第十八章　动态优化模型

动态过程的另一类问题是所谓的动态优化问题，这类问题一般要归结为求最优控制函数使某个泛函达到极值。当控制函数可以事先确定为某种特殊的函数形式时，问题又简化为求普通函数的极值。求解泛函极值问题的方法主要有变分法和最优控制理论方法。

§1　变分法简介

变分法是研究泛函极值问题的一种经典数学方法，有着广泛的应用。下面先介绍变分法的基本概念和基本结果，然后介绍动态系统最优控制问题求解的必要条件和最大值原理。

1.1　变分法的基本概念

1.1.1　泛函

设 S 为一函数集合，若对于每一个函数 $x(t) \in S$ 有一个实数 J 与之对应，则称 J 是对应在 S 上的泛函，记作 $J(x(t))$。S 称为 J 的容许函数集。

通俗地说，泛函就是"函数的函数"。

例如对于 xy 平面上过定点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 的每一条光滑曲线 $y(x)$，绕 x 轴旋转得一旋转体，旋转体的侧面积是曲线 $y(x)$ 的泛函 $J(y(x))$。由微积分知识不难写出

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{1}$$

容许函数集可表示为

$$S = \{y(x) \mid y(x) \in C^1[x_1, x_2], y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2\} \tag{2}$$

最简单的一类泛函表为

$$J(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}) dt \tag{3}$$

被积函数 F 包含自变量 t，未知函数 x 及导数 $\dot{x}$。（1）式是最简泛函。

1.1.2　泛函的极值

泛函 $J(x(t))$ 在 $x_0(t) \in S$ 取得极小值是指，对于任意一个与 $x_0(t)$ 接近的 $x(t) \in S$，都有 $J(x(t)) \ge J(x_0(t))$。所谓接近，可以用距离 $d(x(t), x_0(t)) < \varepsilon$ 来度量，而距离定义为

$$d(x(t), x_0(t)) = \max_{t_1 \le t \le t_2} \{|x(t) - x_0(t)|, |\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)|\}$$

泛函的极大值可以类似地定义。$x_0(t)$ 称为泛函的极值函数或极值曲线。

1.1.3　泛函的变分

如同函数的微分是增量的线性主部一样，泛函的变分是泛函增量的线性主部。作为泛函的自变量，函数 $x(t)$ 在 $x_0(t)$ 的增量记为

$$\delta x(t) = x(t) - x_0(t)$$

也称函数的变分。由它引起的泛函的增量记作

$$\Delta J = J(x_0(t) + \delta x(t)) - J(x_0(t))$$

如果 ΔJ 可以表为

$$\Delta J = L(x_0(t), \delta x(t)) + r(x_0(t), \delta x(t))$$

其中 L 为 δx 的线性项，而 r 是 δx 的高阶项，则 L 称为泛函在 $x_0(t)$ 的变分，记作 $\delta J(x_0(t))$。用变动的 $x(t)$ 代替 $x_0(t)$，就有 $\delta J(x(t))$。

泛函变分的一个重要形式是它可以表为对参数 α 的导数：

$$\delta J(x(t)) = \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x(t) + \alpha \delta x(t))\Big|_{\alpha=0} \tag{4}$$

这是因为当变分存在时，增量

$$\Delta J = J(x(t) + \alpha \delta x) - J(x(t)) = L(x(t), \alpha \delta x) + r(x(t), \alpha \delta x)$$

根据 L 和 r 的性质有

$$L(x(t), \alpha \delta x) = \alpha L(x(t), \delta x)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha \delta x} \delta x = 0$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(x + \alpha \delta x)\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(x + \alpha \delta x) - J(x)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{L(x, \alpha \delta x) + r(x, \alpha \delta x)}{\alpha} = L(x, \delta x) = \delta J(x)$$

1.1.4　极值与变分

利用变分的表达式（4）可以得到泛函极值与变分的关系：

若 $J(x(t))$ 在 $x_0(t)$ 达到极值（极大或极小），则

$$\delta J(x_0(t)) = 0 \tag{5}$$

这是因为对任意给定的 δx， $J(x_0 + \alpha \delta x)$ 是变量 α 的函数，该函数在 $\alpha = 0$ 处达到极值。根据函数极值的必要条件知

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(x_0 + \alpha \delta x)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

于是由（4）式直接得到（5）式。

1.1.5. 变分法的基本引理

引理　$\varphi(x) \in C[x_1, x_2]$，$\forall \eta(x) \in C^1[x_1, x_2]$，$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) \eta(x) dx \equiv 0,$$

则 $\varphi(x) \equiv 0,\ x \in [x_1, x_2]$。

1.2　无约束条件的泛函极值

求泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \tag{6}$$

的极值，一般是用泛函极值的必要条件去寻找一条曲线 $x(t)$，使给定的二阶连续可微函数 F 沿该曲线的积分达到极值。常称这条曲线为极值曲线（或轨线），记为 $x^*(t)$。

1.2.1 端点固定的情况

设容许曲线 $x(t)$ 满足边界条件

$$x(t_0)=x_0\,,\ x(t_f)=x_f \tag{7}$$
且二次可微。

首先计算（6）式的变分：

$$\begin{aligned}\delta J &= \frac{\partial}{\partial\alpha}J(x(t)+\alpha\delta x(t))\Big|_{\alpha=0}\\ &=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(t,x(t)+\alpha\delta x(t),\dot{x}(t)+\alpha\delta\dot{x}(t))\Big|_{\alpha=0}dt\\ &=\int_{t_0}^{t_f}[F_x(t,x,\dot{x})\delta x+F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\delta\dot{x}]dt \end{aligned} \tag{8}$$

对上式右端第二项做分布积分，并利用$\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$，有

$$\int_{t_0}^{t_f}F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\delta\dot{x}dt=-\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\delta x dt\,,$$

再代回到（8）式，并利用泛函取极值的必要条件，有

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}[F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}]\delta x dt=0$$

因为δx的任意性，及$\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$，所以由基本引理得到著名的欧拉方程

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0 \tag{9}$$

它是这类最简泛函取极值的必要条件。

（9）式又可记作

$$F_x-F_{t\dot{x}}-F_{x\dot{x}}\dot{x}-F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}=0 \tag{10}$$

通常这是$x(t)$的二阶微分方程，其通解的两个任意常数由（7）式中的两个端点条件确定。

1.2.2　最简泛函的几种特殊情形

(i) F 不依赖于$\dot{x}$，即$F=F(t,x)$

这时$F_{\dot{x}}\equiv 0$，欧拉方程为$F_x(t,x)=0$，这个方程以隐函数形式给出$x(t)$，但它一般不满足边界条件，因此，变分问题无解。

(ii) F 不依赖x，即$F=F(t,\dot{x})$

欧拉方程为

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(t,\dot{x})=0$$

将上式积分一次，便得首次积分$F_{\dot{x}}(t,\dot{x})=c_1$，由此可求出$\dot{x}=\varphi(t,c_1)$，积分后得到可能的极值曲线族

$$x=\int\varphi(t,c_1)dt$$

(iii) F 只依赖于$\dot{x}$，即$F=F(\dot{x})$

这时$F_x=0,F_{t\dot{x}}=0,F_{x\dot{x}}=0$，欧拉方程为

$$\ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}}=0$$

由此可设$\ddot{x}=0$或$F_{\dot{x}\dot{x}}=0$，如果$\ddot{x}=0$，则得到含有两个参数的直线族$x=c_1t+c_2$。

另外若$F_{\dot{x}\dot{x}}=0$有一个或几个实根时，则除了上面的直线族外，又得到含有一个参数c的直线族$x=kt+c$，它包含于上面含有两个参数的直线族 $x=c_1t+c_2$ 中，于是，在$F=F(\dot{x})$情况下，极值曲线必然是直线族。

（iv）F 只依赖于x和$\dot{x}$，即$F=F(x,\dot{x})$

这时有$F_{t\dot{x}}=0$，故欧拉方程为

$$F_x-\dot{x}F_{x\dot{x}}-\ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}}=0$$

此方程具有首次积分为

$$F-\dot{x}F_{\dot{x}}=c_1$$

事实上，注意到F不依赖于t，于是有

$$\frac{d}{dt}(F-\dot{x}F_{\dot{x}})=F_x\dot{x}+F_{\dot{x}}\ddot{x}-\ddot{x}F_{\dot{x}}-\dot{x}\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=\dot{x}(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}})=0。$$

例 1 (最速降线问题)最速降线问题是历史上变分法开始发展的第一个问题。它是约翰•贝努里（J. Bernoulli）于 1696 年提出的。问题的提法是这样的：设A和B是铅直平面上不在同一铅直线上的两点，在所有连结A和B的平面曲线中，求一曲线，当质点仅受重力作用，且初速为零，沿此曲线从A滑行至B时，使所需时间最短。

解 将A点取为坐标原点，x轴水平向右，y轴垂直向下，B点为$B(x_2,y_2)$。根据能量守恒定律，质点在曲线$y(x)$上任一点处的速度$\dfrac{ds}{dt}$满足（s为弧长）

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=mgy$$

将$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$代入上式得

$$dt=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

于是质点滑行时间应表为$y(x)$的泛函

$$J(y(x))=\int_0^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

端点条件为

$$y(0)=0,y(x_2)=y_2$$

最速降线满足欧拉方程，因为

$$F(y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

不含自变量x，所以方程（10）可写作

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0$$

等价于

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0$$

作一次积分得

$$y(1+y'^2)=c_1$$

令 $y'=ctg\dfrac{\theta}{2}$, 则方程化为

$$y=\frac{c_1}{1+y'^2}=c_1\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{c_1}{2}(1-\cos\theta)$$

又因

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{c_1\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{ctg\frac{\theta}{2}}=\frac{c_1}{2}(1-\cos\theta)d\theta$$

积分之，得

$$x=\frac{c_1}{2}(\theta-\sin\theta)+c_2$$

由边界条件 $y(0)=0$，可知 $c_2=0$，故得

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1}{2}(\theta-\sin\theta) \\ y=\dfrac{c_1}{2}(1-\cos\theta). \end{cases}$$

这是摆线（圆滚线）的参数方程，其中常数 c_1 可利用另一边界条件 $y(x_2)=y_2$ 来确定。

例 2　最小旋转面问题

$$J(y(x))=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

$$S=\{y\mid y\in C^1[x_1,x_2],y(x_1)=y_1,y(x_2)=y_2\}$$

解　因 $F=y\sqrt{1+y'^2}$ 不包含 x，故有首次积分

$$F-y'F_{y'}=y\sqrt{1+y'^2}-y'y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

化简得　$y=c_1\sqrt{1+y'^2}$

令 $y'=sht$，代入上式，　$y=c_1\sqrt{1+sh^2t}=c_1cht$

由于　$dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{c_1shtdt}{sht}=c_1dt$

积分之，得　$x=c_1t+c_2$

消去 t，就得到 $y=c_1ch\dfrac{x-c_2}{c_1}$　。

这是悬链线方程。

1.2.3　最简泛函的推广

最简泛函取极值的必要条件可以推广到其它情况。

（ i ）含多个函数的泛函

使泛函

$$J(y(x),z(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',z,z')dx$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_1)=y_1,y(x_2)=y_2,z(x_1)=z_1,z(x_2)=z_2.$$

的极值曲线 $y=y(x),z=z(x)$ 必满足欧拉方程组

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0\\F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}=0\end{cases}$$

（ii）含高阶导数的泛函

使泛函

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_1)=y_1,y（x_2）=y_2，y'(x_1)=y'_1,y'(x_2)=y'_2$$

的极值曲线 $y=y(x)$ 必满足微分方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0$$

（iii） 含多元函数的泛函

设 $z(x,y)\in c^2,(x,y)\in D$，使泛函

$$J(z(x,y))=\iint_D F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

取极值且在区域 D 的边界线 l 上取已知值的极值函数 $z=z(x,y)$ 必满足方程

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}=0$$

上式称为奥式方程。

1.2.4　端点变动的情况（横截条件）

设容许曲线 $x(t)$ 在 t_0 固定，在另一端点 $t=t_f$ 时不固定，是沿着给定的曲线 $x=\psi(t)$ 上变动。于是端点条件表示为

$$\begin{cases}x(t_0)=x_0\\x(t)=\psi(t)\end{cases}$$

这里 t 是变动的，不妨用参数形式表示为

$$t=t_f+\alpha dt_f$$

寻找端点变动情况的必要条件，可仿照前面端点固定情况进行推导，即有

$$0=\delta J=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{t_0}^{t_f+\alpha dt_f}F(t,x+\alpha\delta x,\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})dt\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}})\delta xdt+F_{\dot{x}}\delta x\Big|_{t=t_f}+F\Big|_{t=t_f}dt_f \qquad （11）$$

再对（11）式做如下分析：

（i）对每一个固定的t_f，$x(t)$都满足欧拉方程，即（11）式右端的第一项积分为零；

（ii）为考察（11）式的第二、第三项，建立dt_f与$\delta x\big|_{t=t_f}$之间的关系，因为

$$x(t_f+\alpha dt_f)+\alpha\delta x(t_f+\alpha dt_f)=\psi(t_f+\alpha dt_f)$$

对α求导并令$\alpha=0$得

$$\dot{x}(t_f)dt_f+\delta x\big|_{t=t_f}=\dot{\psi}(t_f)dt_f$$

即

$$\delta x\big|_{t=t_f}=[\dot{\psi}(t_f)-\dot{x}(t_f)]dt_f \tag{12}$$

把（12）代入（11）并利用dt_f的任意性，得

$$[F+(\dot{\psi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]\Big|_{t=t_f}=0 \tag{13}$$

（13）式就是确定欧拉方程通解中另一常数的定解条件，称为横截条件。

横截条件有两种常见的特殊情况：

（i）当$x=\psi(t)$是垂直横轴的直线时，t_f固定，$x(t_f)$自由，并称$x(t_f)$为自由端点。此时（11）式中$dt_f=0$及$\delta x\big|_{t=t_f}$的任意性，便得自由端点的横截条件

$$F_{\dot{x}}\Big|_{t=t_f}=0 \tag{14}$$

（ii）当$x=\psi(t)$是平行横轴的直线时，t_f自由，$x(t_f)$固定，并称$x(t_f)$为平动端点。此时$\dot{\psi}=0$，（13）式的横截条件变为

$$F-\dot{x}F_{\dot{x}}\Big|_{t=t_f}=0 \tag{15}$$

注意，横截条件与欧拉方程联立才能构成泛函极值的必要条件。

1.3　有约束条件的泛函极值

在最优控制系统中，常常要涉及到有约束条件泛函的极值问题，其典型形式是对动态系统

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)) \tag{16}$$

寻求最优性能指标（目标函数）

$$J(u(t))=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}F(t,x(t),u(t))dt \tag{17}$$

其中$u(t)$是控制策略，$x(t)$是轨线，t_0固定，t_f及$x(t_f)$自由，$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$（不受限，充满R^m空间），f,φ,F连续可微。

下面推导取得目标函数极值的最优控制策略$u^*(t)$和最优轨线$x^*(t)$的必要条件。

采用拉格朗日乘子法，化条件极值为无条件极值，即考虑

$$J_1(x,u,\lambda)=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}[F(t,x,u)+\lambda^T(t)(f(t,x,u)-\dot{x})]dt \tag{18}$$

的无条件极值，首先定义（16）式和（17）式的哈密顿（Hamilton）函数为

$$H(t,x,u,\lambda)=F(t,x,u)+\lambda^T(t)f(t,x,u) \tag{19}$$

将其代入（18）式，得到泛函

$$J_1(x,u,\lambda)=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}[H(t,x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]dt \tag{20}$$

下面先对其求变分

$$\delta J_1=\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\varphi(t_f+\alpha dt_f,x(t_f)+\alpha\delta x(t_f))$$

$$+\int_{t_0}^{t_f+\alpha dt_f}[H(t,x+\alpha\delta x,u+\alpha\delta u,\lambda+\alpha\delta\lambda)-(\lambda+\alpha\delta\lambda)^T(\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})]dt\}\Big|_{\alpha=0}$$

$$=[\delta x(t_f)]^T\varphi_{x(t_f)}+(dt_f)^T\varphi_{t_f}+(dt_f)^TH(t,x,u,\lambda)\Big|_{t=t_f}-(dt_f)^T(\lambda^T\dot{x})\Big|_{t=t_f}$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[(\delta x)^TH_x+(\delta u)^TH_u+(\delta\lambda)^TH_\lambda-(\delta\lambda)^T\dot{x}-\lambda^T\delta\dot{x}]dt$$

$$=(dt_f)^T[\varphi_{t_f}+F(t,x,u,t)\Big|_{t=t_f}]+[\delta x(t_f)]^T\varphi_{x(t_f)}$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[(\delta x)^TH_x+(\delta u)^TH_u+(\delta\lambda)^TH_\lambda-(\delta\lambda)^T\dot{x}]dt-\lambda^T(t_f)\delta x\Big|_{t=t_f}+\int_{t_0}^{t_f}(\delta x)^T\dot{\lambda}dt$$

注意到$\delta x\big|_{t=t_f}\neq\delta x(t_f)$，$\delta x\big|_{t=t_f}=\delta x(t_f)-\dot{x}(t_f)dt_f$，因而

$$\delta J_1=(dt_f)^T[\varphi_{t_f}+H(t,x,u,\lambda)\Big|_{t=t_f}]+[\delta x(t_f)]^T(\varphi_x-\lambda)\Big|_{t=t_f}$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[(\delta x)^T(H_x+\dot{\lambda})+(\delta\lambda)^T(H_\lambda-\dot{x})+(\delta u)^TH_u]dt$$

再令$\delta J_1=0$，由$dt_f,\delta x(t_f),\delta x,\delta u,\delta\lambda$的任意性，便得

（i）x^*,λ^*必满足正则方程：

① 状态方程　$\dot{x}=H_\lambda=f(t,x,u)$

② 协态方程　$\dot{\lambda}=-H_x$。

（ii）哈密顿函数$H(t,x^*,u,\lambda^*)$作为u的函数，也必满足

$$H_u=0$$

并由此方程求得u^*。

（iii）求x^*,λ^*,u^*时，必利用边界条件

① $x(t_0)=x_0$，　　　　（用于确定x^*）

② $\lambda(t_f)=\varphi_{x(t_f)}$，　　　　（用于确定$\lambda^*$）

③ $\varphi_{t_f}=-H(t,x,u,\lambda)\big|_{t=t_f}$，　（确定$t_f$）

1.4　最大（小）值原理

如果受控系统

$$\dot{x}=f(t,x,u)，\quad x(t_0)=x_0$$

其控制策略$u(t)$的全体构成有界集U，求$u(t)\in U$，使性能指标

$$J(u(t))=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}F(t,x,u)dt$$

达到最大（小）值。

最大（小）值原理：如果$f(t,x,u)$，$\varphi(t_f,x(t_f))$和$F(t,x,u)$都是连续可微的，

那么最优控制策略$u^*(t)$和相应的最优轨线$x^*(t)$由下列的必要条件决定：

（i）最优轨线$x^*(t)$，协态向量$\lambda^*(t)$由下列的必要条件决定：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u)，\quad u(t)\in U，$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}.$$

（ii）哈密顿函数

$$H(t,x^*,u,\lambda^*)=F(t,x^*,u)+\lambda^{*T}(t)f(t,x^*,u)$$

作为$u(t)$的函数，最优策略$u^*(t)$必须使

$$H(t,x^*,u^*,\lambda^*)=\max_{u\in U}H(t,x^*,u,\lambda^*)$$

或使

$$H(t,x^*,u^*,\lambda^*)=\min_{u\in U}H(t,x^*,u,\lambda^*)\ (\text{最小值原理})$$

（iii）满足相应的边界条件

① 若两端点固定，则正则方程的边界条件为

$$x(0)=x_0，\quad x(t_f)=x_f。$$

② 若始端固定，终端t_f也固定，而$x(t_f)$自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0)=x_0，\quad \lambda(t_f)=\varphi_{x(t_f)}(t_f,x(t_f))。$$

③ 若始端固定，终端$t_f,x(t_f)$都自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0)=x_0，\quad \lambda(t_f)=\varphi_{x(t_f)}(t_f,x(t_f))，$$

$$H(t_f,x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f))+\varphi_{t_f}(t_f,x(t_f))=0。$$

§2 生产设备的最大经济效益

某工厂购买了一台新设备投入到生产中。一方面该设备随着运行时间的推移其磨损程度愈来愈大，因此其转卖价将随着使用设备的时间增加而减小；另一方面生产设备总是要进行日常保养，花费一定的保养费，保养可以减缓设备的磨损程度，提高设备的转卖价。那么，怎样确定最优保养费和设备转卖时间，才能使这台设备的经济效益最大。

2.1 问题分析与假设

（i）设备的转卖价是时间t的函数，记为$x(t)$。$x(t)$的大小与设备的磨损程度和保养费的多少密切相关。记初始转卖价$x(0)=x_0$。

（ii）设备随其运行时间的推移，磨损程度越来越大。t时刻设备的磨损程度可以用t时刻转卖价的损失值来刻画，常称其为磨损函数或废弃函数，记为$m(t)$。

（iii）保养设备可以减缓设备的磨损速度，提高转卖价。如果$u(t)$是单位时间的保养费，$g(t)$是t时刻的保养效益系数（每用一元保养费所增加的转卖价），那么单位时间的保养效益为$g(t)u(t)$。另外，保养费不能过大（如单位时间保养费超过单位时间产值时，保养失去了意义），只能在有界函数集中选取，记有界函数集为W，则$u(t)\in W$。

（iv）设单位时间的产值与转卖价的比值记为p，则$px(t)$表示在t时刻单位时间的产值，即t时刻的生产率。

（v）转卖价 $x(t)$ 及单位时间的保养费 $u(t)$ 都是时间 t 的连续可微函数。为了统一标准，采用它们的贴现值。对于贴现值的计算，例如转卖价 $x(t)$ 的贴现值计算，如果它的贴现因子为 δ（经过单位时间的单位费用贴现），那么由

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t_1)}{dt_1} = \delta x(t_1) \\ x(t) = 1 \end{cases}$$

解得

$$x(t_1) = e^{-\delta(t-t_1)}$$

令 $t_1 = 0$，便得 t 时刻单位费用的贴现（称贴现系数）为 $e^{-\delta t}$，所以设备在 t 时刻转卖价 $x(t)$ 的贴现为 $x(t)e^{-\delta t}$。仿此计算，$u(t)$ 的贴现为 $u(t)e^{-\delta t}$，单位时间产值的贴现为 $px(t)e^{-\delta t}$。

（vi）欲确定的转卖时间 t_f 和转卖价 $x(t_f)$ 都是自由的。

2.2　模型构造

根据以上的分析与假设可知：考察的对象是设备在生产中的磨损—保养系统；转卖价体现了磨损和保养的综合指标，可以选作系统的状态变量；在生产中设备磨损的不可控性强，其微弱的可控性也是通过保养体现，加之保养本身具有较强的可控性，所以选单位时间的保养费 $u(t)$ 作为控制策略。这样，生产设备的最大经济效益模型可以构成为在设备磨损—保养系统的（转卖价）状态方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -m(t) + g(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{21}$$

之下，在满足 $0 \le u(t) \le U$ 的函数集 W 中寻求最优控制策略 $u^*(t)$，使系统的经济效益这一性能指标

$$J(u(t)) = x(t_f)e^{-\delta t_f} + \int_0^{t_f} [px(t) - u(t)]e^{-\delta t}dt \tag{22}$$

为最大，其中 $t_f, x(t_f)$ 都是自由的。

2.3　模型求解

首先写出问题的哈密顿函数

$$H = [px(t) - u(t)]e^{-\delta t} + \lambda[-m(t) + g(t)m(t)] \tag{23}$$

再由协态方程及边界条件求出 $\lambda(t)$，即由

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda(t)}{dt} = -H_x = -pe^{-\delta t} \\ \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)} = e^{-\delta t_f} \end{cases}$$

解得

$$\lambda(t) = (1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}$$

下面利用最大值原理求 $u^*(t)$。先将（23）式改变为

$$H = px(t)e^{-\delta t} - \lambda m(t) + [\lambda g(t) - e^{-\delta t}]u(t)$$

显然，H 是对 u 的线性函数，因此得到

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \tag{24}$$

或

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & [(1-\dfrac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \dfrac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & [(1-\dfrac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \dfrac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \tag{25}$$

在上式中，还需解决两个问题：一是 $u^*(t)=U$ 与 $u^*(t)=0$ 的转换点 t_s 在什么位置，即 t_s 等于多少？二是 $u^*(t)$ 是由 U 到 0，还是由 0 到 U。

转换点 t_s 应满足

$$[(1-\frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} = 0$$

即

$$[\frac{p}{\delta} - (\frac{p}{\delta}-1)e^{\delta(t-t_f)}]g(t) - 1 = 0 \tag{26}$$

从而可解出 t_s。

因为 $g(t)$ 是时间 t 的减函数，所以（26）式的左端也是时间 t 的减函数，也就是说 $u^*(t)$ 随时间应由 U 到 0。于是最优控制策略的具体表达式为

$$u^* = \begin{cases} U, & 0 \le t < t_s \\ 0, & t_s < t \le t_f \end{cases}$$

至于 t_f，$x(t_f)$ 的求法，请见下面的例子。

例 3　在生产设备的最大经济效益的问题中，设 $x(0)=100$，$U=1$，$m(t)=2$，$p=0.1$，$\delta=0.05$，$g(t)=\dfrac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$，试求 t_f，$x(t_f)$ 和 $u^*(t)$。

解　由（26）式可得求 t_s 的公式

$$(1+t_s)^{\frac{1}{2}} = 4 - 2e^{0.05(t_s-t_f)} \tag{27}$$

当 $t<t_s$ 时，$u^*(t)=U=1$，状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2 + \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$$

当 $t>t_s$ 时，$u^*(t)=0$，状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2$$

于是$t>t_s$时，有

$$\int_0^t \frac{dx}{dt}dt=\int_0^{t_s}[-2+\frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}]dt+\int_{t_s}^t(-2)dt$$

解得

$$x(t)=4(1+t_s)^{\frac{1}{2}}+96-2t \tag{28}$$

由自由边界条件$H\big|_{t=t_f}=-\varphi_{t_f}$及$\lambda(t_f)=e^{-\delta t_f}$，得

$$-px(t_f)e^{-\delta t_f}+2e^{-\delta t_f}=-\delta e^{-\delta t_f}x(t_f)$$

于是

$$x(t_f)=\frac{2}{p-\delta}=40$$

当$t=t_f$时，由（28）式有

$$40=4(1+t_s)^{\frac{1}{2}}+96-2t_f$$

即

$$t_f=2(1+t_s)^{\frac{1}{2}}+28 \tag{29}$$

将（27）和（29）联立求解，编写如下 Matlab 程序

```
[x,y]=solve('(1+ts)^(1/2)=4-2*exp(0.05*(ts-tf))','tf=2*(1+ts)^(1/2)+28')
```

求得

$$t_s=10.6，\quad t_f=34.8$$

于是，最优控制策略（保养费）为

$$u^*(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<10.6\\ 0, & 10.6<t\le 34.8\end{cases}$$

习 题 十 八

1. 求自原点（0,0）到直线$x+y-1=0$的最速降线。
2. 求概率密度函数$\varphi(x)$，使得信息量

$$J=-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\ln[v\varphi(x)]dx$$

取最大值，且满足等周条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\sigma^2$$（常数）。

3. 在生产设备或科学仪器中长期运行的零部件，如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏，即使是及时更换也已经造成了一定的经济损失。如果在零部件运行一定时期后，就对尚属正常的零件做预防性更换，以避免一旦发生故障带来的损失，从经济上看是否更为合算？如果合算，做这种预防性更换的时间如何确定呢？