

## 第二十八章 灰色系统理论及其应用

客观世界的很多实际问题，其内部的结构、参数以及特征并未全部被人们了解，人们不可能象研究白箱问题那样将其内部机理研究清楚，只能依据某种思维逻辑与推断来构造模型。对这类部分信息已知而部分信息未知的系统，我们称之为灰色系统。本章介绍的方法是从灰色系统的本征灰色出发，研究在信息大量缺乏或紊乱的情况下，如何对实际问题进行分析和解决。

### §1 灰色系统概论

客观世界在不断发展的同时，往往通过事物之间及因素之间相互制约、相互联系而构成一个整体，我们称之为系统。按事物内涵的不同，人们已建立了工程技术、社会系统、经济系统等。人们试图对各种系统所外露出一的一些特征进行分析，从而弄清楚系统内部的运行机理。从信息的完备性与模型的构建上看，工程技术等系统具有较充足的信息量，其发展变化规律明显，定量描述较方便，结构与参数较具体，人们称之为白色系统；对另一类系统诸如社会系统、农业系统、生态系统等，人们无法建立客观的物理原型，其作用原理亦不明确，内部因素难以辨识或之间关系隐蔽，人们很难准确了解这类系统的行为特征，因此对其定量描述难度较大，带来建立模型的困难。这类系统内部特性部分已知的系统称之为灰色系统。一个系统的内部特性全部未知，则称之为黑色系统。

区别白色系统与灰色系统的重要标志是系统内各因素之间是否具有确定的关系。运动学中物体运动的速度、加速度与其所受到的外力有关，其关系可用牛顿定律以明确的定量来阐明，因此，物体的运动便是一个白色系统。

当然，白、灰、黑是相对于一定的认识层次而言的，因而具有相对性。某人有一天去他朋友家做客，发现当外面的汽车开过来时，他朋友家的狗就躲到屋角里瑟瑟发抖。他对此莫名其妙。但对他朋友来讲，狗的这种行为是可以理解的，因为他知道，狗在前不久曾被汽车撞伤过。显然，同样对于“狗的惧怕行为”，客人因不知内情而面临一个黑箱，而主人则面临一个灰箱。

作为实际问题，灰色系统在大千世界中是大量存在的，绝对的白色或黑色系统是很少的。随着人类认识的进步及对掌握现实世界的要求的升级，人们对社会、经济等问题的研究往往已不满足于定性分析。尽管当代科技日新月异，发展迅速，但人们对自然的认识仍然是肤浅的。粮食作物的生产是一个实际的关系到人们吃饭的大问题，但同时，它又是一个抽象的灰色系统。肥料、种子、农药、气象、土壤、劳力、水利、耕作及政策等皆是影响生产的因素，但又难以确定影响生产的确定因素，更难确定这些因素与粮食产量的定量关系。人们只能在一定的假设条件（往往是一些经验及常识）下按照某种逻辑推理演绎而得到模型。这种模型并非是粮食作物生产问题在理论认识上的“翻版”，而只能看作是人们在认识上对实际问题的一种“反映”或“逼近”。

社会、经济、农业以及生态系统一般都会有不可忽略的“噪声”（即随即干扰）。现有的研究经常被“噪声”污染。受随机干扰侵蚀的系统理论主要立足于概率统计。通过统计规律、概率分布对事物的发展进行预测，对事物的处置进行决策。现有的系统分

析的量化方法，大都是数理统计法如回归分析、方差分析、主成分分析等，回归分析是应用最广泛的一种办法。但回归分析要求大样本，只有通过大量的数据才能得到量化的规律，这对很多无法得到或一时缺乏数据的实际问题的解决带来困难。回归分析还要求样本有较好的分布规律，而很多实际情形并非如此。例如，我国建国以来经济方面有几次大起大落，难以满足样本有较规律的分布要求。因此，有了大量的数据也不一定能得到统计规律，甚至即使得到了统计规律，也并非任何情况都可以分析。另外，回归分析不能分析因素间动态的关联程度，即使是静态，其精度也不高，且常常出现反常现象。

灰色系统理论提出了一种新的分析方法——**关联度分析方法**，即根据因素之间发展态势的相似或相异程度来衡量因素间关联的程度，它揭示了事物动态关联的特征与程度。由于以发展态势为立足点，因此对样本量的多少没有过分的要求，也不需要典型的分布规律，计算量少到甚至可用手算，且不致出现关联度的量化结果与定性分析不一致的情况。这种方法已应用到农业经济、水利、宏观经济等各方面，都取得了较好的效果。

灰色系统理论建模的主要任务是根据具体灰色系统的行为特征数据，充分开发并利用不多的数据中的显信息和隐信息，寻找因素间或因素本身的数学关系。通常的办法是采用离散模型，建立一个**按时间作逐段分析的模型**。但是，离散模型只能对客观系统的发展做短期分析，适应不了从现在起做较长远分析、规划、决策的要求。尽管连续系统的离散近似模型对许多工程应用来讲是有用的，但在某些研究领域中，人们却常常希望使用微分方程模型。事实上，微分方程的系统描述了我们所希望辨识的系统内部的物理或化学过程的本质。

灰色系统理论首先基于对客观系统的新的认识。尽管某些系统的信息不够充分，但作为系统必然是有特定功能和有序的，只是其内在规律并未充分外露。有些随机量、无规则的干扰成分以及杂乱无章的数据列，从灰色系统的观点看，并不认为是不可捉摸的。相反地，灰色系统理论将随机量看作是在一定范围内变化的灰色量，按适当的办法将原始数据进行处理，将灰色数变换为**生成数**，从生成数进而得到规律性较强的生成函数。例如，某些系统的数据经处理后呈现出指数规律，这是由于大多数系统都是广义的能量系统，而指数规律是能量变化的一种规律。灰色系统理论的量化基础是生成数，从而突破了概率统计的局限性，使其结果不再是过去依据大量数据得到的经验性的统计规律，而是现实性的生成律。这种使灰色系统变得尽量清晰明了的过程被称为**白化**。

目前，灰色系统理论已成功地应用于工程控制、经济管理、未来学研究、生态系统及复杂多变的农业系统中，并取得了可喜的成就。灰色系统理论有可能对社会、经济等抽象系统进行分析、建模、预测、决策和控制，它有可能成为人们认识客观系统改造客观系统的一个新型的理论工具。

## §2 关联分析

大千世界里的客观事物往往现象复杂，因素繁多。我们往往需要对系统进行因素分析，这些因素中哪些对系统来讲是主要的，哪些是次要的，哪些需要发展，哪些需要抑制，哪些是潜在的，哪些是明显的。一般来讲，这些都是我们极为关心的问题。事实上，因素间关联性如何、关联程度如何量化等问题是系统分析的关键和起点。

因素分析的基本方法过去主要采取回归分析等办法。正如前一节指出的，回归分

析的办法有很多欠缺，如要求大量数据、计算量大及可能出现反常情况等。为克服以上弊病，本节采用关联度分析的办法来做系统分析。

作为一个发展变化的系统，关联分析实际上是动态过程发展态势的量化比较分析。所谓发展态势比较，也就是系统各时期有关统计数据的几何关系的比较。

例如，某地区 1977~1983 年总收入与养猪、养兔收入资料见表 1。

表 1 收入数据

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
总收入	18	20	22	40	44	48	60
养 猪	10	15	16	24	38	40	50
养 兔	3	2	12	10	22	18	20

根据表 1，做曲线图 1。

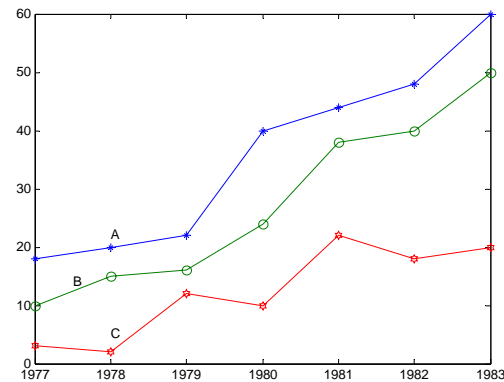


图 1 收入数据图

由上图易看出，曲线 A 与曲线 B 发展趋势比较接近，而与曲线 C 相差较大，因此可以判断，该地区对总收入影响较直接的是养猪业，而不是养兔业。

很显然，几何形状越接近，关联程度也就越大。当然，直观分析对于稍微复杂些的问题则显得难于进行。因此，需要给出一种计算方法来衡量因素间关联程度的大小。

### 2.1 数据变换技术

为保证建模的质量与系统分析的正确结果，对收集来的原始数据必须进行数据变换和处理，使其消除量纲和具有可比性。

定义 1 设有序列

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

则称映射

$$f: x \rightarrow y$$

$$f(x(k)) = y(k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

为序列  $x$  到序列  $y$  的数据变换。

1) 当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{x(1)} = y(k), \quad x(1) \neq 0$$

称  $f$  是初值化变换。

2) 当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{\bar{x}} = y(k), \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(k)$$

称  $f$  是均值化变换。

3) 当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{\max_k x(k)} = y(k)$$

称  $f$  是百分比变换。

4) 当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{\min_k x(k)} = y(k), \quad \min_k x(k) \neq 0$$

称  $f$  是倍数变换。

5) 当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{x_0} = y(k)$$

其中  $x_0$  为大于零的某个值，称  $f$  是归一化变换。

6) 当

$$f(x(k)) = \frac{x(k) - \min_k x(k)}{\max_k x(k)} = y(k)$$

称  $f$  是极差最大化变换。

7) 当

$$f(x(k)) = \frac{x(k) - \min_k x(k)}{\max_k x(k) - \min_k x(k)} = y(k)$$

称  $f$  是区间值化变换。

## 2.2 关联分析

定义 2 选取参考数列

$$x_0 = \{x_0(k) | k = 1, 2, \dots, n\} = (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n))$$

其中  $k$  表示时刻。假设有  $m$  个比较数列

$$x_i = \{x_i(k) | k = 1, 2, \dots, n\} = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

则称

$$\xi_i(k) = \frac{\min_s \min_t |x_0(t) - x_s(t)| + \rho \max_s \max_t |x_0(t) - x_s(t)|}{|x_0(k) - x_i(k)| + \rho \max_s \max_t |x_0(t) - x_s(t)|} \quad (1)$$

为比较数列  $x_i$  对参考数列  $x_0$  在  $k$  时刻的关联系数，其中  $\rho \in [0, 1]$  为分辨系数。称 (1)

式中  $\min_s \min_t |x_0(t) - x_s(t)|$ 、 $\max_s \max_t |x_0(t) - x_s(t)|$  分别为两级最小差及两级最大差。

一般来讲，分辨系数  $\rho$  越大，分辨率越大； $\rho$  越小，分辨率越小。

(1) 式定义的关联系数是描述比较数列与参考数列在某时刻关联程度的一种指标，由于各个时刻都有一个关联数，因此信息显得过于分散，不便于比较，为此我们给出

定义 3 称

$$r_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_i(k) \quad (2)$$

为数列  $x_i$  对参考数列  $x_0$  的关联度。

由 (2) 易看出，关联度是把各个时刻的关联系数集中为一个平均值，亦即把过于分散的信息集中处理。利用关联度这个概念，我们可以对各种问题进行因素分析。考虑

下面的问题。

例 1 通过对某健将级女子铅球运动员的跟踪调查, 获得其 1982 年至 1986 年每年最好成绩及 16 项专项素质和身体素质的时间序列资料, 见表 2, 试对此铅球运动员的专项成绩进行因素分析。

表 2 各项成绩数据

	1982	1983	1984	1985	1986
铅球专项成绩 $x_0$	13.6	14.01	14.54	15.64	15.69
4kg 前抛 $x_1$	11.50	13.00	15.15	15.30	15.02
4kg 后抛 $x_2$	13.76	16.36	16.90	16.56	17.30
4kg 原地 $x_3$	12.41	12.70	13.96	14.04	13.46
立定跳远 $x_4$	2.48	2.49	2.56	2.64	2.59
高 翻 $x_5$	85	85	90	100	105
抓 举 $x_6$	55	65	75	80	80
卧 推 $x_7$	65	70	75	85	90
3kg 前抛 $x_8$	12.80	15.30	16.24	16.40	17.05
3kg 后抛 $x_9$	15.30	18.40	18.75	17.95	19.30
3kg 原地 $x_{10}$	12.71	14.50	14.66	15.88	15.70
3kg 滑步 $x_{11}$	14.78	15.54	16.03	16.87	17.82
立定三级跳远 $x_{12}$	7.64	7.56	7.76	7.54	7.70
全 蹲 $x_{13}$	120	125	130	140	140
挺 举 $x_{14}$	80	85	90	90	95
30 米起跑 $x_{15}$	4''2	4''25	4''1	4''06	3''99
100 米 $x_{16}$	13''1	13''42	12''85	12''72	12''56

在利用 (1) 式及 (2) 式计算关联度之前, 我们需对表 2 的各个数列做初始化处理。一般来讲, 实际问题中的不同数列往往具有不同的量纲, 而我们在计算关联系数时, 要求量纲要相同。因此, 需首先对各种数据进行无量纲化。另外, 为了易于比较, 要求所有数列有公共的交点。为了解决上述两个问题, 我们对给定数列进行变换。

定义 4 给定数列  $x = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ , 称

$$\bar{x} = \left( 1, \frac{x(2)}{x(1)}, \dots, \frac{x(n)}{x(1)} \right)$$

为原始数列  $X$  的初始化数列。

这样，我们可对表 2 中的 17 个数列进行初始化处理。注意，对于前 15 个数列，随着时间的增加，数值的增加意味着运动水平的进步，而对后 2 个数列来讲，随着时间的增加，数值（秒数）的减少却意味着运动水平的进步。因此，在对数列  $x_{15}$  及  $x_{16}$  进行初始化处理时，采取以下公式

$$x_i = \left( 1, \frac{x_i(1)}{x_i(2)}, \frac{x_i(1)}{x_i(3)}, \frac{x_i(1)}{x_i(4)}, \frac{x_i(1)}{x_i(5)} \right), \quad i = 15, 16$$

依照问题的要求，我们自然选取铅球运动员专项成绩作为参考数列，将表 2 中的各个数列的初始化数列代入（1）及（2）式，易算出各数列的关联度如下表（这里  $\rho = 0.5$ ）。

表 3 关联度计算结果

$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$
0.588	0.663	0.854	0.776	0.855	0.502	0.659	0.582
$r_9$	$r_{10}$	$r_{11}$	$r_{12}$	$r_{13}$	$r_{14}$	$r_{15}$	$r_{16}$
0.683	0.696	0.896	0.705	0.933	0.847	0.745	0.726

计算的 MATLAB 程序如下：

```

clc,clear
load x.txt    %把原始数据存放在纯文本文件 x.txt 中
for i=1:15
    x(i,:)=x(i,:)/x(i,1);    %标准化数据
end
for i=16:17
    x(i,:)=x(i,1)./x(i,:);    %标准化数据
end
data=x;
n=size(data,1);
ck=data(1,:);m1=size(ck,1);
bj=data(2:n,:);m2=size(bj,1);
for i=1:m1
    for j=1:m2
        t(j,:)=bj(j,:)-ck(i,:);
    
```

```

end
jc1=min(min(abs(t')));jc2=max(max(abs(t')));
rho=0.5;
ksi=(jc1+rho*jc2)./(abs(t)+rho*jc2);
rt=sum(ksi')/size(ksi,2);
r(i,:)=rt;
end
r
[rs,rind]=sort(r,'descend') %对关联度进行排序

```

由表 3 易看出,影响铅球专项成绩的前八项主要因素依次为全蹲、3kg 滑步、高翻、4kg 原地、挺举、立定跳远、30 米起跳、100 米成绩。因此,在训练中应着重考虑安排这八项指标的练习。这样可减少训练的盲目性,提高训练效果。

应该指出的是,公式(1)中的 $|x_0(k) - x_i(k)|$ 不能区别因素关联是正关联还是负关联,可采取下述办法解决这个问题。记

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^n kx_i(k) - \sum_{k=1}^n x_i(k) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则:

- (1) 当 $\text{sign}(\sigma_i) = \text{sign}(\sigma_j)$ , 则 $x_i$ 和 $x_j$ 为正关联;
- (2) 当 $\text{sign}(\sigma_i) = -\text{sign}(\sigma_j)$ , 则 $x_i$ 和 $x_j$ 为负关联。

### § 3 优势分析

当参考数列不止一个,被比较的因素也不止一个时,则需进行优势分析。

假设有 $m$ 个参考数列(宜称母因素),记为 $y_1, y_2, \dots, y_m$ ,再假设有 $l$ 个比较数列(亦称子因素),记为 $x_1, x_2, \dots, x_l$ 。显然,每一个参考数列对 $l$ 个比较数列有 $l$ 个关联度,

设 $r_{ij}$ 表示比较数列 $x_j$ 对参考数列 $y_i$ 的关联度,可构造关联(度)矩阵 $R = (r_{ij})_{m \times l}$ 。根

据矩阵 $R$ 的各个元素的大小,可分析判断出哪些因素起主要影响,哪些因素起次要影响。起主要影响的因素称之为优势因素。再进一步,当某一行元素大于其它列元素时,称此列所对应的子因素为优势子因素;若某一行元素均大于其它行元素时,称此行所对应的母元素为优势母元素。例如,矩阵 $R$ 的第3列元素大于其它各列元素,

$$r_{i3} > r_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j \neq 3$$



则称  $x_3$  为优势子因素。

如果矩阵  $R$  的某个元素达到最大，则该行对应的母因素被认为是所有母因素中影响最大的。

为简单起见，先来讨论一下“对角线”以上元素为零的关联矩阵，例如

$$R = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.7 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.8 & 0.2 & 0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为第 1 列元素是满的，故称第 1 个子元素为潜在优势子因素。第 2 列元素中有一个元素为零，故称第 2 个子因素为次潜在优势子因素。余下类推。

当关联矩阵的“对角线”以下全都是零元素，则称第 1 个母因素为潜在优势母因素……，为了分析方便，我们经常把相对较小的元素近似为零，从而使关联矩阵尽量稀疏。

我们参考一个实际问题。

例 2 某地区有 6 个母因素  $y_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ )，5 个子因素  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,5$ ) 如下：

- |               |              |
|---------------|--------------|
| $x_1$ ：固定资产投资 | $y_1$ ：国民收入  |
| $x_2$ ：工业投资   | $y_2$ ：工业收入  |
| $x_3$ ：农业投资   | $y_3$ ：农业收入  |
| $x_4$ ：科技投资   | $y_4$ ：商业收入  |
| $x_5$ ：交通投资   | $y_5$ ：交通收入  |
|               | $y_6$ ：建筑业收入 |

其数据列于表 4。

表 4 投资和收入数据

	1979	1980	1981	1982	1983
$x_1$	308.58	310	295	346	367
$x_2$	195.4	189.9	187.2	205	222.7

$x_3$	24.6	21	12.2	15.1	14.57
$x_4$	20	25.6	23.3	29.2	30
$x_5$	18.98	19	22.3	23.5	27.655
$y_1$	170	174	197	216.4	235.8
$y_2$	57.55	70.74	76.8	80.7	89.85
$y_3$	88.56	70	85.38	99.83	103.4
$y_4$	11.19	13.28	16.82	18.9	22.8
$y_5$	4.03	4.26	4.34	5.06	5.78
$y_6$	13.7	15.6	13.77	11.98	13.95

根据表 4 的数据，利用如下的 MATLAB 程序

```

clc,clear
load data.txt %把原始数据存放在纯文本文件 data.txt 中
n=size(data,1);
for i=1:n
    data(i,:)=data(i,:)/data(i,1); %标准化数据
end
ck=data(6:n,:);m1=size(ck,1);
bj=data(1:5,:);m2=size(bj,1);
for i=1:m1
    for j=1:m2
        t(j,:)=bj(j,:)-ck(i,:);
    end
    jc1=min(min(abs(t')));jc2=max(max(abs(t')));
    rho=0.5;
    ksi=(jc1+rho*jc2)./(abs(t)+rho*jc2);
    rt=sum(ksi')/size(ksi,2);
    r(i,:)=rt;
end
r

```

计算出各个子因素对母因素的关联度（这里取  $\rho = 0.5$ ），从而得到关联矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} 0.802 & 0.761 & 0.557 & 0.810 & 0.936 \\ 0.689 & 0.666 & 0.529 & 0.885 & 0.800 \\ 0.891 & 0.858 & 0.579 & 0.577 & 0.675 \\ 0.678 & 0.663 & 0.568 & 0.780 & 0.731 \\ 0.811 & 0.774 & 0.565 & 0.804 & 0.921 \\ 0.743 & 0.766 & 0.562 & 0.607 & 0.632 \end{bmatrix}$$

从关联矩阵  $R$  可以看出：

(1) 第 4 行元素几乎最小，表明各种投资对商业收入影响不大，即商业是一个不太需要依赖外资而能自行发展的行业。从消耗投资上看，这是劣势，但从少投资多收入的效益观点看，商业是优势。

(2)  $r_{15} = 0.936$  最大，表明交通投资的多少对国民收入的影响最大。也可以从此看出交通的影响。

(3)  $r_{55} = 0.921$  仅次于  $r_{15}$ ，表明交通收入主要取决于交通投资，这是很自然的。

(4) 在第 4 列中  $r_{24} = 0.885$  最大，表明科技对工业影响最大；而  $r_{34} = 0.577$  是该列中最小的，表明从全面来衡量，还没有使科技投资与农业经济挂上钩，即科技投资针对的不是农村需要的科技。

(5) 第三行的前 3 个元素比价大，表明农业是个综合性行业，需其它方面的配合，例如， $r_{31} = 0.891$  表明固定资产投资能够较大地促进农业的发展。另外， $r_{32} = 0.858$  表明农业发展与交通发展也是密切相关的。

## § 4 生成数

### 4.1 累加生成

在研究社会系统、经济系统等抽象系统时，往往要遇到随机干扰（即所谓“噪声”）。人们对“噪声”污染系统的研究大多基于概率统计方法。但概率统计方法有很多不足之处：要求大量数据、要求有典型的统计规律、计算工作量等。而且在某些问题中，其概率意义下的结论并不直观或信息量少。例如，预报某天下雨的概率是 0.5，晴天的概率也是 0.5，这种结论对于人们来讲毫无意义。

灰色系统理论把一切随机量都看作灰色数——即在指定范围内变化的所有白色数的全体。对灰色数的处理不是找概率分布或求统计规律，而是利用数据处理的办法去寻找数据间的规律。通过对数列中的数据进行处理，产生新的数列，以此来挖掘和寻找数的规律性的方法，叫做数的生成。数的生成方式有多种：累加生成、累减生成以及加权累加等等。这里主要介绍累加生成。

定义 5 把数列  $x$  各时刻数据依次累加的过程叫做累加过程，记作 AGO，累加所得的新数列，叫做累加生成数列。具体地，设原始数列为

$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ , 累加生成数列记为  $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), \dots, x^{(1)}(n))$ , 且  $x^{(0)}$  与  $x^{(1)}$  满足

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=\alpha}^k x^{(0)}(i), \quad k = \alpha, \dots, n \quad (3)$$

其中  $\alpha \leq n$  为正整数。上述累加过程当  $1 < \alpha \leq k$  时称为去首累加生成, 当  $\alpha = 1$  时称为一般累加生成。

这里, 我们只讨论  $\alpha = 1$  时的情形, (3) 式中上标 (1) 表示 1 次累加生成, 记作 1—AGO。在一次累加数列  $x^{(1)}$  的基础上再做 1 次累加生成, 可得到 2 次累加生成, 记作 2—AGO。依次下去, 对原始数列  $x^{(0)}$ , 我们可做  $r$  次累加生成, 记作  $r$ —AGO, 从而得到  $r$  次累加生成数列  $x^{(r)}$ 。 $x^{(r)}$  与  $x^{(r-1)}$  满足下面的关系:

$$x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(r-1)}(i), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

在实际应用中, 最常用的是 1 次累加生成。本节只讨论 1 次累加生成。

一般地, 经济数列等实际问题的数列皆是非负数列, 累加生成可使非负的摆动与非摆动的数列或任意无规律性的数列转化为非减的、递增的数列。

当然, 有些实际问题的数列中有负数 (例如温度等), 累加时略微复杂。有时, 由于出现正负抵消这种信息损失的现象, 数列经过累加生成后规律性非但没得到加强, 甚至可能被削弱。对于这种情形, 我们可以先进行移轴, 然后再做累加生成。

#### 4.2 累减生成

当然, 利用数的生成可得到一系列有规律的数据, 甚至可拟合成一些函数。但生成数列并非是直接可用的数列, 因此, 对于生成数还有个还原的问题。对累加生成, 还原的办法采用累减生成。

对原始数列依次做前后两数据相减的运算过程叫累减生成, 记作 IAGO。若  $x^{(r)}$  为  $r$ —AGO 数列, 则称

$$x^{(r-1)}(k) = x^{(r)}(k) - x^{(r)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

为  $r$  次累减生成数列。

#### 4.3 均值生成

设原始数列为  $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ , 则称  $x^{(0)}(k-1)$  与  $x^{(0)}(k)$  为数

列  $x^{(0)}$  的一对（紧）邻值， $x^{(0)}(k-1)$  称为前值， $x^{(0)}(k)$  称为后值。

对于常数  $\alpha \in [0,1]$ ，则称

$$z^{(0)}(k) = \alpha x^{(0)}(k) + (1-\alpha)x^{(0)}(k-1)$$

为由数列  $x^{(0)}$  的邻值在生成系数（权） $\alpha$  下的邻值生成数（或生成值）。

特别地，当生成系数  $\alpha = 0.5$  时，则称

$$z^{(0)}(k) = 0.5x^{(0)}(k) + 0.5x^{(0)}(k-1) \quad (6)$$

为（紧）邻均值生成数，即等权邻值生成数。

类似地，可以定义非邻值生成数：

$$\tilde{z}^{(0)}(k) = \alpha x^{(0)}(k+1) + (1-\alpha)x^{(0)}(k-1)$$

和

$$\tilde{z}^{(0)}(k) = 0.5x^{(0)}(k+1) + 0.5x^{(0)}(k-1)$$

而数列  $\tilde{z}^{(0)} = (\tilde{z}^{(0)}(1), \tilde{z}^{(0)}(2), \dots, \tilde{z}^{(0)}(n))$  称为非紧邻均值（mean）生成数列。

## § 5 灰色模型 GM

灰色系统理论是基于关联空间、光滑离散函数等概念定义灰导数与灰微分方程，进而用离散数据列建立微分方程形式的动态模型，由于这是本征灰色系统的基本模型，而且模型是近似的、非唯一的，故这种模型为灰色模型，记为 GM（Grey Model），即灰色模型是利用离散随机数经过生成变为随机性被显著削弱而且较有规律的生成数，建立起的微分方程形式的模型，这样便于对其变化过程进行研究和描述。

### 5.1 GM(1,1)模型

#### 1. GM(1,1)的定义

设  $x^{(0)}$  为  $n$  个元素的数列  $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ ， $x^{(0)}$  的 AGO 生成数

列为  $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ ，其中  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ （ $k=1, 2, \dots, n$ ）。则

定义  $x^{(1)}$  的灰导数为

$$d(k) = x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1),$$

令  $z^{(1)}$  为数列  $x^{(1)}$  的紧邻均值数列，即

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

则  $z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$ 。于是定义 GM(1,1) 的灰微分方程模型为

$$d(k) + az^{(1)}(k) = b,$$

即

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (7)$$

其中  $x^{(0)}(k)$  称为灰导数， $a$  称为发展系数， $z^{(1)}(k)$  称为白化背景值， $b$  称为灰作用量。

将时刻  $k = 2, 3, \dots, n$  代入 (7) 式中有

$$\begin{cases} x^{(0)}(2) + az^{(1)}(2) = b \\ x^{(0)}(3) + az^{(1)}(3) = b \\ \dots\dots\dots \\ x^{(0)}(n) + az^{(1)}(n) = b \end{cases}$$

$$\text{令 } Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))^T, \quad u = (a, b)^T, \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \text{ 称 } Y \text{ 为}$$

数据向量， $B$  为数据矩阵， $u$  为参数向量，则 GM(1,1) 模型可以表示为矩阵方程  $Y = Bu$ 。

由最小二乘法可以求得

$$\hat{u} = (\hat{a}, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

## 2. GM(1,1) 的白化型

对于 GM(1,1) 的灰微分方程 (7)，如果将  $x^{(0)}(k)$  的时刻  $k = 2, 3, \dots, n$  视为连续连续的变量  $t$ ，则数列  $x^{(1)}$  就可以视为时间  $t$  的函数，记为  $x^{(1)} = x^{(1)}(t)$ ，并让灰导数

$x^{(0)}(k)$  对应于导数  $\frac{dx^{(1)}}{dt}$ ，背景值  $z^{(1)}(k)$  对应于  $x^{(1)}(t)$ 。于是得到 GM(1,1) 的灰微分

方程对应的白微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (8)$$

称之为 GM(1,1) 的白化型。

值得注意的是：GM(1,1) 的白化型 (8) 并不是由 GM(1,1) 的灰微分方程直接推导出来的，它仅仅是一种“借用”或“白化默认”。

另一方面，GM(1,1) 的白化型是一个真正的微分方程，如果白化型模型精度高，则表明所用数列建立的模型 GM(1,1) 与真正的微分方程模型吻合较好，反之亦然。

## 5.2 GM(1, N) 模型

### 1. GM(1, N) 模型定义

GM(1,1) 即表示模型是 1 阶的，且只含 1 个变量的灰色模型。而 GM(1, N) 即表示模型是 1 阶的，包含有  $N$  个变量的灰色模型。

设系统有  $N$  个行为因子，即原始数列为

$$x_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(n)), \quad \underline{i = 1, 2, \dots, N}$$

记  $x_i^{(1)}$  为  $x_i^{(0)}$  的 AGO 数列，即

$$\begin{aligned} x_i^{(1)} &= (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \dots, x_i^{(1)}(n)) \\ &= (x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(1) + x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(1)}(n-1) + x_i^{(0)}(n)), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

其中  $x_i^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )。取  $x_1^{(1)}$  的均值数列

$$z_1^{(1)}(k) = 0.5x_1^{(1)}(k) + 0.5x_1^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

则  $z_1^{(1)} = (z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), \dots, z_1^{(1)}(n))$ 。于是可得到 GM(1, N) 的灰微分方程为

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k) \quad (9)$$

其中  $x_1^{(0)}(k)$  为灰导数， $z_1^{(1)}(k)$  为背景值， $a, b_i (i = 2, 3, \dots, N)$  为参数。

如果对于一切时刻  $k = 2, 3, \dots, n$ ，引入向量矩阵记号

$$Y = [x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), \dots, x_1^{(0)}(n)]^T, \quad u = [a, b_2, b_3, \dots, b_N]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}$$

则 GM(1, N) 的灰微分方程为

$$Y = Bu$$

其中  $Y$  为已知数据向量,  $B$  为 GM(1, N) 已知数据矩阵,  $u$  为参数向量。用  $\hat{u}$  表示  $u$  的估计值, 令  $\varepsilon = Y - B\hat{u}$  表示估计值的残差, 根据最小二乘法, 求使

$$J(\hat{u}) = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - B\hat{u})^T (Y - B\hat{u})$$

达到最小值的估计值  $\hat{u}$ 。

事实上, 如果存在  $(B^T B)^{-1}$ , 则有

$$\hat{u} = [\hat{a}, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \dots, \hat{b}_N]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (10)$$

如果  $(B^T B)$  为奇异矩阵 (例如当  $n-1 < N$  时), 即  $(B^T B)^{-1}$  不存在, 则此时  $\hat{u}$  不能用 (10) 式确定。但注意到  $\hat{u}$  的元素实际上是各子因素对主因素影响大小的反映, 因此, 我们可以引入加权矩阵  $W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_N)$ , 使对各因素的未来发展趋势进行调整控制。对于未来发展减弱趋势的因素赋予较大的权值, 而对于未来增强趋势的因素赋予较小的权值, 使之更好地反映未来的实际情况。此时, 计算向量  $\hat{u}$  可采用下面的公式

$$\hat{u} = [\hat{a}, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \dots, \hat{b}_N]^T = W^{-1} B^T (B W^{-1} B^T)^{-1} Y$$

## 2. GM(1, N) 的白化型

对于模型 GM(1, N) 的灰微分方程 (9), 如果将  $x_i^{(1)}(k)$  的时刻  $k = 1, 2, \dots, N$  视为连续变量  $t$ , 则数列  $x_i^{(1)}(k)$  就可以视为时间  $t$  的函数, 记为  $x_i^{(1)} = x_i^{(1)}(t)$ 。则可得到

GM(1, N) 的白化微分方程



$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)}(t) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(t),$$

即为一阶  $N$  个变量的微分方程。

## § 6 灰色预测

灰色预测是指利用 GM 模型对系统行为特征的发展变化规律进行估计预测, 同时也可以对行为特征的异常情况发生的时刻进行估计计算, 以及对在特定时区内发生事件的未来时间分布情况做出研究等等。这些工作实质上是将“随机过程”当作“灰色过程”, “随机变量”当作“灰变量”, 并主要以灰色系统理论中的 GM(1,1)模型来进行处理。

灰色预测在工业、农业、商业等经济领域, 以及环境、社会 and 军事等领域中都有广泛的应用。特别是依据目前已有的数据对未来的发展趋势做出预测分析。

### 6.1 灰色预测的方法

设已知参考数据列为  $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ , 做 1 次累加 (AGO) 生成数列

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \\ &= (x^{(1)}(1), x^{(1)}(1) + x^{(0)}(2), \dots, x^{(1)}(n-1) + x^{(0)}(n)) \end{aligned}$$

其中  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )。求均值数列

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

则  $z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$ 。于是建立灰微分方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

相应的白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)}(t) = b, \quad (11)$$

记  $u = (a, b)^T$ ,  $Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n))^T$ ,  $B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$ , 则由最小二

乘法, 求得使  $J(\hat{u}) = (Y - B\hat{u})^T (Y - B\hat{u})$  达到最小值的  $\hat{u} = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ 。于是求解方程 (11) 得

$$x^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1。$$

## 6.2 灰色预测的步骤

### 1. 数据的检验与处理

首先, 为了保证建模方法的可行性, 需要对已知数据列做必要的检验处理。设参考数据为  $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ , 计算数列的级比

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

如果所有的级比  $\lambda(k)$  都落在可容覆盖  $(e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+2}})$  内, 则数列  $x^{(0)}$  可以作为模型 GM(1,1) 的数据进行灰色预测。否则, 需要对数列  $x^{(0)}$  做必要的变换处理, 使其落入可容覆盖内。即取适当的常数  $c$ , 作平移变换

$$y^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) + c, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则使数列  $y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n))$  的级比

$$\lambda_y(k) = \frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)} \in X, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

### 2. 建立模型

按 6.1 节中的方法建立模型 GM(1,1), 则可以得到预测值

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

而且  $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1。$

### 3. 检验预测值

(1) 残差检验: 令残差为  $\varepsilon(k)$ , 计算

$$\varepsilon(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

如果  $\varepsilon(k) < 0.2$ ，则可认为达到一般要求；如果  $\varepsilon(k) < 0.1$ ，则认为达到较高的要求。

(2) 级比偏差值检验：首先由参考数据  $x^{(0)}(k-1)$ ， $x^{(0)}(k)$  计算出级比  $\lambda(k)$ ，再用发展系数  $a$  求出相应的 级比偏差

$$\rho(k) = 1 - \left( \frac{1 - 0.5a}{1 + 0.5a} \right) \lambda(k)$$

如果  $\rho(k) < 0.2$ ，则可认为达到一般要求；如果  $\rho(k) < 0.1$ ，则认为达到较高的要求。

#### 4. 预测预报

由模型 GM(1,1) 所得到的指定时区内的预测值，实际问题的需要，给出相应的预测预报。

#### 6.3 灾变预测

给定原始数据列  $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 。如果指定某个定值  $\zeta$ ，并认为  $x^{(0)}$  中那些大于  $\zeta$  的点为具有异常值的点，然后将这些数据挑出来另组一数列，则称这一数列为 上限灾变数列。例如，给定数列  $x^{(0)} = (3, 0.7, 8, 5)$ ，若取  $\zeta = 1$ ，则其上限灾变数列为

$$x_{\zeta}^0 = (3, 8, 5)$$

同理，可定义 下限灾变数列 这个概念。注意，灾变预测不是预测数据本身的大小，而是 预测异常值出现的时间。我们考虑下面这个问题。

例 3 某地区年平均降雨量数据如表 5

表 5 某地区年平均降雨量数据

年	1	2	3	4	5	6	7	8	9
降雨量	390.6	412	320	559.2	380.8	542.4	553	310	561
年	10	11	12	13	14	15	16	17	
降雨量	300	632	540	406.2	313.8	576	587.6	318.5	

规定  $\zeta = 320$ ，并认为  $x^{(0)}(i) \leq \zeta$  为旱灾。预测下一次旱灾发生的时间。

写出初始数列

$$x^{(0)} = (390.6, 412, 320, 559.2, 380.8, 542.4, 553, 310, 561, 300, 632, 540, 406.2, 313.8, 576, 587.6, 318.5)$$

由于满足  $x^{(0)}(i) \leq 320$  的  $x^{(0)}(i)$  即为异常值，易得下限灾变数列为

$$x_{\zeta}^0 = (320, 310, 300, 313.8, 318.5)$$

其对应的时刻数列为

$$t = (3, 8, 10, 14, 17)$$

将数列  $t$  做 1 次累加，得

$$t^{(1)} = (3, 11, 21, 35, 52)$$

建立 GM(1,1) 模型，得

$$\hat{u} = (a, b)^T = (-0.2536, 6.2585)$$

$$\hat{t}^{(1)}(k+1) = 27.6774e^{0.2536k} - 24.6774 \quad (12)$$

通过 (12) 式，预测到第 6 个及第 7 个数据为

$$t^{(0)}(6) = 22.034, \quad t^{(0)}(7) = 28.3946$$

由于 22.034 与 17 相差 5.034，这表明下一次旱灾将发生在五年以后。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
a=[390.6,412,320,559.2,
380.8,542.4,553,310,561,300,632,540,406.2,313.8,576,587.6,318.5]';
;
t0=find(a<=320);
t1=cumsum(t0);n=length(t1);
B=[-0.5*(t1(1:end-1)+t1(2:end)),ones(n-1,1)];Y=t0(2:end);
r=B\Y
y=dsolve('Dy+a*y=b','y(0)=y0');
y=subs(y',{'a','b','y0'},{r(1),r(2),t1(1)});
yucel=subs(y,'t',[0:n+1])
digits(6),y=vpa(y) %为提高预测精度，先计算预测值，再显示微分方程的解
yuce=diff(yucel);
yuce=[t0(1),yuce]
```

## 6.4 灰色预测计算实例

例 4 北方某城市 1986~1992 年道路交通噪声平均声级数据见表 6

表 6 市近年来交通噪声数据[dB(A)]

序号	年份	$L_{eq}$	序号	年份	$L_{eq}$
1	1986	71.1	5	1990	71.4
2	1987	72.4	6	1991	72.0
3	1988	72.4	7	1992	71.6
4	1989	72.1			

第一步：级比检验

建立交通噪声平均声级数据时间序列如下：

$$\begin{aligned}
 x^{(0)} &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(7)) \\
 &= (71.1, 72.4, 72.4, 72.1, 71.4, 72.0, 71.6)
 \end{aligned}$$

(1) 求级比  $\lambda(k)$

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda &= (\lambda(2), \lambda(3), \dots, \lambda(7)) \\
 &= (0.982, 1, 1.0042, 1.0098, 0.9917, 1.0056)
 \end{aligned}$$

(2) 级比判断

由于所有的  $\lambda(k) \in [0.982, 1.0098]$ ， $k = 2, 3, \dots, 7$ ，故可以用  $x^{(0)}$  作满意的 GM

(1, 1) 建模。

第二步: GM (1, 1) 建模

(1) 对原始数据  $x^{(0)}$  作一次累加，即

$$x^{(1)} = (71.1, 143.5, 215.9, 288, 359.4, 431.4, 503)$$

(2) 构造数据矩阵  $B$  及数据向量  $Y$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(6) + x^{(1)}(7)) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(7) \end{bmatrix}$$

(3) 计算  $\hat{u}$

$$\hat{u} = (a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{pmatrix} 0.0023 \\ 72.6573 \end{pmatrix}$$

于是得到  $a = 0.0023$ ,  $b = 72.6573$ 。

(4) 建立模型

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + 0.0023x^{(1)} = 72.6573$$

求解得

$$x^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a} = -30929e^{-0.0023k} + 31000$$

(5) 求生成数列值  $\hat{x}^{(1)}(k+1)$  及模型还原值  $\hat{x}^{(0)}(k+1)$ ：

令  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , 由上面的时间响应函数可算得  $\hat{x}^{(1)}$ , 其中取

$$\hat{x}^{(1)}(1) = \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1) = 71.1$$

由  $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$ , 取  $k = 2, 3, 4, \dots, 7$ , 得

$$\hat{x}^{(0)} = (\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \dots, \hat{x}^{(0)}(7)) = (71.1, 72.4, 72.2, 72.1, 71.9, 71.7, 71.6)$$

第四步: 模型检验

模型的各种检验指标值的计算结果见表 7.

表 7 GM(1, 1)模型检验表

序号	年份	原始值	模型值	残差	相对误差	级比偏差
1	1986	71.1	71.1	0	0	
2	1987	72.4	72.4	-0.0057	0.01%	0.0023
3	1988	72.4	72.2	0.1638	0.23%	0.0203

4	1989	72.1	72.1	0.0329	0.05%	-0.0018
5	1990	71.4	71.9	-0.4984	0.7%	-0.0074
6	1991	72.0	71.7	0.2699	0.37%	0.0107
7	1992	71.6	71.6	0.0378	0.05%	-0.0032

经验证，该模型的精度较高，可进行预测和预报。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
x0=[71.1 72.4 72.4 72.1 71.4 72.0 71.6];
n=length(x0);
lamda=x0(1:n-1)./x0(2:n)
range=minmax(lamda)
x1=cumsum(x0)
for i=2:n
    z(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
B=[-z(2:n)',ones(n-1,1)];
Y=x0(2:n)';
u=B\Y
x=dsolve('Dx+a*x=b','x(0)=x0');
x=subs(x',{'a','b','x0'},{u(1),u(2),x1(1)});
yuce1=subs(x,'t',[0:n-1]);
digits(6),y=vpa(x) % 为提高预测精度，先计算预测值，再显示微分方程的解
yuce=[x0(1),diff(yuce1)]
epsilon=x0-yuce % 计算残差
delta=abs(epsilon./x0) % 计算相对误差
rho=1-(1-0.5*u(1))/(1+0.5*u(1))*lamda % 计算级比偏差值
```

## § 7 SARS 疫情对某些经济指标影响问题

### 7.1 问题的提出

2003 年的 SARS 疫情对中国部分行业的经济发展产生了一定影响，特别是对部分疫情较严重的省市的相关行业所造成的影响是显著的，经济影响主要分为直接经济影响和间接影响。直接经济影响涉及商品零售业、旅游业、综合服务等行业。很多方面难以进行定量地评估，现仅就 SARS 疫情较重的某市商品零售业、旅游业和综合服务行业的影响进行定量的评估分析。

究竟 SARS 疫情对商品零售业、旅游业和综合服务业的影响有多大，已知某市从 1997 年 1 月到 2003 年 12 月的商品零售额、接待旅游人数和综合服务收入的统计数据如表 8、表 9 和表 10。

表 8 商品的零售额（单位：亿元）

年代	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1997	83.0	79.8	78.1	85.1	86.6	88.2	90.3	86.7	93.3	92.5	90.9	96.9
1998	101.7	85.1	87.8	91.6	93.4	94.5	97.4	99.5	104.2	102.3	101.0	123.5
1999	92.2	114.0	93.3	101.0	103.5	105.2	109.5	109.2	109.6	111.2	121.7	131.3
2000	105.0	125.7	106.6	116.0	117.6	118.0	121.7	118.7	120.2	127.8	121.8	121.9
2001	139.3	129.5	122.5	124.5	135.7	130.8	138.7	133.7	136.8	138.9	129.6	133.7
2002	137.5	135.3	133.0	133.4	142.8	141.6	142.9	147.3	159.6	162.1	153.5	155.9
2003	163.2	159.7	158.4	145.2	124.0	144.1	157.0	162.6	171.8	180.7	173.5	176.5

表 9 接待海外旅游人数（单位：万人）

年代	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1997	9.4	11.3	16.8	19.8	20.3	18.8	20.9	24.9	24.7	24.3	19.4	18.6
1998	9.6	11.7	15.8	19.9	19.5	17.8	17.8	23.3	21.4	24.5	20.1	15.9
1999	10.1	12.9	17.7	21.0	21.0	20.4	21.9	25.8	29.3	29.8	23.6	16.5
2000	11.4	26.0	19.6	25.9	27.6	24.3	23.0	27.8	27.3	28.5	32.8	18.5
2001	11.5	26.4	20.4	26.1	28.9	28.0	25.2	30.8	28.7	28.1	22.2	20.7
2002	13.7	29.7	23.1	28.9	29.0	27.4	26.0	32.2	31.4	32.6	29.2	22.9
2003	15.4	17.1	23.5	11.6	1.78	2.61	8.8	16.2	20.1	24.9	26.5	21.8

表 10 综合服务业累计数额（单位：亿元）

年代	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1997	96	144	194	276	383	466	554	652	747	832	972
1998	111	169	235	400	459	565	695	805	881	1011	1139
1999	151	238	335	425	541	641	739	866	975	1087	1238
2000	164	263	376	531	600	711	913	1038	1173	1296	1497
2001	182	318	445	576	708	856	1000	1145	1292	1435	1667
2002	216	361	504	642	818	979	1142	1305	1479	1644	1920
2003	241	404	584	741	923	1114	1298	1492	1684	1885	2218

试根据这些历史数据建立预测评估模型，评估 2003 年 SARS 疫情给该市的商品零售业、旅游业和综合服务业所造成的影响。

## 7.2 模型的分析与假设

根据所掌握的历史统计数据可以看出，在正常情况下，全年的平均值较好地反映了相关指标的变化规律，这样可以把预测评估分成两部分：

（1）利用灰色理论建立 GM(1,1)模型，由 1997—2002 年的平均值预测 2003 年平均值；

（2）通过历史数据计算每个月的指标值与全年总值的关系，从而可预测出正常情



况下 2003 年每个月的指标值,再与实际值比较可以估算出 SARS 疫情实际造成的影响。

给出下面两条假设:

(1) 假设该市的统计数据都是可靠准确的;

(2) 假设该市在 SARS 疫情流行期间和结束之后,数据的变化只与 SARS 疫情的影响有关,不考虑其它随机因素的影响。

### 7.3 建立灰色预测模型 GM(1,1)

由已知数据,对于 1997—2002 年某项指标记为矩阵  $A = (a_{ij})_{6 \times 12}$ , 计算每年的年平均  
均值, 记为

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(6)) \quad (13)$$

并要求级比  $\lambda(i) = x^{(0)}(i-1) / x^{(0)}(i) \in (0.7515, 1.3307)$  ( $i = 2, 3, \dots, 6$ )。对  $x^{(0)}$  作一次累加, 则

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1), \quad x^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i x^{(0)}(k) \quad (i = 2, 3, \dots, 6)$$

记

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(6)) \quad (14)$$

取  $x^{(1)}$  的加权均值, 则  $z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k) + (1-\alpha)x^{(1)}(k-1)$  ( $k = 2, 3, \dots, 6$ ),  $\alpha$  为确定参数, 记

$$z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(6)) \quad (15)$$

GM(1,1)的白化微分方程模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \quad (16)$$

其中  $a$  是发展灰度,  $b$  是内生控制灰度。

由于  $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = x^{(0)}(k)$ , 取  $x^{(0)}(k)$  为灰导数,  $z^{(1)}(k)$  为背景值, 则方程 (16) 相应的灰微分方程为

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (k = 2, 3, \dots, 6)$$

或

$$x^{(0)}(k) = -az^{(1)}(k) + b \quad (k = 2, 3, \dots, 6) \quad (17)$$

即矩阵形式为

$$Y = B(a, b)^T,$$

$$\text{其中 } Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(6)), \quad B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \dots & -z^{(1)}(6) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T。$$

用最小二乘法求得参数的估计值为

$$(\hat{a}, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (18)$$

于是方程 (17) 有响应 (特解)

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

则

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) (e^{-ak} - e^{-a(k-1)}) \quad (19)$$

由 (19) 式可以得到 2003 年的平均值为  $\bar{x}$ ，则预测 2003 年的总值为  $Z = 12\bar{x}$ 。

根据历史数据，可以统计计算出 2003 年第  $i$  个月的指标值占全年总值的比例为  $u_i$ ，即

$$u_i = \sum_{j=1}^{12} \sum_{k=1}^6 a_{ij} / \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^6 a_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, 12) \quad (20)$$

则  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{12})$ ，于是可得 2003 年每一个月的指标值为  $V = Zu$ 。

#### 7.4 模型的求解

##### (1) 商品零售额

由数据表 8，用 (13) 和 (14) 式计算可得年平均值、一次累加值分别为

$$x^{(0)} = (87.6167, 98.5, 108.475, 118.4167, 132.8083, 145.4083)$$

$$x^{(1)} = (97.6167, 186.1167, 294.5917, 413.0083, 545.8167, 691.225)$$

显然  $x^{(0)}$  的所有级比都在可容区域内，经检验，在这里取参数  $\alpha = 0.4$  比较合适，

由 (15) 式则有

$$z^{(1)} = (127.0167, 229.5067, 341.9583, 466.1317, 603.98)$$

由最小二乘法用 (18) 式求得  $a = -0.099$ ， $b = 85.5985$ 。由 (16) 式可得 2003 年的月平均值为  $\bar{x} = 162.8793$  亿元；年总值为  $Z = 1954.6$  亿元。由 (20) 式得每月的比例

$$u = (0.0794, 0.0807, 0.0749, 0.0786, 0.0819, 0.0818, \\ 0.0845, 0.0838, 0.0872, 0.0886, 0.0866, 0.092)$$

故 2003 年 1—12 月的预测值为

$$V = Zu = (155.2, 157.7, 146.4, 153.5, 160.1, 159.8, \\ 165.1, 163.8, 170.5, 173.1, 169.3, 179.8) \text{ (亿元)}$$

将预测值与实际统计值进行比较如表 11 所示。

表 11 2003 年商品的零售额（单位：亿元）

月 份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
预测值	155.2	157.7	146.4	153.5	160.1	159.8	165.1	163.8	170.5	173.1	169.3	179.8
实际值	163.2	159.7	158.4	145.2	124.0	144.1	157.0	162.6	171.8	180.7	173.5	176.5

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load han1.txt      %把原始数据保存在纯文本文件han1.txt中
han1(end,:)=[];m=size(han1,2);
x0=mean(han1,2);
x1=cumsum(x0)
alpha=0.4;n=length(x0);
z1=alpha*x1(2:n)+(1-alpha)*x1(1:n-1)
Y=x0(2:n);B=[-z1,ones(n-1,1)];
ab=B\Y
k=6;
x7hat=(x0(1)-ab(2)/ab(1))*(exp(-ab(1)*k)-exp(-ab(1)*(k-1)))
z=m*x7hat
u=sum(han1)/sum(sum(han1))
v=z*u
```

（2）接待海外旅游人数

由数据表9，用(13)和(14)式计算年平均值 $x^{(0)}$ 和一次累加值 $x^{(1)}$ 。取参数 $\alpha = 0.5$ ，

由（15）式可得加权平均值 $z^{(1)}$ 。由（18），（19），（20）式可求得 $a = -0.0938$ ，

$b = 16.2671$ ， $\bar{x} = 30.2649$ ， $Z = 12\bar{x} = 363.1785$ ，以及

$$u = (0.0407, 0.0732, 0.0703, 0.0878, 0.0907, 0.0848, \\ 0.0836, 0.1022, 0.101, 0.1041, 0.0914, 0.0701)$$

于是可得到 2003 年的接待海外旅游人数的预测值，并与实际值比较如表 12 所示。

表 12 2003 年接待海外旅游人数（单位：万人）

月 份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
预测值	14.8	26.2	25.5	31.9	33.0	30.8	30.4	37.1	36.7	37.8	33.2	25.5
实际值	15.4	17.1	23.5	11.6	1.78	2.61	8.8	16.2	20.1	24.9	26.5	21.8

### (3) 综合服务业累计数据

首先将表 10 的数据进行必要的处理，然后用 (13) 和 (14) 式计算年平均值  $x^{(0)}$  和一次累加值  $x^{(1)}$ 。取参数  $\alpha = 0.4$ ，由 (15) 式可得加权平均值  $z^{(1)}$ 。用 (18)，(19)，(20) 式可求得  $a = -0.1361$ ， $b = 487.7639$ ， $\bar{x} = 1171.3$ ， $Z = 11\bar{x} = 12885$ ，以及

$$u = (0.0191, 0.031, 0.0433, 0.0591, 0.0728, 0.0875, \\ 0.1046, 0.1205, 0.1358, 0.1515, 0.1749)$$

于是可得到 2003 年的综合服务业累计数额的预测值，并与实际值比较如表 13 所示。

表 13 2003 年综合服务业累计数据 (单位: 亿元)

月 份	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
预测值	249	399	558	762	938	1127	1348	1553	1750	1952	2254
实际值	241	404	584	741	923	1114	1298	1492	1684	1885	2218

### 7.5 模型的结果分析

根据该市的统计报告显示，2003 年 4、5、6 三个月的实际商品零售额分别为 145.2、124、144.1 亿元。在这之前，根据统计部门的估计 4、5、6 三月份 SARS 疫情对该市的商品零售业的影响最为严重，这三个月估计大约损失 62 亿元左右。从我们的模型预测结果来计算，4、5、6 三个月的损失为 60.1 亿元，这个数基本与专家的估计值相符，8 月基本恢复正常，这说明了模型的正确性和可靠性。

对于旅游业来说是受影响最严重的行业之一，最严重的 4、5、6、7 四个月就损失 100 多万人，按最新统计数据，平均每人消费 1002 美元计算，大约损失 10 亿美元。全年大约损失 162 万人，约合 16.2 亿美元，到年底基本恢复正常。

对于综合服务业中的部分行业影响较大，如航空交通运输、宾馆餐饮等，但有些行业影响不大，如电信、通讯等，总平均来看，影响还不算太大，5、6、7、8 四个月大约损失 70 亿元。

该模型虽是就某经济指标的发展规律进行评估预测而建立的，但类似地也适用于其它方面的一些数据规律的评估预测问题，即该模型具有很广泛的应用性。

## § 8 道路交通事故灰色 Verhulst 预测模型<sup>[43]</sup>

灰色预测是通过原始数据的处理和灰色模型的建立，发现和掌握系统发展规律，对系统的未来状态作出科学的定量预测。目前应用较多的灰色预测模型是 GM(1,1)模型、灰色马尔可夫预测模型等，可用于预测交通事故发生次数、死亡人数、受伤人数和财产损失等指标。GM(1,1)模型适用于具有较强指数规律的序列，只能描述单调的变化过程。

但是道路交通系统是一个动态的时变系统，道路交通事故作为道路系统的行为特征量，具有一定的随机波动性，它的发展呈现某种变化趋势的非平稳随机过程，因此可建立交通事故灰色马尔可夫预测模型，以提高预测精度。但灰色马尔可夫预测模型的应用难点是如何进行状态划分，故对于非单调的摆动发展序列或具有饱和状态的 S 形序列，Verhulst 模型，GM(2,1)模型等更适用。Verhulst 模型主要用来描述具有饱和状态的过程，即 S 形过程，常用于人口预测、生物生长、繁殖预测及产品经济寿命预测等。今年来中国道路交通事故表现为具有饱和状态的 S 形过程，故可采用 Verhulst 模型对其进行预测。

### 8.1 Verhulst 模型简介

Verhulst 模型的基本原理和计算方法简介图下。

定义 6 设  $x^{(0)}$  为原始数据序列

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

$x^{(1)}$  为  $x^{(0)}$  的一次累加生成 (1-AGO) 序列

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$$

$$x_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k x_i^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$z^{(1)}$  为  $x^{(1)}$  的紧邻均值生成序列

$$z^{(1)} = (z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$$

$$z_k^{(1)} = 0.5(x_k^{(1)} + x_{k-1}^{(1)}), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

则称

$$x^{(0)} + az^{(1)} = b(z^{(1)})^2 \quad (21)$$

为灰色 Verhulst 模型， $a$  和  $b$  为参数。称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^2 \quad (22)$$

为灰色 Verhulst 模型的白化方程， $t$  为时间。

定理 1 设灰色 Verhulst 模型如上所述，若

$$\hat{\alpha} = (a, b)^T$$

为参数列，且

$$B = \begin{bmatrix} -z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2 \\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z_n^{(1)} & (z_n^{(1)})^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

则参数列  $\hat{\alpha}$  的最小二乘估计满足

$$\hat{\alpha} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

定理 2 设灰色 Verhulst 模型如上所述, 则白化方程的解 (时间响应函数) 为

$$x^{(1)}(t) = \frac{ax_0^{(1)}}{bx_0^{(1)} + (a - bx_0^{(1)})e^{at}} \quad (23)$$

灰色 Verhulst 模型的时间响应序列为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = \frac{ax_0^{(1)}}{bx_0^{(1)} + (a - bx_0^{(1)})e^{ak}} \quad (24)$$

$x_0^{(1)}$  取为  $x_1^{(0)}$ , 则式 (24) 变为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = \frac{ax_1^{(0)}}{bx_1^{(0)} + (a - bx_1^{(0)})e^{ak}} \quad (25)$$

累减还原式为

$$\hat{x}_{k+1}^{(0)} = \hat{x}_{k+1}^{(1)} - \hat{x}_k^{(1)} \quad (26)$$

## 8.2 道路交通事故 Verhulst 预测模型

在实际问题中, 常遇到原始数据本身呈 S 形的过程, 这时, 可取原始数据为  $x^{(1)}$ ,

其一次累减生成 (1—IAGO) 为  $x^{(0)}$ , 建立 Verhulst 模型, 直接对  $x^{(1)}$  进行预测 (模拟)。

现以中国道路交通事故死亡人数为例, 建立交通事故死亡人数 Verhulst 预测模型。

由《中国交通年鉴》、《中国汽车工业年鉴》等可得近年来中国道路交通事故死亡人数统计资料, 见表 14。对于 2004 年, “2004(a)” 表示按《道路交通安全法》施行前口径统计, “2004(b)” 表示按《道路交通安全法》施行后口径统计。

表 14 道路交通事故死亡人数统计

年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
死亡人数(万人)	4.93	5.33	5.87	6.35	6.63	7.15	7.37	7.39
年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004(a)	2004(b)
死亡人数(万人)	7.81	8.35	9.39	10.59	10.94	10.44	9.92	10.71

1990~2003 年中国道路交通事故死亡人数曲线见图 2, 可见曲线呈 S 形, 故可建立 Verhulst 模型进行预测, 其建模过程如下。

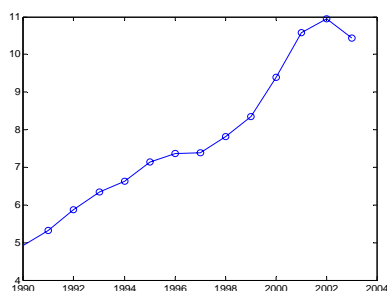


图 2 死亡人数曲线

(1) 设  $x^{(1)}$  为 1990~2003 年死亡人数的原始数据序列, 即

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{14}^{(1)}) = (4.93, 5.33, 5.87, 6.35, 6.63, 7.15, 7.37, 7.39, 7.81, 8.35, 9.39, 10.59, 10.94, 10.44)$$

(2) 对  $x^{(1)}$  作一次累减生成 (1-IAGO), 由

$$x_k^{(0)} = x_k^{(1)} - x_{k-1}^{(1)}, \quad k = 2, 3, \dots, 14$$

得

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{14}^{(0)}) = (4.93, 0.4, 0.54, 0.48, 0.28, 0.52, 0.22, 0.02, 0.42, 0.54, 1.04, 1.2, 0.35, -0.5)$$

(3) 对  $x^{(1)}$  作紧邻均值生成, 令

$$z_k^{(1)} = 0.5(x_k^{(1)} + x_{k-1}^{(1)}), \quad k = 2, 3, \dots, 14$$

得

$$z^{(1)} = (z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, \dots, z_{14}^{(1)}) = (5.13, 5.6, 6.11, 6.49, 6.89, 7.26, 7.38, 7.6, 8.08, 8.87, 9.99, 10.765, 10.69)$$

于是

$$B = \begin{bmatrix} -z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2 \\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z_{14}^{(1)} & (z_{14}^{(1)})^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_{14}^{(0)} \end{bmatrix}$$

(4) 对参数列

$$\hat{\alpha} = (a, b)^T$$

进行最小二乘估计, 得

$$\hat{\alpha} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} -0.128 \\ -0.0089 \end{bmatrix}$$

(5) Verhulst 模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.128x^{(1)} = -0.0089(x^{(1)})^2$$

其时间响应为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = \frac{\hat{a}x_1^{(1)}}{\hat{b}x_1^{(1)} + (\hat{a} - \hat{b}x_1^{(1)})e^{ak}} = \frac{0.6312}{0.04409 + 0.08395e^{-0.128k}}$$

(6)  $x^{(1)}$  的预测值  $\hat{x}^{(1)}$  为

$$\hat{x}^{(1)} = (\hat{x}_1^{(1)}, \hat{x}_2^{(1)}, \dots, \hat{x}_{14}^{(1)}) = (4.9297, 5.3513, 5.7866, 6.2328, 6.6864, 7.1438, 7.6014, 8.0553, 8.502, 8.9382, 9.3606, 9.7668, 10.1545, 10.522)$$

(7) 模型精度检验。一个灰色模型要经过检验才能判定其是否合理。只有通过检验的模型才能用来进行预测。检验方法有以下几种。

#### ① 残差合格模型

设原始序列为

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

相应的灰色模型预测 (模拟) 序列为

$$\hat{x}^{(0)} = (\hat{x}_1^{(0)}, \hat{x}_2^{(0)}, \dots, \hat{x}_n^{(0)})$$

残差序列为

$$\varepsilon^{(0)} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (x_1^{(0)} - \hat{x}_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} - \hat{x}_n^{(0)})$$

相对误差序列为

$$\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) = \left( \left| \frac{\varepsilon_1}{x_1^{(0)}} \right|, \left| \frac{\varepsilon_2}{x_2^{(0)}} \right|, \dots, \left| \frac{\varepsilon_n}{x_n^{(0)}} \right| \right)$$

则对于  $k \leq n$ , 称



$$\Delta_k = \left| \frac{\varepsilon_k}{x_k^{(0)}} \right|$$

为  $k$  点模拟相对误差，称

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k$$

为平均相对误差；称  $1 - \bar{\Delta}$  为平均相对精度，称  $1 - \Delta_k$  为  $k$  点模拟精度；给定  $\alpha$ ，当

$\bar{\Delta} < \alpha$  且  $\Delta_k < \alpha$  成立时，称模型为残差合格模型。

## ② 关联度合格模型

设  $x^{(0)}$  为原始序列， $\hat{x}^{(0)}$  为相应的灰色模型预测（模拟）序列， $g$  为  $x^{(0)}$  与  $\hat{x}^{(0)}$  的绝对关联度。若对于给定的  $g_0 > 0$ ，有  $g > g_0$ ，则称模型为关联度合格模型。

## ③ 均方差比合格模型

设  $x^{(0)}$  为原始序列， $\hat{x}^{(0)}$  为相应的灰色模型预测（模拟）序列， $\varepsilon^{(0)}$  为残差序列，则  $x^{(0)}$  的均值、方差分别为

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^{(0)} \\ S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^{(0)} - \bar{x})^2 \end{cases} \quad (27)$$

$\varepsilon^{(0)}$  的均值、方差分别为

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \\ S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon})^2 \end{cases} \quad (28)$$

均方差比值为

$$C = \frac{S_2}{S_1}$$

对于给定的  $C_0 > 0$ ，当  $C < C_0$  时，称模型为均方差比合格模型。

#### ④ 小误差概率合格模型

小误差概率为

$$p = P\{|\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}| < 0.6745S_1\}$$

对于给定的  $p_0 > 0$ ，当  $p > p_0$  时，称模型为小误差概率合格模型。

由上可知，给定一组取值，就确定了检验模型精度的一个等级。常用的精度等级见表 15，可供检验模型参考。一般情况下，最常用的是相对误差检验指标。

表 15 灰色模型精度检验等级

等级	指 标			
	相对误差 $\Delta$	绝对关联度 $g_0$	均方差比值 $c_0$	小误差概率 $p_0$
一	0.01	0.90	0.35	0.95
二	0.05	0.80	0.50	0.80
三	0.10	0.70	0.65	0.70
四	0.20	0.60	0.80	0.60

由以上检验方法，可得 1990~2003 年中国道路交通事故死亡人数 Verhulst 模型误差检验值见表 16。

表 16 Verhulst 模型误差

序号 $k$	年份	原始数据 $x_k^{(1)}$ (万人)	预测值 $\hat{x}_k^{(1)}$ (万人)	残差 $x_k^{(1)} - \hat{x}_k^{(1)}$ (万人)	相对误差 $\Delta_k$ (%)
1	1990	4.93	4.93	0	0
2	1991	5.33	5.3517	-0.0217	0.41
3	1992	5.87	5.7872	0.0828	1.41
4	1993	6.35	6.2335	0.1165	1.83
5	1994	6.63	6.6873	-0.0573	0.86
6	1995	7.15	7.1448	0.0052	0.07
7	1996	7.37	7.6025	-0.2325	3.16
8	1997	7.39	8.0566	-0.6666	9.02
9	1998	7.81	8.5034	-0.6934	8.88
10	1999	8.35	8.9397	-0.5897	7.06
11	2000	9.39	9.3622	0.0278	0.3
12	2001	10.59	9.7685	0.8215	7.76
13	2002	10.94	10.1562	0.7838	7.16
14	2003	10.44	10.5237	-0.0837	0.8
15	2004(a)	9.92	10.8681	-0.9498	9.57

16	2004(b)	10.71	10.8698	-0.1598	1.49
----	---------	-------	---------	---------	------

平均相对误差  $\bar{\Delta} = 3.74\%$ ，则模型精度为二级；同时算得绝对关联度  $g$  为 0.9845，

均方差比值  $C$  为 0.2355，则模型精度为一级，可见模型精度较高，可用于事故预测。

计算的 MATLAB 程序如下：

```

clc,clear
x1=[4.93    5.33    5.87    6.35    6.63    7.15    7.37    7.39    7.81    8.35
9.39    10.59    10.94    10.44];
n=length(x1);
nian=1990:2003;
plot(nian,x1,'o-');
x0=diff(x1);
x0=[x1(1),x0]
for i=2:n
    z1(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
z1
B=[-z1(2:end)',z1(2:end)'.^2]
Y=x0(2:end)'
abhat=B\Y    %估计参数 a,b 的值
x=dsolve('Dx+a*x=b*x^2','x(0)=x0'); %求解常微分方程
x=subs(x',{'a','b','x0'},{abhat(1),abhat(2),x1(1)}); %代入参数值
yuce=subs(x,'t',0:14) %计算预测值
digits(6); x=vpa(x) %显示微分方程的解，为了提高计算精度，把该语句放在计算预测值
之后，或者不使用该语句
yuce(16)=yuce(15);
x1_all=[x1,9.92,10.71];
epsilon=x1_all-yuce %计算残差
delta=abs(epsilon./x1_all) %计算相对误差
delta_mean=mean(delta) %计算平均相对误差
x1_all_0=x1_all-x1_all(1); %数据列的始点零化像
yuce_0=yuce-yuce(1); %数据列的始点零化像
s0=abs(sum(x1_all_0(1:end-1))+0.5*x1_all_0(end));
s1=abs(sum(yuce_0(1:end-1))+0.5*yuce_0(end));
tt=yuce_0-x1_all_0;
s1_s0=abs(sum(tt(1:end-1))+0.5*tt(end));
absdegree=(1+s0+s1)/(1+s0+s1+s1_s0) %计算灰色绝对关联度
c=std(epsilon,1)/std(x1_all,1) %计算标准差比值

```

8.3 预测结果比较

由 1990~2003 年中国道路交通事故死亡人数资料，得到相应的 GM(1,1)模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.0098x^{(1)} = 0.5$$

其时间响应式为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = 50.9339 - 46.0039e^{-0.0098k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

由以上检验法可得 1990~2003 年中国道路交通事故死亡人数 GM(1,1)模型误差值见表 17。

表 17 GM(1,1)模型误差

序号 $k$	年份	原始数据 $x_k^{(1)}$ (万人)	预测值 $\hat{x}_k^{(1)}$ (万人)	残差 $x_k^{(1)} - \hat{x}_k^{(1)}$ (万人)	相对误差 $\Delta_k$ (%)
1	1990	4.93	4.93	0	0
2	1991	5.33	5.3794	-0.0494	0.0093
3	1992	5.87	5.8244	0.0456	0.0078
4	1993	6.35	6.2651	0.0849	0.0134
5	1994	6.63	6.7014	-0.0714	0.0108
6	1995	7.15	7.1335	0.0165	0.0023
7	1996	7.37	7.5614	-0.1914	0.026
8	1997	7.39	7.9851	-0.5951	0.0805
9	1998	7.81	8.4046	-0.5946	0.0761
10	1999	8.35	8.8201	-0.4701	0.0563
11	2000	9.39	9.2315	0.1585	0.0169
12	2001	10.59	9.6389	0.9511	0.0898
13	2002	10.94	10.0423	0.8977	0.0821
14	2003	10.44	10.4417	-0.0017	0.0002
15	2004(a)	9.92	10.8373	-0.9173	0.0925
16	2004(b)	10.71	10.8373	-0.1273	0.0119

平均相对误差  $\bar{\Delta} = 3.6\%$ ，则模型精度为二级；同时算得绝对关联度  $g$  为 0.9918，

均方差比值  $C$  为 0.2395，则模型精度为一级，可见模型精度较高，可用于事故预测。

比较表 16 和表 17 可知，Verhulst 模型预测精度与 GM(1,1)模型几乎没有差别。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
x1=[4.93    5.33    5.87    6.35    6.63    7.15    7.37    7.39    7.81    8.35
9.39    10.59    10.94    10.44];
```

```

n=length(x1);
x0=diff(x1);
x0=[x1(1),x0]
for i=2:n
    z1(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
B=[-z1(2:end)',ones(n-1,1)];
Y=x0(2:end)';
abhat=B\Y      %估计参数 a,b 的值
x=dsolve('Dx+a*x=b','x(0)=x0');
x=subs(x',{'a','b','x0'},{abhat(1),abhat(2),x1(1)});
yuce=subs(x,'t',0:14)    %计算预测值
digits(6); x=vpa(x)    %显示微分方程的解，为了提高计算精度，把该语句放在计算预测
                        值之后，或者不使用该语句
yuce(16)=yuce(15);
x1_all=[x1,9.92,10.71];
epsilon=x1_all-yuce    %计算残差
delta=abs(epsilon./x1_all)    %计算相对误差
delta_mean=mean(delta)    %计算平均相对误差
x1_all_0=x1_all-x1_all(1);    %数据列的始点零化像
yuce_0=yuce-yuce(1);    %数据列的始点零化像
s0=abs(sum(x1_all_0(1:end-1))+0.5*x1_all_0(end));
s1=abs(sum(yuce_0(1:end-1))+0.5*yuce_0(end));
tt=yuce_0-x1_all_0;
s1_s0=abs(sum(tt(1:end-1))+0.5*tt(end));
absdegree=(1+s0+s1)/(1+s0+s1+s1_s0)    %计算灰色绝对关联度
c=std(epsilon,1)/std(x1_all,1)    %计算标准差比值

```

#### 8.4 结语

道路交通安全系统是一个灰色系统，可以应用灰色系统理论进行研究和分析，其中灰色预测模型和方法简便易用，在交通事故预测中得到了较多应用。GM(1,1)模型适用于具有较强指数规律的序列，只能描述单调的变化过程，而 Verhulst 模型则适用于非单调的摆动发展序列或具有饱和状态的 S 形序列。

### § 9 GM(2,1)和 DGM 模型

GM(1,1)模型适用于具有较强指数规律的序列，只能描述单调的变化过程，对于非单调的摆动发展序列或有饱和的 S 形序列，可以考虑建立 GM(2,1)，DGM 和 Verhulst 模型。

#### 9.1 GM(2,1)模型

**定义 7** 设原始序列

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$$

其 1-AGO 序列  $x^{(1)}$  和 1-IAGO 序列  $\alpha^{(1)}x^{(0)}$  分别为

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$$

和

$$\alpha^{(1)}x^{(0)} = (\alpha^{(1)}x^{(0)}(2), \dots, \alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$$

其中

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$x^{(1)}$  的紧邻均值生成序列为

$$z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n))$$

则称

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) + a_1x^{(0)}(k) + a_2z^{(1)}(k) = b$$

(29)

为 GM(2,1) 模型。

定义 8 称

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2x^{(1)} = b \quad (30)$$

为 GM(2,1) 模型的白化方程。

定理 3 设  $x^{(0)}$ ,  $x^{(1)}$ ,  $\alpha^{(1)}x^{(0)}$  如定义 7 所述, 且

$$B = \begin{bmatrix} -x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x^{(0)}(n) & -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)}x^{(0)}(2) \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) - x^{(0)}(1) \\ x^{(0)}(3) - x^{(0)}(2) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) - x^{(0)}(n-1) \end{bmatrix}$$

则 GM(2,1) 参数列  $\hat{a} = (a_1, a_2, b)^T$  的最小二乘估计为

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

定理 4 关于 GM(2,1) 白化方程的解有以下结论:

(1) 若  $x^{(1)*}$  是  $\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2 x^{(1)} = b$  的特解,  $\bar{x}^{(1)}$  是对应齐次方程

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2 x^{(1)} = 0$$

的通解, 则  $x^{(1)*} + \bar{x}^{(1)}$  是 GM(2,1)白化方程的通解。

(2) 齐次方程的通解有以下三种情况:

当特征方程  $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$  有两个不相等的实根  $r_1, r_2$  时,

$$\bar{x}^{(1)} = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (31)$$

当特征方程有重根  $r$  时,

$$\bar{x}^{(1)} = e^{rt} (c_1 + c_2 t) \quad (32)$$

当特征方程有一对共轭复根  $r_1 = \alpha + i\beta$ ,  $r_2 = \alpha - i\beta$  时

$$\bar{x}^{(1)} = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad (33)$$

(3) 白化方程的特解有以下三种情况:

当零不是特征方程的根时,  $x^{(1)*} = C$ ;

当零是特征方程的单根时,  $x^{(1)*} = Cx$ ;

当零是特征方程的重根时,  $x^{(1)*} = Cx^2$ 。

定理 5 设原始数据序列

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

令

$$xd = (x(1)d, x(2)d, \dots, x(n)d)$$

其中

$$x(k)d = \frac{1}{n-k+1} [x(k) + x(k+1) + \dots + x(n)]; k = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

则当  $x$  为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时,  $d$  皆为弱化算子, 并称  $d$  为平均弱化缓冲算子 (AWBO)。

例 5 上海市上网户数的 GM(2,1)模型。1996~2001 年上海市上网户数数据序列为

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(6)) = (0.33, 0.9, 10.24, 42.24, 88.24, 104.1)$$

在互联网发展初期，增长势头十分强劲。因此，定理 5 引入的一阶缓冲算子弱化该序列的增长趋势，一阶缓冲序列仍记为  $x^{(0)}$ ，

$$x^{(0)} = (41, 49, 61, 78, 96, 104)$$

试以该序列为基础建立 GM(2,1)模型。

解  $x^{(0)}$  的 1-AGO 序列和 1-IAGO 序列分别为

$$x^{(1)} = (41, 90, 151, 229, 325, 429)$$

$$\alpha^{(1)} x^{(0)} = (0, 8, 12, 17, 18, 8)$$

$x^{(1)}$  的紧邻均值生成序列

$$z^{(1)} = (0, 65.5, 120.5, 190, 277, 377)$$

$$B = \begin{bmatrix} -x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -x^{(0)}(6) & -z^{(1)}(6) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49 & -65.5 & 1 \\ -61 & -120.5 & 1 \\ -78 & -190 & 1 \\ -96 & -277 & 1 \\ -104 & -377 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = (8, 12, 17, 18, 8)^T$$

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} -1.0922 \\ 0.1959 \\ -31.7983 \end{bmatrix}$$

故得 GM(2,1)白化模型

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{dt^2} - 1.0922 \frac{dx^{(1)}}{dt} + 0.1959 x^{(1)} = -31.7983$$

利用边界条件  $x^{(1)}(1) = 41$ ， $x^{(1)}(6) = 429$ ，解之得

$$x^{(1)}(t) = 203.85e^{0.22622t} - 0.5324e^{0.86597t} - 162.317$$

于是 GM(2,1)时间响应式



$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 203.85e^{0.22622k} - 0.5324e^{0.86597k} - 162.317$$

所以

$$\hat{x}^{(1)} = (41, 92, 155, 232, 325, 429)$$

做 IAGO 还原, 有

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$$

$$\hat{x}^{(0)} = (41, 51, 63, 77, 92, 104)$$

表 18 误差检验表

序号	实际数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)} - \hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 $\Delta_k$
2	49	51	-2	4.1%
3	61	63	-2	3.5%
4	78	77	1	1%
5	96	92	4	4%
6	104	104	0	0

计算的 MATLAB 程序如下:

```
clc,clear
x0=[41,49,61,78,96,104];
n=length(x0);
x1=cumsum(x0)
a_x0=diff(x0);
a_x0=[0,a_x0]
for i=2:n
    z(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
B=[-x0(2:end)',-z(2:end)',ones(n-1,1)];
Y=a_x0(2:end)';
u=B\Y
x=dsolve('D2x+a1*Dx+a2*x=b','x(0)=c1,x(5)=c2');
x=subs(x',{'a1','a2','b','c1','c2'},{u(1),u(2),u(3),x1(1),x1(6)});
yuce=subs(x,'t',0:n-1);
digits(6),x=vpa(x)
x0_hat=[yuce(1),diff(yuce)]
epsilon=x0-x0_hat
delta=abs(epsilon./x0)
```

## 9.2 DGM(2,1)模型

定义9 设原始序列

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$$

其 1-AGO 序列  $x^{(1)}$  和 1-IAGO 序列  $\alpha^{(1)}x^{(0)}$  分别为

$$x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$$

和

$$\alpha^{(1)}x^{(0)} = (\alpha^{(1)}x^{(0)}(2), \dots, \alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$$

其中

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

则称

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) + ax^{(0)}(k) = b \quad (35)$$

为 DGM(2,1)模型。

定义10 称

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt} + a \frac{dx^{(1)}}{dt} = b \quad (36)$$

为DGM(2,1)模型的白化方程。

**定理6** 若  $\hat{a} = [a, b]^T$  为参数列, 而  $x^{(0)}, x^{(1)}, \alpha^{(1)}x^{(0)}$  如定义9所述,

$$B = \begin{bmatrix} -x^{(0)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -x^{(0)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)}x^{(0)}(2) \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) - x^{(0)}(1) \\ x^{(0)}(3) - x^{(0)}(2) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) - x^{(0)}(n-1) \end{bmatrix}$$

则 DGM(2,1)模型  $\alpha^{(1)}x^{(0)}(k) + ax^{(0)}(k) = b$  的最小二乘估计满足

$$\hat{a} = [a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

**定理7** 设  $x^{(0)}$  为非负序列,  $x^{(1)}$  为  $x^{(0)}$  的 1-AGO 序列,  $B, Y, \hat{a}$  如定理6所述,

则

(1) 白化方程  $\frac{d^2 x^{(1)}}{dt} + a \frac{dx^{(1)}}{dt} = b$  的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left( \frac{b}{a^2} - \frac{x^{(0)}(1)}{a} \right) e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a} t + \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) \frac{1+a}{a} \quad (37)$$

(2) DGM(2,1)模型  $\alpha^{(1)} x^{(0)}(k) + ax^{(0)}(k) = b$  的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left( \frac{b}{a^2} - \frac{x^{(0)}(1)}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a} (k+1) + \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) \frac{1+a}{a} \quad (38)$$

(3) 还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \alpha^{(1)} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \quad (40)$$

证明: (1)  $\frac{d^2 x^{(1)}}{dt} + a \frac{dx^{(1)}}{dt} = b$  的通解为  $\hat{x}^{(1)}(t) = c_1 e^{-at} + \frac{b}{a} t + c_2$ 。

下面来确定任意常数  $c_1, c_2$ 。

由于  $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ , 即  $x^{(1)}(t) \Big|_{t=1} = x^{(0)}(1)$ , 所以

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1) = c_1 e^{-a} + \frac{b}{a} + c_2 \quad (41)$$

又因为  $\hat{x}^{(1)}(t) = c_1 e^{-at} + \frac{b}{a} t + c_2$ , 所以  $x^{(0)}(t) = -ac_1 e^{-at} + \frac{b}{a}$ , 而  $x^{(0)}(t) \Big|_{t=1} = x^{(0)}(1)$ , 故

$$x^{(0)}(1) = -ac_1 e^{-a} + \frac{b}{a} \quad (42)$$

由式 (41) 和 (42) 得

$$c_1 = \left( \frac{b}{a^2} - \frac{x^{(0)}(1)}{a} \right) e^a, \quad c_2 = \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) \frac{1+a}{a}$$

故白化方程  $\frac{d^2 x^{(1)}}{dt} + a \frac{dx^{(1)}}{dt} = b$  的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left( \frac{b}{a^2} - \frac{x^{(0)}(1)}{a} \right) e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a} t + \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) \frac{1+a}{a}$$

(2) 由 (1) 的证明结果, 令  $t = k + 1$ , 则  $x^{(1)}(t) = x^{(1)}(k + 1)$ , 可得 DGM(2,1) 模型的时间响应序列:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left( \frac{b}{a^2} - \frac{x^{(0)}(1)}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a}(k+1) + \left( x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) \frac{1+a}{a}$$

(3) 显然成立。

例6 试对序列

$$x^{(0)} = (2.874, 3.278, 3.39, 3.679, 3.77, 3.8)$$

建立DGM(2,1)模型。

解 因为

$$B = \begin{bmatrix} -3.284 & -3.39 & -3.679 & -3.77 & -3.8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$Y = [0.404 \quad 0.112 \quad 0.289 \quad 0.091 \quad 0.03]$$

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} 0.424 \\ 1.7046 \end{bmatrix}$$

得DGM模型的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 2.7033e^{-0.424k} + 4.0202k + 0.1707$$

所以

$$\hat{x}^{(1)} = (2.874, 5.96, 9.3688, 12.9889, 16.7473, 20.5962)$$

作1-IAGO还原

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$$

得

$$\hat{x}^{(0)} = (2.874, 3.086, 3.4088, 3.6201, 3.7584, 3.8488)$$

结果见表19

表 19 误差检验表

序号	原始数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)} - \hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 $\Delta_k$
2	3.278	3.086	-2	4.1%
3	3.39	3.4088	-2	3.5%
4	3.679	3.6201	1	1%

5	3.77	3.7584	4	4%
6	3.8	3.8488	0	0

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
x0=[2.874,3.278,3.39,3.679,3.77,3.8];
n=length(x0);
a_x0=diff(x0);
a_x0=[0,a_x0]
B=[-x0(2:end)',ones(n-1,1)];
Y=a_x0(2:end)';
u=B\Y
x=dsolve('D2x+a*Dx=b','x(0)=c1,Dx(0)=c2');
x=subs(x,{ 'a','b','c1','c2'},{u(1),u(2),x0(1),x0(1)});
yuce=subs(x,'t',0:n-1);
digits(6),x=vpa(x)
x0_hat=[yuce(1),diff(yuce)]
epsilon=x0-x0_hat
delta=abs(epsilon./x0)
```

## § 10 GM(1, N) 和 GM(0, N) 模型

### 10.1 GM(1, N) 模型

定义11 设  $x_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n))$  为系统特征数据序列，而

$$x_2^{(0)} = (x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \dots, x_2^{(0)}(n))$$

$$x_3^{(0)} = (x_3^{(0)}(1), x_3^{(0)}(2), \dots, x_3^{(0)}(n))$$

.....

$$x_N^{(0)} = (x_N^{(0)}(1), x_N^{(0)}(2), \dots, x_N^{(0)}(n))$$

为相关因素序列， $x_i^{(1)}$  为  $x_i^{(0)}$  的1-AGO序列 ( $i=1, 2, \dots, N$ )， $z_1^{(1)}$  为  $x_1^{(1)}$  的紧邻均值生成序列，则称

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k) \quad (43)$$

为  $\text{GM}(1, N)$  模型。

定义12 在  $\text{GM}(1, N)$  模型中,  $-a$  称为系统发展系数,  $b_i x_i^{(1)}(k)$  称为驱动项,  $b_i$  称为驱动系数,  $\hat{a} = [a, b_2, \dots, b_N]^T$  称为参数列。

定理8 设  $x_1^{(0)}$  为系统特征数据序列,  $x_i^{(0)} (i = 2, 3, \dots, N)$  为相关因素数据序列,  $x_i^{(1)}$  为诸  $x_i^{(0)}$  的1-AGO序列,  $z_1^{(1)}$  为  $x_1^{(1)}$  的紧邻均值生成序列,

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

则参数列  $u = [a, b_2, \dots, b_N]^T$  的最小二乘估计满足

$$u = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

定义13 设  $u = [a, b_2, \dots, b_N]^T$ , 则称

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = b_2 x_2^{(1)} + b_3 x_3^{(1)} + \cdots + b_N x_N^{(1)} \quad (44)$$

为  $\text{GM}(1, N)$  模型

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = b_2 x_2^{(1)}(k) + b_3 x_3^{(1)}(k) + \cdots + b_N x_N^{(1)}(k)$$

的白化方程, 也称影子方程。

定理9 设  $x_i^{(0)}, x_i^{(1)} (i = 1, 2, \dots, N)$ ,  $B, Y$  如定理8所述,

$$u = [a, b_2, \dots, b_N]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

则

$$(1) \text{ 白化方程 } \frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)} \text{ 的解为}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)}(t) &= e^{-at} \left[ \sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(t) e^{at} dt + x_1^{(1)}(0) - \sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(0) dt \right] \\
&= e^{-at} \left[ x_1^{(1)}(0) - t \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(0) + \sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(t) e^{at} dt \right]
\end{aligned} \quad (45)$$

(2) 当  $x_i^{(1)} (i=1,2,\cdots,N)$  变化幅度很小时, 可视  $\sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k)$  为灰常量, 则

GM(1, N) 模型  $x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k)$  的近似时间响应式为

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \left( x_1^{(1)}(0) - \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k+1) \right) e^{-ak} + \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(k+1) \quad (46)$$

其中  $x_1^{(1)}(0)$  取为  $x_1^{(0)}(1)$ 。

(3) 累减还原式为

$$\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \alpha^{(1)} \hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k)$$

(4) GM(1, N) 差分模拟式为

$$\hat{x}_1^{(0)}(k) = -az_1^{(1)}(k) + \sum_{i=2}^N b_i \hat{x}_i^{(1)}(k)$$

## 10.2 GM(0, N) 模型

定义14 设  $x_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \cdots, x_1^{(0)}(n))$  为系统特征数据序列, 而

$$x_2^{(0)} = (x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \cdots, x_2^{(0)}(n))$$

$$x_3^{(0)} = (x_3^{(0)}(1), x_3^{(0)}(2), \cdots, x_3^{(0)}(n))$$

.....

$$x_N^{(0)} = (x_N^{(0)}(1), x_N^{(0)}(2), \cdots, x_N^{(0)}(n))$$

为相关因素序列,  $x_i^{(1)}$  为  $x_i^{(0)}$  的1-AGO序列 ( $i=1,2,\cdots,N$ ), 则称

$$x_1^{(1)}(k) = a + b_2 x_2^{(1)}(k) + b_3 x_3^{(1)}(k) + \cdots + b_N x_N^{(1)}(k) \quad (47)$$

为  $GM(0, N)$  模型。

$GM(0, N)$  模型不含导数, 因此为静态模型。它形如多元线性回归模型但与一般的多元线性回归模型有着本质的区别。一般的多元线性回归建模以原始数据序列为基础,  $GM(0, N)$  的建模基础则是原始数据的1-AGO序列。

定理10 设  $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}$  如定义14所述,

$$B = \begin{bmatrix} x_2^{(1)}(2) & x_3^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ x_2^{(1)}(3) & x_3^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{(1)}(n) & x_3^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(2) \\ x_1^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(1)}(n) \end{bmatrix}$$

则参数列  $u = [a, b_2, \cdots, b_N]^T$  的最小二乘估计为

$$u = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

例7 设系统特征数据序列为

$$x_1^{(0)} = (2.874, 3.278, 3.307, 3.39, 3.679) = \{x_1^{(0)}(k)\}_1^5$$

相关因素数据序列为

$$x_2^{(0)} = (7.04, 7.645, 8.075, 8.53, 8.774) = \{x_2^{(0)}(k)\}_1^5$$

试分别建立  $GM(1, 2)$  和  $GM(0, 2)$  模型。

解 (1) 设  $GM(1, 2)$  白化方程为

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = bx_2^{(1)}$$

对  $x_1^{(0)}$  和  $x_2^{(0)}$  作1-AGO, 得

$$x_1^{(1)} = (x_1^{(1)}(1), x_1^{(1)}(2), x_1^{(1)}(3), x_1^{(1)}(4), x_1^{(1)}(5))$$

$$= (2.874, 6.152, 9.459, 12.849, 16.528)$$

$$x_2^{(1)} = (x_2^{(1)}(1), x_2^{(1)}(2), x_2^{(1)}(3), x_2^{(1)}(4), x_2^{(1)}(5))$$



$$= (7.04, 14.685, 22.76, 31.29, 40.064)$$

$x_1^{(1)}$  的紧邻均值生成序列

$$z_1^{(1)} = (z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), z_1^{(1)}(4), z_1^{(1)}(5)) = (4.513, 7.8055, 11.154, 14.6885)$$

于是有

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots \\ -z_1^{(1)}(5) & x_2^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.513 & 14.685 \\ -7.8055 & 22.76 \\ -11.154 & 31.29 \\ -14.6885 & 40.064 \end{bmatrix}$$

$$Y = [x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), x_1^{(0)}(4), x_1^{(0)}(5)]^T = [3.278, 3.307, 3.39, 3.679]^T$$

所以

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} 2.2273 \\ 0.9067 \end{bmatrix}$$

得估计模型

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + 2.2273x_1^{(1)} = 0.9067x_2^{(1)}$$

及近似时间响应式

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(1)}(k+1) &= \left( x_1^{(0)}(1) - \frac{b}{a} x_2^{(1)}(k+1) \right) e^{-ak} + \frac{b}{a} x_2^{(1)}(k+1) \\ &= (2.874 - 0.4071x_2^{(1)}(k+1))e^{-2.2273k} + 0.4071x_2^{(1)}(k+1) \end{aligned}$$

由此可得

$$\hat{x}_1^{(1)}(2) = 5.6433, \quad \hat{x}_1^{(1)}(3) = 9.1908, \quad \hat{x}_1^{(1)}(4) = 12.7251, \quad \hat{x}_1^{(1)}(5) = 16.3082$$

作1-IAGO还原

$$\hat{x}_1^{(0)}(k) = \hat{x}_1^{(1)}(k) - \hat{x}_1^{(1)}(k-1)$$

$$\hat{x}_1^{(0)} = (\hat{x}_1^{(0)}(1), \hat{x}_1^{(0)}(2), \hat{x}_1^{(0)}(3), \hat{x}_1^{(0)}(4), \hat{x}_1^{(0)}(5))$$

$$= (2.874, 2.7693, 3.5475, 3.5343, 3.5822)$$

结果见表20。

表 20 误差检验表

序号	实际数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)} - \hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 $\Delta_k$
2	3.278	2.7693	0.5087	15.52%
3	3.307	3.5475	-0.2405	7.27%
4	3.39	3.5343	-0.1443	4.26%
5	3.679	3.5822	0.0968	2.63%

计算的MATLAB程序如下:

```

clc,clear
x10=[2.874,3.278,3.307,3.39,3.679];
x20=[7.04,7.645,8.075,8.53,8.774];
n=length(x10);
x11=cumsum(x10)
x21=cumsum(x20)
for i=2:n
    z11(i)=0.5*(x11(i)+x11(i-1));
end
B=[-z11(2:n)',x21(2:n)'];
Y=x10(2:n)';
u=B\Y
x=dsolve('Dx+a*x=b*x2','x(0)=x0');
x=subs(x,{ 'a', 'b', 'x0', 'x2' }, {u(1),u(2),x10(1), 'x21'});
digits(6),x=vpa(x);x=simple(x)
x=subs(x,{ 't', 'x21' }, { [0:n-1],x21(1:n) })
xhat=[x(1),diff(x)]
epsilon=x10-xhat
delta=abs(epsilon./x10)

```

(2) 设GM(0,2)模型为  $x_1^{(1)} = a + bx_2^{(1)}$ , 由

$$B = \begin{bmatrix} 1 & x_2^{(1)}(1) \\ 1 & x_2^{(1)}(2) \\ 1 & x_2^{(1)}(3) \\ 1 & x_2^{(1)}(4) \\ 1 & x_2^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7.04 \\ 1 & 14.685 \\ 1 & 22.76 \\ 1 & 31.29 \\ 1 & 40.064 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(1) \\ x_1^{(1)}(2) \\ x_1^{(1)}(3) \\ x_1^{(1)}(4) \\ x_1^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.874 \\ 6.152 \\ 9.459 \\ 12.849 \\ 16.528 \end{bmatrix}$$

可得  $u = [a, b]^T$  的最小二乘估计

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} 0.0425 \\ 0.4113 \end{bmatrix}$$

故有GM(0,2)估计式  $\hat{x}_1^{(1)}(k) = 0.0425 + 0.4113x_2^{(1)}(k)$ 。

由此可得

$$\hat{x}_1^{(1)}(1) = 2.9383, \quad \hat{x}_1^{(1)}(2) = 6.0831, \quad \hat{x}_1^{(1)}(3) = 9.4047$$

$$\hat{x}_1^{(1)}(4) = 12.9134, \quad \hat{x}_1^{(1)}(5) = 16.5225$$

作1-IAGO还原

$$\hat{x}_1^{(0)}(k) = \hat{x}_1^{(1)}(k) - \hat{x}_1^{(1)}(k-1)$$

$$\hat{x}_1^{(0)} = (\hat{x}_1^{(0)}(1), \hat{x}_1^{(0)}(2), \hat{x}_1^{(0)}(3), \hat{x}_1^{(0)}(4), \hat{x}_1^{(0)}(5))$$

$$= (2.9383, 3.1447, 3.3216, 3.5088, 3.6091)$$

结果见表21。

表 21 误差检验表

序号	实际数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)} - \hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 $\Delta_k$
2	3.278	3.1447	0.1333	4.1%
3	3.307	3.3216	-0.0146	0.4%
4	3.39	3.5088	-0.1188	3.5%
5	3.679	3.6091	0.0699	1.9%

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
x10=[2.874,3.278,3.307,3.39,3.679];
x20=[7.04,7.645,8.075,8.53,8.774];
n=length(x10);
x11=cumsum(x10)
x21=cumsum(x20)
B=[ones(n,1),x21(1:n)'];
Y=x11(1:n)';
u=B\Y
x11hat=B*u
x10hat=[x11hat(1),diff(x11hat)']
epsilon=x10-x10hat
```

$\text{delta}=\text{abs}(\text{epsilon}./\text{x10})$

## § 11 总结

灰色预测法与传统统计方法的比较见表22。

表22 传统统计方法与灰色预测法的比较

方法	所需最少的数据	数据之型态	数据之间隔
简单指数平滑型	5 至 10 个	等间距	短间隔
Holt's 指数平滑型	10 至 15 个	同趋势	短或中间隔
Winter's 指数平滑型	至少5 个以上	同趋势且具规律性	短或中间隔
回归分析法	10 或 20 个以上	同趋势且具规律性	短或中间隔
Causal 回归法	10 个以上	可各种型态相互混合	短、中及长间隔
时间序列压缩法	2 个峰值以上	同趋势、具规律性且可自我调整	短或中间隔
Box Jenkins 法	50 个以上	等间距	短、中及长间隔
灰色预测法	4 个	等间距及非等间距	短、中及长间隔