METODY NUMERYCZNE PROJEKT 3 Aproksymacja profilu wysokościowego

Olaf Jedliński 193415

WSTĘP

Interpolacja jest procesem szacowania wartości funkcji dla punktów, które nie są bezpośrednio dostępne na podstawie znanych wartości funkcji w innych punktach. Dwie popularne metody interpolacji to interpolacja Lagrange'a oraz interpolacja za pomocą funkcji sklejanych (spline). Węzły Czebyszewa to sposób wyboru punktów interpolacyjnych, który minimalizuje błędy interpolacji.

1. Interpolacja Lagrange’a:

Interpolacja Lagrange'a opiera się na konstrukcji wielomianów interpolacyjnych, które przechodzą przez zadane punkty. Wielomian interpolacyjny Lagrange'a jest kombinacją liniową specjalnych wielomianów bazowych określonych wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad \text{for } i = 1, 2 \ldots n + 1.$$

Metoda Lagrange’a jest stabilna i prosta w implementacji.

2. Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia:

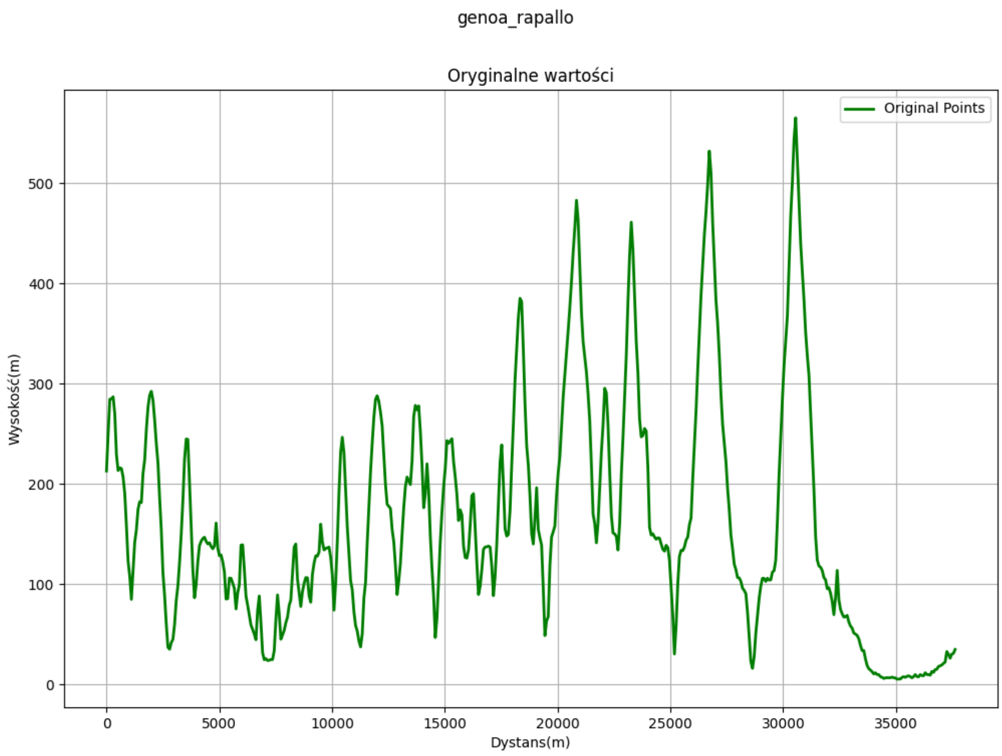
Interpolacja za pomocą funkcji sklejanych (spline) to metoda, która polega na przybliżaniu funkcji za pomocą kawałków wielomianów, które są gładko połączone na węzłach. Najczęściej używanym typem spline jest spline kubiczny, który jest funkcją kawałkowo-wielomianową stopnia trzeciego. Spline kubiczny jest definiowany tak, aby zapewnić ciągłość pierwszej i drugiej pochodnej na węzłach. Macierz, z której korzysta się przy obliczaniu interpolacji tworzy się na podstawie następujących zasad:

- $S_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, ..., n-1$
- $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, ..., n-1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j), \quad j = 1, ..., n-1$
- Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j), \quad j = 1, ..., n-1$
- Na krawędziach: $S''_0(x_0) = 0$ i $S''_{n-1}(x_n) = 0$

Jest to metoda interpolacji lokalnej, która zapobiega problemom, z którymi związana jest interpolacja globalna min. interpolacja Lagrange'a, czyli efektem Rungego lub dużą zależnością wynikowej funkcji od ilości użytych węzłów.

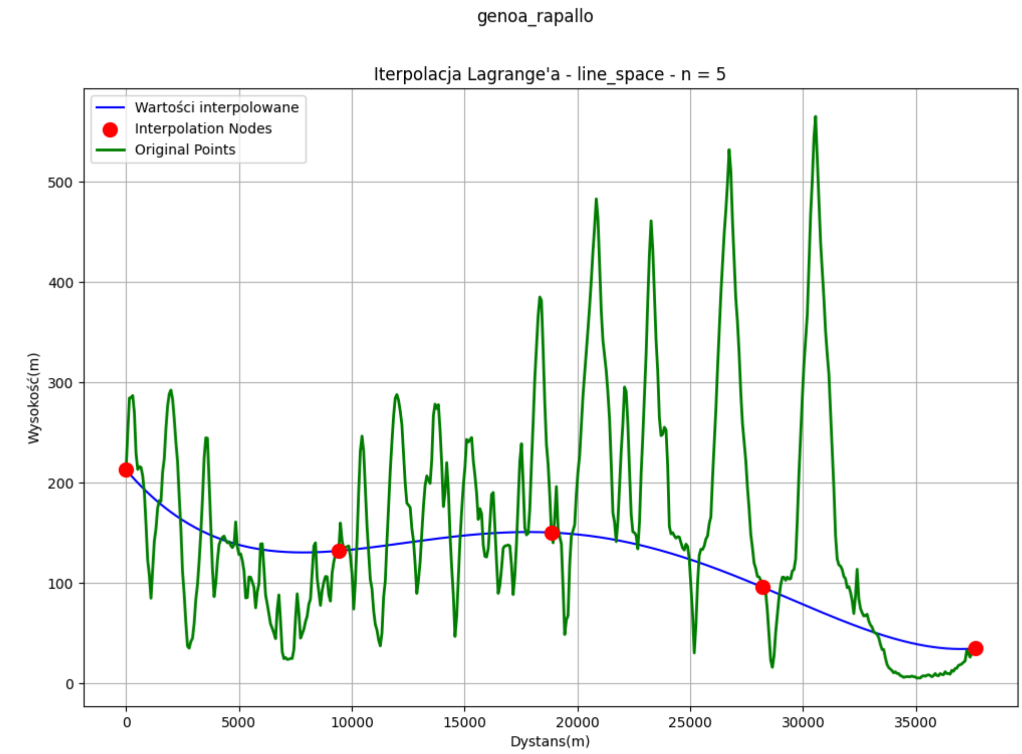
Analiza wykresów

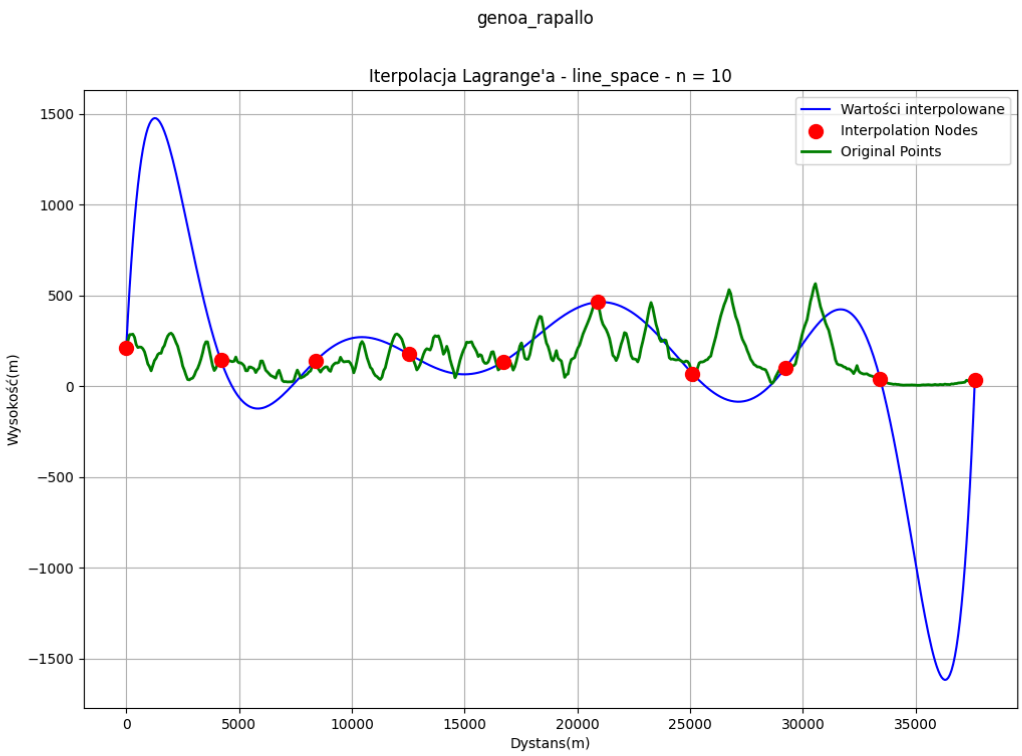
1.Trasa nr 1 -> Genoa Rapallo:



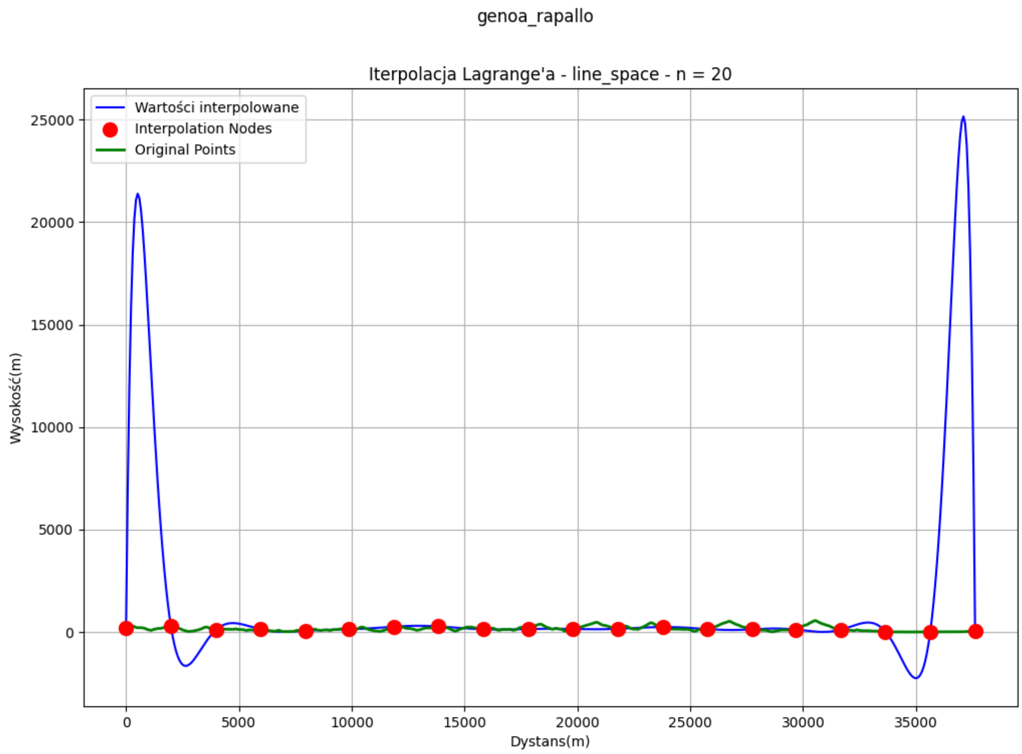
Pierwszą analizowana trasą będzie Genoa Rapallo, jak widać z wykresu jest to trasa o znacznych wahaniach wysokości co pomoże nam zobrazować wady obu metod interpolacji.

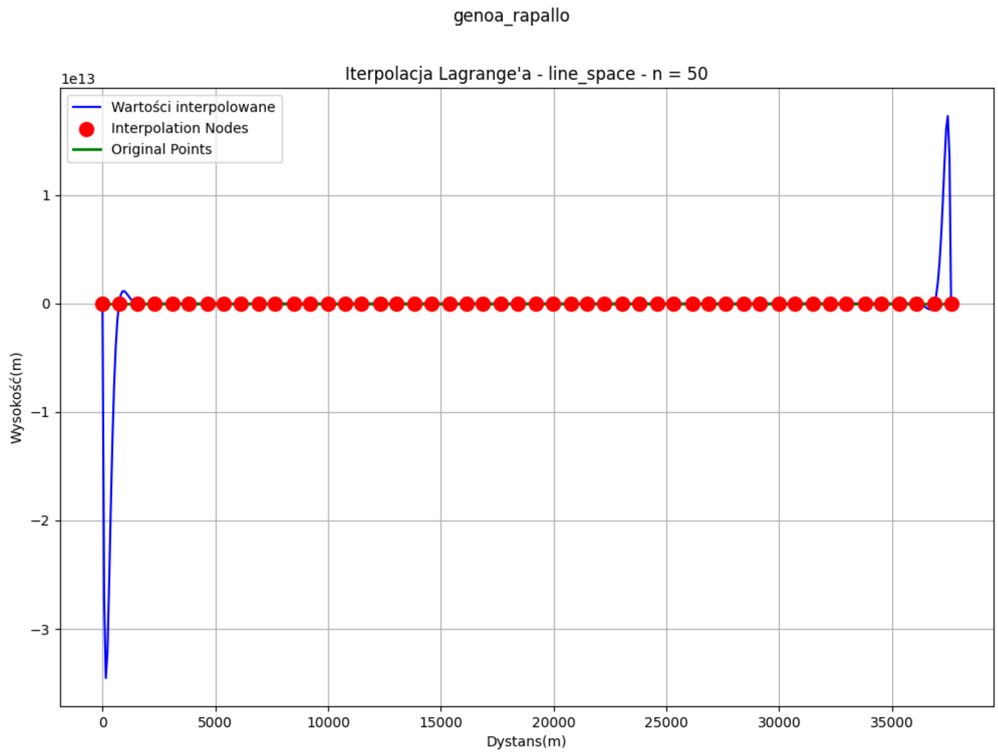
*Interpolacja Lagrange'a, węzły równoodległe:





Dystans(m)

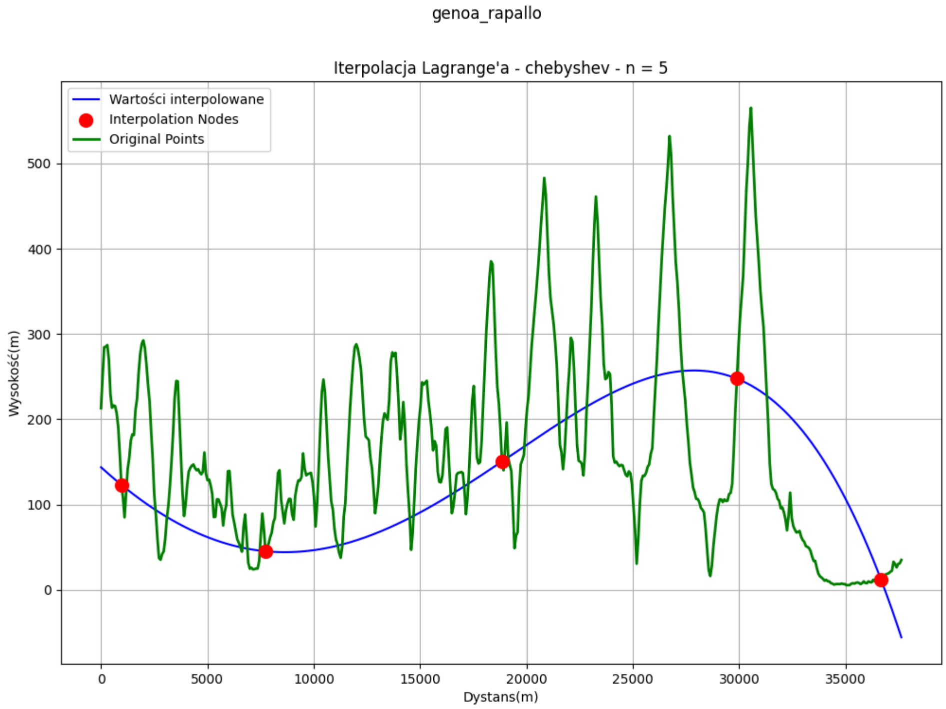

genoa_rapallo
Iterpolacja Lagrange'a - line_space - n = 20
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000

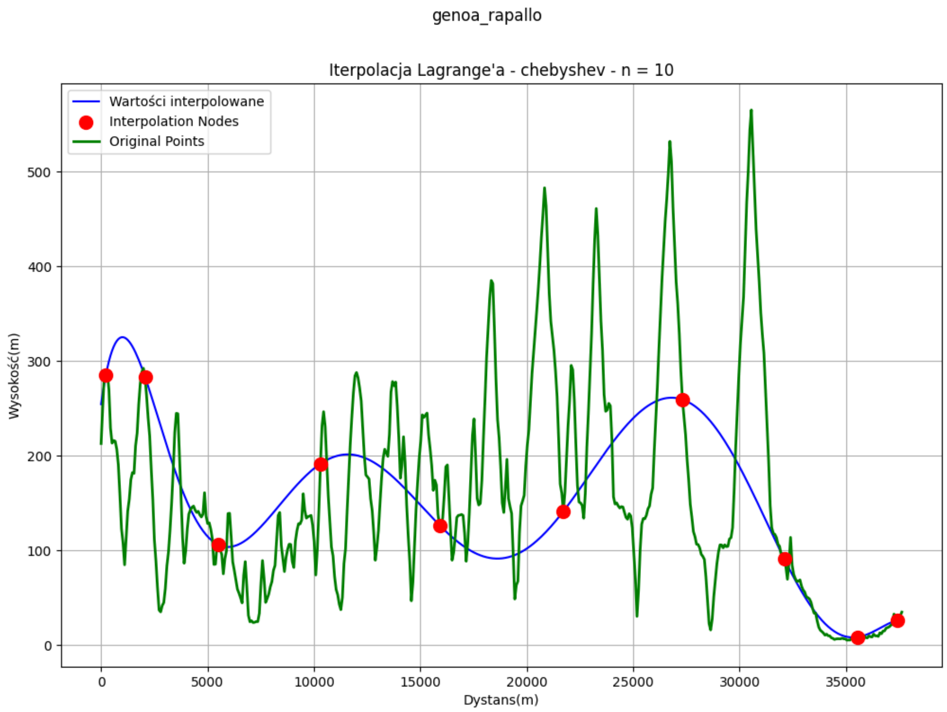

genoa_rapallo
Iterpolacja Lagrange'a - line_space - n = 50
1e13
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)
1
0
−1
−2
−3
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000

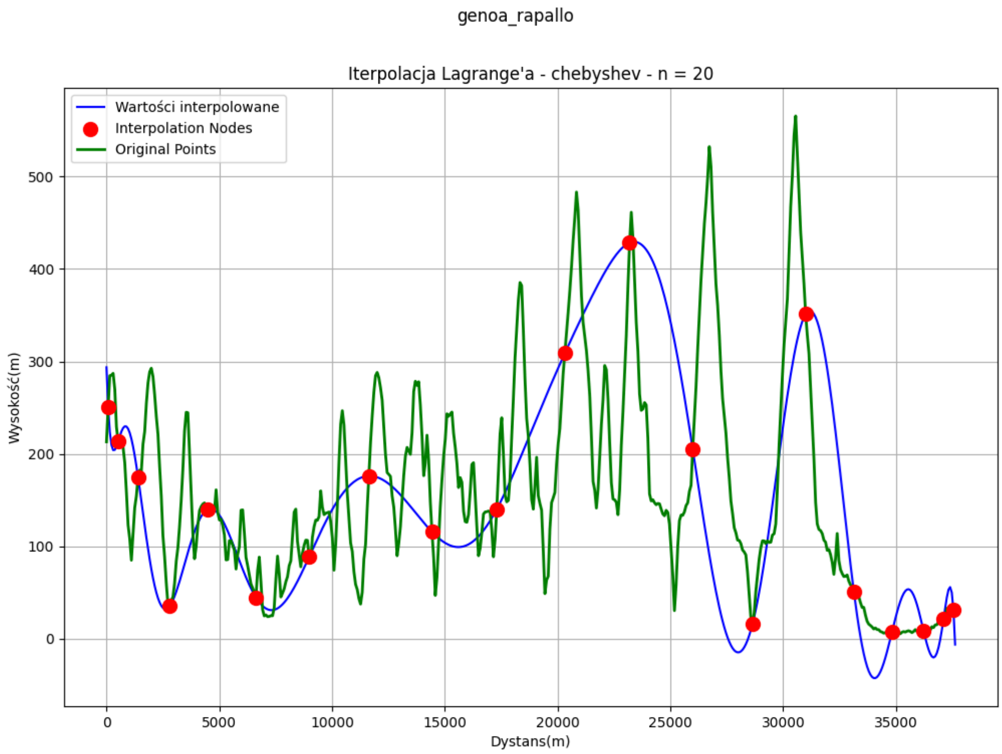
*Wnioski:

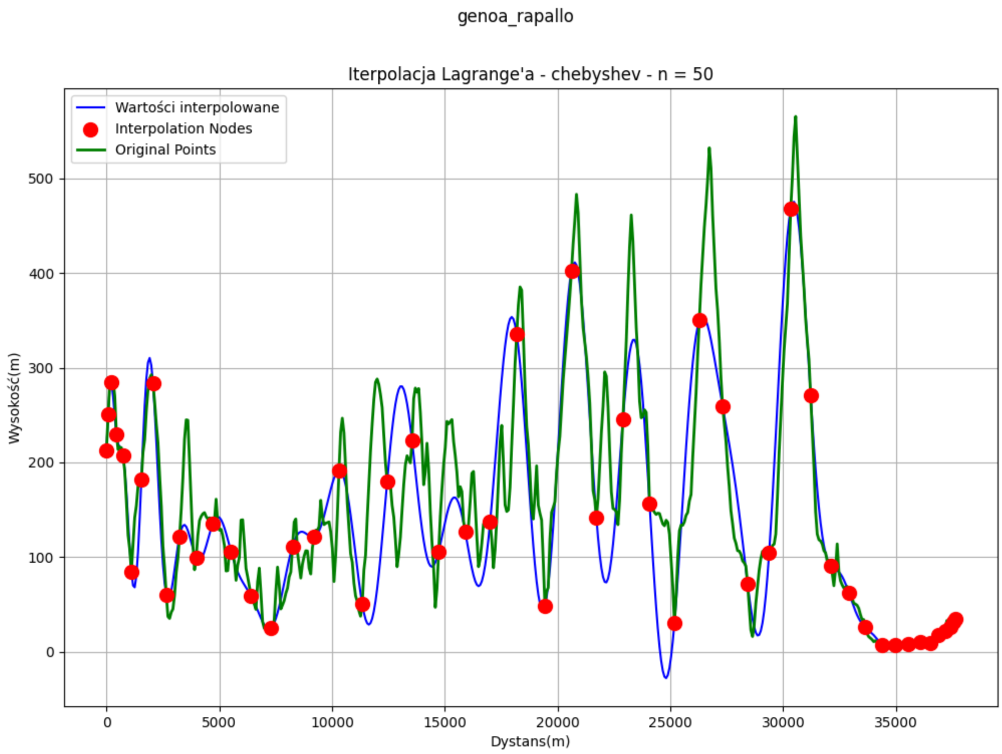
Można zauważyć, że w przypadku równoległego rozmieszczenia węzłów na wykresie o tak dużych wahaniach wartości interpolacja Lagrange'a nie spełnia swojej funkcji. W przypadku zbyt małej wartości węzłów przybliżenia są bardzo niedokładne, a już przy 20 węzłach występuje efekt Rungego.

*Interpolacja Lagrange'a, węzły Chebysheva:





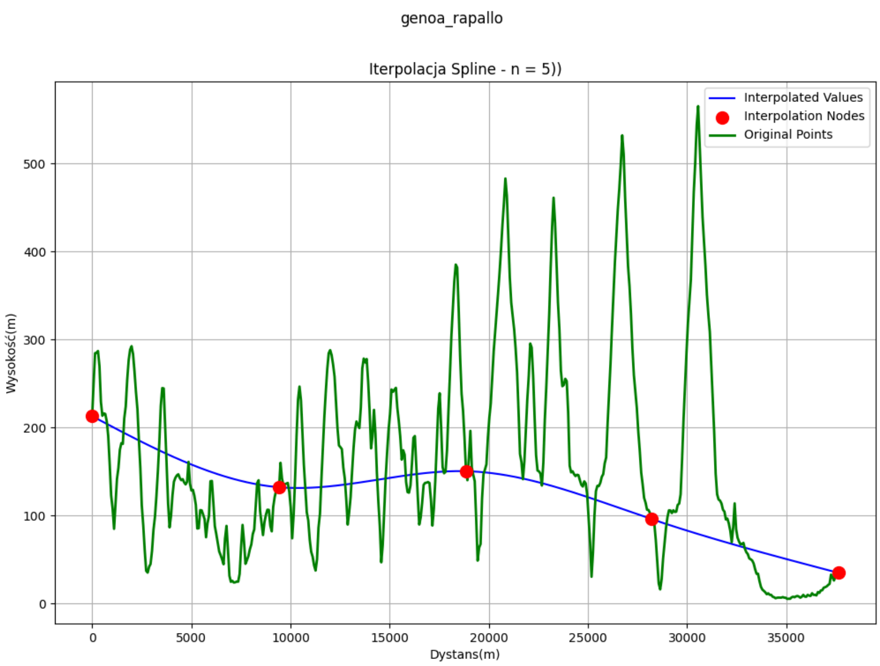

genoa_rapallo
Iterpolacja Lagrange'a - chebyshev - n = 20
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)
0
100
200
300
400
500
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000

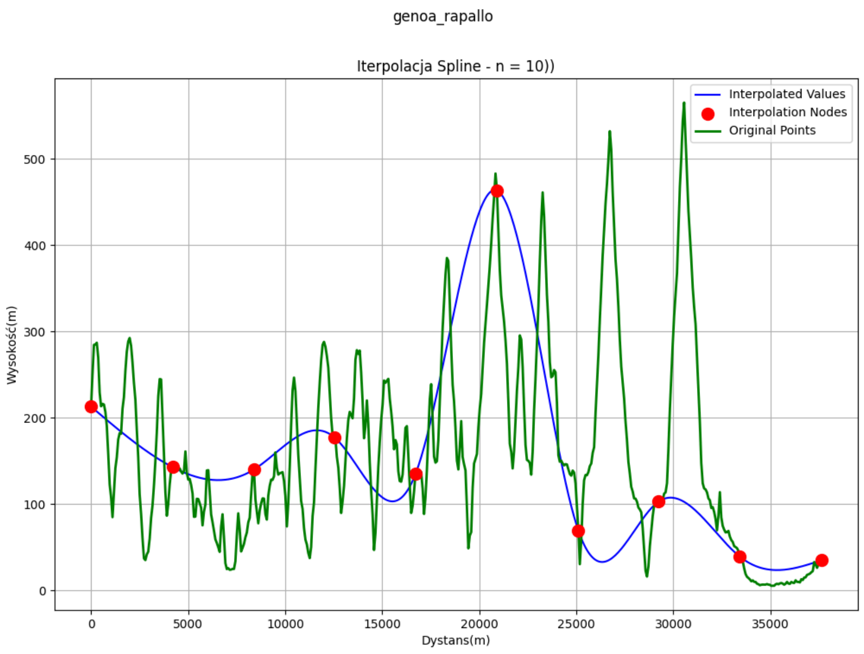

genoa_rapallo
Iterpolacja Lagrange'a - chebyshev - n = 50
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)
0
100
200
300
400
500
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000

*Wnioski:

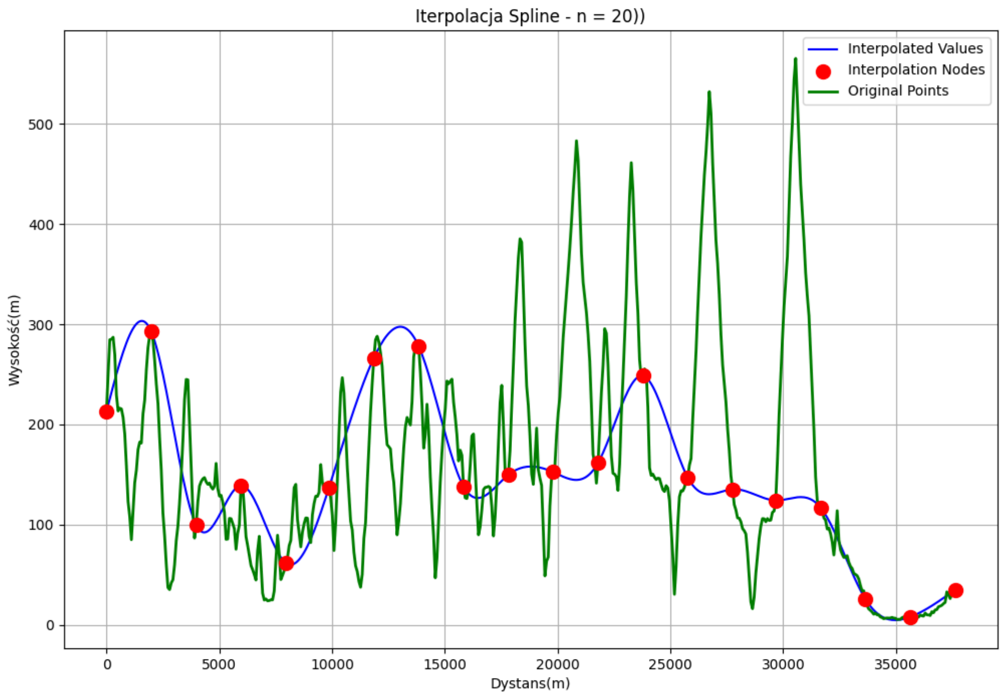
Można zauważyć, że w przypadku użycia węzłów Chebysheva wyeliminowaliśmy efekt Rungego a przybliżenie wartości wykresu przy zwiększaniu ilości węzłów jest coraz dokładniejsze, mimo że wciąż nie jest bliskie oryginalnym wartościom.

*Interpolacja z wykorzystaniem funkcji sklejanych 3 stopnia:

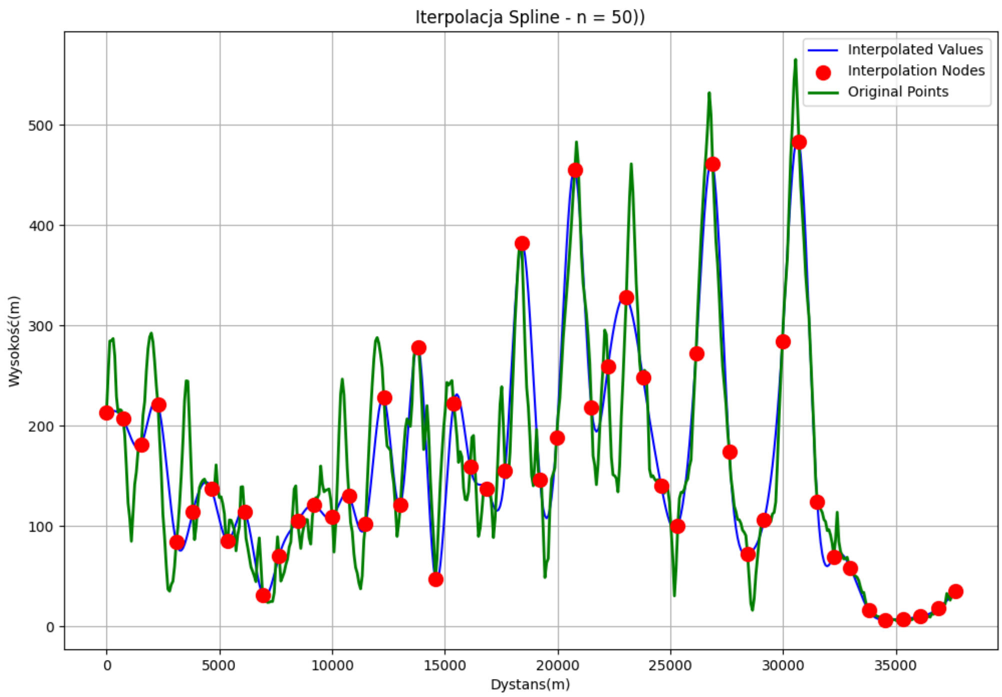




genoa_rapallo



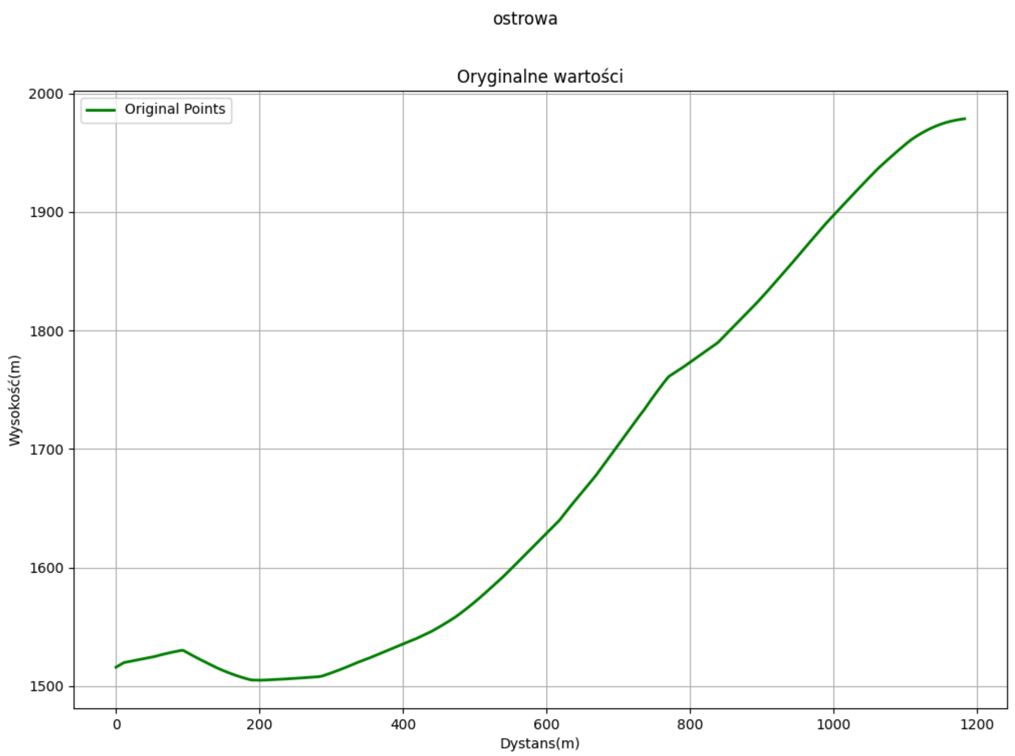
genoa_rapallo



*Wnioski:

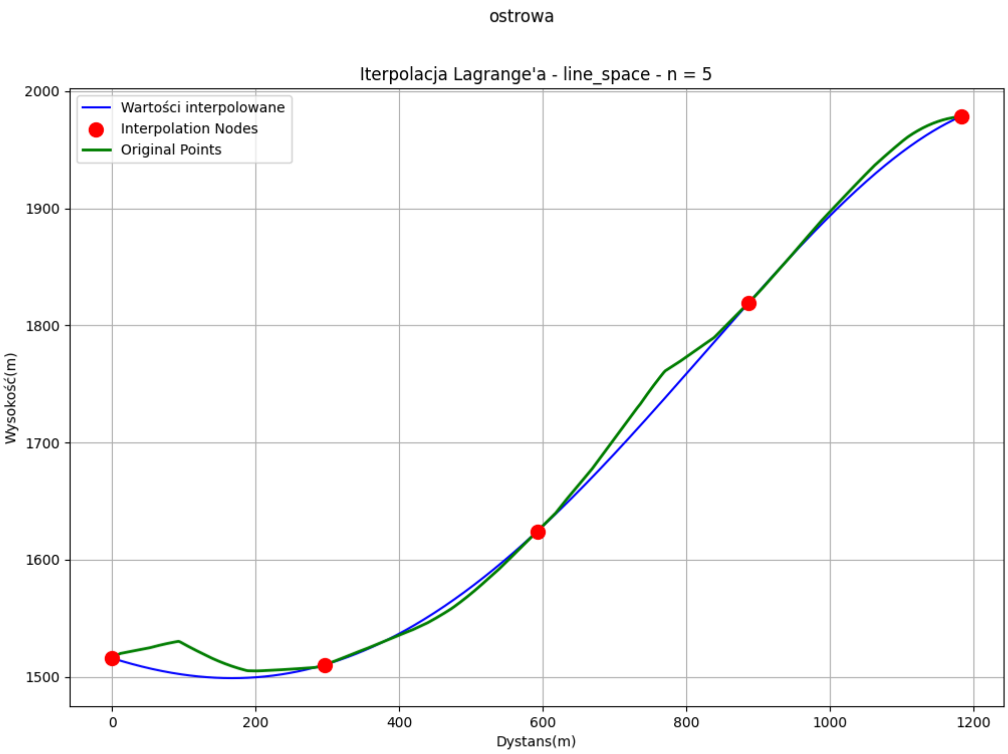
Można zauważyć, że interpolacji z zastosowaniem funkcji sklejanych 3 stopnia daje nam największe przybliżenie funkcji oryginalnej najlepiej reagując na nagłe wysokie zmiany wartości funkcji oryginalnej.

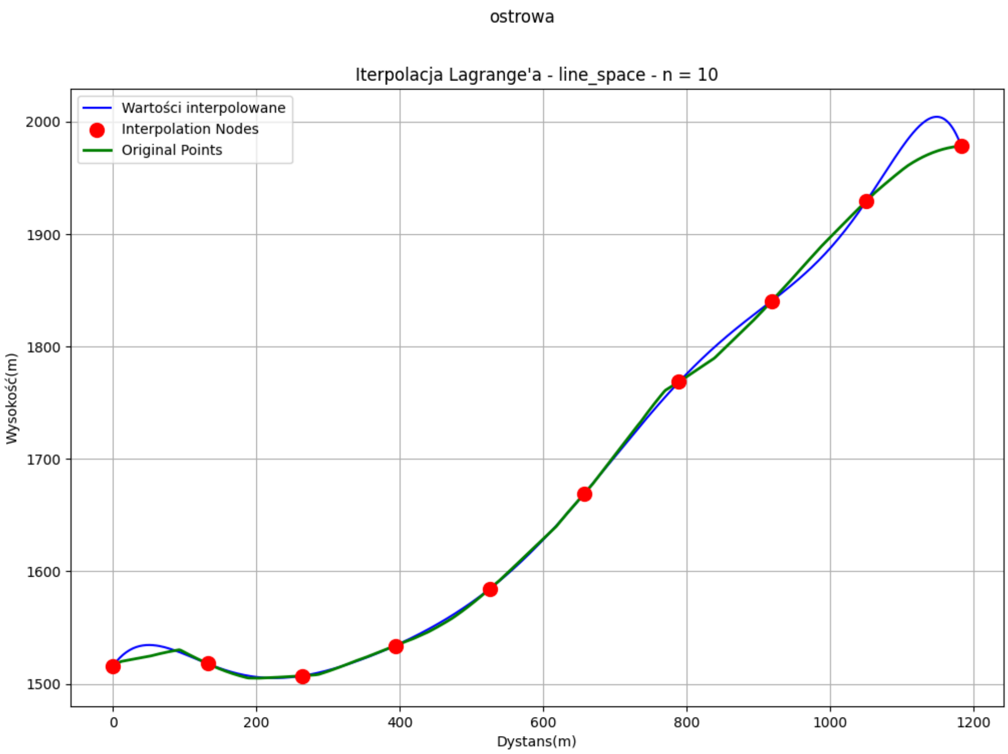
2.Trasa nr 2 -> Ostrowa:

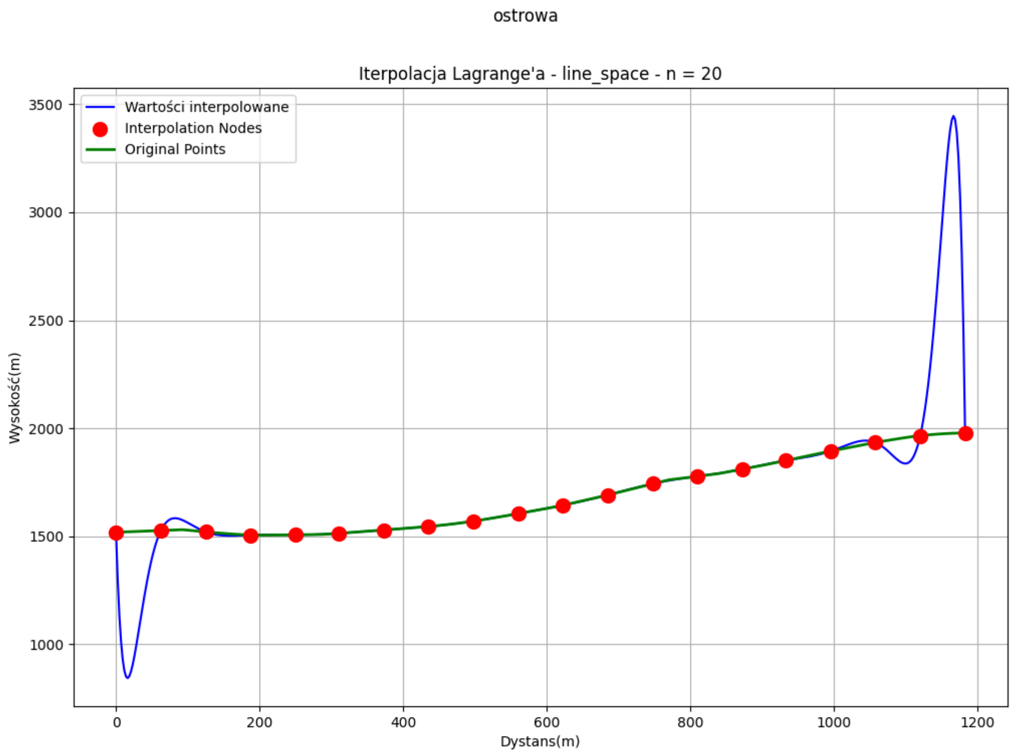


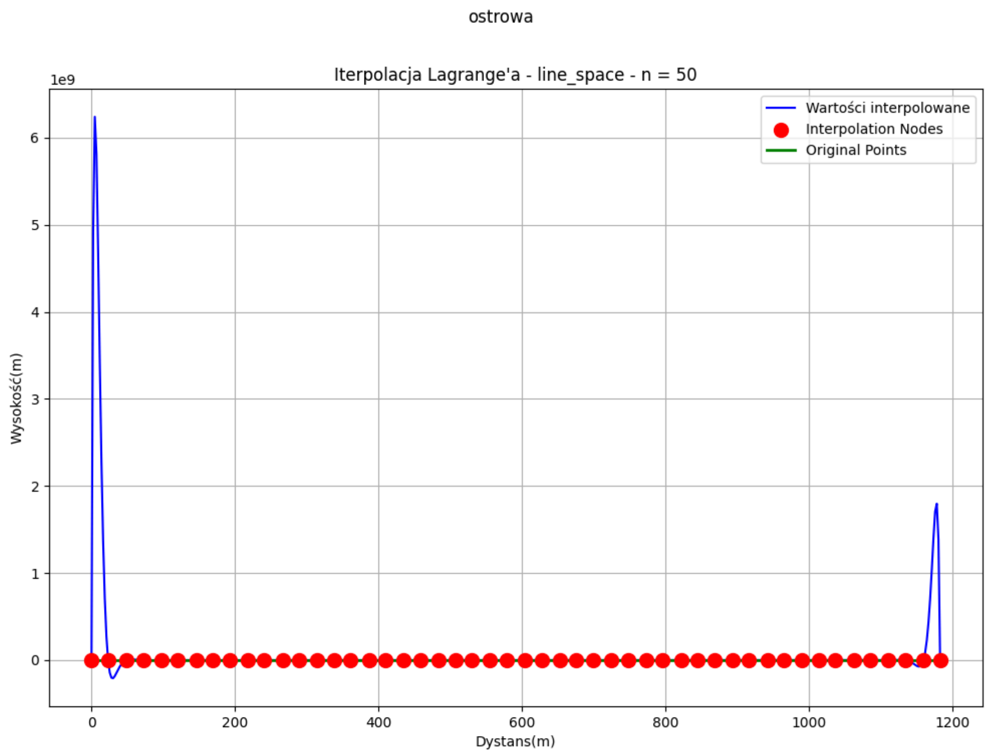
W przypadku drugiej analizowanej trasy wybrałem Ostrowę, gdyż funkcja ta nie ma żadnych zawahań, dzięki czemu będę mógł pokazać, że z interpolacją Lagrange'a z równoodległymi węzłami czasami też można otrzymać dokładne przybliżenie oryginalnych wartości funkcji interpolowanej.

*Interpolacja Lagrange'a, węzły równoodległe:


ostrowa
Iterpolacja Lagrange'a - line_space - n = 5
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)
2000
1900
1800
1700
1600
1500
0
200
400
600
800
1000
1200


ostrowa
Iterpolacja Lagrange'a - line_space - n = 10
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)
2000
1900
1800
1700
1600
1500
0
200
400
600
800
1000
1200

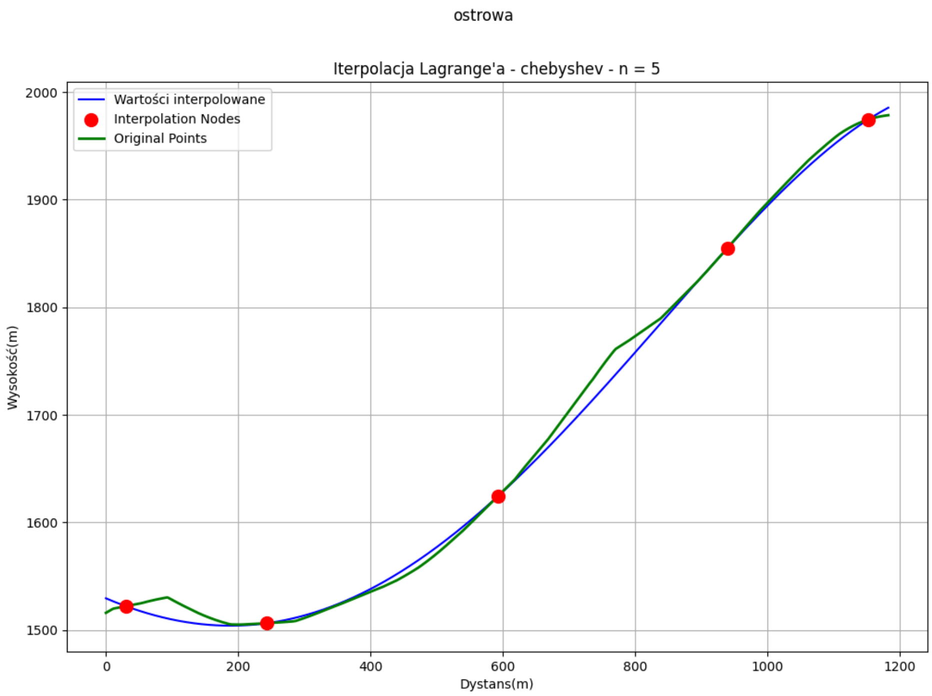

ostrowa
Iterpolacja Lagrange'a - line_space - n = 20
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)

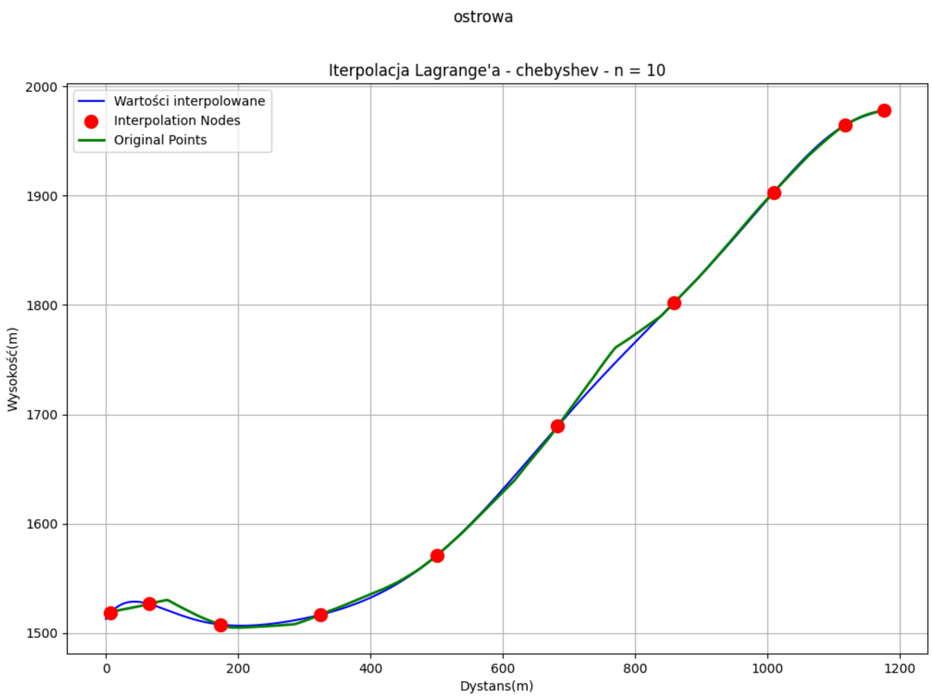

ostrowa
Iterpolacja Lagrange'a - line_space - n = 50
1e9
Wartości interpolowane
Interpolation Nodes
Original Points
Wysokość(m)
Dystans(m)

*Wnioski:

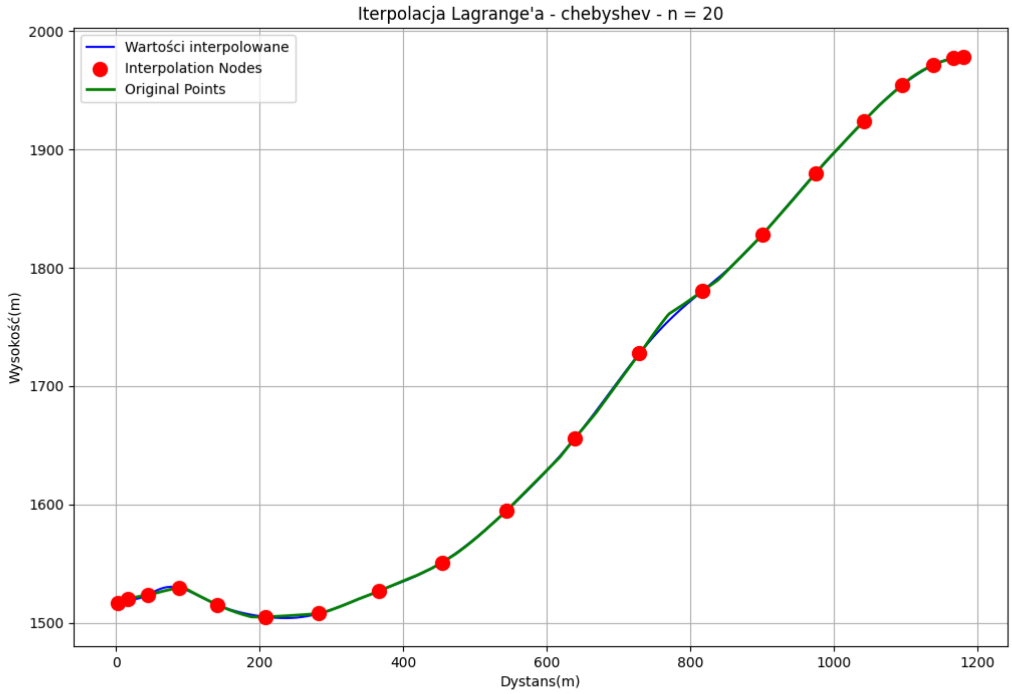
Można zauważyć, że w przypadku równoległego rozmieszczenia węzłów na wykresie o tak małych wahaniach interpolacja Lagrange'a w podstawowej wersji sprawdza się dobrze. Jednak niestety przy nieodpowiednim doborze ilości węzłów dalej występuje efekt Rungego.

*Interpolacja Lagrange'a, węzły Chebysheva:

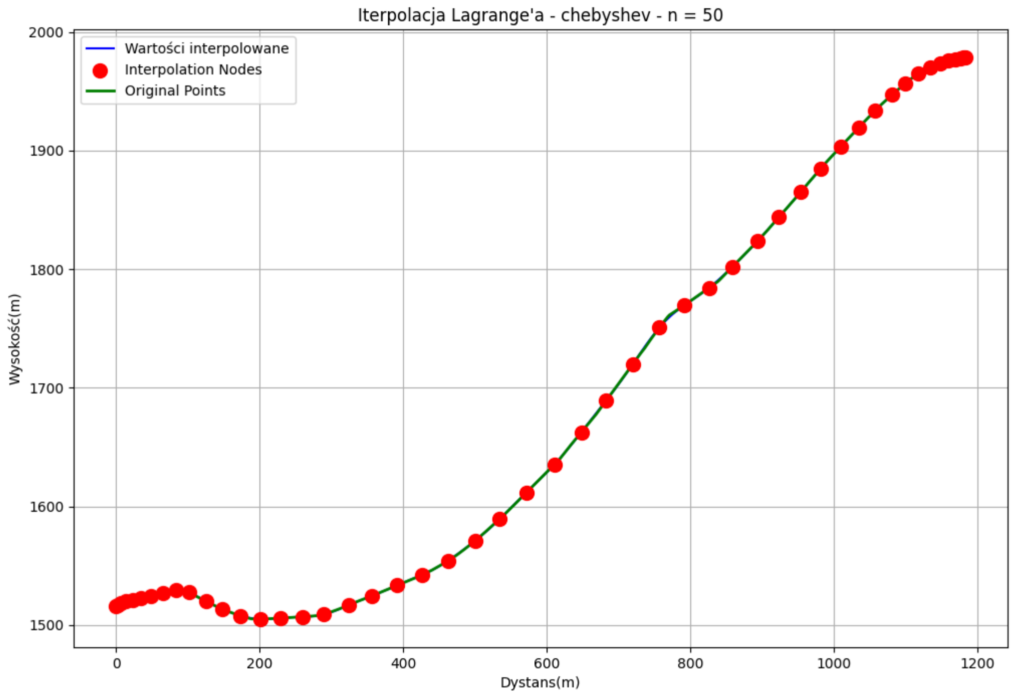




ostrowa



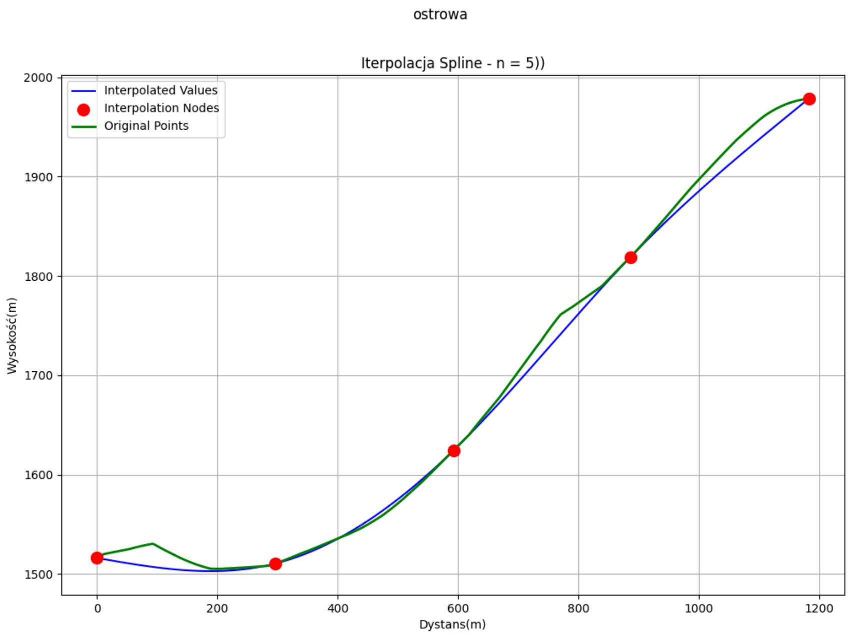
ostrowa

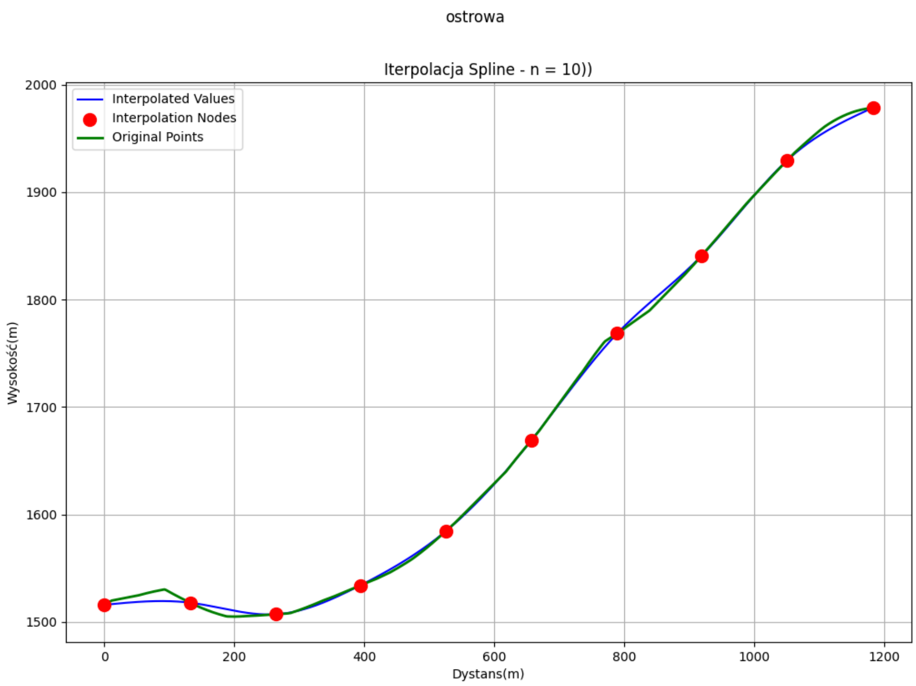


*Wnioski:

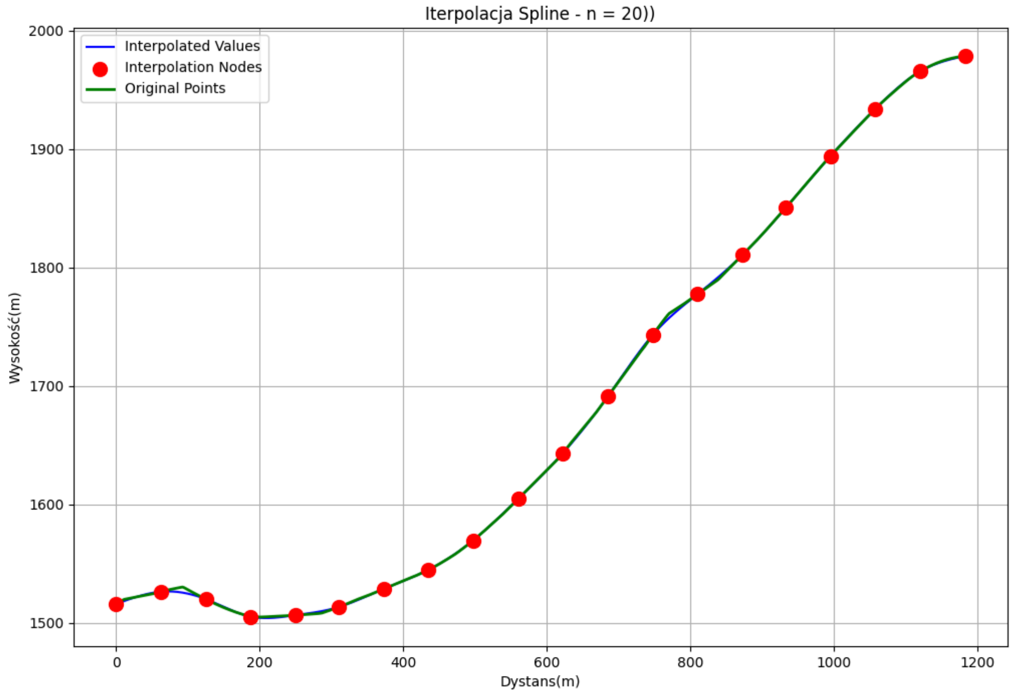
Można zauważyć, że ponownie w przypadku użycia węzłów Chebysheva wyeliminowaliśmy efekt Rungego a przybliżenie wartości wykresu jest niemal idealne nawet przy 5 węzłach, co jest doskonałym rezultatem w momencie w którym oryginalna funkcja miała sprecyzowane 512 punktów.

*Interpolacja z wykorzystaniem funkcji sklejanych 3 stopnia:

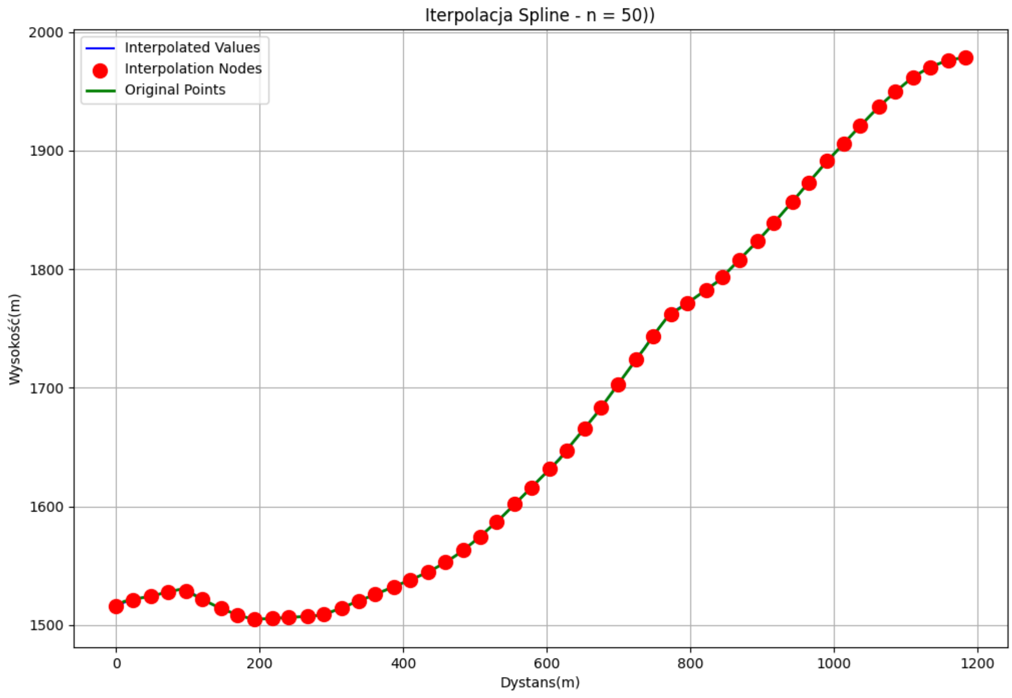




ostrowa



ostrowa



*Wnioski:**
W przypadku zastosowania funkcji sklejanych 3 stopnia również nie ma zaskoczeń, odzwierciedlenie wykresu jest niemal idealne nawet przy zastosowaniu 5 węzłów.

Wnioski końcowe

Interpolacja funkcjami sklejanymi 3 stopnia okazała się najskuteczniejszą metodą aproksymacji profilu wysokościowego, zapewniającą największą dokładność i stabilność wyników. Interpolacja Lagrange'a, choć prosta, wymaga odpowiedniego wyboru węzłów (najlepiej węzłów Czebyszewa), aby uniknąć efektu Rungego i uzyskać zadowalające przybliżenia.