高等代数 II

第 6 次讨论班

2023 年 4 月 10 日

本次讲义为对偶空间的相关问题, 为线性空间理论的加深理解.

问题 1. 基础知识

1. 叙述对偶空间的定义, 并证明其为线性空间,
2. 证明有限维空间的对偶空间与原空间维数相同,
3. 给出二次对偶的自然同构,
4. 给出线性映射的对偶映射的定义.

问题 2. 证明对偶映射的相关性质:

1. 对于任意的 $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, 有 $(S+T)' = S' + T'$,
2. 对于任意的 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, 有 $(\lambda T)' = \lambda T'$,
3. 对于任意的 $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $S \in \mathcal{L}(V, W)$, 有 $(ST)' = T'S'$.

问题 3. 证明零化子的相关性质:

1. 对子空间 $U \subset V$, $U^{\perp}$ 是 V' 的子空间,
2. 设 U 是有限维线性空间 V 的子空间, 证明:

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V.$$

问题 4. 设 V 和 W 是有限维线性空间, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 证明对偶映射与零化子的性质:

- $\ker T' = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$,
- $\dim \ker T' = \dim \ker T + \dim W - \dim V$,
- T 是满射当且仅当 T' 是单射.
- $\operatorname{Im} T' = (\ker T)^{\perp}$,
- $\dim \operatorname{Im}(T') = \dim \operatorname{Im} T$,
- T 是单射当且仅当 T' 是满射.

问题 5. 设 V 和 W 是有限维线性空间, $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 证明: T' 的矩阵为 T 的矩阵的转置矩阵. 其中取定 V, W 的基底时, V', W' 分别取其对偶基.