Star Trek

Robin Schmidt, Johannes Piotrofski

Juni 2019

Aufgabe 1: Dynamik und Energieerhaltung

Gegeben ist der Hamiltonian H:

$$H = \frac{(p_x + y)^2}{2} + \frac{(p_y - x)^2}{2} - \Omega(x, y) \tag{1}$$

Für die numerische Integration wird der Hamiltonian H in zwei Teile geteilt:

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 \\ &= H_1 - \Omega \end{aligned}$$

Gemäß der Hamiltonschen Mechanik ergeben sich explizite Vorschriften für die Entwicklung der Koordinaten und Impulse nach einem Zeitschritt Δt.

$$\begin{aligned} \vec{q}(t + \Delta t) &= \vec{q} + \Delta t \cdot \dot{\vec{q}} \\ \vec{p}(t + \Delta t) &= \vec{p} + \Delta t \cdot \dot{\vec{p}} \end{aligned}$$

Dabei gilt:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \tag{2}$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \tag{3}$$

Zu zeigen sind die Herleitung der Bewegungsgleichungen und die Energieerhaltung im System.

Herleitung der Bewegungsgleichgungen

Zu zeigen ist, dass aus Gl. 1 mit Gl. 3 die Bewegungsgleichungen in Gl. 4 folgen.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei:

$$\Omega_x = \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{-(u(u + x - 1))}{((u + x - 1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{((1 - u)(u + x))}{((u + x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + x \tag{5}$$

$$\Omega_y = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{-(uy)}{((u + x - 1)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{((1 - u)y)}{((u + x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + y \tag{6}$$

Sowie:

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - u}{\sqrt{(x + u)^2 + y^2}} + \frac{u}{\sqrt{(x - 1 + u)^2 + y^2}} + \frac{u(1 - u)}{2} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + y \\ p_y - x \end{pmatrix} \\
-\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} &= \begin{pmatrix} \dot{p_x} \\ \dot{p_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_y - x + \Omega_x \\ -p_x - y + \Omega_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{y} + x - x + \Omega_x \\ -\dot{x} + y - y + \Omega_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{y} + \Omega_x \\ -\dot{x} + \Omega_y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{p_x} + \dot{y} \\ \dot{p_y} - \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x + 2\dot{y} \\ \Omega_y - 2\dot{x} \end{pmatrix}
$$

Nach einsetzen der berechneten Ausdrücke für $\dot{p_x}$ und $\dot{p_y}$ folgen direkt die Bewegungsgleichungen (4).

Energieerhaltung

Gegeben ist das Jacobi-Integral: $E = \Omega - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}$, zu zeigen ist $\dot{E} = 0$. Im folgenden sind x und y immer Funktionen der Zeit.

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{(1-u)}{\sqrt{(x+u)^2+y^2}} + \frac{u}{\sqrt{(x-1+u)^2+y^2}} + \frac{u(1-u)}{2} - \frac{1}{2}(x'^2+y'^2)\right] =
$$

$$
\frac{-u((x+u-1)x'+yy')}{((x+u-1)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{(1-u)((x+u)x'+yy'))}{((x+u)^2+y^2)^{3/2}} + (xx'+yy') + (-x'x''-y'y'')
$$

Mit Gl. 4 folgt:

$$
\begin{aligned}
(-x'x''-y'y'') &= (-x'(\Omega_x+y') - y'(\Omega_y - x')) \\
&= \big[-x'(\frac{-(u(u+x-1))}{((u+x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} -
\end{aligned}
$$

$$
\frac{((1-u)(u+x))}{((u+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + x + y'\big] - y'\Big[\frac{-(uy)}{((u+x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{((1-u)y)}{((u+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - x')\Big]
$$

Ausmultiplizieren und Umstellen der Gleichung zeigt, dass die Summe über alle Terme Null ergibt. Damit ist die Erhaltung des Jacobi-Integrals bestätigt.

Aufgabe 2: Lagrange-Punkte

Im zwei-Körper-System lassen sich verschiedene Punkte finden für die die Summe aller Kräfte null wird und auf denen ein gedachter Testkörper entsprechend ruhen könnten. Diese Punkte sind im rotierenden Koordinatensystem fest. Drei davon liegen auf der unmittelbaren Verbindungslinie der beiden schweren Körper, deren Koordinaten werden hier annäherungsweise berechnet.

L_1

Mithilfe von Betrachtungen zu Gravitationskräften und einer Zentripetalkraft gelangt man zu der Gleichung:

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} = \frac{M_2}{r^2} + \frac{M_1}{R^2} - \frac{r(M_1+M_2)}{R^3} \tag{8}$$

Dabei ist R ist der Abstand zwischen den beiden Massen $M_1 = 0.95$ und $M_2 = 0.05$ welcher in der Problemstellung als $R = 1$ definiert wird. r bezeichnet den Abstand zwischen L_1-Punkt und kleinerer Masse M_2. Hier wird das Gebiet innerhalb des Orbits der kleineren Masse betrachtet. Die Summe der Massen ergibt sich ebenfalls zu 1, so dass die Gleichung umgeformt werden kann:

$$0 = M_2 - \frac{M_1 r^2}{(1-r)^2} + M_1 r^2 - r^3 \tag{9}$$

Eine approximative Lösung für die Gleichung liefert $r \approx 0.234$. Diese kann gefunden werden indem der Wertebereich $0 < r < 1$ überprüft wird, weil dort Lösungen erwartet werden.

L_2

Eine analoge Betrachtung kann für den außerhalb des Orbits der kleinen Masse gelegenen Lagrange-Punkt durchgeführt werden:

$$\frac{M_1}{(R+r)^2} + \frac{M_2}{r^2} = \frac{M_1}{R^2} + \frac{r(M_1+M_2)}{R^3} \tag{10}$$

$$0 = M_2 + \frac{M_1 r^2}{(1-r)^2} - M_1 r^2 - r^3 \tag{11}$$

Eine Lösung bietet $r \approx 0.278$.

L_3

Für die Berechnung von L_3 wird das Koordinatensystem in den Antipodalpunkt des Mondes gelegt, also in der selben Entfernung auf der anderen Seite der Erde. r beschreibt nun die Distanz zwischen dem Antipodalpunkt und L_3.

$$\frac{M_1}{(R-r)^2} + \frac{M_2}{(2R-r)^2} = \left(\frac{M_2}{M_1+M_2}R + R - r\right)\frac{(M_1+M_2)}{R^3} \tag{12}$$

Eine Lösung bietet $r \approx 0.029$. L_3 ist also im Wesentlichen der Antipodalpunkt des Mondes.

Umgerechnet ins ursprüngliche Koordinatensystem ergibt das die folgenden Punkte die auch in Abb. 1 dargestellt sind:

$$\begin{aligned}
L_1 &= (0.716, 0) &\rightarrow\quad & \Omega(0.716, 0) = 1.734 \\
L_2 &= (1.228, 0) &\rightarrow\quad & \Omega(1.228, 0) = 1.7009 \\
L_3 &= (1.021, 0) & &
\end{aligned}$$

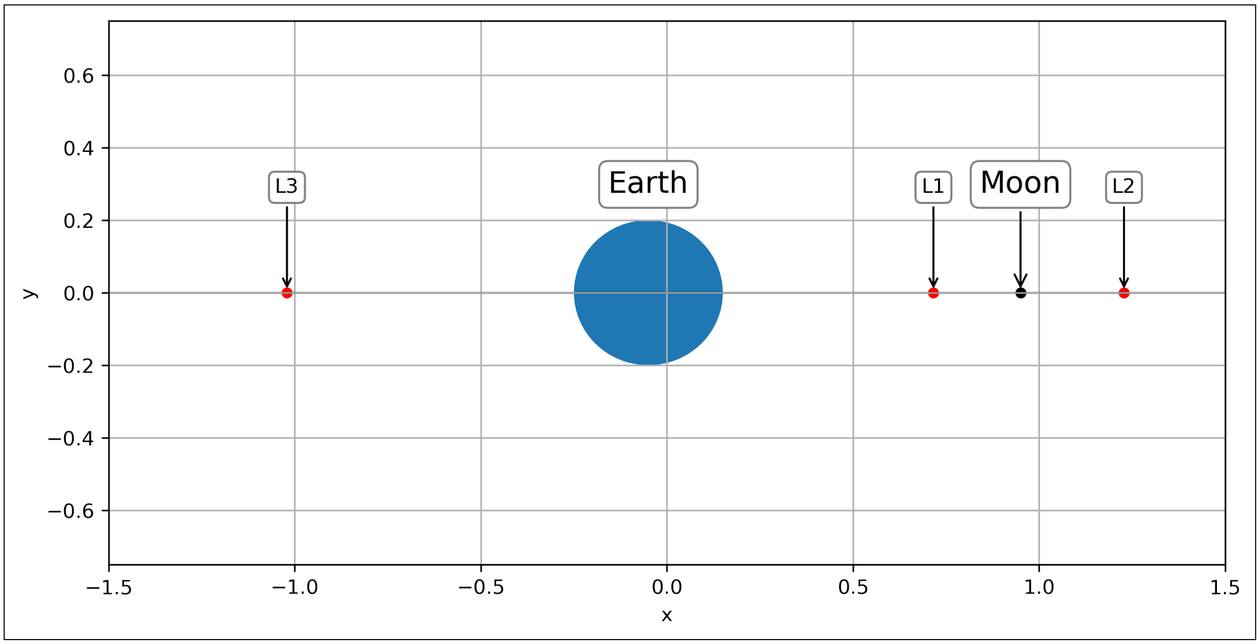

Abbildung 1: Die ersten 3 Lagrange-Punkte die auf der Verbindungslinie von Erde und Mond liegen.

Aufgabe 3: Hills-Regionen

Für Werte der initialen Energie von etwa $E = 1.65$ ensteht ein „Hals“ der einem Raumschiff den Eintritt ins Erde-Mond-System von außen bzw. den umgekehrten Weg erlauben würde. Eine Animation der Veränderung der Hills-Regionen für verschiedene Energien kann hier angesehen werden:
https://imgur.com/sE3ZkUR.

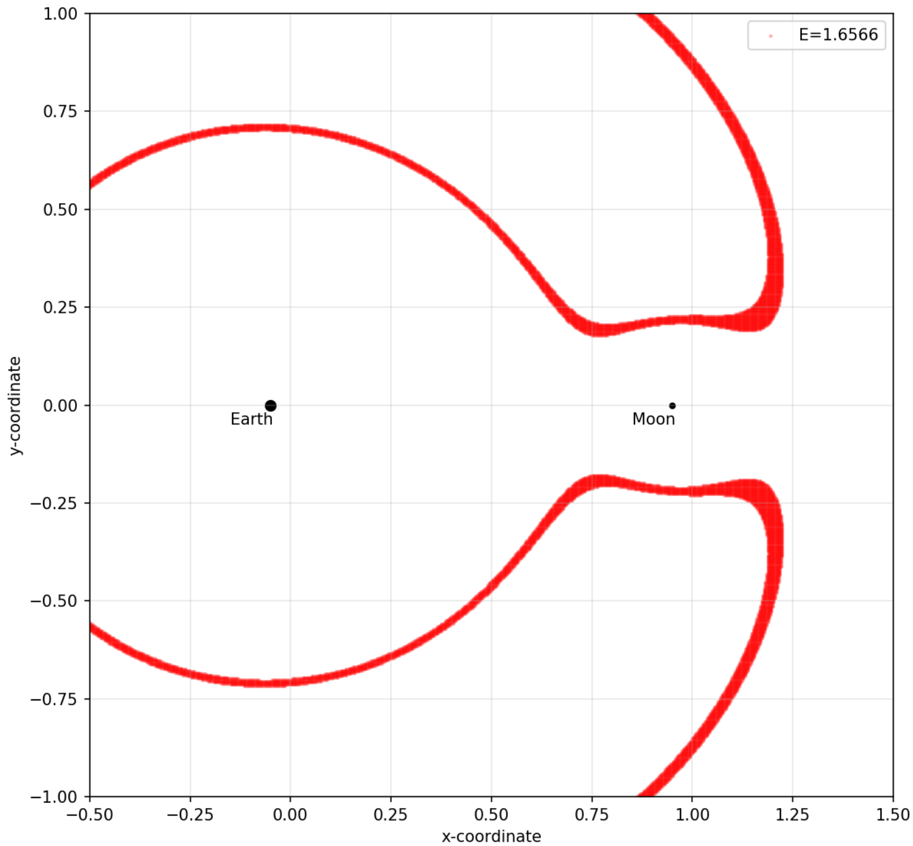

Abbildung 2: Hills-Region um Erde und Mond für die Energie $E = 1.65$. Ein Hals ist erkennbar der einen Eintritt bzw. Austritt ins Erde-Mond-System erlaubt.

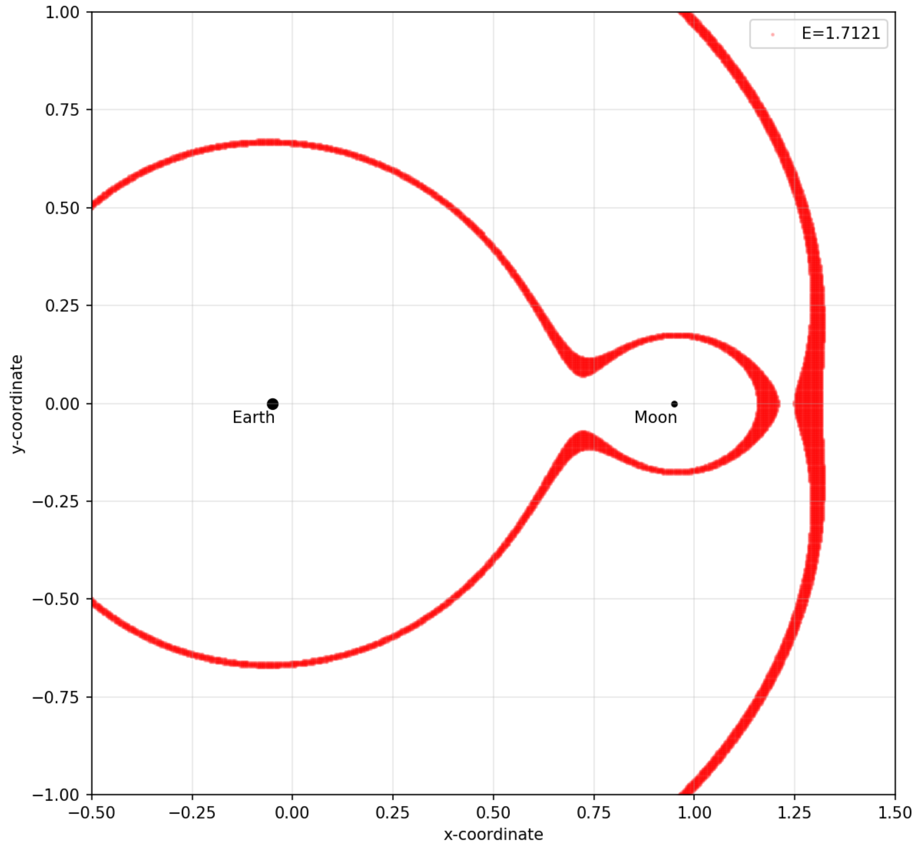

Abbildung 3: Ab einer Startenergie von $E = 1.71$ und mehr verschwindet der Ausweg aus dem System und ein Raumschiff welches mit dieser Energie startet verbleibt im Erde-Mond-System. Dieser Umstand wird in Aufgabe 5 genutzt.

Aufgabe 4: Zeitentwicklungsoperatoren

Um einen Anfangsvektor $\vec{v_0} = (x_0, y_0, p_{x,0}, p_{y,0})$ um einen Zeitschritt Δt zu $\vec{v_1}$ weiterzuentwickeln wird die Reihenfolge H_2,H_1,H_2 der Hamiltonians auf den Vektor angewandt. Explizit also, mit Zeitentwicklungsoperatoren Ψ_1 und Ψ_2 :

$$\vec{v_1} = \Psi_2\left(\frac{\Delta t}{2}, \Psi_1\left(\Delta t, \Psi_2(\frac{\Delta t}{2}, \vec{v_0})\right)\right)$$

H_1

Im Folgenden sind die Koordinaten und Impulse immer Funktionen der Zeit, diese Abhängigkeit wird nur explizit angegeben für die Darstellung des erfolgten Zeitschritts $(t + \Delta t)$. Für H_1 ergibt sich:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vec{p}} = \begin{pmatrix} p_x + y \\ p_y - x \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial \vec{q}} = \begin{pmatrix} p_y - x \\ -p_x - y \end{pmatrix} \tag{14}$$

Man findet:

$$p_x = \dot{x} - y \tag{15}$$

$$p_y = \dot{y} + x \tag{16}$$

$$\dot{p_x} = \dot{y} \tag{17}$$

$$\dot{p_y} = -\dot{x} \tag{18}$$

Das GLS lässt sich also nur durch die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ darstellen, für die analytische Ausdrücke gefunden werden können.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{y} \\ -2\dot{x} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}c_2 \sin(2t) + \frac{1}{2}c_4(1 - \cos(2t)) + c_1 \\ \dot{x}(t) &= c_2 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) \\ y(t) &= \frac{1}{2}c_2(\cos(2t) - 1) + \frac{1}{2}c_4 \sin(2t) + c_3 \\ \dot{y}(t) &= -c_2 \sin(2t) + c_4 \cos(2t) \end{aligned} \tag{20}$$

Die Konstanten c_1 und c_3 sind dabei die Anfangswerte:

$$\begin{aligned} c_1 &= x(t = 0) = x_0 \\ c_3 &= y(t = 0) = y_0 \end{aligned} \tag{21}$$

Aus Gl. 15 folgt:

$$c_2 = \dot{x}(t = 0) \;=\; p_x(t = 0) + y(t = 0) = p_{x,0} + y_0 \tag{22}$$

Und aus Gl. 16 entsprechend:

$$c_4 = \dot{y}(t = 0) \;=\; p_y(t = 0) - x(t = 0) = p_{y,0} - x_0 \tag{23}$$

Ein Update eines Koordinatenvektors $\vec{v_i} = (x_i, y_i, p_{x,i}, p_{y,i})$ bezüglich H_1 sieht im Detail folgendermaßen aus (dabei wurden die in Gl. 15 und Gl. 16 gefundenen Ausdrücke für die Impulskomponenten eingesetzt):

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x(\Delta t) = \frac{1}{2}c_{2,i}\sin(2\Delta t) + \frac{1}{2}c_{4,i}(1-\cos(2\Delta t)) + c_{1,i} && (24)\\
y_{i+1} &= y(\Delta t) = \frac{1}{2}c_{2,i}(\cos(2\Delta t) - 1) + \frac{1}{2}c_{4,i}\sin(2\Delta t) + c_{3,i} && (25)\\
p_{x,i+1} &= \dot{x}(\Delta t) - y(\Delta t) && (26)\\
p_{y,i+1} &= \dot{y}(\Delta t) + x(\Delta t) && (27)
\end{aligned}
$$

H_2

Für H_2 ergibt sich keine Änderung in den Ortskoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_2}{\partial \vec{p}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\\
-\frac{\partial H_2}{\partial \vec{q}} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{-\mu(\mu+x-1)}{((\mu+x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)(\mu+x)}{((\mu+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + x\right) \\ \left(\frac{-\mu y}{((\mu+x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)y}{((\mu+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + y\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Das Update der Koordinaten wurde entsprechend implementiert:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i\\
y_{i+1} &= y_i\\
p_{x,i+1} &= p_{x,i} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{-\mu(\mu+x_i-1)}{((\mu+x_i-1)^2+y_i^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)(\mu+x_i)}{((\mu+x_i)^2+y_i^2)^{\frac{3}{2}}} + x_i\right)\\
p_{y,i+1} &= p_{y,i} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{-\mu y_i}{((\mu+x_i-1)^2+y_i^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)y_i}{((\mu+x_i)^2+y_i^2)^{\frac{3}{2}}} + y_i\right)
\end{aligned} \qquad (28)
$$

Aufgabe 5

Für die unten angegebenen Startwerte ergibt sich eine Trajektorie die auf der Erde startet, 6 mal den Mond umrundet und danach wieder auf die Erde zurückkehrt. Die grünen Punkte sind jene (x, y) für die $\Omega(x, y) >= E$ gilt, die also für ein Raumschiff mit der Energie E „erlaubt“ sind.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 - \mu \\
y_0 &= -0.2 \\
p_{x,0} &= 2.37 \\
p_{y,0} &= -0.79 \\
E &= 1.7235
\end{aligned} \tag{29}
$$

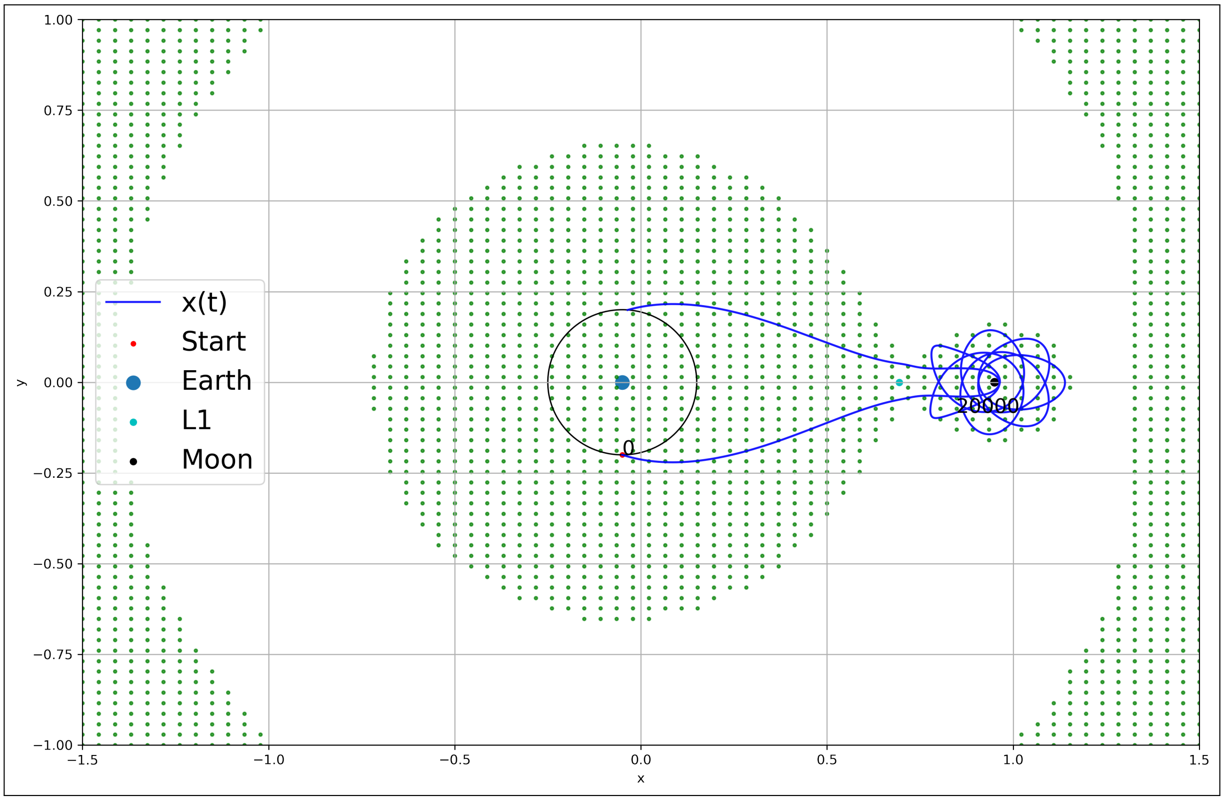

Abbildung 4: Aufgabe 5: Verbleiben im Erde-Mond-System nach Start auf der Erde mit 6 Rotationen um den Mond

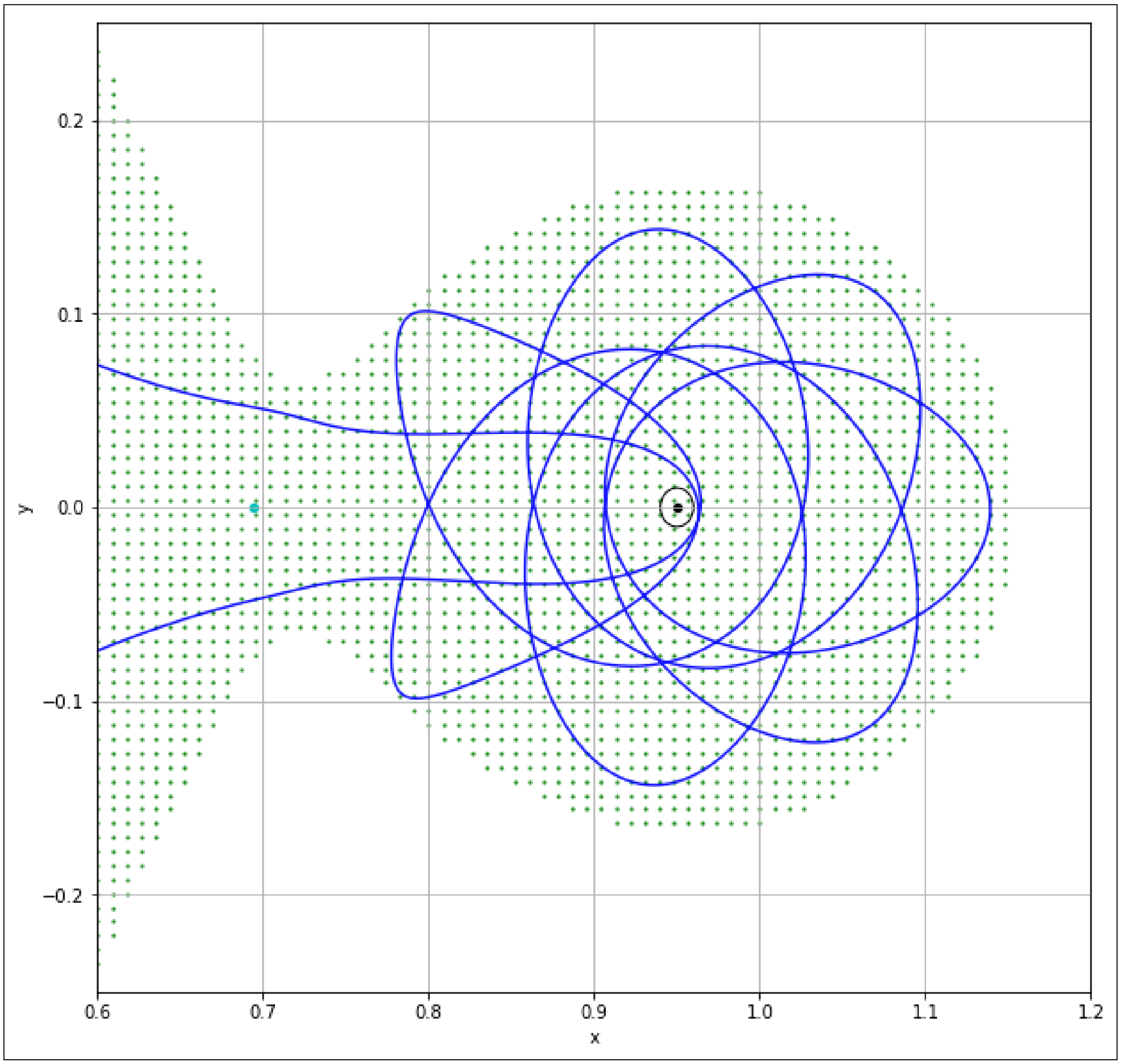

Abbildung 5: Zoom auf die Mondregion von Abb. 4

Aufgabe 6

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 - \mu \\
y_0 &= -0.2 \\
\dot{x}_0 &= 2.4044 \\
\dot{y}_0 &= -0.712 \\
E &= 1.6997
\end{aligned}
\tag{30}
$$

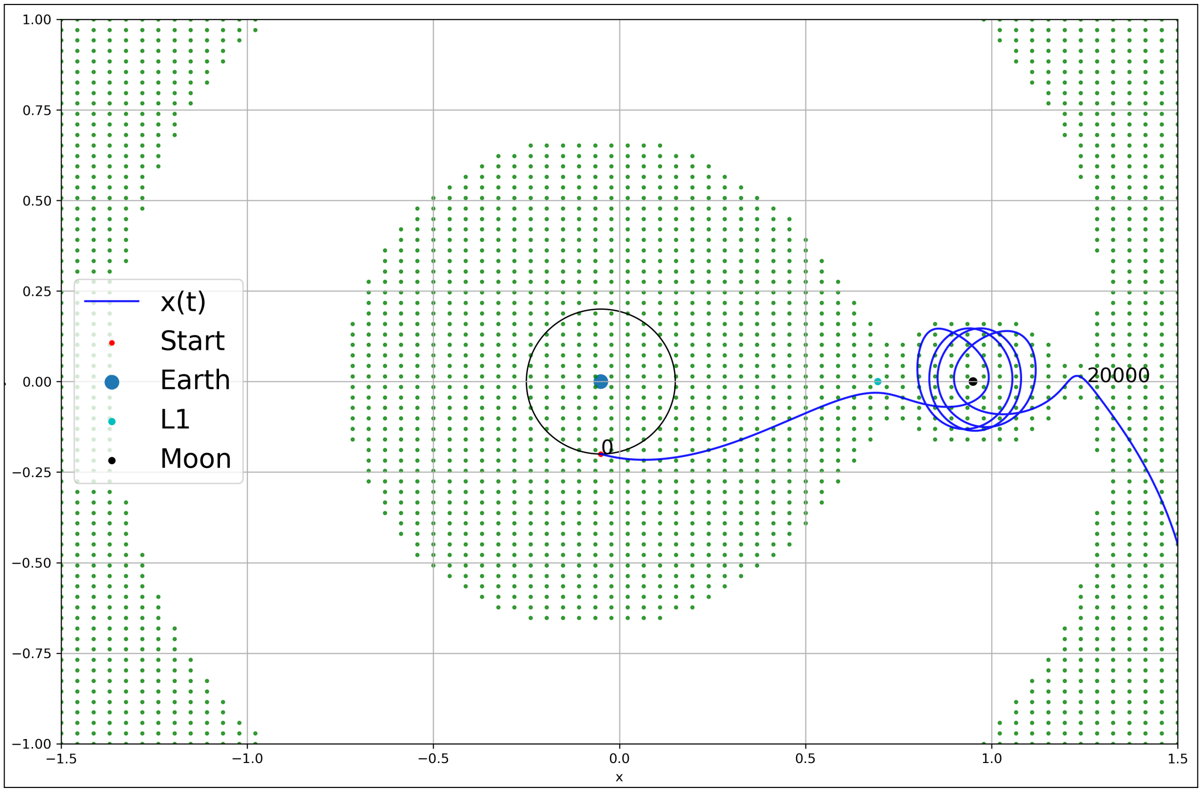

Abbildung 6: Aufgabe 6: Verlassen des Erde-Mond-Systems nach Start auf der Erde mit 4 Rotationen um den Mond

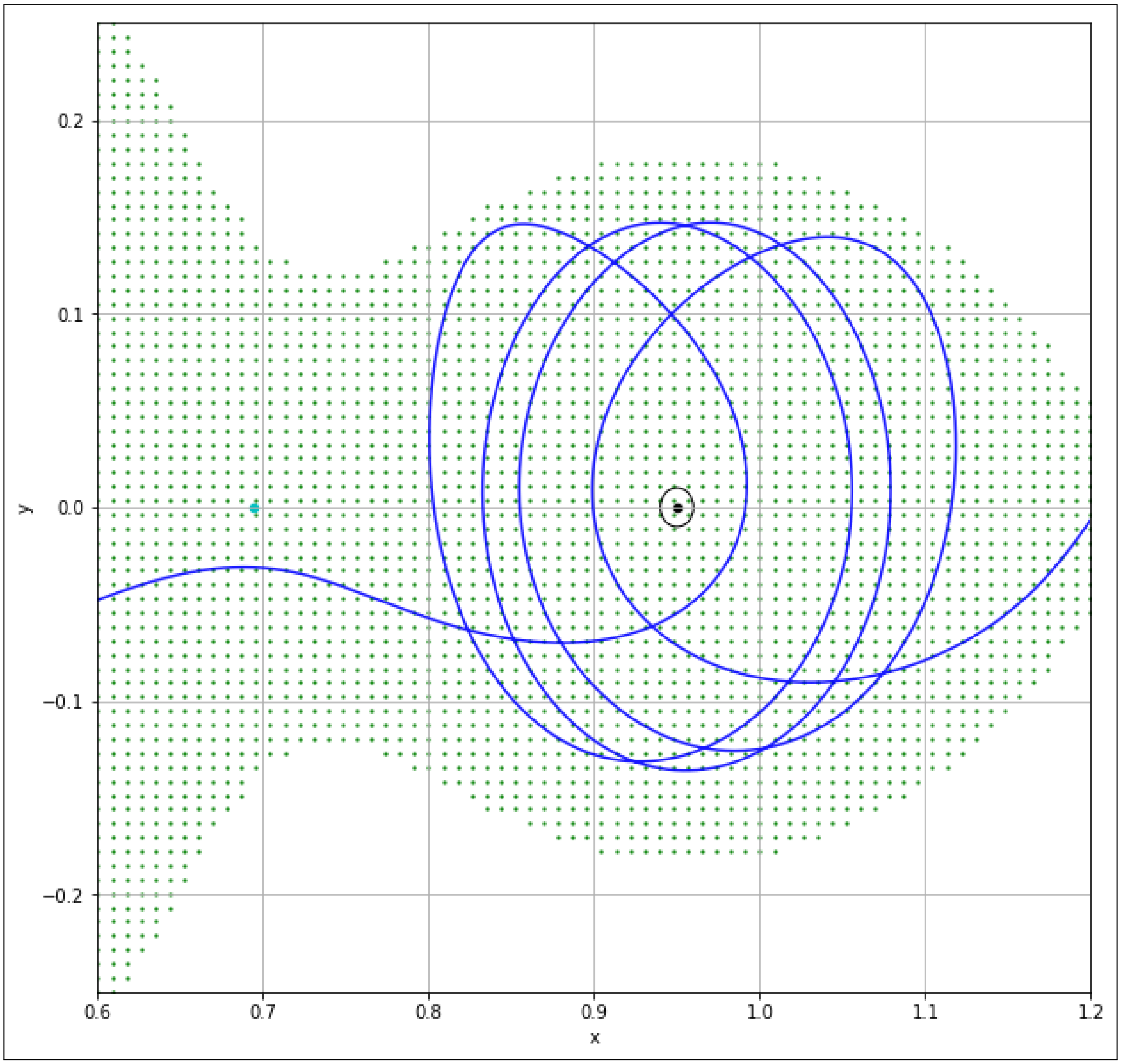

Abbildung 7: Zoom auf die Mondregion von Abb. 6

Aufgabe 7

In diesem Fall ist die Trajektorie wesentlich komplizierter: vom Startpunkt aus umrundet das Raumschiff das Erde-Mond-System zunächst zwei mal bevor es ins System selbst eintreten kann. Es umrundet dort zunächst den Mond, mehrfach die Erde, noch einmal den Mond und tritt dann wieder aus dem System aus.

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.5 \\
y_0 &= 0.2 \\
\dot{x}_0 &= -0.5217619985180384 \\
\dot{y}_0 &= -0.3896968769860548 \\
E &= 1.65
\end{aligned}
\tag{31}
$$

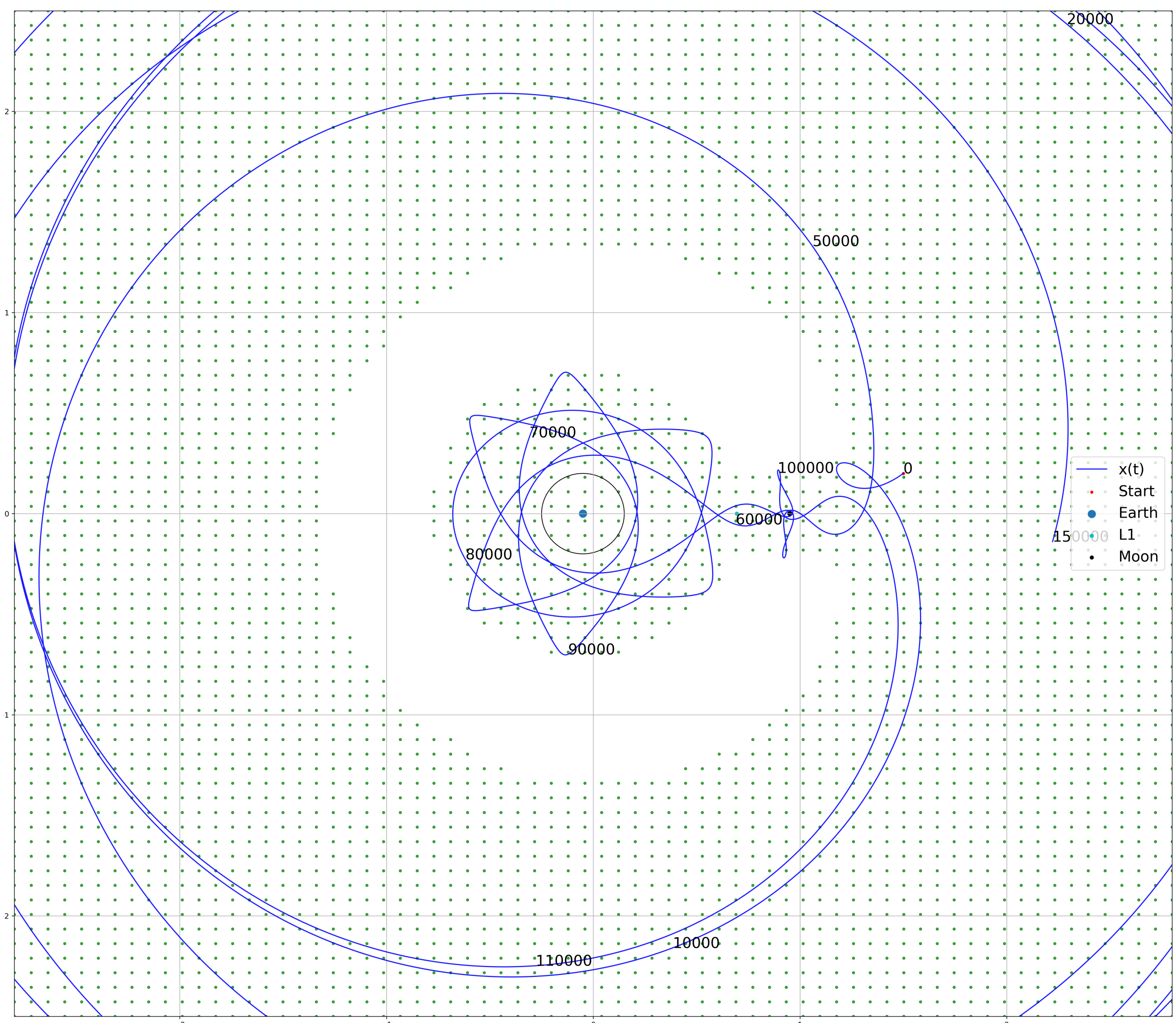

Abbildung 8: Aufgabe 7: Eintritt in das Erde-Mond-System von außen, insgesamt zwei Rotationen um den Mond und dazwischen 6 Rotationen um die Erde