КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, i – *мнимая единица*, $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, то есть $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y – *мнимой частью* числа z, обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2,\; y_1 = y_2$. В частности, комплексное число $z = x + iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x = y = 0$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа, отличающиеся только знаком мнимой части $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, называются *сопряжёнными.*

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x;\, y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот, каждую точку $M(x;\, y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$ (рис. 1). Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат действительные числа $z = x + 0i = x$. Ось ординат называется *мнимой осью*, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy = iy$.

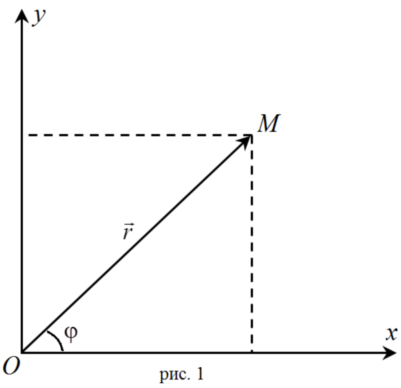


рис. 1

Комплексное число $z = x + iy$ можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x;\, y)$. Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа и обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определён.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где $\arg z$ – *главное значение аргумента*, заключённое в промежутке $(-\pi, \pi]$, то есть $-\pi < \arg z \le \pi$. Иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0, 2\pi)$.

Формы записи комплексных чисел

– *алгебраическая форма*

Это запись числа z в виде

$$z = x + iy.$$

– тригонометрическая форма

Модуль r и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, изображающего комплексное число z. Тогда получаем

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi .$$

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi ,$$

или

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Такая форма записи комплексного числа называется тригонометрической.

Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} .$$

Так как

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k ,$$

то

$$\cos\varphi = \cos\left(\arg z + 2\pi k\right) = \cos\left(\arg z\right), \quad \sin\varphi = \sin\left(\arg z\right).$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа z, то есть считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \le \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } z \in \text{I, IV четверти}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } z \in \text{II четверти}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } z \in \text{III четверти}. \end{cases}$$

Если точка z лежит на действительной или мнимой оси, то $\arg z$ можно найти непосредственно, а также из соотношений $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$.

– показательная (экспоненциальная) форма

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi ,$$

комплексное число $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ можно записать в показательной форме

$$z = re^{i\varphi} ,$$

где $r = |z|$ – модуль комплексного числа, $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

В силу формулы Эйлера, функция $re^{i\varphi}$ периодическая с основным периодом 2π. Для записи комплексного числа z в показательной (экспоненциальной) форме достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, то есть считать $\varphi = \arg z$.

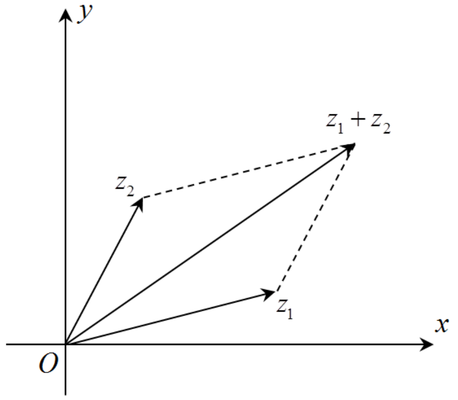
Действия над комплексными числами

1. Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Из определения следует, что геометрически комплексные числа складываются как векторы (рис. 2а).



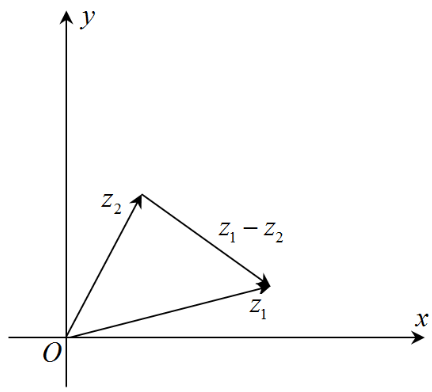


Рис. 2

Из рисунка 2а видно, что $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (неравенство треугольника).

<u>Свойства сложения комплексных чисел</u>

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (коммутативное свойство);
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ассоциативное свойство).

Пример. Сложить комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 4 - 5i$.
Решение. По определению получаем $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 5i) = (2 + 4) + i(3 - 5) = 6 - 2i$.

2. Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению. *Разностью* двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое в сумме с z_2 даёт число z_1, то есть $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Из определения следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы (рис. 2б). Из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$.

Отметим, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d,$$

то есть модуль разности двух комплексных чисел d равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Например, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, то есть окружность с центром $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

Пример. Найти разность комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 4 - 5i$.

Решение. По определению получаем $z_1 - z_2 = (2+3i) - (4-5i) = (2-4) + i(3+5) = -2 + 8i$.

3. Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \qquad (*)$$

Отсюда, в частности, следует $i^2 = -1$. Действительно,

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1.$$

Благодаря соотношению $i^2 = -1$ формула (*) получается формально путём перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

<u>Свойства умножения комплексных чисел</u>

1) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (коммутативность);

2) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (ассоциативность);

3) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (дистрибутивность).

Пример. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 4 - 5i$.

Решение. Получаем

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)(4-5i) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5i + 4 \cdot 3i - 3 \cdot 5i^2 = (8 + 15) + i(-10 + 12) = 23 + 2i.$$

Найдём произведение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 -$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

То есть при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

В частности, если есть n множителей и все они одинаковые, то получаем *формулу Муавра:*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Пример. Найти произведение комплексных чисел

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \text{ и } z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Используя полученную выше формулу умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, находим:

$$z_1 \cdot z_2 = 4\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

4. Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению. *Частным двух комплексных чисел* z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое при умножении на z_2 даёт z_1, то есть

$$\frac{z_1}{z_2} = z, \text{ если } z_2 z = z_1.$$

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z = x + iy$, то из равенства

$$(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$$

следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_1 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Заметим, что $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ – действительное число. Поэтому на практике частное двух чисел находят путём умножения числителя и знаменателя на число, сопряжённое знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»):

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+iy_1x_2-i^2y_1y_2}{x_2^2-i^2y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Пример. Найти частное комплексных чисел $z_1=2+3i$ и $z_2=4-5i$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряжённое знаменателю. Получаем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{8+10i+12i+15i^2}{16-25i^2}=\frac{(8-15)+(10+12)i}{16+25}=\frac{-7+24i}{41}=-\frac{7}{41}+i\frac{24}{41}.$$

Для комплексных чисел, $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме, формула деления имеет вид:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Пример. Найти частное комплексных чисел

$$z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \text{ и } z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Используя полученную выше формулу, находим:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

5. Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n-ной степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-ной степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству $w^n=z$, то есть

$$\sqrt[n]{z}=w, \text{ если } w^n=z.$$

Если положить $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, а $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, то по определению корня, и используя формулу Муавра, получим

$$z=w^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем

$$\rho^n=r,\quad n\theta=\varphi+2\pi k,\ k=0,\pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

То есть

$$\theta=\frac{\varphi+2\pi k}{n} \text{ и } \rho=\sqrt[n]{r} \text{ (арифметический корень).}$$

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z}=w$ принимает вид

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Находим n различных значений корня. При других значениях k, в силу периодичности синуса и косинуса, получаются значения корня, совпадающие с уже найденными.

Так, например, при $k=0$, имеем

$$w_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi\cdot 0}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi\cdot 0}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

а при $k=n$ находим

$$w_n=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi n}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi n}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

То есть $w_n\equiv w_0$.

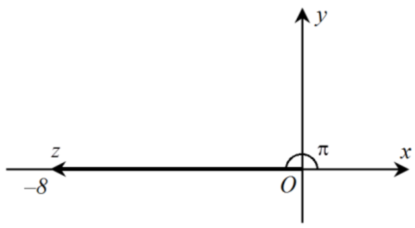
Итак, для любого $z\neq 0$ корень n-ной степени из комплексного числа z имеет ровно n различных значений, каждое из которых можно найти по формуле:

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,n-1. \qquad (**)$$

Пример. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. В данном случае $z=-8$. Для начала представим это число в тригонометрической форме:

$$-8=8(\cos\pi+i\sin\pi).$$



В данном случае имеем:

$$\varphi=\pi,\ r=8,\ n=3,\ \sqrt[n]{r}=\sqrt[3]{8}=2 \text{ и } k=0,1,2.$$

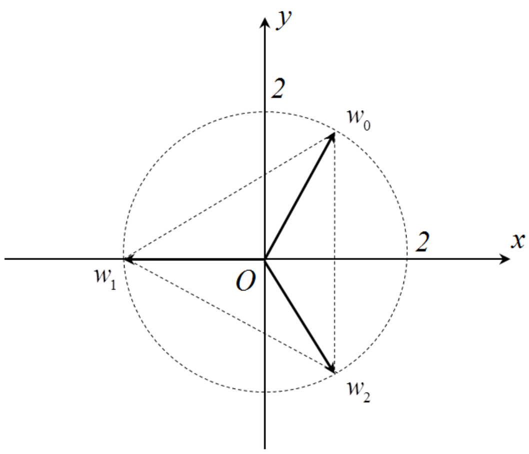
Используя формулу (**), получаем три различных значения корня:

$$k=0:\quad w_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}i;$$

$$k=1:\quad w_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}\right)=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2(-1+i\cdot 0)=-2;$$

$$k=2:\quad w_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\sqrt{3}i.$$

Изобразим эти корни:



Как видно из рисунка, полученные корни являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}=\sqrt[3]{8}=2$.