真时, $(\alpha \lor \beta)$  必为真,因此有  $\beta \models (\alpha \lor \beta)$ ;
  - $-(\exists):(\alpha\vee\beta)$  为真可分为下列两种情况讨论:
    - (a)  $\alpha$  为真, 由  $\alpha$  与 ( $\alpha \wedge \beta$ ) 重言等价可知,  $\alpha$  为真时, ( $\alpha \wedge \beta$ ) 必为真, 因此  $\beta$  亦为真;
    - (b)  $\alpha$  为假,那么根据 ( $\alpha \vee \beta$ )可知  $\beta$  必须为真;

因此有  $(\alpha \lor \beta) \models \beta$  。

故  $\beta$  与  $(\alpha \vee \beta)$  重言等价。

•  $(4 \Rightarrow 1)$ : 由  $(\alpha \lor \beta) \models \beta$  可知,  $\alpha$  为真时,  $\beta$  必为真。根据定义可得  $\alpha \models \beta$  。

# Problem 10

- (1) 证明.
- 1.  $\alpha$ 2.  $\beta$ 3.  $\alpha$ 4.  $(\beta \to \alpha)$
- →i 2, 3

1

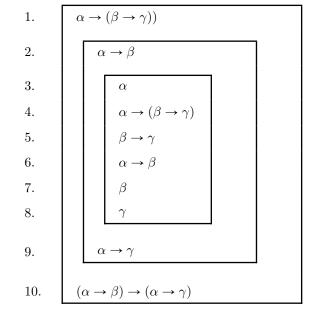
5.  $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ 

→i 1-4

 ${\rm assumption}$ 

 ${\rm assumption}$ 

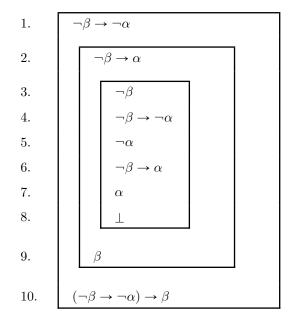
(2) 证明.



11.  $(\alpha \to (\beta \to \gamma))) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ 

- assumption assumption
- and amp trom
- assumption
- →e 3, 4
- 2
- $\rightarrow$ e 3, 6  $\rightarrow$ e 5, 7
- →i 3–8
- →i 2-9
- →i 1–10

## (3) 证明.



11.  $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow ((\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$ 

assumption

 ${\rm assumption}$ 

assumption

1

 $\rightarrow$ e 3, 4

2

 $\rightarrow$ e 3, 6

 $\neg e 5, 7$ 

 $\pm e, 3-7$ 

→i 2–8

→i 1-9