南京大學
NANJING UNIVERSITY

第十章 机械振动和电磁振荡

§10-2 阻尼振动
§10-3 受迫振动 共振
§10-4 电磁振荡
§10-5 一维谐振动的合成

§10-2 阻尼振动

- 振动物体不受任何阻力的影响，只在回复力作用下所做的振动，称为无阻尼自由振动。
- 在回复力和阻力作用下的振动称为阻尼振动。

阻尼：消耗振动系统能量的原因。
阻尼种类：摩擦阻尼、辐射阻尼

对在流体(液体、气体)中运动的物体，当物体速度较小时，阻力大小正比于速度，且方向相反，表示为

$$F_f = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt} \qquad \gamma\text{：阻力系数}$$

阻尼振动方程：$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

引入阻尼因子 $\delta=\frac{\gamma}{2m}$　　固有频率 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

在小阻尼条件下$(\delta<\omega_0)$，微分方程的解为

$$x=A_0\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega' t+\varphi_0')$$

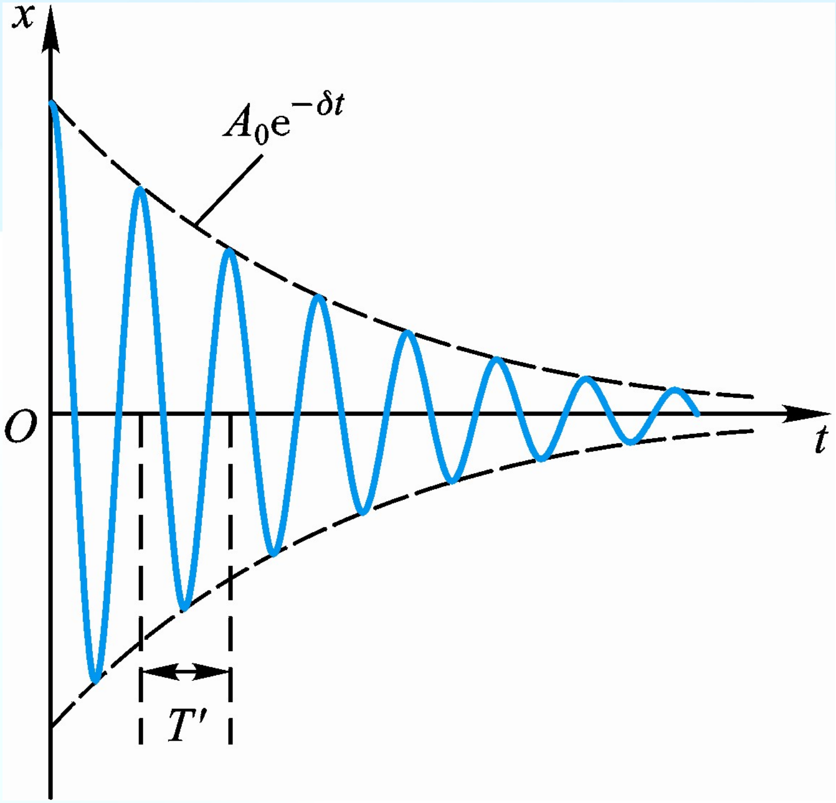
其中 $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$

A_0和 φ_0' 为积分常数，由初始条件决定。

$$x = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega' t + \varphi_0')$$

余弦项表征了在弹性力和阻力作用下的周期运动；

$A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}$ 反映了阻尼对振幅的影响。——减幅振动



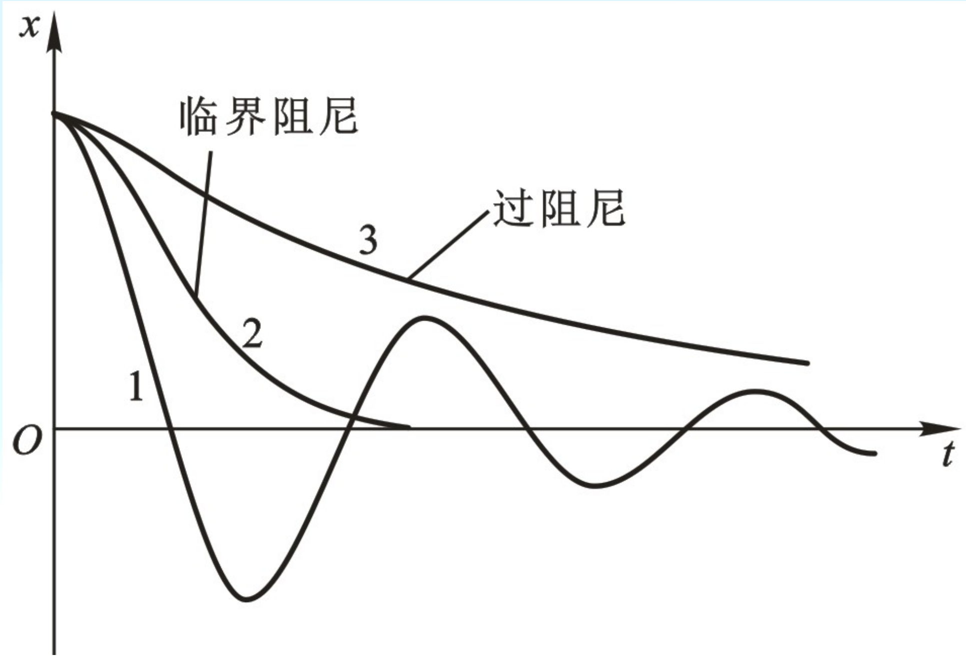
阻尼振动是准周期性运动

阻尼振动的周期：

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}$$

阻尼振动的三种情形：

- 过阻尼 $\delta > \omega_0$
- 阻尼 $\delta < \omega_0$
- 临界阻尼 $\delta = \omega_0$



➢临界阻尼物体从静止开始回到平衡位置所需的时间最短

§10-3 受迫振动　共振

一、受迫振动

物体在周期性外力（驱动力）的持续作用下发生的振动称为受迫振动（forced vibration）。

驱动力：$F = F_0 \cos\omega_d t$

运动方程：$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega_d t$$

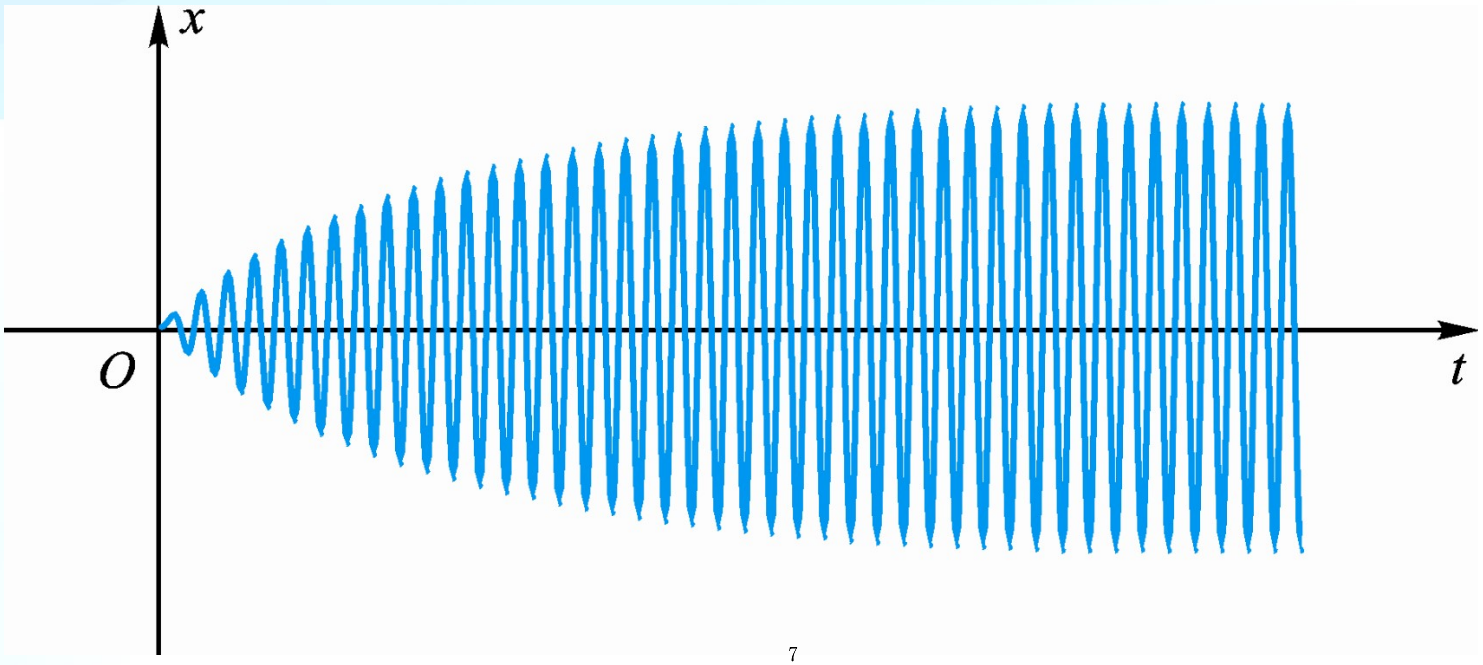
设 $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$，$\delta = \dfrac{\gamma}{2m}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$

当阻尼较小，$\delta < \omega_0$时，方程的解：

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \varphi_0') + A\cos(\omega_{\mathrm{d}} t + \varphi)$$

稳定振动状态：$x = A\cos(\omega_{\mathrm{d}} t + \varphi)$



$$x = A\cos(\omega_{\mathrm{d}} t + \varphi)$$

在稳定振动状态下，受迫振动的频率等于驱动力的频率。

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{d}}^2)^2 + 4\delta^2\omega_{\mathrm{d}}^2}}$$

$$\tan\varphi = -\frac{2\delta\omega_{\mathrm{d}}}{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{d}}^2}$$

稳态时振动物体速度：

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_{\mathrm{m}}\cos(\omega_{\mathrm{d}}t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$v_{\mathrm{m}}=\frac{\omega_{\mathrm{d}}F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{\mathrm{d}}{}^2)^2+4\delta^2\omega_{\mathrm{d}}{}^2}}$$

在受迫振动中，周期性的驱动力对振动系统提供能量，另一方面系统又因阻尼而消耗能量，若二者相等，则系统达到稳定振动状态。

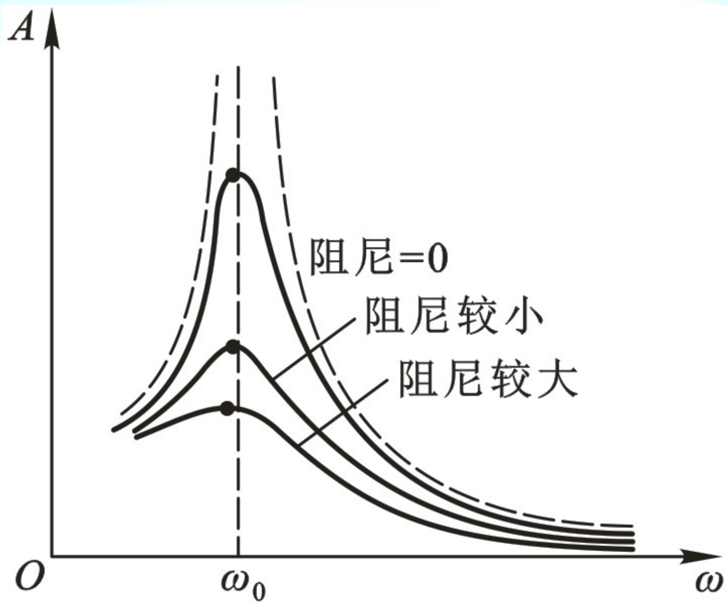
二、共振

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega_d^2)^2+4\delta^2\omega_d^2}}$$

当驱动力的角频率等于某个特定值时，位移振幅达到最大值的现象称为位移共振（displacement resonance）。

$$\frac{dA}{d\omega_d}=0$$

$$\Rightarrow \omega_{共振}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$



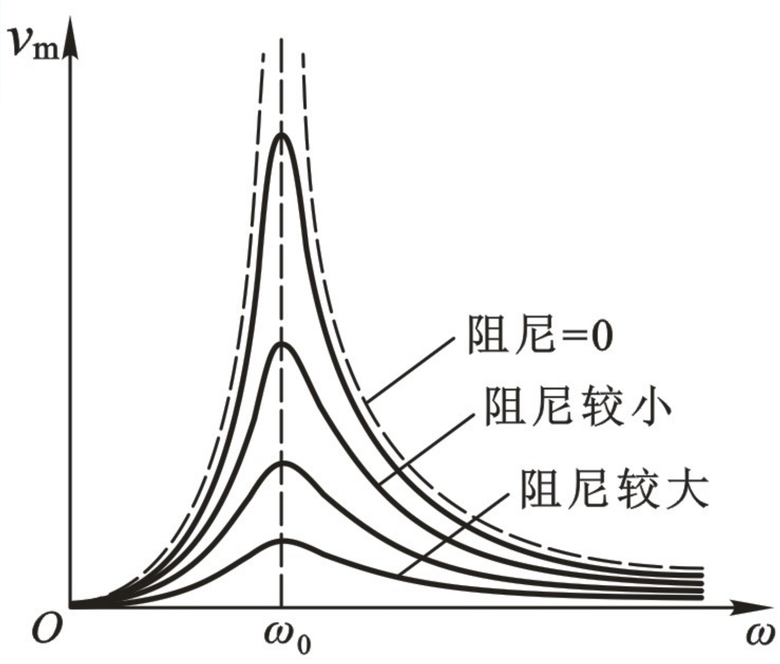
$$v_m = \frac{\omega_d F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^{\ 2})^2 + 4\delta^2 \omega_d^{\ 2}}}$$

受迫振动速度在一定条件下发生共振的的现象称为速度共振（velocity resonance）。

$$\frac{\mathrm{d}v_m}{\mathrm{d}\omega_d} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{共振} = \omega_0$$

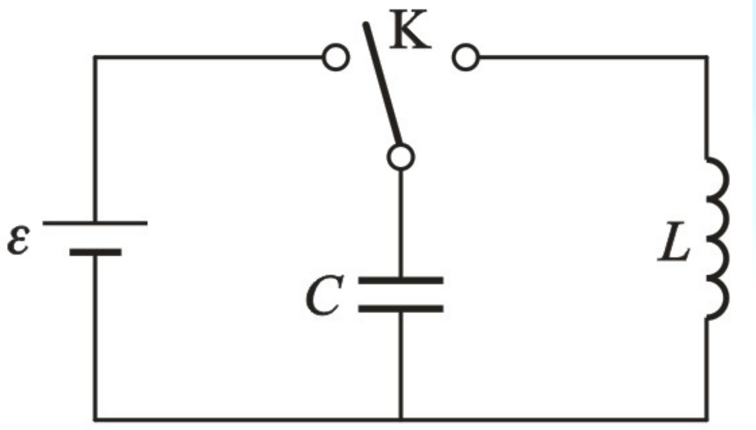
在阻尼很小的前提下，速度共振和位移共振可以认为等同。



§10-4 电磁振荡

一、LC电路的振荡

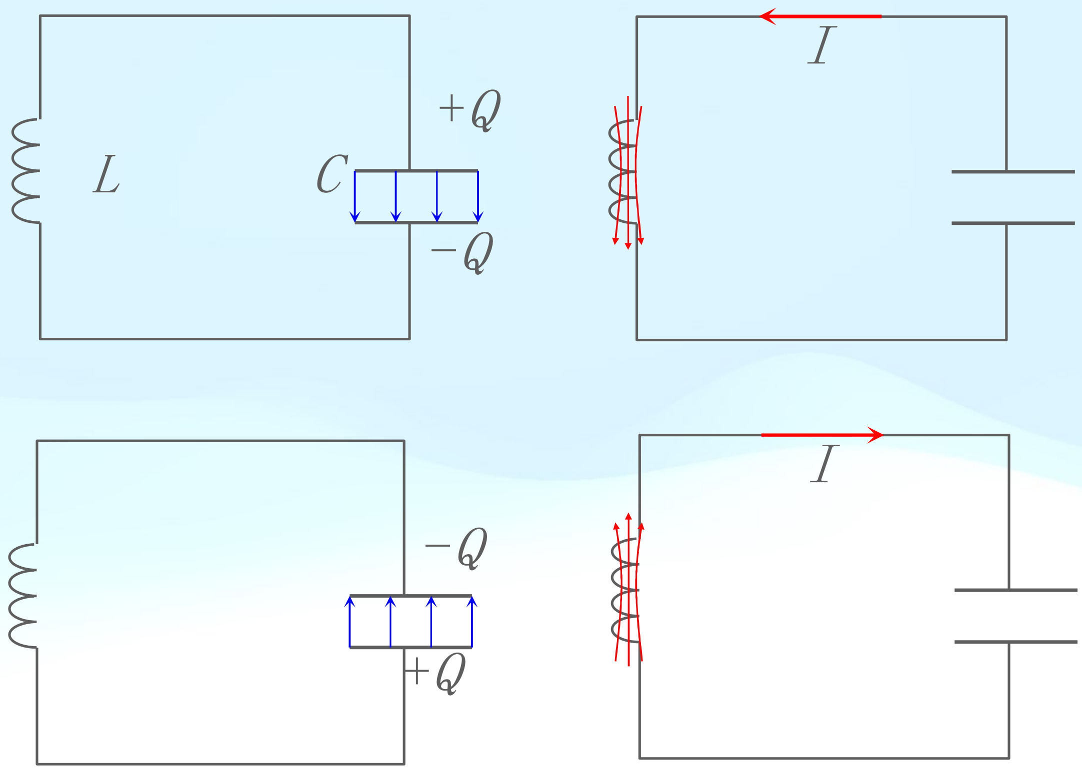
电路中电压和电流的周期性变化称为电磁振荡。



LC振荡电路

向左合上开关，使电源给电容器充电，然后将开关接通LC回路，出现电磁振荡效应。

LC回路的振荡过程

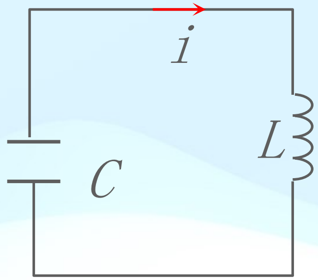


电荷与电流（电场能量与磁场能量）随时间作周期性变化，且不断相互转换。若电路中无能量损耗，这种变化将一直持续下去，称为(无阻尼)自由振荡。

（无阻尼）自由振荡的定量分析

设t时刻电容器极板上电荷量为q，电路中电流为i，顺时针方向为电流正向。

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{C},\qquad i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$



$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{LC}q \qquad \omega^2=\frac{1}{LC}$$ 振荡角频率

$$\Rightarrow\quad q=Q_0\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad T=2\pi\sqrt{LC}$$

Q_0是电荷量振幅，φ_0是振荡初相。

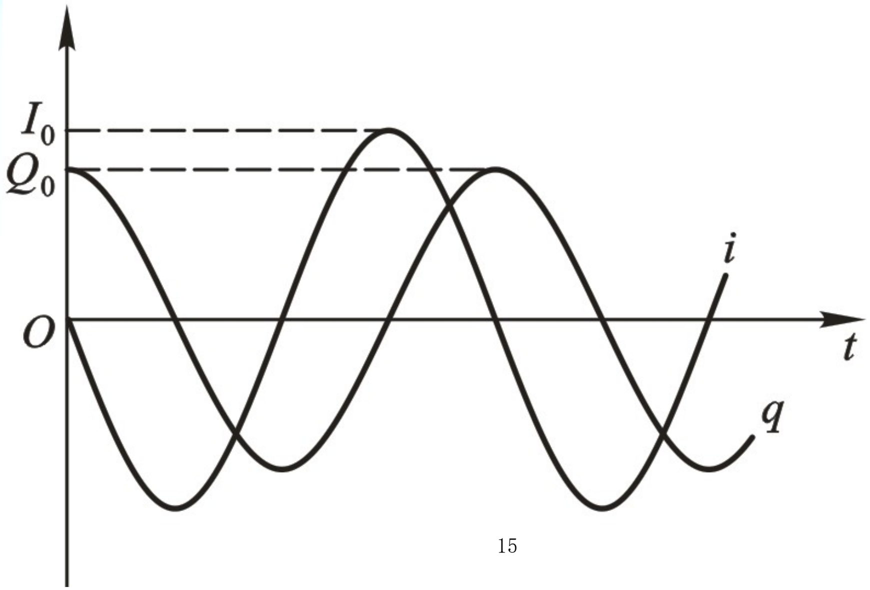
$$\nu=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$= I_0 \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

电荷和电流都做简谐振动，电流的振动超前电荷 $\frac{\pi}{2}$ 。



电场能量为

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{q^2}{2C}=\frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t+\varphi_0)$$

磁场能量为

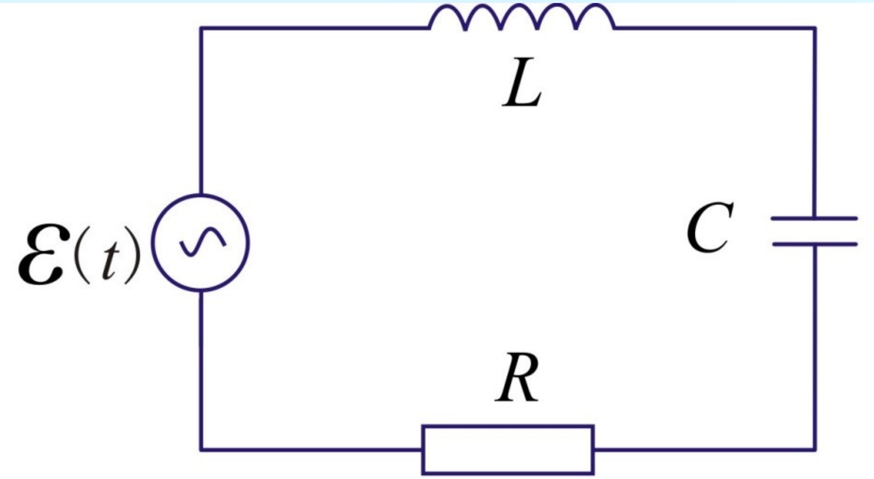
$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}Li^2=\frac{L\omega^2Q_0^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$\Rightarrow\quad W=W_{\mathrm{e}}+W_{\mathrm{m}}=\frac{Q_0^2}{2C}$$

- 自由振荡电路中电磁场总能量守恒

二、受迫振荡　电共振

LRC电路在外加周期性电动势持续作用下产生的振荡，称为受迫振荡。



电动势：$\varepsilon(t)=\varepsilon_0\cos\omega_d t$

对受迫振荡：

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon_0\cos\omega_d t$$

稳态解：$q=Q_0\cos(\omega_d t+\varphi_0)$

$$\Rightarrow\quad i=-\omega Q_0\sin(\omega_d t+\varphi_0)=I_0\cos(\omega_d t+\varphi')$$

$$\varphi'=\varphi_0+\frac{\pi}{2}$$

$$i = -\omega Q_0 \sin(\omega_\mathrm{d} t + \varphi_0) = I_0 \cos(\omega_\mathrm{d} t + \varphi')$$

其中

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_\mathrm{d} L - \dfrac{1}{\omega_\mathrm{d} C}\right)^2}}, \quad \tan\varphi' = \frac{\dfrac{1}{\omega_\mathrm{d} C} - \omega_\mathrm{d} L}{R}$$

当电路满足 $\omega_\mathrm{d} L = \dfrac{1}{\omega_\mathrm{d} C}$ 时，电流振幅最大，称为电共振。

即 $\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

电流振幅最大值为 $\dfrac{\varepsilon_0}{R}$

三、力电类比

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\delta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_d t \qquad L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\varepsilon_0\cos\omega_d t$$

机械振动	电磁振荡(串联电路)
位移 x	电荷 q
速度 v	电流 i
质量 m	电感 L
劲度系数 k	电容的倒数 $1/C$
阻力系数 γ	电阻 R
驱动力 F	电动势 ε
弹性势能 $kx^2/2$	电场能量 $q^2/2C$
动能 $mv^2/2$	磁场能量 $Li^2/2$

§10-5 一维谐振动的合成

一、同一直线上两个同频率谐振动的合成

某一质点同时参与两个独立的、同方向、同频率的简谐振动，其振动位移分别为

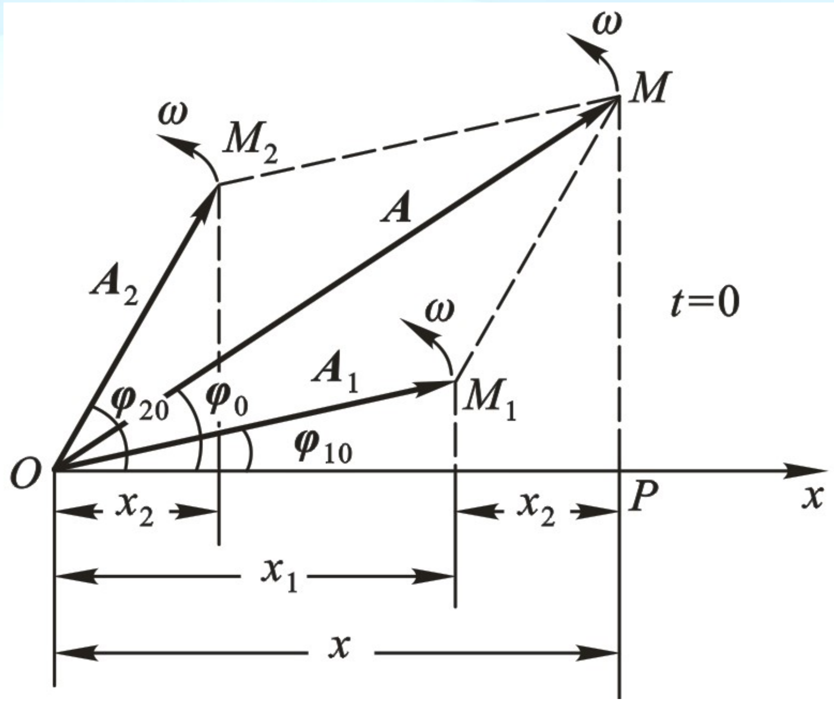
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) \qquad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

合振动：（由振动的叠加原理）

$$x = x_1 + x_2$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

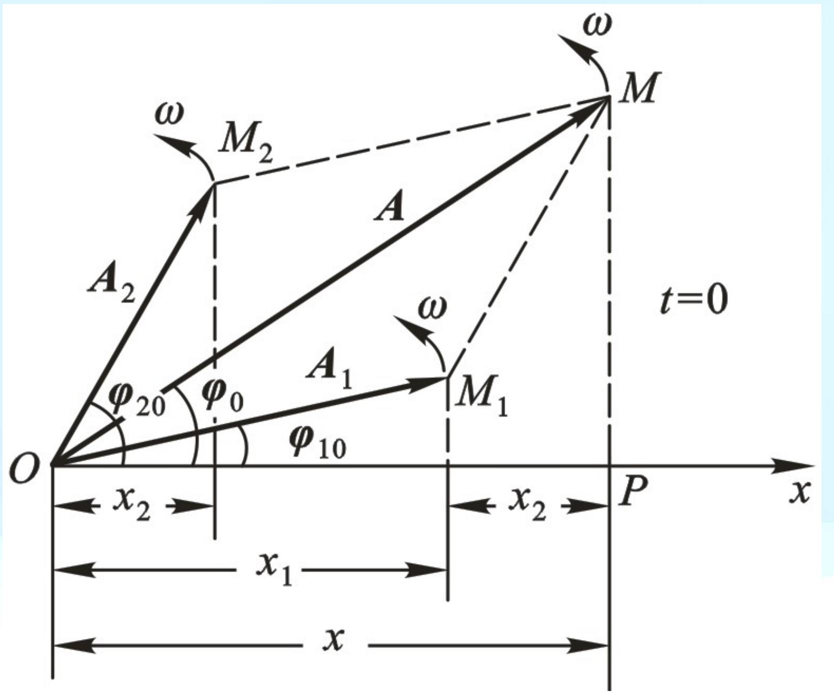


- 合振动仍为同方向同频率的简谐振动。

合振动：$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_{10} + A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10} + A_2\cos\varphi_{20}}$$



（1）若 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

则 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$

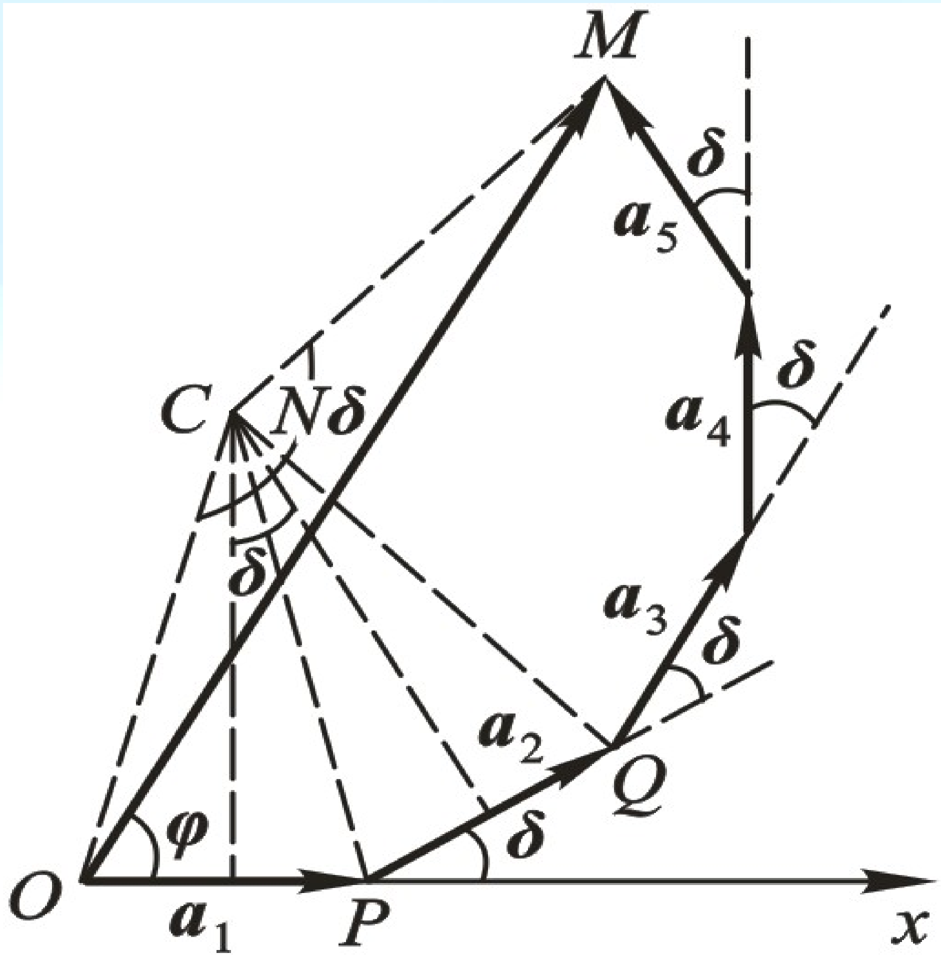
（2）若 $\varphi_{20} - \varphi_{10} = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

则 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \left|A_1 - A_2\right|$

例10-4 求N个同方向同频率的谐振动的合振动。

$$x_1 = a\cos\omega t, x_2 = a\cos(\omega t+\delta), \cdots,$$

$$x_N = a\cos\left[\omega t+(N-1)\delta\right]$$



解：$\angle OCM = N\delta$

$$A = OM = 2R\sin\frac{N}{2}\delta$$

在ΔOCP中，$a = 2R\sin\frac{\delta}{2}$

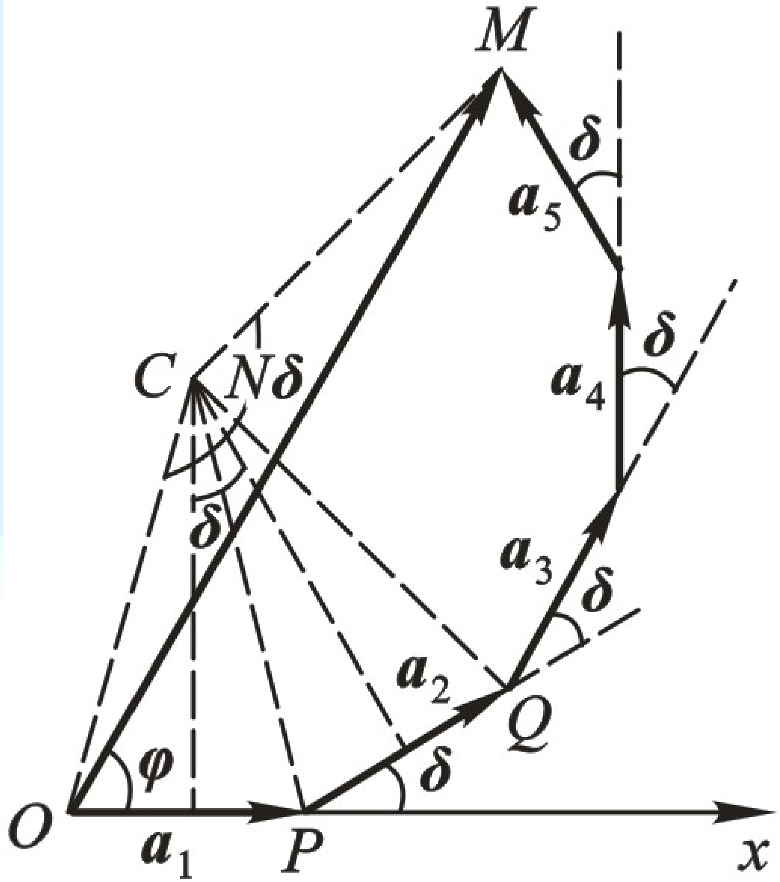
$$\Rightarrow A = a\frac{\sin N\dfrac{\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$$

在ΔOCP中，

$$\angle COM=\frac{1}{2}(\pi-N\delta)$$

$$\angle COP=\frac{1}{2}(\pi-\delta)$$

$$\varphi=\angle COP-\angle COM=\frac{N-1}{2}\delta$$



合振动表达式

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=a\frac{\sin N\dfrac{\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}\cos\left(\omega t+\frac{N-1}{2}\delta\right)$$

$$A = 2R\sin\frac{N}{2}\delta = a\frac{\sin N\dfrac{\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$$

讨论

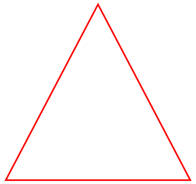
1. 若$\delta \to 0$ 则有 $A \to Na$

$$x = Na\cos\omega t$$

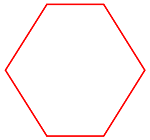
$$N\delta = 2k\pi$$

2. 若$N\dfrac{\delta}{2} \to k\pi$ 则有 $A \to 0$

$$x = 0$$



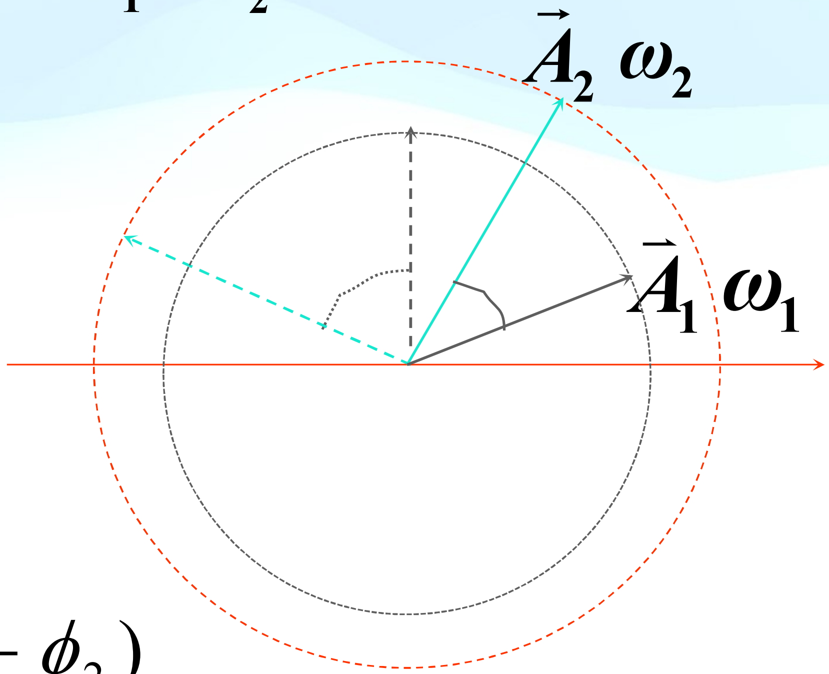
$N = 3, k = 1$



$N = 6, k = 1$

二、同一直线上两个不同频率谐振动的合成拍

设同方向、角频率分别为$\boldsymbol{\omega}_1$和$\boldsymbol{\omega}_2$的两简谐振动（$\boldsymbol{\omega}_2 > \boldsymbol{\omega}_1$），它们所对应的旋转矢量分别为$\vec{A}_1$和$\vec{A}_2$



$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

设：$A_1 = A_2 = A \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$

$$x = 2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right)$$

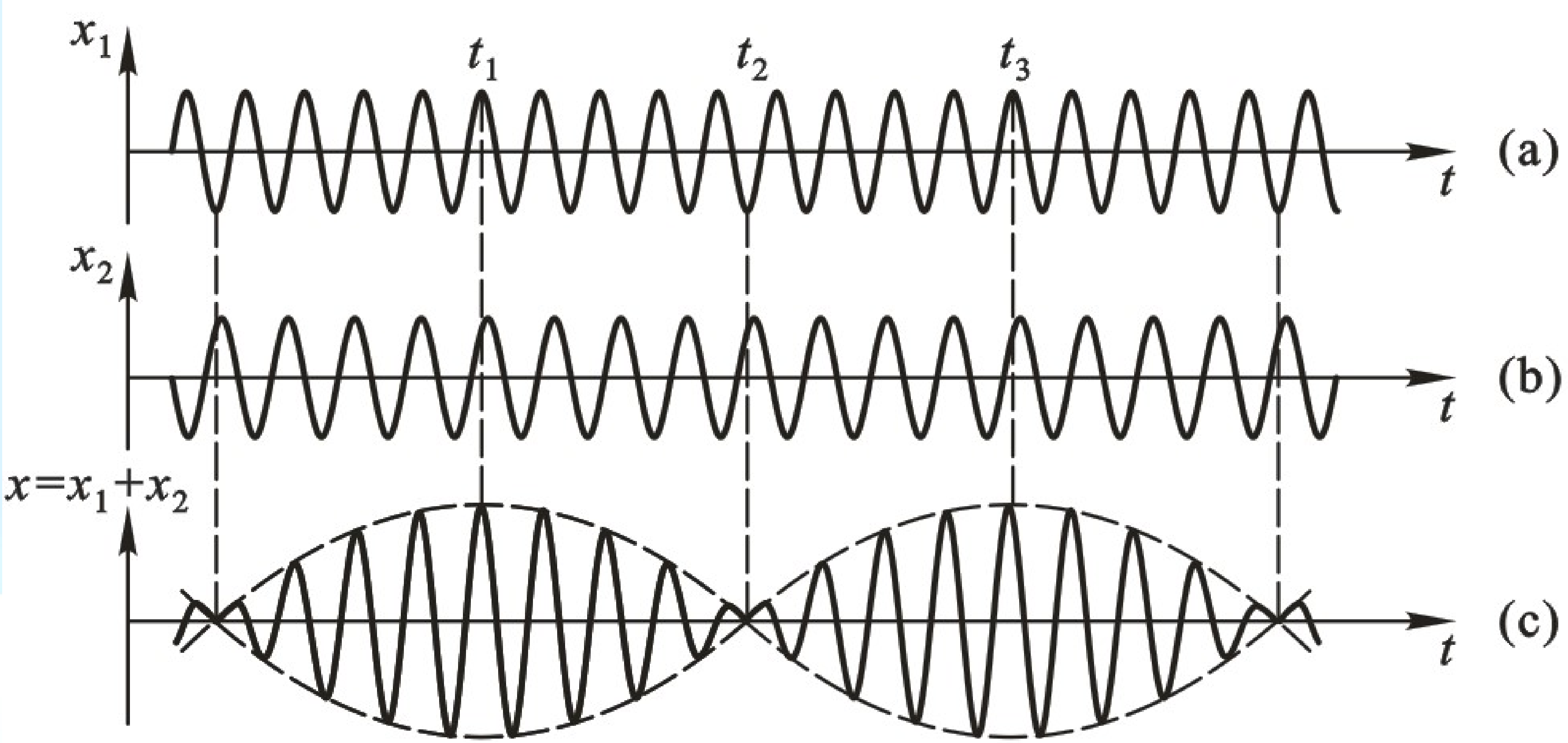
振幅：$\left|2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right|$

谐振因子：$\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi_0\right)$

当ω_2 、ω_1满足关系：$|\omega_2 - \omega_1| << \omega_1, \omega_2$

振幅随时间缓慢变化，谐振因子角频率 $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \approx \omega_1$

合振幅时强时弱周期性缓慢变化的现象:拍现象



拍的周期：

$$\tau = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$$

拍的频率：

$$v_b = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\pi} = |v_2 - v_1|$$

拍频为$\nu_2-\nu_1$也可由旋转矢量图示法说明：单位时间内A_2比A_1多转$\nu_2-\nu_1$圈，因此两者重合（即合振动加强）$\nu_2-\nu_1$次。

音叉的拍音演示实验