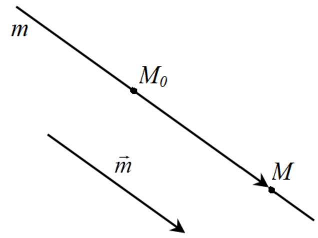
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим основные уравнения, которыми можно задать в декартовой прямоугольной системе координат простейшую из линий на плоскости – прямую.

1. Параметрические уравнения прямой

Пусть на плоскости заданы фиксированная точка $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевой вектор $\vec{m}(m_1, m_2)$. Тогда будет существовать единственная прямая m, проходящая через точку M_0 параллельно вектору $\vec{m}$: $\exists!\, m \,|\, M_0 \in m,\ \vec{m} \parallel m$. Получим параметрические уравнения этой прямой.



Выберем на прямой m текущую точку $M(x, y)$. Тогда $M(x, y) \in m \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\vec{m}$ (здесь t – произвольный параметр, $-\infty < t < \infty$). Перейдём в последнем равенстве к координатам:

$$x - x_0 = tm_1,$$
$$y - y_0 = tm_2$$

и получим параметрические уравнения прямой m:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tm_1, \\ y &= y_0 + tm_2. \end{aligned} \qquad (1)$$

Вектор $\vec{m}(m_1, m_2)$, параллельный прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

2. Каноническое уравнение прямой

Пусть $\vec{m}(m_1, m_2)$ – направляющий вектор прямой m и $m_1 \neq 0,\ m_2 \neq 0$. Тогда из уравнений (1) следует:

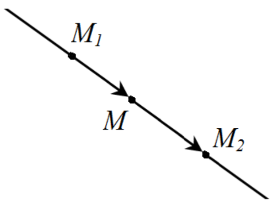
$$t = \frac{x - x_0}{m_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{m_2}.$$

Приравняв правые части равенств, получаем каноническое уравнение прямой на плоскости:

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{m_2}. \qquad (2)$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Как известно, через две точки можно провести прямую, и только одну. Пусть на плоскости заданы две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найдём уравнение прямой M_1M_2. Для этого выберем на этой прямой текущую точку $M(x, y)$.



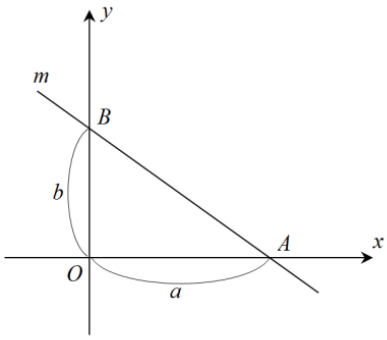
Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ и $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1)$. Очевидно, что $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, и координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3)$$

Таким образом, мы получили уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2.

4. Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая *m* пересекает оси координат и отсекает на оси *Ox* отрезок длины *a*, на оси *Oy* отрезок длины *b*.



Можем определить без труда координаты точек пересечения прямой с осями координат: $A(a,\,0)$, $B(0,\,b)$. Зная координаты двух точек, воспользуемся уравнением (3):

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}\text{, то есть }\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}\text{ и }-\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}.$$

Откуда и получаем уравнение прямой в отрезках:

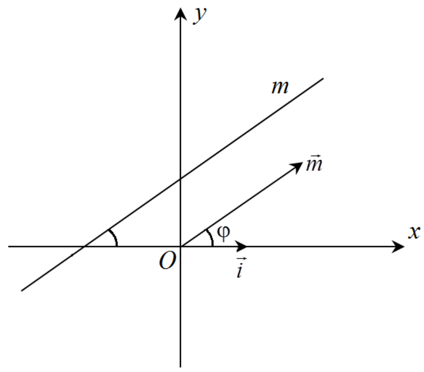
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (4)$$

5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим прямую m с направляющим вектором $\vec{m}(m_1,\,m_2)$. Пусть $m \not\parallel Oy$, тогда $m_1 \neq 0$. Величина $k=\dfrac{m_2}{m_1}$ называется *угловым коэффициентом* прямой *m*.

<u>Свойства углового коэффициента *k*:</u>

1. Значение коэффициента *k* не зависит от выбора направляющего вектора прямой *m*.
2. Если $m \parallel Ox$, то $k = 0$.
3. Если $\varphi=\angle(\vec{i},\,\vec{m})$, то $k=\dfrac{m_2}{m_1}=\operatorname{tg}\varphi$ (геометрический смысл углового коэффициента):



Получим уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть $M_0(x_0,\,y_0)\in m$. Тогда, зная координаты направляющего вектора $\vec{m}$, можем выписать каноническое уравнение прямой *m*:

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{m_2}.$$

Откуда

$$\frac{m_2}{m_1}(x-x_0)=y-y_0,$$

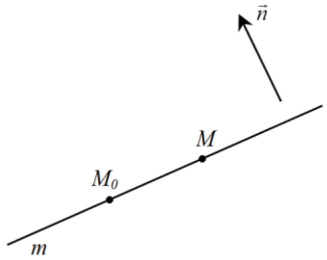
$$y-y_0=k(x-x_0)\text{ и }y=kx+(y_0-kx_0).$$

Обозначив константу $y_0 - kx_0 = b$, получим известное уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b. \qquad (5)$$

6. Уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором

Зададим на плоскости точку $M_0(x_0,\ y_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n}(n_1,\ n_2)$. Тогда, как известно, на плоскости существует единственная прямая *m*, проходящая через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$: $\exists!\ m|\ M_0 \in m,\ \vec{n} \perp m$.



Найдём уравнение прямой *m*. Выберем текущую точку $M(x,\ y) \in m$ и рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\ y - y_0)$ и $\vec{n}(n_1,\ n_2)$. Очевидно, что $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Записывая последнее равенство в координатах, получим уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0. \qquad (6)$$

Вектор $\vec{n}(n_1,\ n_2)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором* этой прямой.

7. Общее уравнение прямой

Получим общее уравнение прямой, зная точку на ней и координаты направляющего и нормального векторов.

а) $M_0(x_0,\ y_0) \in m,\ \vec{m}(m_1,\ m_2) \parallel m$

Запишем каноническое уравнение прямой *m*:

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{m_2}.$$

Отсюда получаем $m_2(x - x_0) - m_1(y - y_0) = 0$ и $m_2x + (-m_1)y + (m_1y_0 - m_2x_0) = 0$. Введём обозначения $m_1y_0 - m_2x_0 = c,\ \ m_2 = b,\ -m_1 = a$ и получим уравнение прямой *m* в виде:

$$ax + by + c = 0.$$

Это уравнение называется общим уравнением прямой, и вектор $\vec{m}(-b,\ a)$ будет являться направляющим для этой прямой.

б) $M_0(x_0,\ y_0) \in m,\ \vec{n}(n_1,\ n_2) \perp m$

Запишем уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0.$$

После несложных преобразований имеем

$$n_1x + n_2y + (-n_1x_0 - n_2y_0) = 0.$$

Вводя обозначения $-n_1x_0 - n_2y_0 = c,\ \ n_2 = b,\ \ n_1 = a$, получаем

$$ax + by + c = 0,$$

где вектор $\vec{n}(a,\ b)$ является нормальным вектором прямой.

Таким образом, общее уравнение прямой *m* имеет вид

$$m:\ ax + by + c = 0 \qquad (7)$$

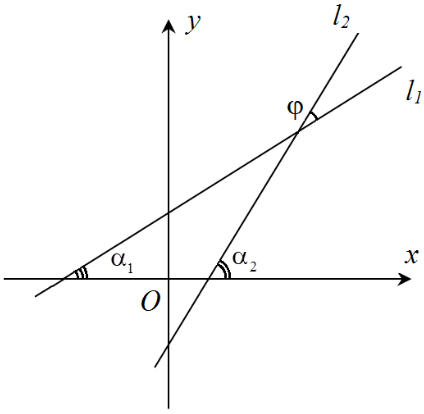
$$\text{и } \vec{n}(a,\ b) \perp m,\ \vec{m}(-b,\ a) \parallel m.$$

Угол между прямыми

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1:\ y = k_1x + b_1,\ \ l_2:\ y = k_2x + b_2.$$

Найдём угол φ между прямыми l_1 и l_2.



Пусть $\alpha_1 = \angle(l_1, Ox)$, $\alpha_2 = \angle(l_2, Ox)$. Тогда $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (по теореме о внешнем угле треугольн), и $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$.

Но по свойству углового коэффициента прямой $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

откуда можно найти величину угла φ между заданными прямыми.

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая из прямых является первой, какая – второй, то

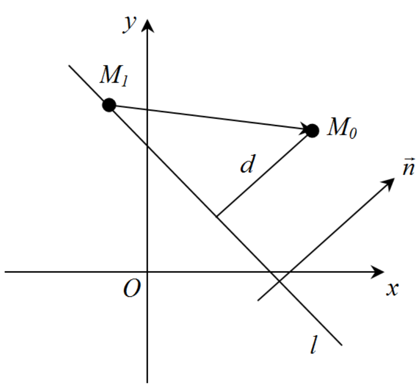
$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|. \qquad (*)$$

Если $l_1 \parallel l_2$, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Тогда из формулы (*) следует, что $k_2 - k_1 = 0$ и $k_2 = k_1$. Таким образом, получаем *условие параллельности прямых*: равенство их угловых коэффициентов.

Если $l_1 \perp l_2$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\varphi = 0$. Тогда из формулы (*) следует, что $\frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1} = 0$ и $1 + k_1k_2 = 0$. И получаем, таким образом, *условие перпендикулярности прямых*: $k_1k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0, y_0)$ и прямая $l:\ ax + by + c = 0$. Найдём расстояние от точки M_0 до прямой l: $\rho(M_0, l)$. Пусть $\rho(M_0, l) = d$.



Выберем на прямой l точку $M_1(x_1, y_1)$ и проведём нормальный вектор $\vec{n}(a, b)$ к прямой l. Как видно по рисунку, длина отрезка d равна модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1)$ на вектор $\vec{n}$. Таким образом:

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\left|\overrightarrow{M_1M}\right|\cos\left(\overrightarrow{M_1M_0}\quad \vec{n}\right)\right| =$$

$$= \left|\left|\overrightarrow{M_1M}\right|\frac{\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|\left|\vec{n}\right|}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} =$$

$$=\frac{\left|a\left(x_0-x_1\right)+b\left(y_0-y_1\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|ax_0+by_0+\left(-ax_1-by_1\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как точка $M_1\left(x_1,\ y_1\right)\in l$, то $ax_1+by_1+c=0$ – верное равенство и $c=-ax_1-by_1$ – также верное равенство. Поэтому $d=\frac{\left|ax_0+by_0+\overbrace{\left(-ax_1-by_1\right)}^{c}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и

$$\rho\left(M_0,\ l\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$