METODY NUMERYCZNE PROJEKT 2
UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Olaf Jedliński 193415

WSTĘP

Celem niniejszego projektu jest implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych–Jacobiego i Gaussa-Seidla–oraz jednej metody bezpośredniej, jaką jest faktoryzacja LU, w kontekście rozwiązywania układów równań liniowych.

KONSTRUKCJA UKŁADU RÓWNAŃ:

Ax = b gdzie:

A - jest macierzą systemową(w zadaniu macierz pasmowa o zadanych wymiarach i wartościach w późniejszych zadaniach)

b - jest wektorem pobudzenia(w zadaniu zadany wzorem: i-ty element jest równy sin(i*(f+3)) gdzie f to 3 cyfra indeksu

x - jest wektorem rozwiązań reprezentującym szukaną wielkość fizyczną

***A** ze względu na prostotę jest przechowywana w formacie pełnym zamiast rzadkim(pomijane przy zapisie są zbędne zera)*

Wartości zmiennych w projekcie:

c = 1

d = 5

e = 4

f = 3

N = 9cd = 915

Zadania

Zadanie A i B :

W zadaniu A stworzona została macierz pasmowa o kształcie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix},$$

która jest rozmiarów NxN (915 x 915) i a1=5+e (a1=9) i a2=a3=-1 jak i wektor B omówiony wcześniej.

W zadaniu B dzięki metodom Jacobiego i Gaussa-Seidela możemy wyznaczyć rozwiązanie danego równania poprzez iteracyjne przybliżanie się do jego ostatecznej postaci. Te dwie metody oferują różne podejścia do tego samego problemu, co pozwala nam porównać ich skuteczność i efektywność w rozwiązywaniu układów równań liniowych.

Metoda Jacobiego polega na iteracyjnym poprawianiu wartości kolejnych elementów wektora rozwiązania, korzystając z wartości poprzednich iteracji. Jest to podejście niezależne, gdzie każdy element wektora rozwiązania aktualizowany jest na podstawie poprzednich wartości wszystkich innych elementów.

Z kolei metoda Gaussa-Seidla wykorzystuje częściowo zaktualizowane wartości elementów wektora rozwiązania w trakcie pojedynczej iteracji. Oznacza to, że aktualizujemy wartości elementów wektora rozwiązania na bieżąco, na podstawie już zaktualizowanych wartości, co może przyspieszyć proces zbieżności.

Ważnym elementem tych algorytmów jest określenie w której iteracji algorytm powinien się zatrzymać. W tym celu został wykorzystany wektor residuum o postaci:

$$\mathbf{res}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}.$$

W każdej iteracji jest sprawdzana jego norma euklidesowa, i jeżeli wyniesie ona mniej niż 1e-9 to wynik jest zwracany. Dodatkowo do każdej z metod dołączony został maksymalny licznik iteracji. Dzięki niemu w przypadku gdy wektor rozwiązania nie będzie zbieżny to algorytm zostanie w pewnym momencie automatycznie przerwany.

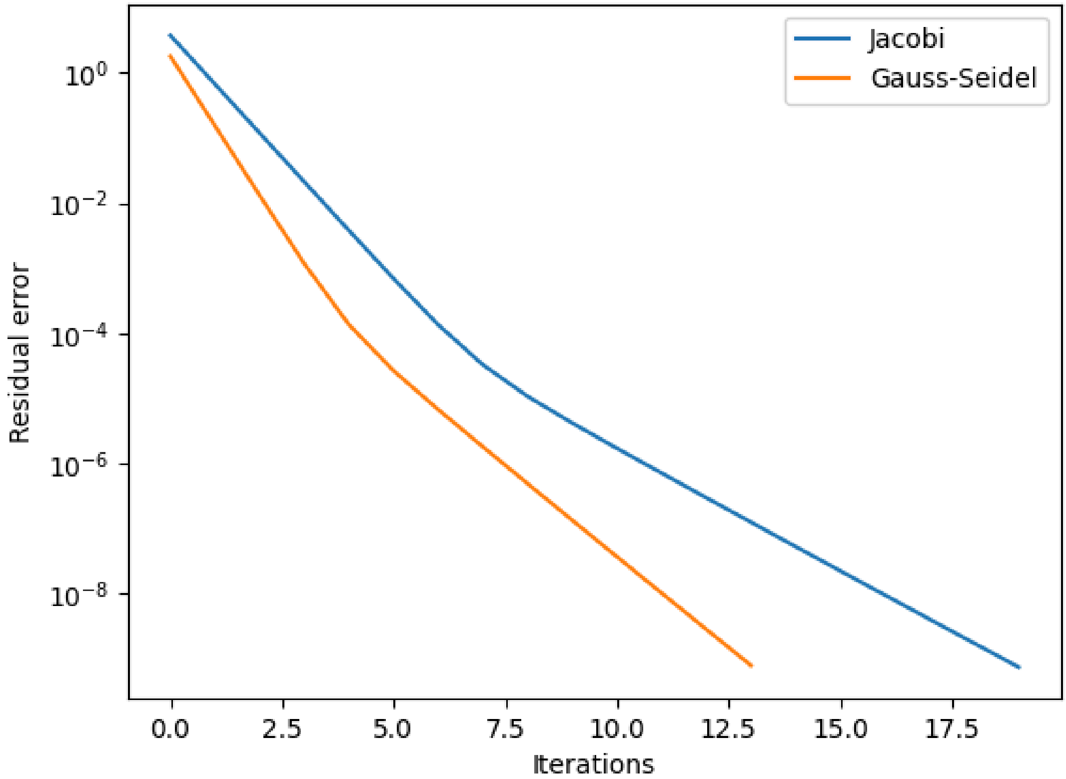
Wzór zastosowany przy metodzie Jacobiego:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}$$

Wzór zastosowany przy metodzie Gaussa-Seidla:

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}) / a_{ii}$$

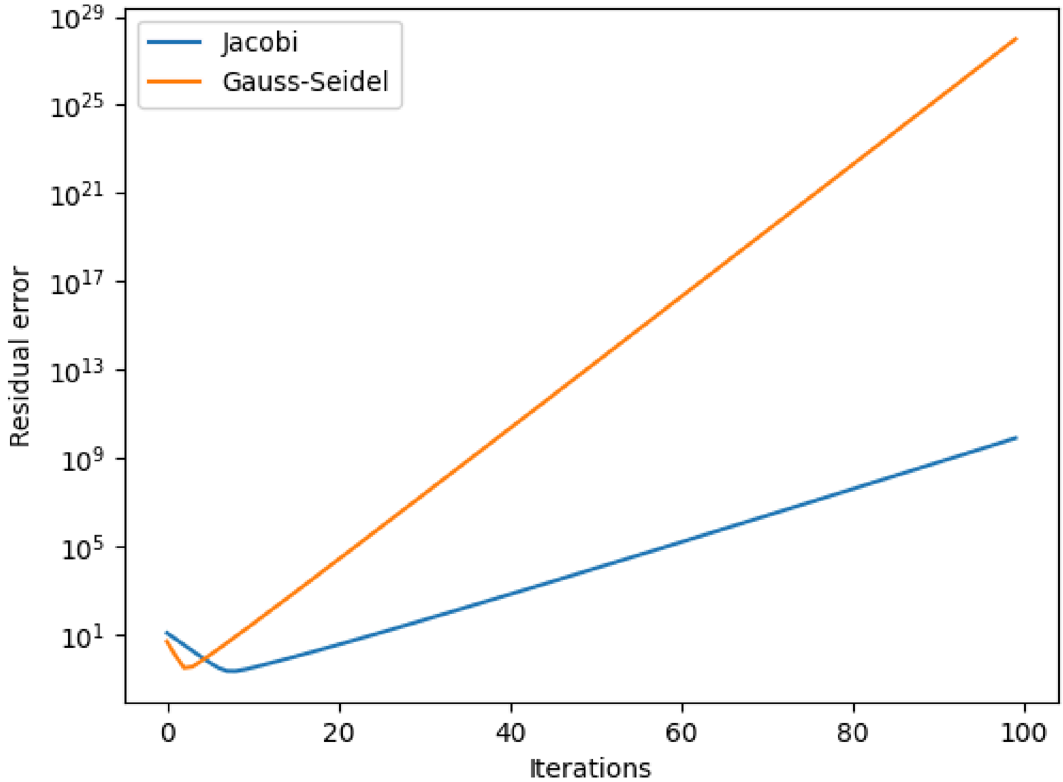
W przypadku macierzy 1 norma residuum zbiega do zera, i obie metody wyznaczają poprawne rozwiązanie. Zauważyć można, że metoda Gaussa-Seidla działa nieco szybciej.




```
Jacobi 1:
Iterations: 19
Total time: 6.593225717544556
Gauss-Seidel 1:
Iterations: 13
Total time: 4.861092567443848
```

Zadanie C:

Po zmodyfikowaniu macierzy z Zadania A (zastąpienie a1=3) można zauważyć, że żadna z metod iteracyjnych nie jest skuteczna. Norma residuum zbiega dla obu do nieskończoności, a program przerywa swoje działanie jedynie dzięki zaimplementowanym mechanizmom maksymalnej ilości iteracji. Można również zauważyć, że w tym przypadku to metoda Jacobiego wykonuje się nieco szybciej.




```
Jacobi 2:
Iterations: 100
Total time: 33.63674306869507
Gauss-Seidel 2:
Iterations: 100
Total time: 35.06374979019165
```

Zadanie D:

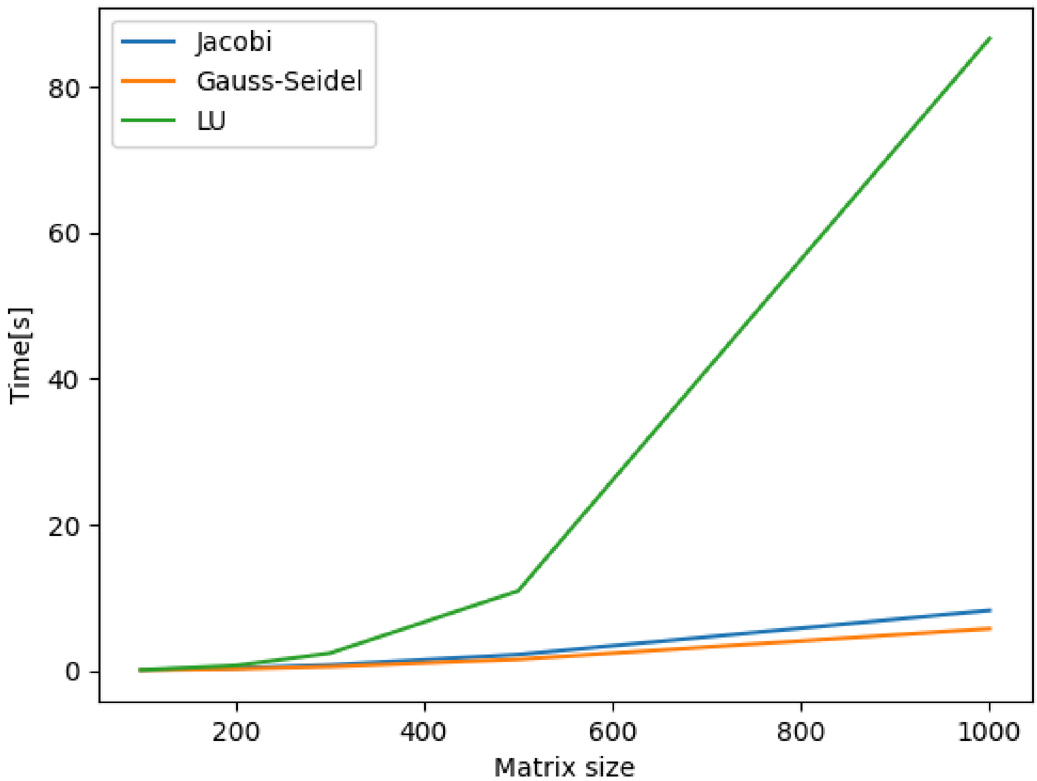
Metoda faktoryzacji LU to technika rozkładu macierzy kwadratowej A na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: macierzy trójkątnej dolnej L i macierzy trójkątnej górnej U.

Metoda faktoryzacji LU jest wykorzystywana do rozwiązywania układów równań liniowych oraz do innych zadań numerycznych, takich jak wyznaczanie wyznacznika macierzy lub wyznaczanie odwrotności macierzy. Jest ona szczególnie przydatna w przypadku, gdy rozwiązanie tego samego układu równań potrzebne jest dla wielu różnych wektorów b.

W przeciwieństwie do dwóch poprzednich metod, tej udało rozwiązać się równanie z daną poprzednio macierzą A z bardzo nikłym błędem residualnym.

```
Total time: 71.45371294021606
Residual norm: 1.792645050866239e-13
```

Zadanie E:



Jednak jak wynika z zadania E metoda LU ma jedną stanowczą wadę, czas działania. W przeciwieństwie do dwóch poprzednich metody, których czas rośnie mniej więcej w liniowej zależności od rozmiaru macierzy A, tak metoda LU ma gwałtowny wzrost.

Podsumowanie

W trakcie projektu przetestowaliśmy dwie metody iteracyjne, Jacobiego i Gaussa-Seidla, oraz jedną metodę bezpośrednią, faktoryzację LU, do rozwiązywania układów równań liniowych.

Odkryliśmy, że metody iteracyjne są skuteczne dla odpowiednio ukształtowanych macierzy, przy czym metoda Gaussa-Seidla wydaje się być nieco szybsza. Jednak gdy zmieniliśmy strukturę macierzy, obie metody iteracyjne nie poradziły sobie z zadaniem.

Metoda faktoryzacji LU okazała się być dokładna i skuteczna, ale jej czas działania wzrasta znacząco wraz z rozmiarem macierzy.

Wniosek jest taki, że wybór metody zależy od struktury problemu i oczekiwanej dokładności, ale także od ograniczeń czasowych. To zrozumienie pomoże nam lepiej wybrać odpowiednią metodę dla konkretnego przypadku.