Задание III

Вычислить интеграл Лебега-Стильтьеса

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, dF(x)$$

$k = 7$, $l = 10$, вариант 7.

$[a, b] = [-21, 30]$

$f(x) = 2\sin 10x - 3\mathcal{X}(3x + \frac{7}{5}) - |x|$

$F(x) = 2e^x + 2\mathcal{X}(x-1) + \mathcal{X}(3x-7) + 2x^3$

Решение:

Воспользуемся св-вом интеграла - аддитивностью по мере, разобьем интеграл на сумму четырех интегралов, которые вычислим отдельно:

① $\int\limits_{[-21,30]} f(x)\, d\,2e^x =$

Ф-ия $2e^x$ - абсолютно непрерывна на $[-21, 30] \Rightarrow$

$= 2\int\limits_{[-21,30]} e^x f(x)\, dx = 2\left(\int\limits_{-21}^{30} 2\sin 10x \cdot e^x\, dx + \right.$

$\left. - \int\limits_{-21}^{30} 3\mathcal{X}(3x + \frac{7}{5}) \cdot e^x dx - \int\limits_{-21}^{30} |x| \cdot e^x dx\right) =$

1.1) $\int\limits_{-21}^{30} \sin 10x \cdot e^x dx = \int\limits_{-21}^{30} \sin 10x\, d e^x =$

$= \sin 10x \cdot e^x - \int\limits_{-21} e^x d \sin 10x = \sin 10x \cdot e^x - 10\int\limits_{-21}^{30} e^x \cos 10x\, dx =$

$$= \sin 10x \cdot e^x - 10\cos 10x \cdot e^x + 10\int_{-21}^{30} e^x \, d\cos 10x =$$

$$= \sin 10x \cdot e^x - 10\cos 10x \cdot e^x - 100\int_{-21}^{30} e^x \sin 10x \, dx$$

$$\Rightarrow 101 \int_{-21}^{30} e^x \sin 10x \, dx = \sin 10x \cdot e^x - 10\cos 10x \cdot e^x$$

$$\Rightarrow \int_{-21}^{30} e^x \sin 10x \, dx = \frac{e^x \sin 10x - 10 e^x \cos 10x}{101} \Bigg|_{-21}^{30} =$$

$$= \frac{e^{51}\sin 300 - 10e^{51}\cos 300 + \sin 210 + 10\cos 210}{101 e^{21}}$$

1.2) $\int_{-21}^{30} \chi\left(3x + \frac{7}{5}\right) \cdot e^x \, dx = \int_{-21}^{30-\frac{7}{15}} 0 \cdot e^x \, dx + \int_{-\frac{7}{15}}^{30} 1 \cdot e^x \, dx =$

разрыв в $-\frac{7}{15}$

$$= e^x \Big|_{-\frac{7}{15}}^{30} = e^{30} - e^{-\frac{7}{15}}$$

1.3) $\int_{-21}^{30} |x| \cdot e^x \, dx = -\int_{-21}^{0} x \cdot e^x \, dx + \int_{0}^{30} x e^x \, dx \ (=)$

$$\int x e^x dx = \int x \, de^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x-1)$$

$$(=) \ - e^x(x-1)\Big|_{-21}^{0} + e^x(x-1)\Big|_{0}^{30} =$$

$$= -\left(1 \cdot (-1) - e^{-21} \cdot (-22)\right) + 29 e^{30} - 1 \cdot (-1) =$$

$$= -\left(-1 + e^{-21}\right) + 29 e^{30} + 1 = 29 e^{30} - e^{-21} + 2$$

$$\Rightarrow 2\int_{-21}^{30} e^x f(x)\,dx =$$

$$= 4\cdot \frac{e^{51}\sin 300 - 10e^{51}\cos 300 + \sin 210 + 10\cos 210}{101 e^{21}} - 6\cdot e^{30} + 6\cdot e^{-\frac{7}{15}} - 38 e^{30} + 2e^{-21} - 4$$

$\approx -6842639778092446,8$

(2) $$\int_{[-21,30]} f(x)\, d2\chi(x-1) =$$

разрыв в 1 на 2

$$= 2\cdot 2\sin(10\cdot 1) - 2\cdot 3\,\chi\left(3\cdot 1 + \frac{7}{5}\right) - 2\cdot|1| =$$

$$= 4\sin 10 - 8 \approx -10,1761$$

(3) $$\int_{[-21,30]} f(x)\, d\chi(3x-7) =$$

разрыв в $\frac{7}{3}$ на 1

$$= 1\cdot 2\sin\left(10\cdot\frac{7}{3}\right) - 1\cdot 3\,\chi\left(3\cdot\frac{7}{3}+\frac{7}{5}\right) - 1\cdot\left|\frac{7}{3}\right| =$$

$$= 2\sin\frac{70}{3} - \frac{16}{3} \approx -7,2813$$

(4) $$\int_{[-21,30]} f(x)\, d2x^3 =$$

ф-ция $2x^3$ абсолютно непрерывна на $[-21,30] \Rightarrow$

$$= 6\int_{[-21,30]} x^2 f(x)\,dx = 6\left(\int_{-21}^{30} 2\sin 10x\cdot x^2\,dx + \right.$$

$$\left. - \int_{-21}^{30} 3\,\chi\left(3x+\frac{7}{5}\right)\cdot x^2\,dx - \int_{-21}^{30}|x|\cdot x^2\,dx\right)$$

4.1) $\int \sin 10x \cdot x^2\,dx = \int \sin - \int x^2\, d\,\frac{\cos 10x}{10} =$

$= -\frac{x^2 \cdot \cos 10x}{10} + \frac{1}{10}\int \cos 10x\, dx^2 = \frac{1}{10}\Big(-x^2\cos 10x +$

$+\frac{2}{10}\int x\, d\sin 10x\Big) = \frac{1}{10}\Big(-x^2\cos 10x + \frac{2}{10}\big(x\sin 10x +$

$-\int \sin 10x\, dx\big)\Big) = \frac{1}{10}\Big(-x^2\cos 10x + \frac{2}{10}\big(x\sin 10x +$

$+\frac{1}{10}\cos 10x\big)\Big) =$

$= -\frac{1}{10}x^2\cos 10x + \frac{2}{100}x\sin 10x + \frac{2}{1000}\cos 10x + C$

$\Rightarrow \int_{-21}^{30} \sin 10x \cdot x^2\,dx =$

$= -\frac{1}{10}x^2\cos 10x\Big|_{-21}^{30} + \frac{1}{50}x\sin 10x\Big|_{-21}^{30} + \frac{1}{500}\cos 10x\Big|_{-21}^{30} =$

$= -\frac{1}{10}\big(900\cdot\cos 300 - 441\cdot\cos 210\big)$

$+\frac{1}{50}\big(30\sin 300 + 21\sin 210\big)$

$+\frac{1}{500}\big(\cos 300 - \cos 210\big) =$

$= \frac{1}{500}\big(300\sin 300 - 44999\cos 300 - 210\sin 210 + 22099\cos 210\big)$

4.2) $\int_{-21}^{30} \chi\big(3x+\frac{7}{5}\big)\cdot x^2\,dx = \int_{-21}^{-\frac{7}{15}} 0\cdot x^2\,dx + \int_{-\frac{7}{15}}^{30} x^2\,dx =$

розрив в $-\frac{7}{15}$

$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{7}{15}}^{30} = \frac{9112 5343}{10125}$

4.3) $\int\limits_{-21}^{30} |x| \cdot x^2\,dx = -\int\limits_{-21}^{0} x^3\,dx + \int\limits_{0}^{30} x^3\,dx =$

$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-21}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{30} = + \frac{21^4}{4} + \frac{30^4}{4} = \frac{1004481}{4}$

$\Rightarrow 6 \int\limits_{-21}^{30} x^2 f(x)\,dx =$

$= \frac{12}{500}\left(300\sin 300 - 44999\cos 300 - 210\sin 210 + 22049\cos 210\right)$

$-18 \cdot \frac{91125343}{10125} - 6 \cdot \frac{1004481}{4}$

$\approx -1669175{,}5282$

Таким образом,

$\int\limits_{[-21,\,30]} f(x)\,dF(x) \approx -684263977802446{,}8$

$-10{,}1761$

$-7{,}2813$

$-1669175{,}5282 \approx$

$\approx \underline{-684263979471639{,}6}$