

基于线性二次规划的自动泊车的控制方法

钱 炎, 王兆强, 李培兴, 梁 威, 卢晨晖

上海工程技术大学机械与汽车工程学院, 上海 201620

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51505272, 51505274)

通信作者: 王兆强, wangzhaoqiang_2008@126.com 收稿/录用/修回: 2020-12-18/2021-02-25/2021-06-11

摘要

针对自动泊车辅助系统中的规划路径曲率不连续, 导致车辆原地转向的问题, 采用逆推法, 根据车身结构和周围环境约束, 确定了控制点, 利用贝塞尔曲线的性质设计出一条曲率连续且无碰撞的参考路径. 为了提高自动泊车的可靠性, 根据离散线性二次规划的原理, 设计一个结合前馈控制和反馈控制的跟踪控制器. 在 Simulink 和 CARSIM 中的仿真结果验证了该方法的可行性, 表明提出的方法在泊车位尺寸合适的情况下能有有效的跟踪参考路径, 误差在可接受的范围内.

关键词

自动泊车
贝塞尔曲线
路径规划
跟踪控制
线性二次规划
中图法分类号: U471.15
文献标识码: A

Automatic Parking Control Method Based on the Linear-quadratic Regulator

QIAN Yan, WANG Zhaoqiang, LI Peixing, LIANG Wei, LU Chenhui

School of Mechanical and Automotive Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China

Abstract

To solve the problem in which a vehicle turns in a place because the curvature of the planned path in the automatic parking system is not continuous, we adopt the reverse method to determine the control points according to the body structure and surrounding environment constraints. Then, we use a Bezier curve to design a reference path with continuous curvature and no collision. To improve the reliability of automatic parking, according to the principle of discrete linear-quadratic programming, we design a tracking controller combining feedforward and feedback control. The simulation results in the Simulink and CARSIM verify the feasibility of the proposed method. The results show that the method can effectively track the reference path within an acceptable range of the error when the parking space size is appropriate.

Keywords

automatic parking;
Bezier curve;
path planning;
tracking control;
linear quadratic programming

0 引言

根据国家统计局发布的数据, 截止到 2020 年 1 月, 我国汽车的保有量已经达到了 2.6 亿辆, 有 10 多个城市的汽车保有量超过 300 万, 60 多个城市的汽车保有量达到了百万级别, 过大的汽车保有量给城市交通造成了巨大的压力. 作为高级辅助驾驶系统的一部分, 自动泊车辅助 (automatic parking assistant, APA) 系统的目的是帮助驾驶员在日益狭小的城市空间内解决停车难的问题, 并能有效地解决城市拥堵和人员的伤亡问题.

APA 通常来说分为 3 大部分^[1]: 环境检测、路径规划和跟踪控制. 针对路径规划的问题, APA 的要求是快速生成了一条连续光滑且无碰撞的参考路径, 光滑要求参考路径的曲率连续, 就是要求车辆的前轮转角变化要连续, 不能发生突变. 文[2]利用相切的两段圆弧来设计参考路径,

但是设计的路径存在曲率不连续的问题, 在连接点处车辆需要将速度降为零从而进行转向控制. 文[3]提出利用 5 阶多项式来设计参考路径, 虽然解决了参考路径曲率连续的问题, 但是没有考虑到周围环境的约束, 因此需要较大的泊车空间. 文[4]针对智能停车系统中存在大量不连通路径的情况, 提出了一种改进蚁群算法的智能停车系统路径规划方法. 虽然该方法能灵活运用于各种不同的环境, 但是设计的路径曲率不够连续, 车辆的转向不够平稳, 没有考虑到驾驶员的舒适度的要求. 文[5-6]通过规划二次自动平行泊车路径和分析泊车过程中的碰撞可能性建立了碰撞约束函数, 评估最短泊车路径规划出二次平行泊车路径, 设计出泊车的合适的区域, 但是计算量较大, 路径设计时间较长, 需要进一步的优化.

针对跟踪控制的问题, APA 需要控制车辆尽可能地按照参考路径行驶, 文[6-9]根据现实环境建立了相似的仿

真环境,通过互动加速学习,设计了新的算法和反馈函数来获得专家知识和筛选数据,建立神经网络从中学得泊车策略,但是该方法需要大量的实验数据,实验成本太过巨大,需要建立庞大的车联网,无法普及到家用车辆.文[10]提出了一种基于样本的运动规划器,由优化双向快速探索随机树*和模型预测控制组成,以正确应对各种停车场景,但是该方法需要采集大量的样本,同时模型预测控制(MPC)算法需要不断的在线优化,因此对处理器的要求较高,容易受到外界环境的干扰.文[11-12]提出了一种高精度的路径跟踪控制器,该控制器遵循一个需要沿着其移动方向发生变化的停车路径.虽然泊车路径很短,但是该控制器没有考虑车辆的初始位姿且控制的车辆需要较大的转向角,车辆的速度会在路径的转换点处降为零,整个泊车过程不连贯.

为此,本文针对泊车路径曲率不连续和生成速度较慢等问题,采用逆推法进行参考路径的初步规划,根据周围环境的约束,通过计算控制点的坐标,结合贝塞尔曲线的性质,选取两段三阶贝塞尔曲线,规避了高阶贝塞尔曲线局部精度低的缺点,快速拟合出一条曲率连续的无碰撞的参考路径,利用动力学模型和自然坐标系将车辆运动解耦成横向控制和纵向控制,针对控制器的精度和计算速度不能同时兼容的问题,采用线性二次规划器(linear quadratic regulator, LQR)作为路径跟踪控制器,离线计算出最优解,再结合反馈控制,能够快速求解出最佳前轮转角,来实现良好的路径跟踪效果.

1 车辆的动力学模型

假设车身完全对称,车的轮距忽略不计,车辆的纵向速度 V_x 为常数,可将车身模型简化为2自由度的自行车模型(见图1),为了得到更加准确的模型,轮胎的侧偏特性不可忽视,因此车轮不可视为刚体,建立如图1所示的车辆动力学模型.图1中的 F_{yf} 和 F_{yr} 分别为前轮侧偏力和后轮侧偏力, V_f 和 V_r 分别是前轮速度和后轮速度, V 是质心的速度, α_f 和 α_r 分别是前后轮的侧偏角, β 为车辆的质心的滑移角, δ 为前轮转角, a 是前轴中点到质心的距离, b 是后轴中点到质心的距离,两者之和就是轴距 l , o 为车辆的旋转中心.根据侧偏力的定义,可得 $F = C\alpha$,其中, C 是轮胎的侧偏刚度, α 为侧偏角.

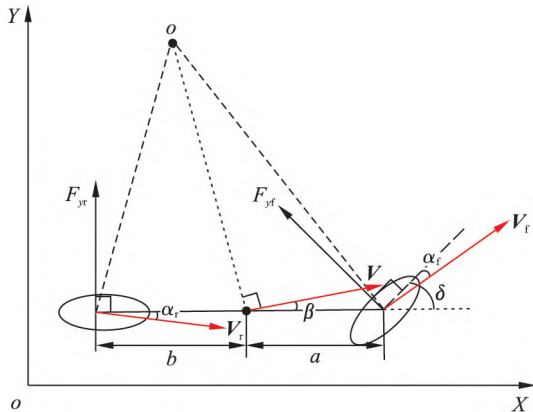


图1 车辆的动力学模型

Fig.1 The dynamic model of the vehicle

根据图1的受力分析,可得:

$$\sum F = m\alpha_y = F_{yf}\cos\delta + F_{yr} \quad (1)$$

$$\sum M = I\ddot{\varphi} = aF_{yf}\cos\delta - bF_{yr} \quad (2)$$

根据前后轮的侧偏角,可将式(1)、式(2)简化为

$$m(\dot{V}_y + V_x\dot{\varphi}) = C_{af}\left(\frac{\dot{\varphi}a + V_y}{V_x} - \delta\right) + C_{ar}\left(\frac{V_y - \dot{\varphi}b}{V_x}\right) \quad (3)$$

$$I\ddot{\varphi} = aC_{af}\left(\frac{V_y + \dot{\varphi}a}{V_x} - \delta\right) - bC_{ar}\left(\frac{V_y - \dot{\varphi}b}{V_x}\right) \quad (4)$$

其中, m 为汽车质量, $\dot{\varphi}$ 是车辆的角速度, $\ddot{\varphi}$ 是车辆的角加速度, I 是车辆的转动惯量, C_{ar} 是后轮的侧偏刚度, C_{af} 是前轮的侧偏刚度.为方便后面的计算,将式(3)、式(4)转换为矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_{af} + C_{ar}}{mV_x} & \frac{aC_{af} - bC_{ar}}{mV_x} - V_x \\ \frac{aC_{af} - bC_{ar}}{IV_x} & \frac{a^2C_{af} + b^2C_{ar}}{IV_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{C_{af}}{m} \\ -\frac{aC_{af}}{I} \end{bmatrix} \delta \quad (5)$$

设 $X = \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix}$, $u = [\delta]$, 式(5)可简写为 $\dot{X} = AX + Bu$, 如此,便可以通过控制前轮转角 δ 从而达到对横向位移 y 和横摆角 φ 的控制.

2 参考路径的设计

2.1 贝塞尔曲线

本文采用二段三阶贝塞尔曲线来构成车辆平行泊车的参考曲线,三阶贝塞尔曲线的具体形式为

$$\begin{cases} P_i(x) = P_1(x)(1-u)^3 + 3P_2(x)(1-u)^2u + 3P_3(x)(1-u)u^2 + P_4(x)u^3 \\ P_i(y) = P_1(y)(1-u)^3 + 3P_2(y)(1-u)^2u + 3P_3(y)(1-u)u^2 + P_4(y)u^3 \end{cases} \quad (6)$$

其中, $u \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$, 可将式(6)转换为矩阵形式:

$$P(u) = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

同样,通过贝塞尔曲线的公式,可以轻易地算出曲线的斜率和曲率表达式:

$$k(u) = \frac{\dot{P}_x(u)}{\dot{P}_y(u)} \quad (8)$$

$$\tau(u) = \frac{\dot{P}_x(u)\ddot{P}_y(u) - \ddot{P}_x(u)\dot{P}_y(u)}{(\dot{P}_x^2(u) + \dot{P}_y^2(u))^{3/2}} \quad (9)$$

选取贝塞尔曲线作为参考路径的原因是因为该曲线拥有性质:

1) 端点性质: 贝塞尔曲线始终经过第一个点和最后一个点,即 $P(0) = P_0$, $P(n) = P_n$.

2) 切矢量性质: 贝塞尔曲线的起点和终点处的切线方向由前两个点和后两个点决定,即 $\dot{P}(0) = n(P_1 - P_0)$, $\dot{P}(n) = n(P_n - P_{n-1})$.

3) 凸包性: 贝塞尔曲线被控制点所形成的特性多边形所包裹。

通过改变控制点的位置就可以轻易地改变贝塞尔曲线的外形。

2.2 控制点的选择

本文采用倒推法来计算控制点的坐标值, 即假设车辆已停入指定泊车位, 离开泊车位进入主干道的方向。先考虑第一段曲线的控制点的选择, 如图2所示, 将车身视为长方形刚体, 忽略后视镜的存在, 当车辆停在车位的时候, 与车位的后边界线 D_c 存在一段安全距离, 记为 S_1 ^[13]; 当车辆准备从车位驶离泊车位, 根据车辆的结构约束和周围环境的约束, 车辆的右前 endpoint B_1 不能与泊车位的 endpoint a 发生碰撞。规定右前 endpoint B_1 和 endpoint a 存在安全距离, 记为 S_2 ^[13]。

根据阿克曼转向定理, 车辆的转向中心位于后轴的延长线上, 图2中 M 点为车辆的转向瞬心, 如此可得泊车的终点, 也是第一段曲线的第一个控制点 P_1 的坐标:

$$P_1(x, y) = \left[S_1 + L_r, -\frac{W}{2} \right] \quad (10)$$

其中, L_r 为车辆的后悬长, W 为车辆的宽度。

当车辆从 B 点处转至 B_1 点处时, 转过 α , 根据图2的几何关系, 可以算出控制点 P_3 的坐标为

$$P_3(x, y) = [S_1 + L_r + R_1 \sin \alpha, R_1(1 - \cos \alpha) - 0.5W] \quad (11)$$

其中, R_1 为后轴的中点, 也是车辆的参考点处的旋转半径; α 的值也可以算出来, 其表达式为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{D_{B1} - L_r}{R_1 - 0.5W}\right) - \arctan\left(\frac{l + L_f}{R_1 + 0.5W}\right) \quad (12)$$

其中, L_f 为车辆的前悬长, l 为车辆的轴距, D_{B1} 等于泊车位的长度减去安全距离 S_1 和 S_2 。

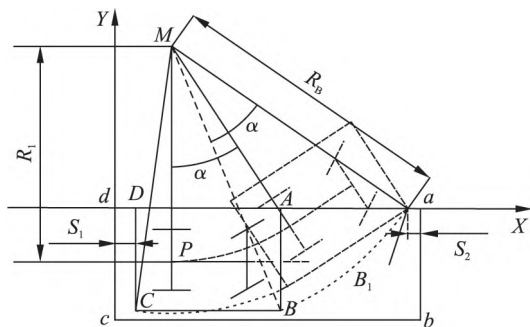


图2 第一段贝塞尔曲线的控制点

Fig.2 The control points of the first Bezier curve

为了车辆能够平行的停在车位, 控制点 P_1 处的斜率应该等于0, 根据贝塞尔曲线的第2个性质, P_2 应该和 P_1 在同一水平线上, 所以如图2所示, P_2 的坐标应该为

$$P_2(x, y) = \left[P_3(x) - \frac{|P_3(x) - P_1(x)|}{\tan \alpha}, P_1(y) \right] \quad (13)$$

如此, 第一段曲线还差最后一个控制点, 为了确保车辆驶离车位转弯进入主干道时, 车身尾部不会与停车位发生碰撞, 车辆最好往前运行一段距离, 直到车身后轴的延长线运动到图2中的 B_1 点时, 此时车辆的参考点的位置就是最后一个控制点的位置见图3, 其坐标值为

$$P_4(x, y) = [P_3(x) + (l + L_f) \cos \alpha, P_3(y) + (l + L_f) \sin \alpha] \quad (14)$$

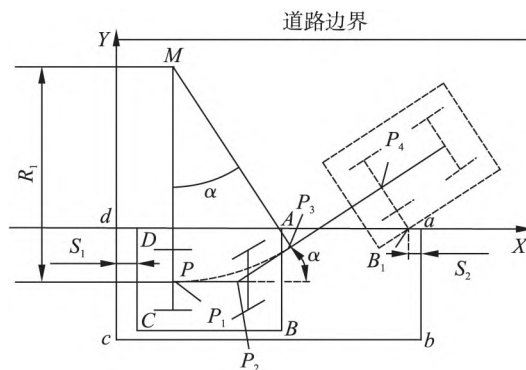


图3 第一段贝塞尔曲线的最后一个控制点

Fig.3 The last control point of the first Bezier curve

如此, 第一段曲线的所有的控制点都可以求出, 下一步, 将会通过调整方向盘从而使车辆进入主干道。当车辆运行到 P_4 点处时, 既是第一段曲线的最后一点, 也是第二段曲线的初始点, 根据贝塞尔曲线的第一个性质, 因此, 车辆一定会经过 P_4 点, 要摆正车位从而达到泊车的初始点, 车辆需要转过 α 度, 所以控制点 P_6 的坐标为

$$P_6(x, y) = [P_4(x) + R_2 \sin \alpha, P_4(y) + R_2(1 - \cos \alpha)] \quad (15)$$

其中, R_2 是第二段曲线车辆的转弯半径, 为了避免车辆在 P_6 点处, 原地转向, 可以在 P_6 点2 m 远处, 设定一个新的起始点 P_7 , 于是, 该点的坐标为

$$P_7(x, y) = [P_6(x) + 2, P_6(y)] \quad (16)$$

根据 P_7 点和 P_4 点的坐标, 控制点 P_5 的坐标便可算出:

$$P_5(x, y) = \left[P_4(x) + \frac{P_6(y) - P_4(y)}{\tan \alpha}, P_6(y) \right] \quad (17)$$

于是, 第二段的曲线便可以算出, 两段曲线的控制点的坐标表达式都可以得出。

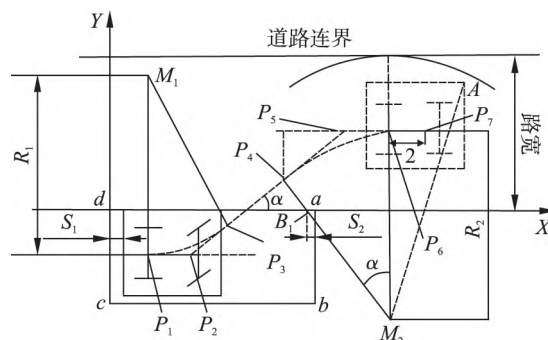


图4 第二段贝塞尔曲线的控制点

Fig.4 The control points of the second Bezier curve

3 控制器的设计

将参考路径离散化为规划点, 已知每一个规划点的信息, 而车辆在某一时刻的信息也是已知量^[14], 设规划点的状态量为 X_r , 真实的状态量为 X , 设跟踪误差为 $e = X - X_r$,

前文已得 $\dot{X} = AX + Bu$, 通过坐标变化转换为 $\dot{e} = \bar{A}e + \bar{B}u$, 控制器的控制目标就是选择适合的 u , 使得真实点和规划点尽可能的接近, 即 e 的模尽可能最小, 代价函数表示为

$$\min J = \sum_{k=0}^n (e_k^T Q e_k + u_k^T R u_k) \quad (18)$$

s.t. $\dot{e} = \bar{A}e + \bar{B}u$

其中, Q 和 R 都是权重矩阵, 这就是线性二次规划器的基本理论和控制目标.

3.1 坐标转换和线性误差微分方程

如图 5 所示, V 是车辆质心的速度大小, n 和 τ 分别为车辆质心速度的及其法向方向的单位向量; n_r 和 τ_r 分别为参考点处的速度及其法向方向的单位向量, 过坐标原点; \dot{S} 为投影点的速度大小^[15]; d 为横向误差, $\theta - \theta_r$ 为航向误差. 过坐标原点分别做投影点和真实位置的位置矢量 X 和 X_r , 则可得到:

$$X_r + d n_r = X \quad (19)$$

其中, d 为参考位置 and 实际位置的横向误差, 对上式变换求导可得:

$$\dot{d} = (\dot{X} - \dot{X}_r) n_r + (X - X_r) \dot{n}_r \quad (20)$$

其中, $\dot{X} = |V| \tau$, $\dot{X}_r = \dot{S} \tau_r$, 代入得到:

$$\dot{d} = (|V| \tau - \dot{S} \tau_r) n_r + (X - X_r) \dot{n}_r \quad (21)$$

根据二维曲线的 Frenet 公式: $\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = k n$, $\frac{dn}{ds} =$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_d \\ \ddot{e}_d \\ \dot{e}_\varphi \\ \ddot{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{af} + C_{ar}}{m|V|_x} & -\frac{aC_{af} - bC_{ar}}{m} & \frac{aC_{af} - bC_{ar}}{m|V|_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{aC_{af} - bC_{ar}}{I|V|_x} & -\frac{aC_{af} - bC_{ar}}{I} & \frac{a^2 C_{af} + b^2 C_{ar}}{I|V|_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_d \\ \dot{e}_d \\ e_\varphi \\ \dot{e}_\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_{af}}{m} \\ 0 \\ -\frac{aC_{af}}{I} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{aC_{af} - bC_{ar}}{m|V|_x} \\ 0 \\ \frac{a^2 C_{af} + b^2 C_{ar}}{I|V|_x} \end{bmatrix} \dot{\theta}_r \quad (27)$$

简写式(27)可得到了误差的线性微分方程:

$$\dot{e} = \bar{A}e + \bar{B}u + C\dot{\theta}_r$$

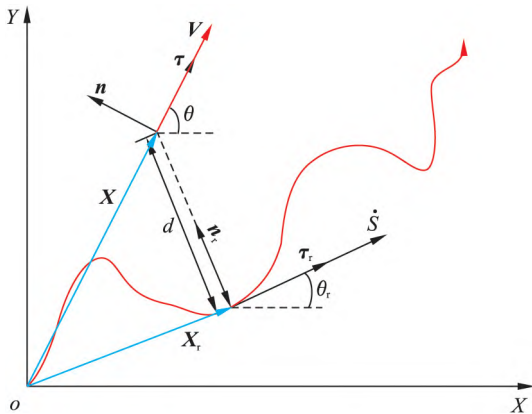


图 5 真实路径和参考路径的横向误差图

Fig.5 Later deviation between reality and the planned path

3.2 反馈控制

对于前文得出的 $\dot{e} = \bar{A}e + \bar{B}u + C\dot{\theta}_r$, 可暂时先忽略 $C\dot{\theta}_r$.

$\frac{dn}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = -k\tau$, 其中 k 为曲线的斜率, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{d} &= |V| \tau n_r = |V| \tau \|n_r\| \cos(\tau, n_r) \\ &= |V| \sin(\theta - \theta_r) \end{aligned} \quad (22)$$

对于式(19), 两边同时求导并点乘 τ_r , 可得:

$$\dot{S} \tau_r \tau_r + |V| \sin(\theta - \theta_r) n_r \tau_r + d(-k \tau_r) \dot{S} \tau_r = |V| \tau_r \tau_r \quad (23)$$

这样, 关于投影点的速度 \dot{S} , 可得:

$$\dot{S} = \frac{|V| \cos(\theta - \theta_r)}{1 - kd} \quad (24)$$

因为航向角为横摆角 φ 和侧偏角 β 之和^[15-18], 即 $\theta = \varphi + \beta$, 对于式(22)和式(24), 可以展开写为

$$\begin{cases} \dot{d} = |V_y| + |V_x|(\varphi - \theta_r) \\ \dot{S} = \frac{|V_x| - |V_y|(\varphi - \theta_r)}{1 - kd} \end{cases} \quad (25)$$

根据二自由度自行车模型, $V \sin \beta = V_x$, $V \cos \beta = V_y$, 其中, V_x 和 V_y 分别代表了车辆质心处的横向速度和纵向速度. 令 $e_d = d$, $e_\varphi = \varphi - \theta_r$, 分别求导并忽略较小量, 可得:

$$\begin{cases} |V_y| = \dot{e}_d - |V_x| e_\varphi \\ |\dot{V}_y| = \ddot{e}_d - |\dot{V}_x| e_\varphi \\ \dot{\varphi} = \dot{e}_\varphi + \dot{\theta}_r \\ \ddot{\varphi} = \ddot{e}_\varphi \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入动力学模型的矩阵表达式, 可得:

系统的代价函数式 $J = \sum_{k=0}^n (e_k^T Q e_k + u_k^T R u_k)$, 首先利用欧拉公式来对误差进行离散化处理, 然后利用拉格朗日乘子法, 构造无约束的最优化问题, 求解极值.

第 1 步 利用向前欧拉法和中点欧拉法对误差进行离散化处理, 得到:

$$e(t + dt) = \left(I - \frac{A}{2} dt\right)^{-1} \left(I + \frac{A}{2} dt\right) e(t) + \bar{B} u(t) dt \quad (28)$$

其中, dt 就是采样时间, I 为单位矩阵. 定义: $\bar{A} = \left(I - \frac{A}{2} dt\right)^{-1} \left(I + \frac{A}{2} dt\right)$, 于是便得到了误差的离散化方程:

$$e_{k+1} = \bar{A} e_k + \bar{B} u_k \quad (29)$$

第 2 步 利用拉格朗日乘子法算出代价函数的极值^[19-20]. 首先, 需要根据约束条件将代价函数进行改写, 得到 $J = \sum_{k=0}^{n-1} (e_k^T Q e_k + u_k^T R u_k) + e_n^T Q e_n$, 然后利用带约束的拉格朗日乘子法得到:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{n-1} (e_k^T Q e_k + u_k^T R u_k) + e_n^T Q e_n \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1}^T (\bar{A} e_k + \bar{B} u_k - e_{k+1}) \end{aligned} \quad (30)$$

构造出哈密顿函数^[21] $H_k = \mathbf{e}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + \lambda_{k+1}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}_k + \lambda_{k+1}^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}_k$, 并代入代价函数, 可得:

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} (H_k - \lambda_k^T \mathbf{e}_k) + \lambda_0^T \mathbf{e}_0 - \lambda_n^T \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_n \quad (31)$$

为了更加方便地进行偏导计算, 可对代价函数进一步的演化, 最终形式为

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} (H_k - \lambda_{k+1}^T \mathbf{e}_{k+1}) + \mathbf{e}_n^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_n \quad (32)$$

当代价函数取最小值时, 满足: $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}_0} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}_k} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}_k} = \mathbf{0}$,

$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{e}_n} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial J}{\partial \lambda_k} = \mathbf{0}$, 得到方程:

$$\lambda_k = 2\mathbf{Q} \mathbf{e}_k + \bar{\mathbf{A}}^T \lambda_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1 \quad (33)$$

$$\mathbf{u}_k = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \lambda_{k+1}, \quad k=1, 2, \dots, n-1 \quad (34)$$

$$\mathbf{e}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}_k + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}_k, \quad k=1, 2, \dots, n-1 \quad (35)$$

$$\lambda_n = 2\mathbf{Q} \mathbf{e}_n \quad (36)$$

联立这 4 个方程, 可以得到:

$$\lambda_{n-1} = 2(\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q})^{-1} \bar{\mathbf{A}}) \mathbf{e}_{n-1} \quad (37)$$

比较式(36)和式(37), 可以假设 $\mathbf{Q} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q})^{-1} \bar{\mathbf{A}}$ 为 \mathbf{Q}_{n-1} , $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n$ 可得:

$$\lambda_{n-1} = 2\mathbf{Q}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1} \quad (38)$$

再次利用式(33)~式(36), 可以得到:

$$\mathbf{Q}_{n-2} = \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{Q}_{n-1} (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q}_{n-1})^{-1} \bar{\mathbf{A}} \quad (39)$$

根据式(38), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \lambda_{k+1} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T (2\mathbf{Q} \mathbf{e}_{k+1}) \\ &= -(\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (40)$$

如此, 通过反向迭代不断求出 \mathbf{Q} 的值就可以得出反馈控制的最优序列 $\mathbf{u}_k = -\mathbf{K} \mathbf{e}_k$, 其中, $\mathbf{K} = (\mathbf{R} + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{B}})^{-1} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{Q}$.

3.3 前馈控制

将 $\mathbf{u}_k = -\mathbf{K} \mathbf{e}_k$ 代入误差的微分方程可以得到 $\dot{\mathbf{e}} = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}} \mathbf{K}) \mathbf{e} + \mathbf{C} \dot{\theta}_r$, 无论 \mathbf{K} 取何值, $\dot{\mathbf{e}}$ 和 \mathbf{e} 都不可能同时为 0, 解决办法就是引入前馈控制 δ_f , 使得 $\mathbf{u}_k = -\mathbf{K} \mathbf{e} + \delta_f$, 此时微分方程变为 $\dot{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e} + \bar{\mathbf{B}} (\delta_f - \mathbf{K} \mathbf{e}) + \mathbf{C} \dot{\theta}_r$, LQR 最终结果会导致误差不再发生变化, 但是误差不会消失, 即 $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{0} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{e} + \bar{\mathbf{B}} (\delta_f - \mathbf{K} \mathbf{e}) + \mathbf{C} \dot{\theta}_r$, 可以算出稳态误差 $\mathbf{e} = -(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{B}} \mathbf{K})^{-1} (\bar{\mathbf{B}} \delta_f + \mathbf{C} \dot{\theta}_r)$. 所以, 需要选取合适的 δ_f , 使得稳态误差尽可能为 0.

稳定误差的每一项都是已知, 可以算出误差的矩阵表达式:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} \left\{ \delta_f - \frac{\dot{\theta}_r}{|\mathbf{V}_x|} \left[a + b - bK_3 - \frac{m|\mathbf{V}_x|^2}{a+b} \left(\frac{b}{C_{af}} + \frac{a}{C_{ar}} K_3 - \frac{a}{C_{ar}} \right) \right] \right\} \\ 0 \\ -\frac{\dot{\theta}_r}{|\mathbf{V}_x|} \left(b + \frac{a}{a+b} \frac{m|\mathbf{V}_x|^2}{C_{ar}} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

当 $\delta_f = \frac{\dot{\theta}_r}{|\mathbf{V}_x|} \left[a + b - bK_3 - \frac{m|\mathbf{V}_x|^2}{a+b} \left(\frac{b}{C_{af}} + \frac{a}{C_{ar}} K_3 - \frac{a}{C_{ar}} \right) \right]$ 时, \mathbf{e}_d 等于 $\mathbf{0}$, 其中, K_1 、 K_3 分别为 LQR 求出反馈的 $\mathbf{K} = [K_1, K_2, K_3, K_4]$, 所以需要先求反馈 \mathbf{u} , 再算前馈.

由式(27)和式(41)可知, e_φ 不受 δ_f 和 \mathbf{K} 的影响, 所以无论前馈反馈取何值, $e_\varphi \neq 0$. 根据曲率的定义 $k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{s}}$

可得, $\dot{\theta} = k\dot{s} \approx kV_x$, 所以 $e_\varphi = \left(\frac{b}{R} + \frac{a}{a+b} \frac{m|\mathbf{V}_x|^2}{R} \frac{1}{C_{ar}} \right)$ 又因为 $a_y = |\dot{\mathbf{V}}_y| + |\mathbf{V}_x \dot{\varphi}| \approx |\mathbf{V}_x \dot{\varphi}|$, $\dot{\varphi} = \frac{|\mathbf{V}|}{R} = \frac{|\mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y|}{R} \approx \frac{|\mathbf{V}_x|}{R}$, 所以可得:

$$e_\varphi = \left(\frac{b}{R} + \frac{a}{a+b} m a_y \frac{1}{C_{ar}} \right) \quad (42)$$

利用等效替换原理可以算出:

$$e_\varphi = -\left(\frac{b}{R} + \alpha_r \right) \quad (43)$$

根据图 6 的车身的二自由度模型可知: $\gamma \approx \frac{b}{R}$, 同时可将图中的三角形近似于一个等腰三角形, 又因为 $\gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) + \frac{\pi}{2} - (-\alpha_r) = \pi$, 所以 $-\beta = -\left(\frac{b}{R} + \alpha_r \right)$, 即 $e_\varphi = -\beta$, 虽然 e_φ 不可能通过 δ_f 和 \mathbf{K} 去调节, 但是不用理会, 因为系统的稳定误差就是 $-\beta$.

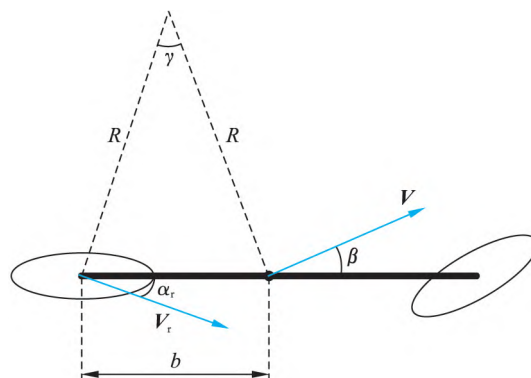


图 6 二自由度车辆模型图

Fig.6 Two-degree-of-freedom vehicle model diagram

综上所述, 将反馈控制 δ_f 设置为

$$\frac{\dot{\theta}_r}{|\mathbf{V}_x|} \left[a + b - bK_3 - \frac{m|\mathbf{V}_x|^2}{a+b} \left(\frac{b}{C_{af}} + \frac{a}{C_{ar}} K_3 - \frac{a}{C_{ar}} \right) \right]$$

可以得到稳态的误差 $\mathbf{e} = [0, 0, -\beta, 0]^T$.

4 仿真与分析

本节主要是利用 Simulink 和 CARSIM 对所提出的 APA 系统的轨迹规划和跟踪控制的可靠性进行仿真分析验证, 整个控制器的流程如图 7 所示, 在 Simulink 环境编写控制器模块, 输入为车辆的各个状态信息, 输出为车辆的前轮转角, 接入仿真软件 CARSIM, 构成完整的系统闭环仿真模型.

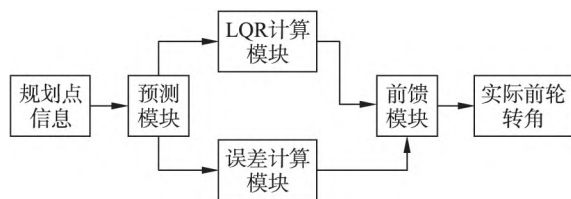


图7 控制流程图

Fig.7 The control flow chart

本次仿真的车辆模型参数选自软件 CARSIM 自带的 c 级车 Hatchback, 该车的尺寸参数如表 1 所示。

表1 车辆参数表

Tab.1 The parameter of the vehicle

参数	数值	参数	数值
车辆轴距 l	2.91 /m	车辆前悬 L_f	0.94 /m
车辆后悬 L_r	0.94 /m	车宽 W	1.916 /m
质心到前轴的距离 a	1.015 /m	质心到后轴的距离 b	1.895 /m
最大前轮转角 δ_f	47 /($^{\circ}$)	车速 $ V _x$	1 / (m/s)

图 8(a) 展示的是参考轨迹的范围图, 图中黑色的阴影区域是根据贝塞尔曲线的凸包性所确定的参考路径的范围图, 红色为泊车区域, 蓝色为道路的边界, 根据控制点确定的贝塞尔曲线有效地避开泊车环境中前后障碍物和道路的限制, 构成了一条安全无碰撞的参考轨迹, 能够满足参考轨迹安全的要求。图 8(b) 展示的是参考轨迹的曲率图, 该轨迹的曲率连续且满足汽车的结构约束。

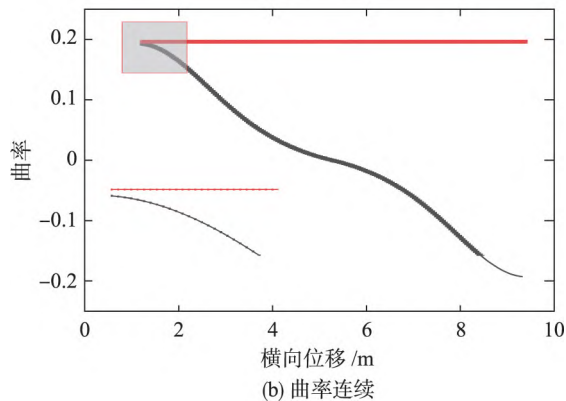
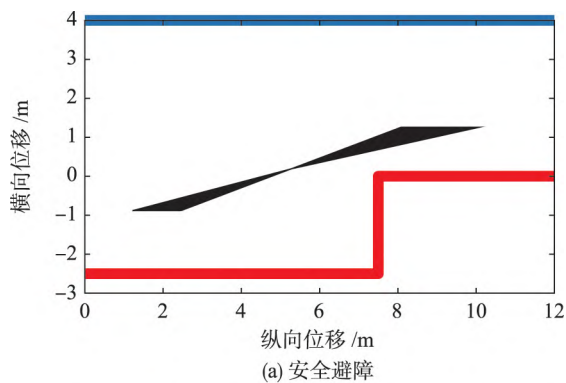


图8 参考轨迹

Fig.8 The reference trajectory

根据该车的前轮最大转角为 47° , 可以算出最小转弯半径为 4.43 m, 后轴中点处的最小转弯半径, 即上文中的 R_1 和 R_2 的最小值为 3.34 m, 满足 $R_1 \geq R_{1min}$, $R_2 \geq R_{2min}$, $R_2 R_2$, 本文设定泊车位的长度为 7.5 m, 宽为 2.5 m, 文 [13] 中设置安全距离为 0.2 m, 但是考虑到安全距离会增加泊车位的长度, 为了兼顾安全性和实际性, 笔者设定安全距离 S_1 和 S_2 为 0.1 m, 可计算出 R_1 的值为 6.68 m, 本文中 R_2 和 R_1 取值相同, 由此可计算出各控制点的坐标值, 又因为本文中选择后轴中点为车身的参考点, 而在 CARSIM 软件中, 车身的参考点为前轴的中点, 需要依据车身的结构关系, 将后轴中点的坐标值转化为前轴中点的坐标值, 具体数值如表 2 所示。

表2 各控制点的坐标值

Tab.2 The coordinate of the control points

控制点	坐标值	控制点	坐标值
P_1	(3.95, -0.96)	P_5	(11.25, 2.53)
P_2	(6.31, 0.34)	P_6	(12.30, 2.72)
P_3	(6.18, 0.55)	P_7	(15.35, 1.93)
P_4	(9.62, 1.89)		

路径跟踪控制器控制车辆减小车辆实际运行中与参考路径的横向位移误差和横摆角偏差, 选取参考轨迹为两段贝塞尔曲线的泊车路径, 具体的仿真结果如图 9 所示。

由图 9(a) 可以看出, 车辆的车轮转角最大值约为 45° , 小于允许的最大值 47° , 其变换较为平缓, 虽然中间段有突变, 由放大图可知, 突变的程度从 -6° 转变到 -1.5° , 变化范围较小, 驾驶员几乎感受不到, 起始的前轮转角突变是因为泊车位较小, 车身较长, 因此需要在一开始就将方向盘转至最大从而使车辆安全驶出停车位。最终的前轮转角趋向 0 代表了车辆的平行地进入了的主干道。

图 9(b) 和图 9(c) 可以结合在一起分析, 图 9(b) 中的黑色曲线为参考路径图, 红色为跟踪控制图, 两者的趋势变化大致相同, 说明控制器控制车辆按照规划的路径形式, 虽然有误差, 但根据图 9(c) 可知, 误差的最大值为 6 cm, 最大误差出现的时间在逆向泊车的最后阶段, 即车辆进入主干道的时候, 安全距离的设置是为了避开前后车对本车的约束, 最大误差出现的时候, 车辆已经避开了前后车造成的约束, 因此两者之间并无关系。结合图 10 车辆的实际运行图可以发现, 在 LQR 控制下的车辆, 避开了前后车和道路边界的阻碍, 成功地进行了泊车操作。根据第 3.3 小节的分析可知, LQR 控制器下最终的控制误差应该稳定在一个较小的值, 但是仿真结果表明误差在不断的变化, 究其原因笔者分析有二: 一是在建立车辆模型时选用的是二自由度动力学模型, 该模型需要车辆的前轮转角值不能太大, 而在平行泊车时恰好需要大转角, 因此会造成一定的误差; 二是轮胎的侧偏刚度, 车辆运行的过程中侧偏刚度是在不断地变化, 而算法中的值是根据曲线拟合估计的一个值, 在运行中也会造成一定的误差, 二者结合会造成误差的收敛变化。

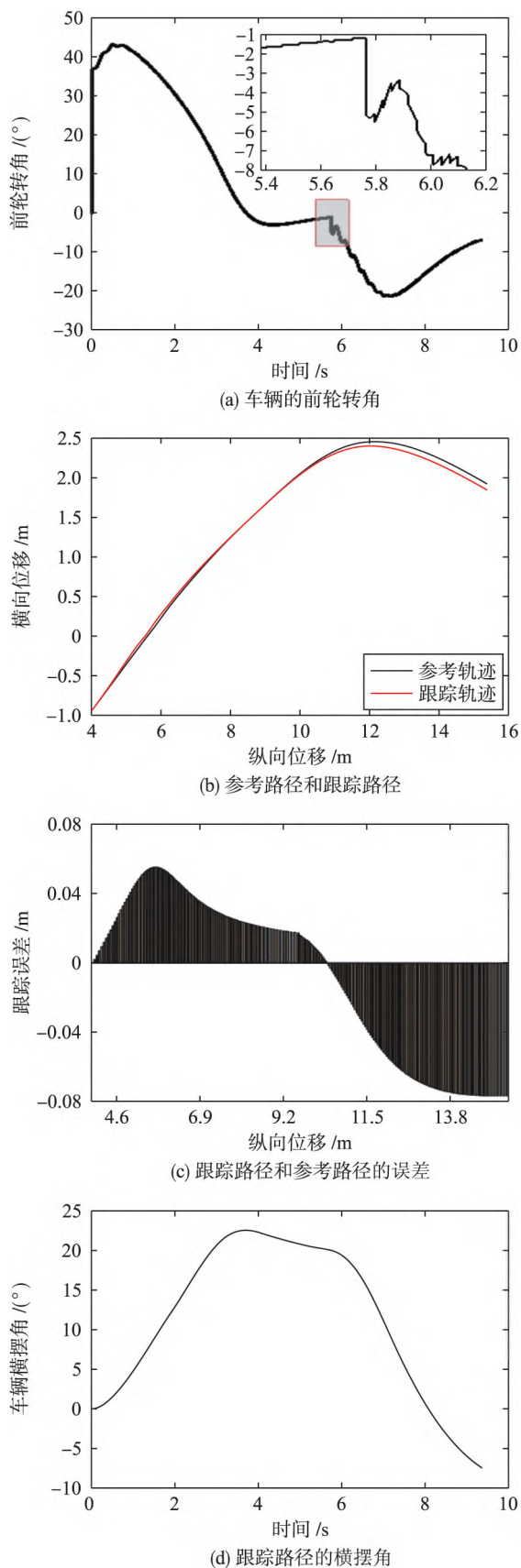


图9 平行泊车的仿真图

Fig.9 Simulations of parallel parking

图9(d)显示了车辆的横摆角变化,一开始车辆式平行的停在泊车位中,最后近似的平行的进入主干道,横摆角的变化是连续的且比较平缓.

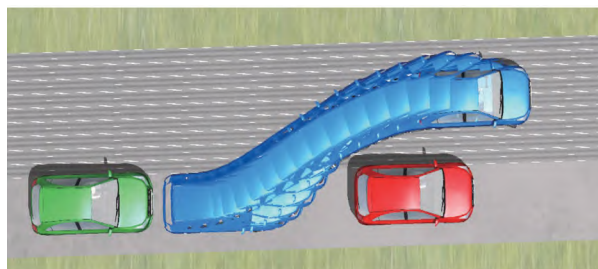


图10 轨迹跟踪图

Fig.10 Trajectory tracking

文[22]得出的结论是车位长度约为车身的1.5倍,文[23]使用的车辆模型与泊车位长度的比值约为1.67. 为了比较不同停车位对车辆泊车操作的影响,选择不同参数大小的泊车位进行了对比分析,本文中车身长度约为4.8 m,分别选取了长度为7 m和8 m的泊车位,仿真效果图如图11、图12所示.

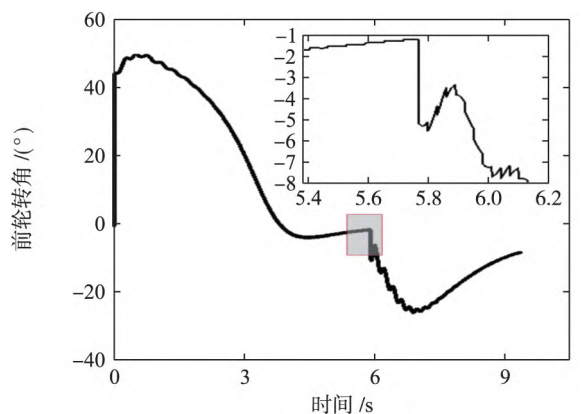
对比可知:当车位长度为7 m时,车辆前轮转角的最大值为 50° ,大于车身结构允许的最大值 47° ,同时由于泊车位长度的限制,需要方向盘在很短的时间转过较大的角度,前轮转角的突变程度会略微大,为了保证驾驶员的舒适程度,需要车辆以极低的速度行驶,此时跟踪误差也会更大,大约为10 cm,同时,当车辆驶入主干道时,车身的横摆角与道路平行线的偏差也会更大一点,因此,当车位长度为7 m,不满足车辆的泊车要求.

相反地,当泊车位的长度为8 m时,车辆的前轮转角的最大值约为 40° ,在车身结构的允许范围内,前轮转角也变的更加平缓,可见较长的泊车位让车辆有更长的时间来转动方向盘,因此跟踪误差也更小,大约为5 cm,跟踪效果更好,但是也可以发现,相比于减少0.5 m的泊车位长度,增加0.5 m的泊车位也只是将最大误差降低了1 cm,车辆离开泊车位后,车辆的横摆角与道路平行线的误差也更小.

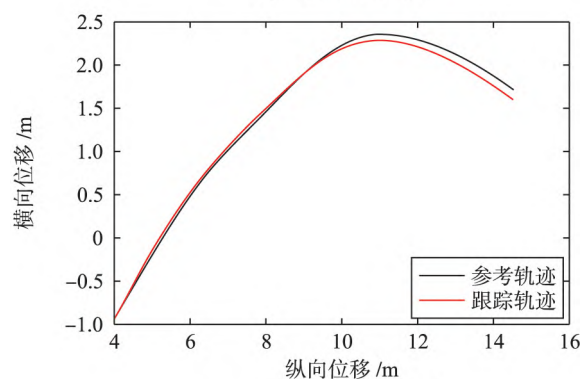
因此,可以得出泊车的长度对泊车的成功率有一定的影响,考虑到泊车时安全性和驾驶人员的舒适性,当泊车位的长度约为车身长度的1.5倍时,可以满足车辆的泊车要求.

5 结论

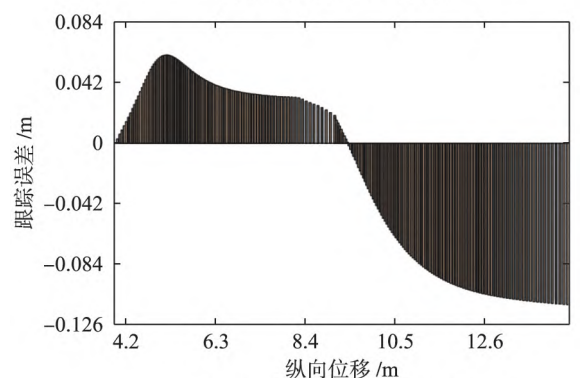
针对单步式平行泊车规划路径曲率不连续的问题,利用两段三阶贝塞尔曲线给出参考轨迹的计算方式,并给出仿真结果图,满足平行泊车的要求. 针对轨迹跟踪的复杂性,利用二自由度动力学模型和自然坐标系将车辆运动解耦成的横向控制和纵向控制,建立了控制目标的线性误差微分方程,利用LQR算法求出反馈的最优控制,结合前馈控制来实现误差的最小化以保证车辆的跟踪效果,通过仿真验证了该算法在平行泊车轨迹跟踪的可行性. 同时测试



(a) 车辆的前轮转角



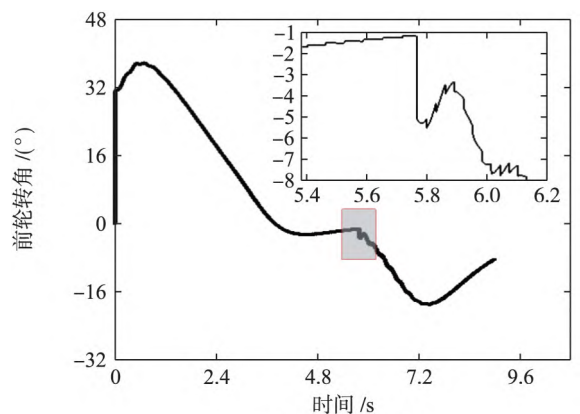
(b) 参考路径和跟踪路径



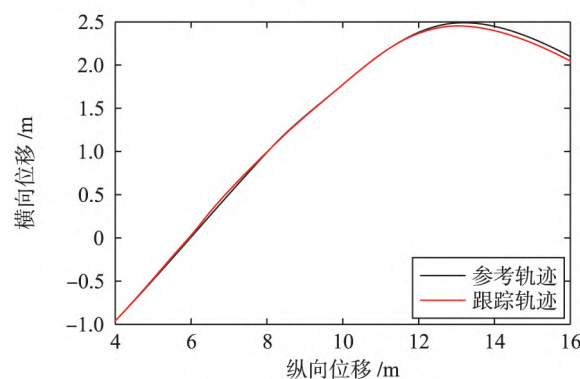
(c) 跟踪路径和参考路径的误差

图 11 泊车位长度为 7 m 时的平行泊车仿真图

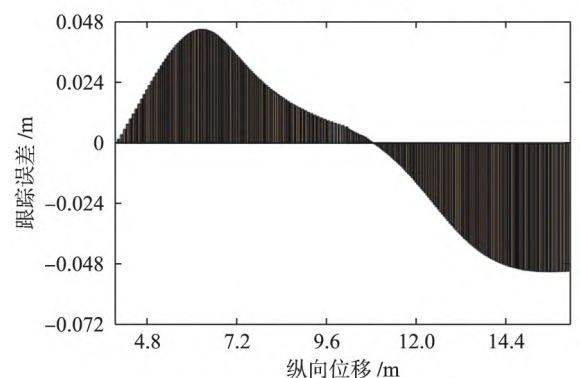
Fig.11 Simulations of parallel parking when the length of the parking slot is 7 m



(a) 车辆的前轮转角



(b) 参考路径和跟踪路径



(c) 跟踪路径和参考路径的误差

图 12 泊车位长度为 8 m 时的平行泊车仿真图

Fig.12 Simulations of parallel parking when the length of the parking slot is 8 m

了不同泊车位参数对平行泊车的成功率的影响, 最终得出: 在单步式泊车中, 考虑到泊车安全性和驾驶员舒适性

的基础上, 泊车位为车身长度 1.5 倍时能取得较好的泊车效果, 即使再增加泊车位的长度, 误差也不会衰减多少。

参考文献

- [1] 李红. 自动泊车系统路径规划与跟踪控制研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2014.
Li H. Research on path planning and tracking control of automatic parking system[D]. Changsha: Hunan University, 2014.
- [2] Choi S, Boussard C, D'Andréa-Novell B. Easy Path planning and robust control for automatic parallel parking[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2011, 44(1): 656-661.
- [3] Lyon D. Parallel parking with curvature and nonholonomic constraints[C]//Intelligent Vehicles 92 Symposium. Piscataway, USA: IEEE, 1992: 341-346.
- [4] Wang X W, Shi H, Zhang C. Path planning for intelligent parking system based on improved ant colony optimization[J]. IEEE Access, 2020,

- 8; 65267 – 65273.
- [5] Su B, Yang J, Li L, et al. Secondary parallel automatic parking of endpoint regionalization based on genetic algorithm[J]. Cluster Computing, 2019, 22(3): 7515 – 7523.
- [6] Zhang J R, Chen H, Song S Y, et al. Reinforcement learning-based motion planning for automatic parking system[J]. IEEE Access, 2020, 8; 154485 – 154501.
- [7] Jhang J H, Lian F L. An autonomous parking system of optimally integrating bidirectional rapidly-exploring random trees* and parking-oriented model predictive control[J]. IEEE Access, 2020, 8; 163502 – 163523.
- [8] Samani N N, Danesh M, Ghaisari, J. Parallel parking of a car-like mobile robot based on the P-domain path tracking controllers[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(5): 564 – 572.
- [9] Huang J, Wei D K, Qin L Y, et al. Research on path planning and tracking control method of automatic parking system[J]. Automotive Technology, 2019(8): 39 – 45.
- [10] Zhou R F, Liu X F, Cai G P. A new geometry-based secondary path planning for automatic parking[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2020, 17(3): 1 – 17.
- [11] Trojnecki M. Method of automatic parking of a car theoretical considerations and simulation studies[J]. Journal of Automation, Mobile Robotics and Intelligent Systems, 2020, 13(4): 3 – 10.
- [12] Tan J, Xu C, Li L, et al. Guidance control for parallel parking tasks[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2020, 7(1): 301 – 306.
- [13] 黄江, 魏德奎, 秦良艳, 等. 自动泊车系统路径规划与跟踪控制方法研究[J]. 汽车技术, 2019(8): 39 – 45.
Huang J, Wei D K, Qin L Y, et al. Research on path planning and path tracking control method of automatic parking system[J]. Automobile Technology, 2019(8): 39 – 45.
- [14] 李艳东, 朱玲, 郭媛, 等. 基于径向基函数神经网络的移动机器人多变量固定时间编队控制[J]. 信息与控制, 2019, 48(6): 649 – 657.
Li Y D, Zhu L, Guo Y, et al. Radial basis function neural network-based multivariable fixed-time formation control of mobile robots[J]. Information and Control, 2019, 48(6): 649 – 657.
- [15] 张炳力, 李子龙, 沈干, 等. 基于模糊神经网络的智能汽车轨迹跟踪研究[J]. 汽车工程, 2019, 41(8): 953 – 959.
Zhang B L, Li Z L, Shen G, et al. Research on intelligent vehicle trajectory tracking based on fuzzy neural network[J]. Automotive Engineering, 2019, 41(8): 953 – 959.
- [16] 郭孔辉, 李红, 宋晓琳, 等. 自动泊车系统路径跟踪控制策略研究[J]. 中国公路学报, 2015, 28(9): 106 – 114.
Guo K H, Li H, Song X L, et al. Research on path tracking control strategy of automatic parking system[J]. Journal of Chinese highway, 2015, 28(9): 106 – 114.
- [17] 李红, 王文军, 李克强. 基于 B 样条理论的平行泊车路径规划[J]. 中国公路学报, 2016, 29(9): 143 – 151.
Li H, Wang W J, Li K Q. Parallel parking path planning based on B-spline theory[J]. Journal of Chinese highway, 2016, 29(9): 143 – 151.
- [18] Jiang B, Meng S S. Parking path tracking method based on Kalmanfilter and fuzzy control[J]. International Core Journal of Engineering, 2020, 6(1): 77 – 85.
- [19] Gao H, Zhu J, Li X, et al. Automatic parking control of unmanned vehicle based on switching control algorithm and backstepping[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2020. DOI: 10.1109/TMECH.2020.3037215.
- [20] Li B, Peng X Y, Zhang Y M, et al. Maneuver planning for automatic parking with safe travel corridors a numerical optimal control approach [C]//European Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 2020: 1993 – 1998.
- [21] 龚建伟, 姜岩, 徐威. 无人驾驶车辆模型预测控制[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2014: 130 – 152.
Gong J W, Jiang Y, Xu W, Model predictive control of unmanned vehicle[M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 2014: 130 – 152.
- [22] 陈龙, 罗杰, 杨旭, 等. 基于模糊纯跟踪控制的自动泊车算法研究[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版), 2019, 41(3): 316 – 321.
Chen L, Luo J, Yang X, et al. Research on automatic parking algorithms based on fuzzy pure tracking control[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Information & Management Engineering), 2019, 41(3): 316 – 321.
- [23] Vorobieva H, Glaser S, Minoiu-Enache N, et al. Automatic parallel parking in tiny spots: Path planning and control[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2015, 16(1): 396 – 410.

作者简介

钱 炎(1995 –), 男, 硕士生. 研究领域为智能驾驶和路径规划.

王兆强(1981 –), 男, 博士, 副教授. 研究领域为汽车物联网.

李培兴(1984 –), 男, 博士, 讲师. 研究领域为机器人技术, 机电一体化技术.