

# 基于排队论的全员核酸检测点优化设置

凌婷婷<sup>1</sup>, 丁伯伦<sup>1</sup>, 段双双<sup>2</sup>

(1. 扬州工业职业技术学院 基础科学部, 江苏 扬州 225127;

2. 安徽信息工程学院 通识教育与外国语学院, 安徽 芜湖 241000)

**摘 要:** 为解决居民参与全员核酸检测时因排队时间过长引发不满以及排队人数众多从而增加新冠病毒传染率等问题, 根据对全员核酸检测过程中随机动态特征的研究, 运用 M/M/c 排队模型, 构建基于排队论的全员核酸检测点优化设置模型, 以扬州主城区全员核酸检测为例, 通过控制平均等待队长和平均等待时间, 分别得到检测点窗口数为 2 和 3 时的最优服务强度及最优日容量, 并结合主城区人口分布情况, 得到全员核酸检测点优化设置的合理方案。

**关键词:** 排队模型; 核酸检测点; 最优服务强度; 日容量; 排队优化设置

**中图分类号:** O 226 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-191X(2022)01-065-04

**DOI:** 10.14152/j.cnki.2096-191X.2022.01.011

## 0 引言

新型冠状病毒的变异病毒德尔塔和奥密克戎等的“生长优势”, 使得有些城市地区发生了较大规模的疫情传播, 从而需启动多轮全员核酸检测工作。然而, 由于疫情来的突然, 全员核酸检测人数众多, 医护人员人手不足, 如果没有合理优化设置的核酸检测点, 将会导致大量的人员聚集, 从而增加病毒的传染几率, 也会使居民因等待时间过长而引发不满。因此, 科学合理地设置全员核酸检测点以及测算检测点合理日容量尤为重要。近几年来, 排队模型的研究仍然集中于单服务台排队模型<sup>[1-2]</sup>和多服务台排队模型<sup>[3-4]</sup>的优化控制, 而在实际生活中, 多服务台排队模型的应用更加广泛, 主要集中在超市排队等待收银<sup>[5-6]</sup>、交通优化管理<sup>[7]</sup>以及医院排队就医<sup>[8-9]</sup>等方面, 也取得了一些优化方法。本文以排队论为基础研究全员核酸检测点优化设置, 通过控制平均等待队长和平均等待时间, 运用 MATLAB 软件得到模型的最优服务强度, 测算出检测点合理日容量, 从而得出核酸检测点的最优设置方案。

## 1 全员核酸检测点优化设置排队模型

### 1.1 模型描述

- 1) 系统有  $c(c \geq 1)$  个服务台独立并行服务。
- 2) 系统中顾客到达均为泊松到达, 到达率为  $\lambda$ 。
- 3) 系统中服务台的服务时间服从负指数分布, 平均服务率相同, 均为  $\mu$ 。
- 4) 系统中各随机变量相互独立且服务机制为先到先服务 (first-come-first-served, FCFS)。

### 1.2 系统的稳态指标

系统稳定下的状态转移如图 1 所示。

收稿日期: 2021-10-15

基金项目: 安徽高校自然科学研究重点项目 (KJ2019A1297)

作者简介: 凌婷婷 (1987—), 女, 安徽芜湖人, 扬州工业职业技术学院基础科学部讲师, 硕士, 研究方向: 排队论和随机网络。E-mail: ahlingtingting@126.com

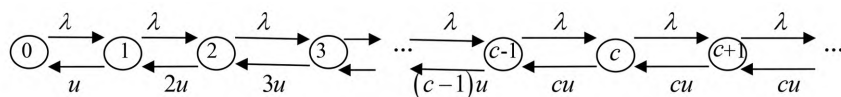


图 1 模型的状态转移图

Fig. 1 State transition diagram of the model

采用文献[10]的方法得系统状态概率的平衡方程:

$$\begin{cases} \mu\tilde{P}_1 = \lambda\tilde{P}_0 \\ (a+1)\mu\tilde{P}_{a+1} + \lambda\tilde{P}_{a-1} = (\lambda + a\mu)\tilde{P}_a, & (a = 1, 2, 3, \dots, c-1) \\ \lambda\tilde{P}_{a-1} + c\mu\tilde{P}_{a+1} = (\lambda + c\mu)\tilde{P}_a, & (a = c, c+1, \dots) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $\sum_{a=1}^{\infty} \tilde{P}_a = 1$ , 当且仅当服务台服务强度  $\rho = \frac{\lambda}{cu} < 1$  时, 系统达到稳定状态。

稳态指标:

$$\tilde{P}_0 = \left[ \sum_{a=0}^{c-1} \frac{1}{a!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^a + \frac{1}{c!} \cdot \frac{1}{1-\rho} \cdot \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \right]^{-1} \quad (2)$$

$$\tilde{P}_a = \begin{cases} \frac{1}{a!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^a \tilde{P}_0 & a \leq c \\ \frac{1}{c!} \frac{\lambda^a}{\mu^{a-c}} \cdot \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^c \tilde{P}_0 & a > c \end{cases} \quad (3)$$

$$\tilde{L}_q = \frac{(c\rho)^c \rho}{c! (1-\rho)^2} \tilde{P}_0; \tilde{L}_s = \tilde{L}_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (4)$$

$$\tilde{W}_q = \frac{\tilde{L}_q}{\lambda}; \tilde{W}_s = \tilde{W}_q + \frac{1}{\mu} \quad (5)$$

式中:  $\tilde{L}_q$  表示系统的平均等待队长;  $\tilde{L}_s$  表示系统的平均队长;  $\tilde{W}_q$  表示系统中顾客平均等待时间;  $\tilde{W}_s$  表示系统中顾客平均逗留时间;  $\tilde{P}_0$  表示系统空闲的概率;  $\tilde{P}_a$  表示系统中有  $a$  个顾客的概率。

### 1.3 最优约束条件

设  $\tilde{L}_{qmin}$  与  $\tilde{L}_{qmax}$  为系统平均等待队长的最小值与最大值;  $\tilde{W}_{qmin}$  与  $\tilde{W}_{qmax}$  为系统平均等待时间的最小值与最大值, 则有

$$\begin{cases} \tilde{L}_{qmin} \leq \frac{(c\rho)^c \rho}{c! (1-\rho)^2} \tilde{P}_0 \leq \tilde{L}_{qmax} \\ \tilde{W}_{qmin} \leq \frac{\tilde{L}_q}{\lambda} \leq \tilde{W}_{qmax} \end{cases} \quad (6)$$

可得最优服务强度  $\rho^*$  与检测点日容量。

## 2 实例分析

### 2.1 检测窗口数与工作时间分析

现以扬州市主城区第一轮全员核酸检测为例, 主城区约有 170 万人进行核酸检测, 第一轮核酸检测共设置了 340 个核酸检测点, 即平均每个检测点约 5 000 人, 系统平均服务率  $\mu = 3$  人/min。若要求一天内完成全员核酸检测任务, 当日工作时间不超过 14 h, 则每个核酸检测点至少需要设置 2 个检测窗口, 即  $c \geq 2$ , 才能保证系统服务强度  $\rho < 1$ 。若设置 3 个检测窗口, 即  $c = 3$  时, 为保证系统服务强度  $\rho < 1$ , 当日工作时间至少需要 9.3 h。设所需医护人员数为  $R$ , 分析  $c = 2$  和  $c = 3$  时系统的各项指标。

由式(2)~式(5)可得系统各项指标, 见表 1:

表 1 当日工作时间最少时  $c = 2$  与  $c = 3$  系统稳态指标对比Tab. 1 Comparison of system steady-state indicators between  $c = 2$  and  $c = 3$  when the working hours of the day are the least

$c$	$T/h$	$\lambda/(人 \cdot min^{-1})$	$\rho$	$\tilde{P}_0$	$\tilde{L}_q/人$	$\tilde{L}_s/人$	$\tilde{W}_q/min$	$\tilde{W}_s/min$	$R/人$
2	14.0	5.952	0.992	0.004 02	122.514	124.498	20.584	20.917	1 360
3	14.0	5.952	0.661	0.113 86	0.851	2.835	0.143	0.476	2 040
3	9.3	8.961	0.996	0.000 89	247.121	250.108	27.577	27.910	2 040

由表 1 可知, 若要求一天内完成核酸检测任务, 如果单点窗口数为 2, 工作时间 14 h 时, 系统平均等待队长为 122.514 人, 平均逗留时间为 20.917 min; 如果单点窗口数为 3, 工作时间 9.3 h 时, 系统平均等待队长

为 247.121 人,平均逗留时间为 27.910 min。两种情形下系统中排队人数都很多,逗留时间较长,服务效率较低,且容易造成大量人员聚集,大大提高了新冠病毒的传染率;如果单点窗口数为 3,而服务时间延长至 14 h,此时系统的利用率较低,且需要医务人员较多,不利于系统的稳定。因此,在 3 种情形下,系统指标达不到最优化,需要进一步分析系统的最优服务强度与检测点日容量。

## 2.2 系统最优服务强度与检测点日容量分析

仍以扬州主城区全员核酸检测为例,要求一天内完成核酸检测任务,采用 10 合 1 混采检测技术,因受场地大小、人员聚集度以及居民可接受的排队时间等因素的约束,取  $\tilde{L}_{q\min} = 10$  人,  $\tilde{L}_{q\max} = 15$  人,  $\tilde{W}_{q\min} = 1.5$  min,  $\tilde{W}_{q\max} = 2.0$  min,  $\mu = 3$  人/min,  $T = 12$  h, 日容量为  $Q$ , 检测点个数为  $M$ , 运用 MATLAB 可得系统各项指标, 见表 2—表 5:

表 2 控制平均等待队长时  $c=2$  系统指标分析

Tab. 2 System index analysis when  $c=2$  while controlling the average waiting queue length

$\tilde{L}_q/\text{人}$	$\rho$	$\lambda/(\text{人} \cdot \text{min}^{-1})$	$\tilde{P}_0$	$\tilde{W}_q/\text{min}$	$Q/\text{人}$	$M/\text{个}$	$R/\text{人}$
10	0.919 1	5.514 6	0.042 2	1.813 4	3 970	428	1 712
15	0.942 5	5.655 0	0.013 3	2.652 5	4 072	418	1 672

表 3 控制平均等待时间时  $c=2$  系统指标分析

Tab. 3 System index analysis when  $c=2$  while controlling the average waiting time

$\tilde{W}_q/\text{min}$	$\rho$	$\lambda/(\text{人} \cdot \text{min}^{-1})$	$\tilde{P}_0$	$\tilde{L}_q/\text{人}$	$Q/\text{人}$	$M/\text{个}$	$R/\text{人}$
1.5	0.904 5	5.427 0	0.042 2	8.137 1	3 907	435	1 740
2.0	0.925 8	5.554 8	0.013 3	11.106 2	4 000	425	1 700

表 4 控制平均等待队长时  $c=3$  系统指标分析

Tab. 4 System index analysis when  $c=3$  while controlling the average waiting queue length

$\tilde{L}_q/\text{人}$	$\rho$	$\lambda/(\text{人} \cdot \text{min}^{-1})$	$\tilde{P}_0$	$\tilde{W}_q/\text{min}$	$Q/\text{人}$	$M/\text{个}$	$R/\text{人}$
10	0.921 2	8.290 8	0.019 1	1.206 2	5 970	285	1 710
15	0.943 7	8.493 3	0.029 6	1.766 1	6 115	278	1 668

表 5 控制平均等待时间时  $c=3$  系统指标分析

Tab. 5 System index analysis when  $c=3$  while controlling the average waiting time

$\tilde{W}_q/\text{min}$	$\rho$	$\lambda/(\text{人} \cdot \text{min}^{-1})$	$\tilde{P}_0$	$\tilde{L}_q/\text{人}$	$Q/\text{人}$	$M/\text{个}$	$R/\text{人}$
1.5	0.934 9	8.414 1	0.015 6	12.630 7	6 058	281	1 686
2.0	0.949 6	8.546 4	0.011 9	17.075 4	6 153	276	1 657

由表 2 和表 3 可知,  $c=2$  时, 最优服务强度  $\rho_1^* = 0.925 8$ , 每个检测点最优日容量为 4 000 人, 如果均采用 2 个窗口, 则设置 425 个检测点最为合理, 共需 1 700 名医护人员。

由表 4 和表 5 可知,  $c=3$  时, 最优服务强度  $\rho_2^* = 0.943 7$ , 每个检测点最优日容量为 6 115 人, 如果均采用 3 个窗口, 则设置 278 个检测点最为合理, 共需 1 668 名医护人员。

对比上述两种设置可知, 相同条件下  $c=3$  时, 相对系统利用率更高, 顾客等待时间更短, 可降低传染率, 节约居民的等待时间成本, 系统更加稳定。

## 2.3 优化分析

由于扬州主城区人口分布不均匀, 可供调配的医护人员人数有限, 且采取就近检测的原则也会影响核酸检测点的设置, 故, 当某片区的常住人口在  $[2\ 000, 4\ 000]$  内, 该检测点设置 2 个检测窗口, 通过调节当日工作时间, 合理安排检测时间段, 可达到最优服务强度, 此时系统稳定性最好, 工作时间随检测人数变化情况如图 2 所示。

当某片区常住人口在  $[4\ 000, 6\ 115]$  内, 该检测点设置 3 个检测窗口, 也可通过调节当日工作时间, 合理安排检测时间段达到最优服务强度, 确保系统稳定性最好, 此时工作时间随检测人数变化情况如图 2 所示。

当某片区常住人口超过 6 115 人时, 采取就近检测的原则, 该片区应与其他片区合并开设 2 个检测点。

若以扬州主城区第一轮全员核酸检测为例, 共设置了 340 个核酸检测点, 则 179 个核酸检测点可设置 2 个检测窗口, 161 个核酸检测点可设置 3 个检测窗口, 并根据片区常住人口数进行合理分布。

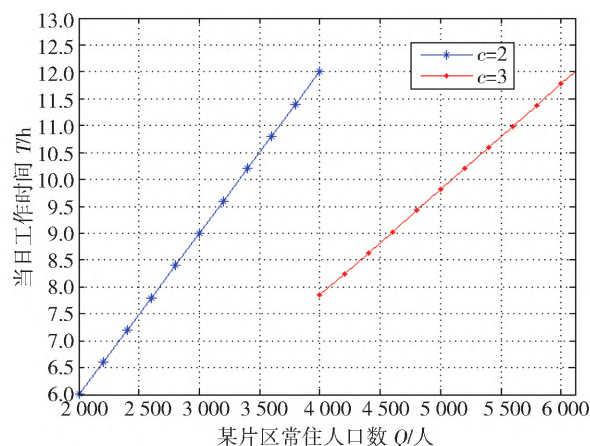


图 2  $c=2$  和  $c=3$  时工作时间随检测人数的变化情况

Fig. 2 The change of working hours as the number of people tested changed when  $c=2$  and  $c=3$

### 3 结语

本文基于排队论的基础理论,建立了符合实际的全员核酸检测点优化设置排队模型,首先通过控制平均等待队长和平均等待时间,分别得到检测窗口数为2和3时的最优服务强度和最优日容量,其次综合考虑主城区人口分布情况以及就近检测原则,选择最优检测窗口,并通过调节当日工作时间,合理安排检测时间段,确保每种检测点的服务强度达到最优,从而得到全员核酸检测点优化设置的合理方案,减少居民接触率,降低病毒传染率。

#### 参考文献:

- [1] BADIAN-PESSOT P, LEWIS M E, DOWN D G. Optimal control policies for an M/M/1 queue with a removable server and dynamic service rates[J]. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2019, 35(2): 1-21.
- [2] 李嘉兴, 李军. 可观测 M/M/1 排队系统的高低定价策略[J]. *系统工程*, 2020, 38(3): 10-16.
- [3] 孙敬煊, 高郡, 张峻川, 等. 带接触匹配的 M/M/C 排队模型[J]. *数学的实践与认识*, 2020, 50(19): 186-192.
- [4] WANG Q Q, ZHANG B. Analysis of a busy period queuing system with balking, reneging and motivating[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018(64): 480-488.
- [5] 李森彪, 邢文杰. 双排队系统下大型超市运营效率的优化研究[J]. *运筹与管理*, 2017, 26(12): 61-67.
- [6] 边英明, 薛琳琳, 陈健. 排队论对超市收银系统的优化研究[J]. *物流工程与管理*, 2016, 38(5): 221-222.
- [7] SUN S. Analysis and optimization of station taxi transfer efficiency based on queuing theory[J]. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2021, 791(1): 1-5.
- [8] BHARKAD N N. The application of queuing theory in disaster management[J]. *Sumedha Journal of Management*, 2019, 8(3): 310-317.
- [9] PETER P O, SIVASAMY R. Queueing theory techniques and its real applications to health care systems—outpatient visits[J]. *International Journal of Healthcare Management*, 2019: 1-10.
- [10] 陆传贵. 排队论[M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2009.

## Optimal Setting of Testing Sites for Nucleic Acid Tests of Entire People Based on Queuing Theory

LING Tingting<sup>1</sup>, DING Bolun<sup>1</sup>, DUAN Shuangshuang<sup>2</sup>

(1. Basic Science Department, Yangzhou Polytechnic Institute, Yangzhou 225127, China;

2. School of General Education and Foreign Languages, Anhui Institute of Information Technology, Wuhu 241000, China)

**Abstract:** In order to avoid complaints of residents participating in the nucleic acid tests of the entire people due to the long queue time and the increasing infection rate of novel coronavirus due to the large number of people in the queue, the M/M/c queuing model is used to construct an optimal setting model based on queuing theory, according to the study of random dynamic characteristics in the process of nucleic acid tests for the entire people. The nucleic acid tests for the entire people in the main urban areas of Yangzhou are taken as examples. Through the control of the average waiting queue length and average waiting time, the optimal service intensity and optimal daily capacity are obtained when 2 and 3 windows of windows in testing sites are set respectively. And combined with the population distribution of the main urban areas, a reasonable plan for the optimization of the nucleic acid testing sites for nucleic acid tests of the entire people is obtained.

**Keywords:** queuing model; testing sites for nucleic acid tests of the entire people; optimal service intensity; daily capacity; optimal setting for queuing

(责任编辑:弓 艳)