Lambda海算

刘 钦 2017年春

Reference

• https://github.com/txyyss/Lambda-Calculus/releases

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对
- Java基础语法 3

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对
- Java基础语法 3

Lamdar 演算

- 形式化地,我们从一个标识符(identifier)的可数无穷集合开始,比如{a, b, c, ..., x, y, z, x1, x2, ...},则 所有的lambda表达式可以通过下述以BNF范式表达的上下文无关文法描述:
 - <表达式> ::= <标识符>
 - <表达式>::=(λ<标识符>.<表达式>)
 - <表达式>::=(<表达式> <表达式>)
- 头两条规则用来生成函数,而第三条描述了函数是如何作用在参数上的。
- 例:
 - (λ x. 2x)
 - ($\lambda \times y$. x+y) a b 其实科里化(Currying)后变为((($\lambda x.(\lambda y.(y+x))$) a) b)单参数的Larmdar演算

定义 1. (λ 项) 假设我们有一个无穷的字符串集合,里面的元素被称为变量(和程序语言中变量)同,这里就是指字符串本身)。那么 λ 项定义如下:

- 1. 所有的变量都是 λ 项(名为原子);
- 2. 若M和N是 λ 项,那么(MN)也是 λ 项(名为应用)
- 3. 若 M 是 λ 项而 ϕ 是一个变量,那么 ($\lambda \phi$.M) 也是 λ 项(名为抽象)。

形式化定义

lambda 项

示例 1. (一些 λ 项) 下面这些都是 λ 项:

$$(\lambda x.(xy)) \qquad (x(\lambda x.(\lambda x.x))) \qquad ((((ab)c)d)e)$$

$$(((\lambda x.(\lambda y.(yx)))a)b) \qquad ((\lambda y.y)(\lambda x.(xy))) \qquad (\lambda x.(yz))$$

符号约定1-省略

符号约定 1. 本文中我们用大写英文字母表示任意 λ 项,用除 λ 以外的小写希腊字母如 ϕ , ψ 等表示任意 λ 项中的变量。

对于括号,则有如下的省略规定:

- 1. λ 项中最外层的括号可以省略,如 ($\lambda x.x$) 可以省略表示为 $\lambda x.x$;
- 2. 左结合的应用型的 λ 项,如 (((MN)P)Q),括号可以省略,表示为 MNPQ;
- 3. 抽象型的 λ 项 ($\lambda\phi$.M) 中,M 最外层的括号可以省略,如 λx .(yz) 可以省略为 $\lambda x.yz$ 。

也就是说,我们把省略形式视同定义 1 中的 λ 项。

示例 2. (省略表示) 下面给出了一些省略表示的 λ 项。

省略表示	完整的λ项
$\lambda x. \lambda y. y x a b$	$(\lambda x.(\lambda y.(((yx)a)b)))$
$(\lambda x.\lambda y.y.x)ab$	$(((\lambda x.(\lambda y.(yx)))a)b)$
$\lambda g.(\lambda x.g(xx)) \lambda x.g(xx)$	$(\lambda g.((\lambda x.(g(xx)))(\lambda x.(g(xx))))$
$\lambda x.\lambda y.ab\lambda z.z$	$(\lambda x.(\lambda y.((ab)(\lambda z.z))))$

定义 2. (语法全等) 我们用恒等号 "≡" 表示两个 λ 项完全相同。换句话说

 $M \equiv N$

表示 M 和 N 有完全相同的结构,且对应位置上的变量也完全相同。这意味着若 $MN \equiv PQ$ 则 $M \equiv P$ 且 $N \equiv Q$,若 $\lambda \phi. M \equiv \lambda \psi. P$ 则 $\phi \equiv \psi$ 且 $M \equiv P$ 。

定义 3. (自由变量) 对一个 λ 项 P, 我们可以定义 P 中自由变量的集合 FV(P) 如下:

- 1. $FV(\phi) = {\phi}$
- 2. $FV(\lambda \phi.M) = FV(M) \setminus \{\phi\}$
- 3. $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$

从第2可以看出抽象 $\lambda \phi$. M 中的变量 ϕ 是要从 M 中被排除出自由变量这个集合的。若 M 中有 ϕ ,我们可以说它是被约束的。据此可以进一步定义约束变量集合。值得注意的是,对同一个 λ 项来说,这两个集合的交集未必为空。

示例 4. (自由变量)

自由变量集合 FV(P) $\lambda x.\lambda y.xyab$ abcd abcd $xy\lambda y.\lambda x.x$ $\{x,y\}$

上面最后一个例子里,最左边的 x,y 是自由变量,而最右侧的 x 则是约束变量。若对 λ 项 P 有 $FV(P) = \emptyset$,则称 P 是 封闭的,这样的 P 又称为<mark>组合子</mark>。

自由变量和组合子

演算公理系统

- 置换公理(alpha 变换)
 - $\lambda xy.x+y => \lambda ab.a+b$
 - lambda x y. x + y =>lambda a b. a + b
- 代入公理 (beta 规约)
 - $(\lambda xy. x+y) a b=>a+b$
 - λ y.(λ x. x+y a) b
- 例如:
 - (λx.λy.x y) 7 2与(λy.7 y) 2与7 2是等价的

定义 6. (α **变换和** α **等价**) 设 $\lambda \phi$. M 出现在一个 λ 项 P 中,且设 $\psi \notin FV(M)$,那么把 $\lambda \phi$. M 替换成 $\lambda \psi$. $[\psi/\phi]M$

的操作被称为 P 的 α 变换。当且仅当若 P 经过有限步(包括零步) α 变换后,得到新的 λ 项 Q,则我们可以称 P 与 Q 是 α 等价的,又写作

$$P \equiv_{\alpha} Q$$

alpha 变换

定义 7. (β 规约)形如

 $(\lambda \phi.M)N$

的 λ 项被称为 β 可约式,对应的项

 $[N/\phi]M$

则称为 β 缩减项。当P中含有 $(\lambda\phi.M)N$ 时,我们可以把P中的 $(\lambda\phi.M)N$ 整体替换成 $[N/\phi]M$,用R指称替换后的得到的项,那么我们说P被 β 缩减为R,写做:

 $P \rhd_{1\beta} R$

当 P 经过有限步(包括零步)的 β 缩减后得到 Q,则称 P 被 β 规约到 Q,写做:

 $P \triangleright_{\beta} Q$

beta 规约

练习

- (λ x. x (x y)) m
- (λ x. y) n
- (λ x. (λ y. y x) z) v
- $(\lambda \times \times \times)(\lambda \times \times \times)$
- $(\lambda x. x x y)(\lambda x. x x y)$

定理

定理 1. 若 $M \equiv_{\alpha} M'$ 且 $N \equiv_{\alpha} N'$, 则 $[N/x]M \equiv_{\alpha} [N'/x]M'$

定理 2. (Church-Rosser 定理) 若 $P \triangleright_{\beta} M$ 且 $P \triangleright_{\beta} N$,则存在一个 λ 项 T 使得 $M \triangleright_{\beta} T \quad \text{且} \quad N \triangleright_{\beta} T.$

定理 3. 若 P 有 β 范式,则该范式在模 \equiv_{α} 的意义下唯一;也就是说若 P 有 β 范式 M 和 N,则 M $\equiv_{\alpha} N$ 。

定理 4. 对 P 的总是先 β 缩减最左侧最外侧的 β 可约式, 若这个过程能无限进行下去, 那么对 P 的所有任意顺序的规约都能无穷进行下去。

定理 5. λ 项是否有 β 范式是不可判定的。

符号约定2

符号约定 2. 本文中, 我们用粗体的大写字母及由它们组成的字符串代表具体的组合子, 不同的粗体字母字符串如不做特殊说明, 一般表示不同的组合子。当它们出现在 λ 项中时, 视同对应的组合子整体出现在 λ 项中。

用粗体大写字母及其字符串代表组合子,可用等号 "="表示。比如想用 **M** 代表 $\lambda x.x$,可写作: **M** = $\lambda x.x$ 。

简单例子

- 1. 定义 $\mathbf{I} = \lambda x.x$,则 $\mathbf{I} a = (\lambda x.x)a > \beta a$ 。
- 2. 定义SWAP= $\lambda x.\lambda y.yx$,则SWAP $ab \equiv (\lambda x.\lambda y.yx)ab \triangleright \beta ba$
- 3. $\mathbb{R} \times \mathbb{S} = \lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz), \mathbb{N} \times \mathbb{S} = (\lambda x. \lambda y. \lambda z. xz(yz)) \ a \ b \ c \triangleright \beta \ a \ c$ $(b \ c)$

可例

- Lambda> $I = \x$.x
- Lambda> I a
- a
- Lambda> SWAP = $\xspace x.\yspace x$
- Lambda> SWAP a b
- b a
- Lambda> $S = \langle x. \rangle z.x z(y z)$
- Lambda> Sabcac(bc)
- Lambda> I = S I
- Lambda> I m n
- n (m n)

至今

- 人们至今并没有找到更强的生成函数的操作,没有找到更强的计算模型,也没有 找到直觉可计算的函数不属于递归函数集和图灵可计算函数集,那么自然就有理 由假设
 - 递归函数集 = 图灵可计算函数集 = 直觉可计算的函数集合
- 从而有理由用递归函数集和图灵可计算函数集,来定义可计算函数的集合。因此大多数数学家和计算机科学家认同丘奇-图灵论题也就不足为奇了。
- 由于整数可以归结为自然数,有理数可以用"整数对"去表示,而实数又可以用有理数去逼近,因此,现代数字计算机可以计算的本质上都是递归函数(图灵可计算函数);非递归函数则是计算机不可计算的。

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对
- Java基础语法 3

"模拟"自然数

- **ZERO** = $\lambda f.\lambda x.x$
- SUCC = $\lambda n \cdot \lambda f \cdot \lambda x \cdot f (n f x)$
- PLUS = $\lambda m. \lambda n. m$ SUCC n
- MULT = $\lambda m. \lambda n. \lambda f. m (n f)$
- POW = $\lambda b. \lambda e. e. b$
- **PRED** = $\lambda n. \lambda f. \lambda x. n (\lambda g. \lambda h. h (g f)) (\lambda u. x) (\lambda u. u)$
- SUB = $\lambda m. \lambda n. n$ PRED m

结果

- 定义
 - Lambda> ZERO = $f.\x.x$
 - Lambda> SUCC = $\n.\f.\x.f$ (n f x)
- 示例
 - Lambda> SUCC ZERO
 - \n.\f.\x.f (n f x) \f.\x.x
 - \f.\x.f (\f.\x.x) f x
 - \f.\x.f x
 - Lambda> SUCC (SUCC ZERO)
 - \f.\x.f (f x)
 - Lambda> SUCC(SUCC (SUCC ZERO))

- \f.\x.f (f (f x))
- Lambda> SUCC(SUCC(SUCC (SUCC ZERO)))
- \f.\x.f (f (f (f x)))

- 定义
 - Lambda> ONE = SUCC ZERO
 - Lambda> TWO = SUCC ONE
 - Lambda> THREE = SUCC TWO
 - Lambda> FOUR = SUCC THREE

- 示例
 - Lambda> PLUS TWO THREE
 - \f.\x.f (f (f (f (f x))))
 - Lambda> POW TWO FOUR

 - Lambda> MULT THREE TWO
 - \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))
 - Lambda> SUB FOUR TWO
 - \f.\x.f (f x)
 - Lambda> PRED ONE
 - \f.\x.x

"模拟"逻辑

- 定义
 - Lambda> TRUE = $\xspace x.\yspace y.\xspace x.\yspace x.\yspace x.\yspace x.\yspace x.\xspace x.\yspace x.\xspace x.\xspace$
 - Lambda> FALSE = \x.\y.y
- 逻辑
 - Lambda> AND = p.q.p q p
 - Lambda> OR = p.q.p p q
 - Lambda> NOT = p.a.b.p b a
 - Lambda> IF = \p.\a.\b.p a b
- 示例
- Lambda> AND TRUE FALSE
- \x.\y.y
- Lambda> AND TRUE TRUE
- \x.\y.x

- Lambda> OR TRUE FALSE
- \x.\y.x
- Lambda> NOT TRUE
- \a.\b.b
- Lambda> NOT (NOT TRUE)
- \a.\b.a
- Lambda> IF TRUE a b
- a
- Lambda> IF FALSE a b
- b
- Lambda> IF (OR FALSE FALSE) a b
- b

"模拟"谓词

• 定义

- Lambda> ISZERO = \n.n (\x.FALSE) TRUE
- Lambda> LEQ = \m.\n.ISZERO (SUB m n)
- Lambda> EQ = \m.\n. AND (LEQ m n) (LEQ n m)

• 示例

- Lambda> ISZERO TWO
- \x.\y.y
- Lambda> ISZERO ZERO
- \x.\y.x
- Lambda> LEQ ONE ONE
- \x.\y.x
- Lambda> LEQ TWO ONE
- \x.\y.y
- Lambda> IF (EQ ONE TWO) a b
- b

"模拟"逐数

- Lambda> $MAX = \m.\n.\line (LEQ m n) n m$
- Lambda> MAX ONE TWO
- \f.\x.f (f x)
- Lambda> MAX FOUR TWO
- \f.\x.f (f (f (f x)))
- Lambda> MIN = $\mbox{m.}\n.$ IF (LEQ m n) m n
- Lambda> MIN TWO THREE
- \f.\x.f (f x)

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对
- Java基础语法 3

"模拟"递归

- - FACT = λn .IF (ISZERO n) ONE (MULT n (FACT (PRED n)))
- 有一个问题
 - FACT在Lamdar运算中不能递归定义

多一个参数

- Lambda> FACT1 = $f.\n.IF$ (ISZERO n) ONE (MULT n (f f (PRED n)))
- Lambda> FACT = FACT1 FACT1
- Lambda> FACT THREE
- \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))

定义一个组合子

- Lambda> W = x.xx
- Lambda> FACTD = W (\f.\n.IF (ISZERO n) ONE (MULT n (f f (PRED n))))
- Lambda> FACTD THREE
- \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))

双重应用

- Lambda> ADD = W (\f.\n.\m.IF (ISZERO m) n (f f (SUCC n) (PRED m)))
- Lambda> ADD TWO FOUR
- \f.\x.f (f (f (f (f (f x)))))
- Lambda> ADD FOUR FOUR
- \f.\x.f (f (f (f (f (f (f (f x)))))))

我们的目的是什么?

• 只用一重应用来定义递归函数。

Y Combinator

- 不动点
 - f(x) = x
- Y Combinator
 - Lambda>:set +hold
 - Lambda> Y
 - \g.(\x.g (x x)) \x.g (x x)

YF就是F的不动点

• **Y**F

$$\bullet = (\lambda g.(\lambda x.g(x x)) \lambda x.g(x x)) F$$

$$= \beta (\lambda x.F(x x)) \lambda x.F(x x)$$

$$\bullet = \beta F((\lambda x.F(x x)) \lambda x.F(x x))$$

• $=\beta F(YF)//Y$ 的定义带入F

利用不动点消除两重应用

利用不动点消除两重应用

- FACT THREE
- $=\beta$ Y FACT2 THREE (由定义)
- = β FACT2 (Y FACT2) THREE (因为 Y $F = \beta F$ (Y F))
- =β IF (ISZERO THREE) ONE (MULT THREE (Y FACT2
 TWO))
- = β MULT THREE (Y FACT2 TWO)

练习

- $R = (\lambda r n . Z n O(n S(r(P n))))$
 - This definition tells us that the number n is tested: if it is zero the result of the sum is zero.
 If n is not zero, then the successor function is applied n times to the recursive call (the argument r) of the function applied to the predecessor of n.
- 规约YR3

图灵不动点组合子

- Lambda> T = (x.y.y.(x x y)) x.y.y.(x x y)
- Lambda> FACTT = T FACT2

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算与逻辑谓词
- 递归与Y Combinator
- 有序对
- Java基础语法 3

还记得对数据抽象的有序对

构建有序对

- 合并一个表
 - Lambda> CONS = $\x.\y.\f. f. x y$
- 取出表的第一个元素
 - Lambda> CAR = \p.p TRUE
- 去除表的第一个元素
 - Lambda> CDR = \p.p FALSE
- 空的有序对
 - Lambda> NIL = $\xspace \times$ TRUE
- 谓词用于判断一个有序对是否为空
 - Lambda> NULL = p.p (x.y.FALSE)

验证这些基本定义

- Lambda> CONS a (CONS b (CONS c NIL))
- \f.f a \f.f b \f.f c \x.\x.\y.x
- Lambda> CAR (CONS a (CONS b (CONS c NIL)))
- a
- Lambda> CDR (CONS a (CONS b (CONS c NIL)))
- \f.f b \f.f c \x.\x.\y.x
- Lambda> CAR (CDR (CONS a (CONS b (CONS c NIL))))
- b
- Lambda> NULL (CDR (CONS a (CONS b (CONS c NIL))))
- \x.\y.y
- Lambda> NULL NIL
- \x.\y.x

定义长度函数

- Lambda> LENGTH = Y (\g.\c.\x. NULL x c (g (SUCC c) (CDR x))) ZERO
- Lambda> LENGTH NIL
- \f.\x.x
- Lambda> LENGTH (CONS a (CONS b (CONS c NIL)))
- \f.\x.f (f (f x))
- Lambda> LENGTH (CONS a (CONS b (CONS c (CONS d NIL))))
- \f.\x.f (f (f (f x)))

• Deadline: March 27, 23:59:59

Lambda 验算

- Submit:
 - Word, Txt或者手写草稿拍照

- 给出完整的具体推导步骤
- 1.
- | = \x.x
- $S = \langle x. \rangle Z.x z(y z)$
- I = S I
- 求Imn
- 2.
- ZERO = $f.\x.x$
- SUCC = $\ln f. \ (n f x)$
- 求 SUCC (SUCC ZERO)
- 3
- POW = \b.\e.e b

- 求POW TWO THREE
- 4.
- TRUE = $\xspace x.\yspace y.\xspace x.\yspace x.\yspa$
- FALSE = \x.\y.y
- AND = $\protect\ p.\q. p q p$
- OR = p.q.p.p.q
- NOT = \p.\a.\b.p b a
- IF = \p.\a.\b.p a b
- 求NOT (NOT TRUE)
- 求IF (OR FALSE FALSE) a b
- 5 LEQ = \m.\n.ISZERO (SUB m n)
- 求大于等于GEQ

- 写出每一步推导过程
- 6.Lambda> FACT1 = \f.\n.IF (ISZERO n) ONE (MULT n (f f (PRED n)))
- Lambda> FACT = FACT1 FACT1
- 求 FACT THREE
- 7.Lambda> ADD = W (\f.\n.\m.IF (ISZERO m) n (f f (SUCC n) (PRED m)))
- 求 ADD TWO FOUR
- 8. Lambda> FACT2 = \f.\n.IF (ISZERO n) ONE (MULT n (f (PRED n)))
- Lambda> FACTY = Y FACT2
- 求FACTY THREE
- 9. Lambda> CONS a (CONS b (CONS c NIL))
- 求CAR (CDR (CONS a (CONS b (CONS c NIL))))
- 10. 求 有序对的 LENGTH

Outline

- Lambda演算定义
- 算术计算
- 逻辑谓词
- Y Combinator
- 有序对
- Java基础语法 3
 - 重复
 - 数据结构

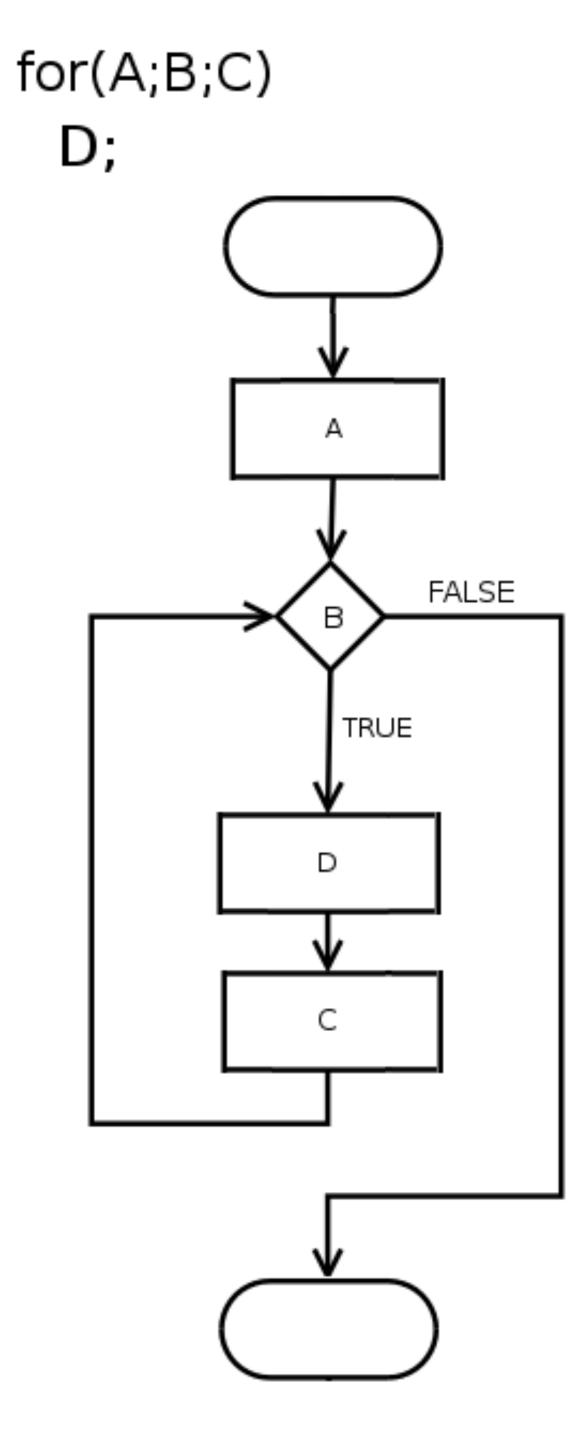
重复

典型场景

- 计数器
 - 提示用户输入5个数字, 计算他们的和
- 直到条件满足
 - 当用户输入键入无效的输入值,不要退出,而是不断提示用户输入,知道获得有效的输入值
- 递归
 - 通过递归实现循环
- 嵌套循环
 - 乘法表

流程图

开结操条流



Iteration

```
while(Boolean-expression) statement
 statement
while(Boolean-expression);
for(initialization; Boolean-expression; step) statement
```

foreach syntax

```
//: control/ForEachFloat.java
import java.util.*;
public class ForEachFloat {
  public static void main(String[] args) {
     Random rand = new Random(47);
    float f[] = new float[10];
    for(int i = 0; i < 10; i++)
       f[i] = rand.nextFloat();
    for(float x : f)
       System.out.println(x);
} /* Output:
//: control/ForEachString.java
public class ForEachString {
 public static void main(String[] args) {
   for(char c : "An African Swallow".toCharArray() )
     System.out.print(c + " ");
  /* Output:
An African Swallow
*///:~
```

break & continue

- break
 - breaks out of the inner iteration and you end up in the outer iteration.
 - break label (breaks all the way out to label, but it does not reenter the iteration)
- continue
 - the continue moves back to the beginning of the inner iteration.
 - continue label (reenter the iteration)

return

- Specifies what value a method will return
- Causes the current method to exit

Infamous goto

- 1968
- Edsger W. Dijkstra
- A Case against the GO TO Statement

- Deadline: March 22, 23:59:59
- 卡蒙内心率
 - TargetHeartRate =(((220-age)-RestingHR)*intensity)+RestingHR
- 示例输出
 - Resting Pulse: 65 Age: 22 //提示输入
 - Intensity | Rate
 - -----
 - 55% |138bpm
 - 60% |145bpm
 - 0 0 0
 - 95% |191bpm
- Submit:
 - 源码

数据结构

数据结构

- 数据的组织
 - 数组
 - 列表
 - 哈希
 - 映射

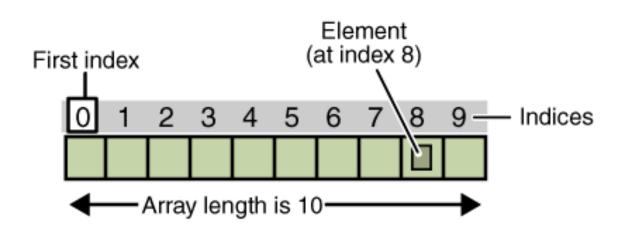
数据结构往往和循环一起使用

典型场景

- 打印一组姓名中的每一个
- 根据随机数,随机从答案数组选一个
- 从员工列表中删除一个元素
- 抽奖
- 计算统计信息
- 过滤值
- 排序记录

Array

- Creating
 - int[] anArray; // declares an array of integers
- Initializing
 - anArray[0] = 100; // initialize first element
 - int[] anArray = {100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000};
- Accessing
 - System.out.println("Element 1 at index 0: " + anArray[0]);
- Length
 - System.out.println(anArray.length);
- Copying
 - public static void arraycopy(Object src, int srcPos, Object dest, int destPos, int length)



Copy数组

```
class ArrayCopyDemo {
    public static void main(String[] args) {
       char[] copyFrom = { 'd', 'e', 'c', 'a', 'f', 'f', 'e',
                'i', 'n', 'a', 't', 'e', 'd' };
       char[] copyTo = new char[7];
       System.arraycopy(copyFrom, 2, copyTo, 0, 7);
       System.out.println(new String(copyTo));
```

Copy数组

```
class ArrayCopyOfDemo {
    public static void main(String[] args) {
       char[] copyFrom = {'d', 'e', 'c', 'a', 'f', 'f', 'e',
         'i', 'n', 'a', 't', 'e', 'd'};
       char[] copyTo = java.util.Arrays.copyOfRange(copyFrom, 2, 9);
       System.out.println(new String(copyTo));
```

一维数组

```
    class MultiDimArrayDemo {

     public static void main(String[] args) {
       String[][] names = {
         {"Mr. ", "Mrs. ", "Ms. "},
          {"Smith", "Jones"}
       // Mr. Smith
       System.out.println(names[0][0] + names[1][0]);
       // Ms. Jones
       System.out.println(names[0][2] + names[1][1]);
```

regular array

<pre>ArrayList<string> myList = new ArrayList<string>();</string></string></pre>	String [] myList = new String[2];	
<pre>String a = new String("whoohoo"); myList.add(a);</pre>	String a = new String("whoohoo"); myList[0] = a;	
<pre>String b = new String("Frog"); myList.add(b);</pre>	String b = new String("Frog"); myList[1] = b;	
<pre>int theSize = myList.size();</pre>	<pre>int theSize = myList.length; String o = myList[1]; Starts to length; starts to length;</pre>	it
Object o = myList.get(1);	really dire	feren
<pre>myList.remove(1); boolean isIn = myList.contains(b);</pre>	<pre>myList[1] = null; boolean isIn = false;</pre>	
ArrayList	<pre>for (String item : myList) { if (b.equals(item)) { isIn = true; break; }</pre>	

- Deadline: March 22, 23:59:59
- 编写一个程序,提示输入某个网站的响应时间,以毫秒表示,不断让用户输入值,直到用户输入"done"。改程序应打印平均时间(mean),最小时间(min),最大时间(max) 和标准差(standard deviation)
- 示例输出
 - Enter a number: 100
 - Enter a number: 200
 - Enter a number: 1000
 - Enter a number: 300
 - Enter a number: done
 - Numbers: 100,200,1000,300
 - The average is 400.
 - The minimum is 100.
 - The maximum is 1000.
 - The standard deviation is 400.25.
- Submit:
 - 源码