Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия для студентов бакалавриата по техническим направлениям подготовки очной формы обучения

Красноярск 2016

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.15я73
В55

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент А. Ш. Любанова
(Сибирский федеральный университет);
кандидат технических наук, доцент С. В. Бураков
(Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева)

Авторы:
С. Р. Вишневская, Л. А. Мартынова,
Е. П. Погодина, А. М. Попов

В55 **Векторная алгебра и аналитическая геометрия** : учеб. пособие / С. Р. Вишневская, Л. А. Мартынова, Е. П. Погодина, А. М. Попов ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2016. – 204 с.

Рассматриваются теории векторной алгебры и разделов аналитической геометрии: прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве, кривые и поверхности второго порядка. Теоретические сведения сопровождаются практическим материалом: приведены типовые задачи с образцами решения, вопросы для самопроверки, задания для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по техническим направлениям подготовки, и лиц, самостоятельно изучающих аналитическую геометрию.

УДК 514.12(075.8)
ББК 22.15я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представленный в данном учебном пособии материал охватывает все основные разделы аналитической геометрии и векторной алгебры, изучаемые студентами первого курса бакалавриата по техническим направлениям подготовки и служит дополнением к книге «Линейная алгебра» (см.: Линейная алгебра : учеб. пособие / Л. А. Мартынова, С. Р. Вишневская, А. М. Попов, С. В. Бураков ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2015. – 216 с.).

Учебное пособие состоит из трех глав. Первая глава охватывает элементы векторной алгебры. В отличие от абстрактных векторных пространств, описанных в «Линейной алгебре», здесь рассматриваются векторы на прямой, на плоскости и в трехмерном пространстве.

Во второй главе рассмотрены линии и поверхности первого порядка. Даны все основные виды уравнений прямых как на плоскости, так и в пространстве, и все способы задания плоскостей. Установлены связи между уравнениями.

В третьей главе рассмотрены кривые и поверхности второго порядка. За рамками этой главы остались вопросы общей теории кривых и поверхностей второго порядка, исторические справки и физические свойства; теорема о классификации кривых второго порядка дается без доказательства. Изложение сопровождается большим числом рисунков и графиков.

Для изучения изложенного материала не требуется знаний свыше курса средней школы и таких разделов алгебры, как матрицы, определители и системы линейных уравнений.

Учебное пособие может быть использовано студентами для самостоятельного изучения соответствующего материала. Объем пособия позволяет использовать его как полноценную базу при подготовке к сдаче зачетов и экзаменов по векторной алгебре и аналитической геометрии.

Изложение материала приближено к устному изложению курса лекций. Связь глав в пособии последовательная, нумерация формул принята внутри каждой главы.

Пособие предназначено в первую очередь студентам бакалавриата по направлениям подготовки 01.03.04 «Прикладная математика», 09.03.04 «Программная инженерия», 11.03.01 «Радиотехника», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 16.03.03 «Холодильная, криогенная техника и системы жизнеобеспечения», 27.03.03 «Системный анализ и управление». Авторы надеются, что данное пособие будет полезно и преподавателям при подготовке к лекциям и практическим занятиям.

Глава 1
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Первый параграф данной главы можно рассматривать как продолжение школьного курса геометрии. Напомним основные определения, связанные с понятием вектора.

Пара точек называется *упорядоченной*, если про них можно сказать, какая из них первая, какая вторая. Упорядоченная пара точек задает *направленный отрезок*.

Определение 1. Направленный отрезок будем называть *вектором*. Первая точка в упорядоченной паре называется *началом* вектора, а вторая – его *концом*.

Для обозначения вектора используют символы: $\overrightarrow{AB}$, где A – точка приложения вектора (начало вектора), точка B – конец вектора; или $\vec{a}$; или полужирным шрифтом $\boldsymbol{a}$.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* вектором и обозначается $\mathbf{0}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* (а также *модулем* или *абсолютной величиной*). Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$, или $|\boldsymbol{a}|$, или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 2. Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых, т. е. существует прямая, которой они параллельны. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение 3. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Векторы, для которых нарушается одно из условий равенства, показаны на рис. 1: векторы неколлинеарны (рис. 1, *а*), векторы направлены в разные стороны (рис. 1, *б*), векторы имеют разные длины (рис. 1, *в*).

Отметим следующие свойства отношения равенства между векторами:

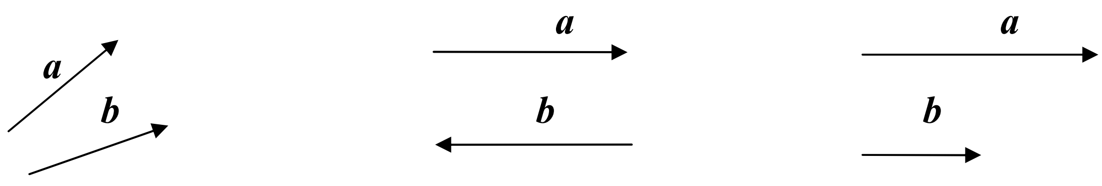
1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (рефлексивность).
2. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (симметричность).

3. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ (транзитивность).

4. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

5. Для любых точек A, B, C существует единственная точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Первые три свойства можно заменить следующей формулировкой: отношение равенства является отношением эквивалентности.



а *б* *в*

Рис. 1

Заметим, что понятие равенства векторов существенно отличается от понятия равенства, например, чисел. Каждое число равно только самому себе, иначе говоря, два равных числа при всех обстоятельствах могут рассматриваться как одно и то же число. С векторами дело обстоит иначе: в силу определения существуют различные, но равные между собой векторы. Мы можем от любой точки отложить вектор, равный данному.

Возьмем некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$ и рассмотрим множество всех векторов, равных вектору $\overrightarrow{AB}$. Это множество называется *классом эквивалентности*, порожденным вектором $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ является представителем класса эквивалентности.

Определение 4. *Свободным вектором* ***a*** будем называть множество всех векторов, равных вектору ***a***, т. е. весь класс эквивалентности.

Из школьного курса геометрии известно, что вектор можно рассматривать как параллельный перенос. Это определение также можно считать определением свободного вектора.

Для свободного вектора, как и для чисел, равенство означает совпадение: два вектора равны в том и только в том случае, когда это один и тот же вектор. В дальнейшем под понятием «вектор» будем понимать свободный вектор.

Рассмотрим линейные операции над векторами. Линейными операциями называют сложение векторов и умножение вектора на число.

Определение 5. Пусть даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Построим равные им векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (т. е. перенесем конец $\boldsymbol{a}$ и начало $\boldsymbol{b}$ в произвольную точку B). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов и обозначается $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (рис. 2).

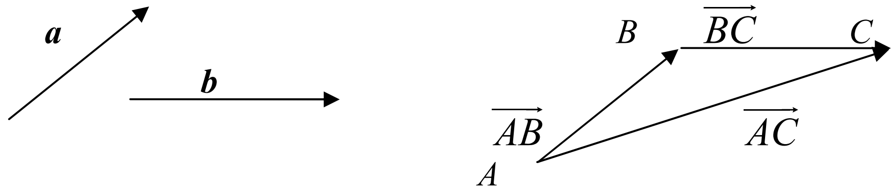


Рис. 2

Рассмотрим свойства операции сложения векторов:

1. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сумма $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ также вектор (замкнутость).

2. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выполняется $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (коммутативность).

3. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ выполняется $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ (ассоциативность).

4. Во множестве векторов есть нулевой вектор $\mathbf{0}$, обладающий свойством: $\mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$. С учетом коммутативности можно записать $\mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (существование нулевого вектора).

5. Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ найдется вектор $-\boldsymbol{a}$, такой что $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ (существование противоположного вектора).

Определение 6. *Произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ на действительное число α называется любой вектор $\boldsymbol{b}$, удовлетворяющий условиям:

а) $|\boldsymbol{b}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{a}|$;

б) вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$;

в) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число α обозначается $\alpha\boldsymbol{a}$.

Из курса линейной алгебры известны простейшие свойства векторных пространств, которые, естественно, выполняются для векторов на плоскости и в пространстве. Например, доказывалась единственность нулевого элемента, единственность противоположного элемента, равенство $-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$ и другие.

Свойства умножения вектора на число:

1. Для любых чисел α и β и любого вектора $\boldsymbol{a}$ верно равенство

$$(\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,(\beta\,\boldsymbol{a}).$$

2. Умножение вектора на единицу не меняет этого вектора $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$.

3. Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ выполняется $0 \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

4. Для любого числа α выполняется $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Свойства, связывающие операции сложения и умножения на число:

1. Для любых чисел α, β и любого вектора $\boldsymbol{a}$ выполняется

$$(\alpha + \beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{a}$$

(дистрибутивность по сложению чисел).

2. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и любого числа α выполняется

$$\alpha\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\,\boldsymbol{a} + \alpha\,\boldsymbol{b}$$

(дистрибутивность по сложению векторов).

Определение 7. *Разностью* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется сумма вектора $\boldsymbol{a}$ и вектора, противоположного $\boldsymbol{b}$, т. е. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

Определяя вычитание векторов через сложение, мы не будем рассматривать вычитание как отдельную операцию. Также нет смысла рассматривать операцию деления вектора на число, которую можно определить как умножение вектора на число, обратное данному.

§ 2. Линейная зависимость векторов, базис на прямой, на плоскости и в пространстве

В курсе линейной алгебры было дано понятие линейной зависимости векторов для произвольного n-мерного векторного пространства. Напомним его.

Определение 8. Система векторов a_1, a_2, …, a_k является *линейно зависимой,* если найдется нетривиальная линейная комбинация векторов

$$\alpha_1\,a_1 + \alpha_2\,a_2 + \ldots + \alpha_k\,a_k,$$

равная нулевому вектору.

Мы дали запись векторов без стрелочек и не выделяя их жирным шрифтом, подчеркнув тем самым, что это векторы произвольного n-мерного векторного пространства. Нетривиальная линейная комбинация векторов – это алгебраическая сумма векторов $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, где хотя бы один отличен от нуля. Кроме этого определения, было дано еще одно эквивалентное определение линейной зависимости векторов.

Определение 9. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется линейно зависимой, если один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов.

Рассматривая векторы на прямой, плоскости и в пространстве с учетом введенных операций сложения и умножения на число, можно составлять суммы векторов, умноженных на некоторые коэффициенты:

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k.$$

Такие суммы будем называть *линейными комбинациями*.

Линейные комбинации векторов обладают следующими очевидными свойствами: если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ коллинеарны, то любая их линейная комбинация им коллинеарна; если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ компланарны, то любая их линейная комбинация с ними компланарна. Это свойство следует из того, что вектор $\alpha\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, а сумма векторов лежит в той же плоскости, что и слагаемые.

Пусть на прямой дан единичный вектор, т. е. вектор, который принят за единицу измерения длин, а его направление объявлено положительным на всей этой прямой. Можно сказать, что наша прямая превращена в ось.

Определение 10. Отношение длин любого вектора $\boldsymbol{a}$ на данной оси к длине единичного вектора, взятое со знаком «+», если векторы направлены в одну сторону, и со знаком «–», если векторы противоположно направлены, называется *координатой* вектора $\boldsymbol{a}$ на данной оси. (Также используются синонимы: компонента, алгебраическое значение вектора.)

Пусть дан вектор $\overrightarrow{AB}$, тогда его координату на оси обозначим (AB). Из определения вытекают следующие свойства:

1. Два вектора на данной прямой равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

2. Если два вектора имеют одну и ту же длину, но противоположны по направлению, то их координаты имеют один и тот же модуль, но противоположны по знаку: $(AB) + (BA) = 0$.

3. Координата единичного вектора равна 1.

4. При любом расположении точек A, B и C на оси имеет место числовое равенство $(AB) + (BC) = (AC)$.

При рассмотрении n-мерных векторных пространств было введено понятие базиса. Мы определяли базис как максимальную линейно независимую систему векторов. Максимальность понимается в том смысле, что если к системе добавить любой вектор, она станет линейно зависимой.

Кроме того, в курсе алгебры доказывалось утверждение, что если система векторов линейно независима и любой вектор векторного пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов системы, то данная система векторов является базисом.

Как видно из определения координатной оси, на прямой базисом является любой ненулевой вектор.

Определение 11. *Базисом в пространстве* называются три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке. *Базисом на плоскости* называются два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он *разложен* по этим векторам.

Определение 12. Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ – базис в пространстве и $\boldsymbol{a}$ разложен по базису с коэффициентами α_1, α_2, α_3

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3,$$

то числа α_1, α_2, α_3 называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в данном базисе в пространстве.

Аналогично, если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ – базис на плоскости и вектор $\boldsymbol{a}$ разложен по этому базису

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2,$$

то числа α_1, α_2 называются координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ на плоскости.

Лемма 1. Координаты вектора на прямой, плоскости и в пространстве определяются однозначно.

Доказательство. Докажем единственность разложения по базису для пространства.

Пусть $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{a} = a'_1\boldsymbol{e}_1 + a'_2\boldsymbol{e}_2 + a'_3\boldsymbol{e}_3$. Вычтем второе равенство из первого:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) - (a'_1\boldsymbol{e}_1 + a'_2\boldsymbol{e}_2 + a'_3\boldsymbol{e}_3) = \\ = (a_1 - a'_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (a_2 - a'_2)\,\boldsymbol{e}_2 + (a_3 - a'_3)\,\boldsymbol{e}_3 = 0.\end{gathered}$$

Мы получили линейную комбинацию базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, равную нулю. Учитывая линейную независимость базисных векторов, получаем, что все коэффициенты линейной комбинации должны быть равны нулю, т. е. $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, $a_3 = a'_3$.

Доказательство леммы для случая прямой и плоскости аналогично.

Лемма доказана.

Следствие. Равные векторы имеют одинаковый набор координат.

Заметим, что при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. Действительно, пусть $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$, тогда

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) = (\lambda a_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (\lambda a_2)\,\boldsymbol{e}_2 + (\lambda a_3)\,\boldsymbol{e}_3.$$

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты. Действительно, если $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3$, то

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) + (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) = \\ &= (a_1 + b_1)\,\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\,\boldsymbol{e}_2 + (a_3 + b_3)\,\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

Понятие линейной зависимости векторов, играющее большую роль в алгебре, в курсе аналитической геометрии наполняется новым смыслом. Приведем для иллюстрации несколько утверждений.

1. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два линейно зависимых вектора коллинеарны.
2. Любые три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три линейно зависимых вектора компланарны.
3. Каждые четыре вектора линейно зависимы.

§ 3. Системы координат, деление отрезка в заданном отношении

1. Аффинная система координат

Зафиксируем на плоскости точку O (*начало координат*) и два вектора $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, приложенные к точке O. Вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ неколлинеарны, и, следовательно, любой вектор плоскости разложим в линейную комбинацию по $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

Определение 13. *Аффинная система координат* на плоскости – это совокупность точки O и базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ определяют две оси, пересекающиеся в точке O и являющиеся по определению единичными векторами этих осей. Первая ось называется *осью абсцисс*, вторая – *осью ординат*.

Рассмотрим произвольную точку M. Вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат и точку M, называется *радиус-вектором* точки M. Разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$:

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2,$$

т. е. координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ будет пара чисел (x, y).

Определение 14. Координаты точки M в аффинной системе координат – это координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

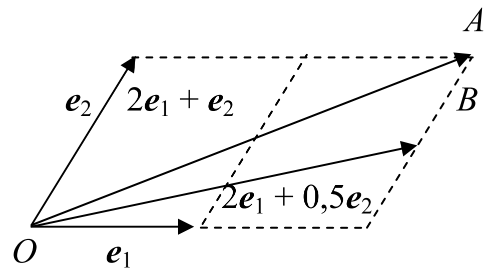


Рис. 3

Заметим, что в определении аффинной системы координат не предполагается, что векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ будут одинаковой длины, и угол между ними не обязан быть 90°. Например, на рис. 3 векторы базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ не перпендикулярны и имеют различные длины. Точка A имеет в этой системе координаты $A(2;\ 1)$, так как ее радиус-вектор задается линейной комбинацией

$$\overrightarrow{OA} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

Аналогично $B(2;\ 0{,}5)$ и $\overrightarrow{OB} = 2\boldsymbol{e}_1 + 0{,}5\boldsymbol{e}_2$.

Таким же образом можно определить аффинную систему координат в пространстве. Пусть зафиксирована точка O и три вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, приложенные к O. Предполагается, что векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ некомпланарны, и, следовательно, образуют базис. К осям абсцисс и ординат, определенных векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, добавляется ось *аппликат*, проходящая через вектор $\boldsymbol{e}_3$. Раскладывая по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, получим координаты $\overrightarrow{OM}$ и одновременно координаты точки M:

$$\overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3.$$

В аффинной системе координат при сложении двух векторов складываются их соответствующие координаты, при умножении вектора на число координаты умножаются на это число.

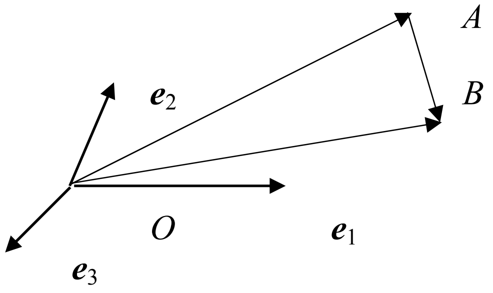


Рис. 4

Пусть даны две точки A (x_A, y_A, z_A) и $B(x_B,\ y_B,\ z_B)$ (рис. 4). Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ и, следовательно, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Таким образом, для того чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.

2. Деление отрезка в заданном отношении

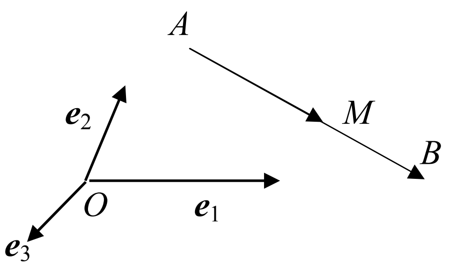


Рис. 5

Пусть в системе координат даны точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Пусть точка $M(x, y, z)$ лежит на отрезке $[AB]$ (рис. 5), причем выполняется условие

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\lambda}{\mu},$$

где $\lambda, \mu > 0$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$, учитывая, что $\lambda, \mu > 0$, получаем

$$\mu\,|\overrightarrow{AM}| = \lambda|\overrightarrow{MB}|,\ \mu\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$

Найдем координаты векторов $\mu\overrightarrow{AM}$ и $\lambda\overrightarrow{MB}$:

$$\mu\overrightarrow{AM} = (\mu(x - x_A), \mu(y - y_A), \mu(z - z_A)),$$

$$\lambda\overrightarrow{MB} = (\lambda(x_B - x), \lambda(y_B - y), \lambda(z_B - z)).$$

Учитывая равенство $\mu\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, получим равенство соответствующих координат

$$\mu(x - x_A) = \lambda(x_B - x),$$

$$\mu(y - y_A) = \lambda(y_B - y),$$

$$\mu(z - z_A) = \lambda(z_B - z).$$

Раскроем скобки и перепишем равенства в виде

$$\mu\, x + \lambda\, x = \mu\, x_A + \lambda\, x_B,$$

$$\mu\, y + \lambda\, y = \mu\, y_A + \lambda\, y_B,$$

$$\mu\, z + \lambda\, z = \mu\, z_A + \lambda\, z_B.$$

Следовательно, получаем

$$x = \frac{\mu x_A + \lambda x_B}{\mu + \lambda};\; y = \frac{\mu y_A + \lambda y_B}{\mu + \lambda};\; z = \frac{\mu z_A + \lambda z_B}{\mu + \lambda}.$$

Эти формулы задают координаты точки, которая делит отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda : \mu$.

Очевидно, что если отрезок лежит на плоскости, то точка M имеет только две координаты x и y, которые находятся по тем же формулам.

3. Декартова прямоугольная система координат

Из школьного курса математики известно, что наиболее распространенной является система координат, где базисные векторы имеют одинаковую длину на всех осях (единичный отрезок) и оси координат попарно образуют прямой угол.

Определение 15. Базис называется *ортонормированным*, если любые его два различных вектора перпендикулярны, и длина любого базисного вектора равна единице. Система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной* системой координат.

Очевидно, что в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ можно находить по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Действительно, из построений видно, что отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника ABM, где катеты равны $x_B - x_A$ и $y_B - y_A$ (рис. 6). Поэтому указанная формула является следствием теоремы Пифагора

$$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Нетрудно сделать обобщение на случай, когда точки A и B лежат в пространстве:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\ .$$

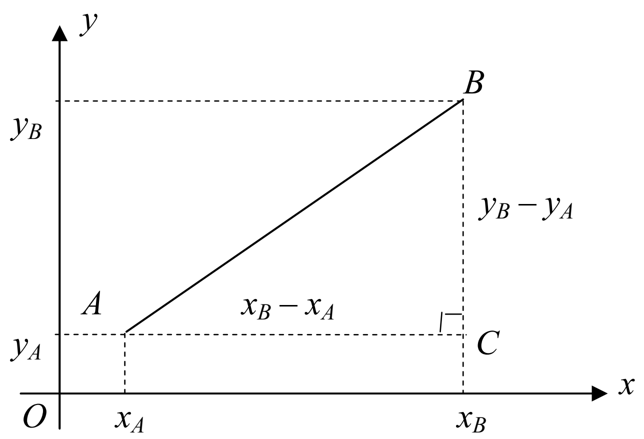


Рис. 6

Очевидно, если одна из точек отрезка совпадает с началом координат, а другая есть точка $M(x, y, z)$, то

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Следовательно, в декартовой прямоугольной системе координат для радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ имеем

$$\overrightarrow{OM}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2,$$

т. е. квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат.

4. Полярная система координат

Кроме декартовой прямоугольной системы на плоскости часто используется полярная система координат.

Определение 16. *Полярная система координат* – это совокупность точки O, называемой *полюсом*, и исходящего из полюса луча l, называемого *полярной осью* (рис. 7).

Положение произвольной точки M определяется длиной r радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$.

Длину радиус-вектора $r = |\overrightarrow{OM}|$ называют *радиусом*, а угол φ называют *полярным углом*. Угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки.

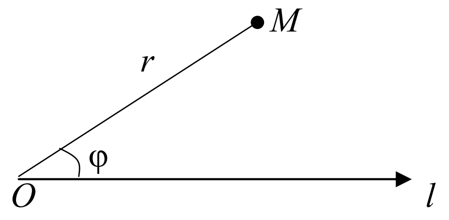


Рис. 7

Пусть начало координат прямоугольной декартовой системы совпадает с полюсом, а положительное направление оси Ox совпадает с полярной осью (рис. 8). Пусть дана некоторая точка M, которая в прямоугольной системе имеет координаты $M(x, y)$ и в полярной – координаты $M(r, \varphi)$. Установим взаимосвязь между декартовыми прямоугольными и полярными координатами.

Треугольник OAM прямоугольный, поэтому

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

В свою очередь, полярные координаты можно выразить через декартовы следующим образом:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

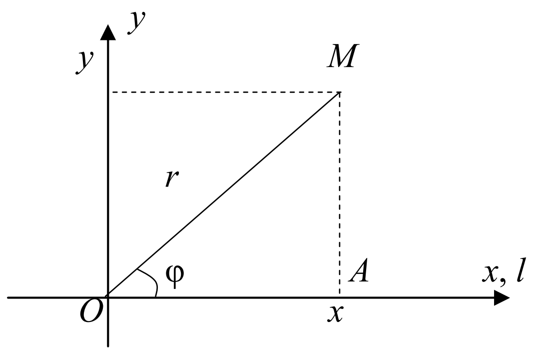


Рис. 8

В некоторых случаях кривые удобнее задавать в полярной системе координат. Например, уравнение окружности с центром в точке O и радиусом R в полярной системе координат выглядит как $r = R$. Уравнение луча, исходящего из начала координат под углом φ_0 к положительному направлению оси Ox, задается в виде $\varphi = \varphi_0$.

5. Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система представляет собой обобщение полярной системы координат для пространства.

Пусть на плоскости задана полярная система координат, тогда для произвольной точки M в пространстве можно определить ее проекцию на плоскость $M_{\text{пр}}$, где $M_{\text{пр}}$ будет иметь координаты $M_{\text{пр}}(r, \varphi)$. Положение точки M определяется однозначно, если к положению $M_{\text{пр}}$ добавить высоту z точки M над проекцией. Поэтому координаты M в цилиндрической системе координат имеют вид $M(r, \varphi, z)$.

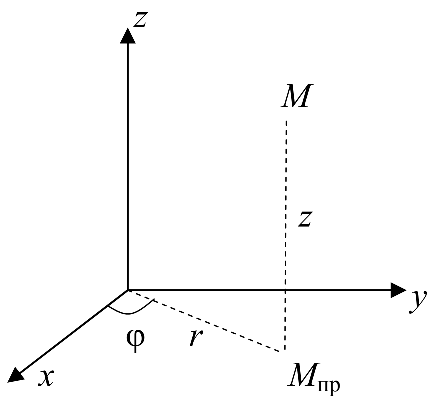


Рис. 9

Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат, плоскость xOy которой совмещена с полярной системой, т. е. начало координат – с полюсом, а положительное направление оси Ox – с полярной осью (рис. 9). Точка M имеет два набора координат $M(x, y, z)$ и $M(r, \varphi, z)$. Найдем связь между ними. Очевидно, что проекция точки M на плоскость xOy имеет координаты $M_{пр}(x, y, 0)$ в декартовой и $M_{пр}(r, \varphi)$ в полярной системе. При этом

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Следовательно, формулы перехода от цилиндрических координат имеют вид

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi,$$

$$z = z.$$

Обратные формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим следующие:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

$$z = z.$$

6. Сферическая система координат

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Положение точки $M(x, y, z)$ однозначно определится, если мы зададим длину радиус-вектора r точки M, угол θ, который радиус-вектор образует с положительным направлением оси Oz, и угол φ, который проекция радиус-вектора образует с положительным направлением оси Ox (рис. 10). Эти три параметра (r, φ, θ) являются сферическими координатами точки M.

Установим связь между декартовыми координатами $M(x, y, z)$ и сферическими $M(r, \varphi, \theta)$. По рисунку видно (рис. 10), что

$$x = r_{\text{пр}} \cos\varphi,$$
$$y = r_{\text{пр}} \sin\varphi,$$

где $r_{\text{пр}}$ – длина проекции радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость xOy. В свою очередь, для проекции $r_{\text{пр}} = r \sin\theta$, тогда получаем

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = r \sin\theta \cos\varphi.$$

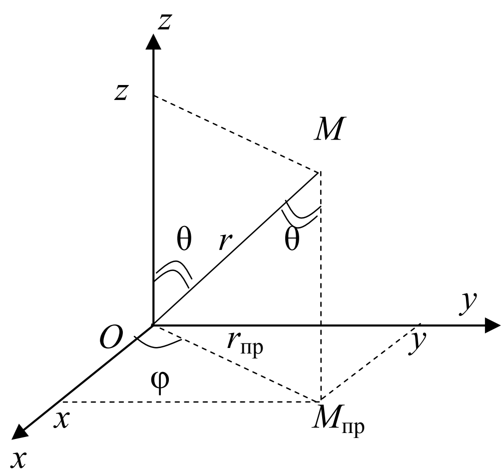


Рис. 10

Координату z можно найти из треугольника $OMM_{\text{пр}}$:

$$z = r \cos\theta.$$

Переход от декартовых координат к сферическим осуществляется по следующим формулам:

$$r_{\text{пр}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

$$\sin\theta = \frac{r_{\text{пр}}}{r} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Сферическая и цилиндрическая системы координат являются более удобными, чем декартова, для некоторых поверхностей, обладающих симметрией относительно оси Ox и точки начала координат. Так, уравнение цилиндра в прямоугольных координатах имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, а в цилиндрических – $r = R$; уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферической системе – $r = R$. Таким образом, понижается порядок уравнений со второго до первого.

§ 4. Скалярное произведение

Понятие скалярного произведения вводилось в школьном курсе геометрии. Напомним его и рассмотрим свойства этого произведения.

Определение 17. *Скалярным произведением* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, равное произведению модулей векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ на косинус угла между ними, т. е.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Определение 18. Если угол между векторами прямой, то векторы называются *ортогональными*.

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор считается равным нулю.

Скалярное произведение имеет ряд свойств:

1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (коммутативность);

2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

а) $\boldsymbol{a} = 0$;

б) $\boldsymbol{b} = 0$;

в) $\cos \varphi = 0$, т. е. $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ортогональны;

3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора. Действительно, в этом случае $\varphi = 0$ и $\cos \varphi = 0$, тогда

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot \cos \varphi = |\boldsymbol{a}|^2;$$

4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ – нулевой вектор;

5) векторы ортонормированного базиса удовлетворяют соотношениям

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) = 1,$$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0;$$

6) если λ – число, то $(\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, т. е. числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения;

7) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ (дистрибутивность);

8) координаты любого вектора в прямоугольной системе координат равны скалярным произведениям этого вектора на базисные векторы.

Докажем последнее свойство. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ разложение

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3.$$

Рассмотрим скалярное произведение вектора на базисный вектор, используя при этом свойство дистрибутивности:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \mathrm{e1}) =$$
$$= (a_1\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + (a_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + (a_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = a_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1).$$

Если базис ортогонален, то

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = 0, (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = |\boldsymbol{e}_1|^2.$$

Получаем, что скалярное произведение вектора на базисный вектор равно

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1) = a_1\, |\boldsymbol{e}_1|^2,$$

$$a_1 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1)}{|\boldsymbol{e}_1|^2}.$$

Аналогично, другие координаты вектора:

$$a_2 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2)}{|\boldsymbol{e}_2|^2},\ a_3 = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3)}{|\boldsymbol{e}_3|^2}.$$

Если базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ не только ортогонален, но еще и нормирован, т. е. $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$, то

$$a_1 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_1),\ \ a_2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_2),\ \ a_3 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_3).$$

Таким образом, свойство 8 доказано.

Найдем выражение скалярного произведения через координаты сомножителей.

Пусть в некотором базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют следующие координаты:

$$\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3).$$

Найдем их скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, для чего воспользуемся свойствами 6 и 7:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) = \\ = a_1\, b_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_1b_2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_1b_3(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) + \\ + a_2\, b_1(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_2b_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + \\ + a_3\, b_1(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) + a_3b_2(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) + a_3b_3(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3).\end{gathered}$$

Если базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ произвольный, то данная формула является окончательной. Если базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ортогонален, т. е.

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 0,$$

то формула примет вид

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_2 b_2 (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) + a_3 b_3 (\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3) =$$
$$= a_1 b_1 |\boldsymbol{e}_1|^2 + a_2 b_2 |\boldsymbol{e}_2|^2 + a_3 b_3 |\boldsymbol{e}_3|^2.$$

Если кроме ортогональности векторов потребуем, чтобы их длины равнялись единице, т. е. базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ являлся бы ортонормированным, то формула будет иметь вид

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Это формула выражения скалярного произведения через координаты сомножителей в ортонормированном базисе.

С учетом того, что

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \varphi ,$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} , \ |\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} ,$$

получим формулу для нахождения угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} .$$

Таким образом, скалярное произведение применяется, когда нужно найти угол между векторами, определить, являются ли данные векторы ортогональными.

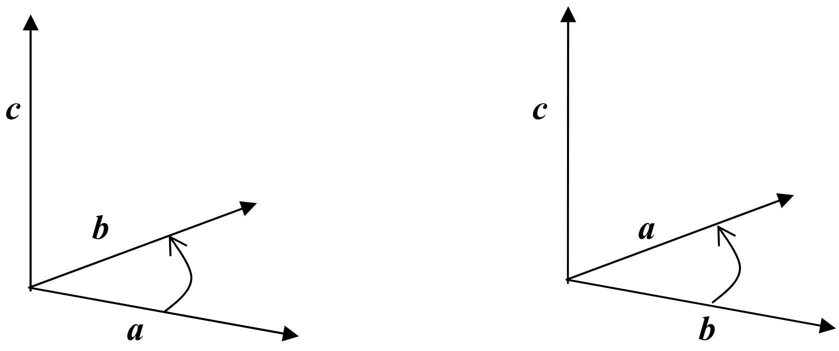
§ 5. Векторное произведение

В предыдущем параграфе мы рассмотрели скалярное произведение векторов, когда двум векторам ставится в соответствие число. Теперь определим операцию, которая двум векторам ставит в соответствие вектор. Предварительно введем определение ориентированной тройки векторов.

Определение 19. Упорядоченная тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ называется *правоориентированной* (или *правой*), если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левоориентированной* (или *левой*) (рис. 11).

Термин «упорядоченная тройка» означает, что про каждый вектор можно сказать, первый он, второй или третий.

При перемене местами любых двух векторов в упорядоченной тройке тройка меняет ориентацию. Например, если ***a***, ***b***, ***c*** правая тройка, то тройка ***b***, ***a***, ***c*** – левая.



правая тройка   левая тройка

Рис. 11

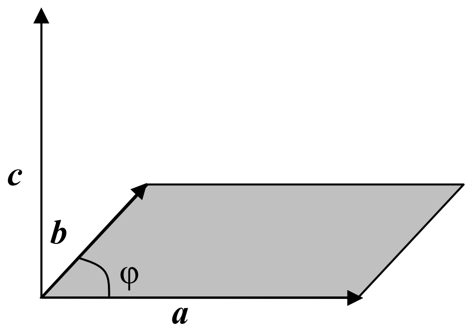


Рис. 12

Определение 20. *Векторным произведением* данных векторов ***a*** и ***b*** называется вектор ***c***, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами ***a*** и ***b***, т. е. модуль векторного произведения, равен площади параллелограмма, построенного на векторах ***a*** и ***b*** (рис. 12);

2) $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$, т. е. ***c*** перпендикулярен плоскости векторов ***a*** и ***b***;

3) ***a***, ***b***, ***c*** – правая тройка векторов.

Для векторного произведения обычно используют два обозначения:

$$\mathrm{c} = \mathrm{a} \times \mathrm{b} \text{ или } \boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Рассмотрим ***свойства векторного произведения***.

1. Векторное произведение антикоммутативно:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}].$$

При перемене местами сомножителей векторное произведение меняет знак. Действительно, меняя местами сомножители, мы должны менять направление вектора ***c***, чтобы тройка векторов ***a***, ***b***, ***c*** оставалась правой.

2. Константу можно выносить за знак векторного произведения:

$$[\lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Можно показать возможность вынесения константы из второго сомножителя:

$$[\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}] = -[\lambda\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = -\lambda[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] = \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

3. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любых чисел α и β имеет место равенство

$$[\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}].$$

Аналогично, $[\boldsymbol{a}, \mu\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{c}] = \mu[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + \lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$.

4. Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.

Действительно, векторное произведение равно нулю

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi = 0$$

в следующих трех случаях:

1) $\boldsymbol{a} = 0$, тогда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны;

2) $\boldsymbol{b} = 0$, тогда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны;

3) $\sin\varphi = 0$, т. е. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, тогда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны; в частности $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = 0$.

Найдем выражение векторного произведения через координаты сомножителей. Пусть $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – ортонормированный базис, т. е.

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}) = (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) = 0 \text{ и } |\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1.$$

Векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образуют правую тройку. Найдем векторные произведения базисных векторов. Вектор $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ и имеет единичную длину, так как

$$|[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]| = |\boldsymbol{i}| \cdot |\boldsymbol{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1.$$

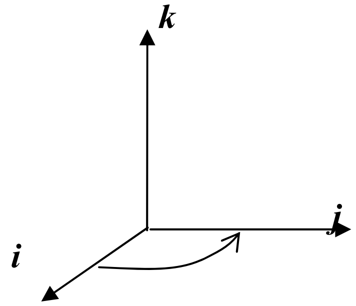


Рис. 13

Кроме того, тройка векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ является правой (рис. 13). Учитывая, что кратчайший поворот от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$ виден с конца вектора $\boldsymbol{k}$ против часовой стрелки и $k \perp i, k \perp j$, $|\boldsymbol{k}| = 1$, получаем

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = \boldsymbol{k}.$$

Аналогично можно получить равенства

$$[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] = -\boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = \boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] = -\boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] = \boldsymbol{j},\ [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] = -\boldsymbol{j}.$$

Пусть $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, найдем векторное произведение, используя его свойства:

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] &= [a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}] = \\
&= a_1b_1[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] + a_1b_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] + a_1b_3[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] + \\
&+ a_2b_1[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] + a_2b_2[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}] + a_2b_3[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] + \\
&+ a_3b_1[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] + a_3b_2[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}] + a_3b_3[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}].
\end{aligned}$$

Учитывая, что $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}] = [\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}] = [\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}] = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = a_1b_2[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] + a_1b_3[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}] + a_2b_1[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}] + a_2b_3[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] + \\
+ a_3b_1[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}] + a_3b_2[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{j}].
\end{aligned}$$

Подставим найденные выше векторные произведения базисных векторов:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = a_1b_2\boldsymbol{k} - a_1b_3\boldsymbol{j} - a_2b_1\boldsymbol{k} + a_2b_3\boldsymbol{i} + a_3b_1\boldsymbol{j} - a_3b_2\boldsymbol{i}.$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\boldsymbol{k}.$$

Учитывая, что разность вида $ad - bc$ можно представить в виде определителя второго порядка

$$ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

запишем векторное произведение через определители:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

Правую часть равенства можно рассматривать, как разложение определителя матрицы 3×3 по первой строке, элементами которой являются базисные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а соответствующие определители – алгебраическими дополнениями. Получаем равенство:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Эта формула представляет собой выражение векторного произведения через координаты сомножителей.

§ 6. Смешанное произведение

Рассмотрим операцию, соединяющую скалярное и векторное произведения.

Пусть даны три вектора – $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Умножим $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторно. Полученный вектор $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ умножим скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$. В результате получим число $(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])$.

Определение 21. Число $(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])$ называется смешанным произведением векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и обозначается $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

1. Смешанное произведение некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на сомножителях (рис. 14).

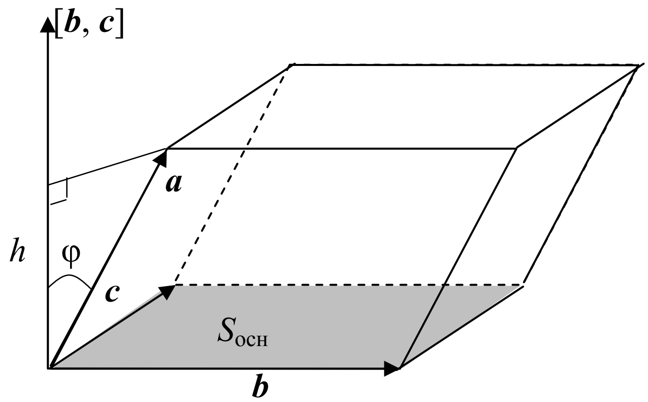


Рис. 14

Действительно, по определению скалярного произведения

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = |\boldsymbol{a}| \cdot |[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$. Учитывая, что $|\boldsymbol{a}| \cdot \cos\varphi$ равно высоте параллелепипеда h, а модуль векторного произведения $|[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = S_{\text{осн}} \cdot h = V_{\text{паралл}}.$$

2. Смешанное произведение является положительным, если тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ правая, и отрицательным, если она левая.

Действительно, знак смешанного произведения совпадает со знаком $\cos\varphi$, и поэтому смешанное произведение положительно, когда $\boldsymbol{a}$ направлен в ту же сторону от плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, что и вектор $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, т. е. тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ правая. Если $\cos\varphi < 0$, то вектор $\boldsymbol{a}$ направлен в противоположную сторону от плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ по отношению к вектору $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, и, значит, тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ левая.

3. Если $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ ортонормированный базис, то $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$, если базис правый, и $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = -1$, если базис левый.

4. Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.

Учитывая $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]| \cdot \cos\varphi$, получаем, что смешанное произведение равно нулю в одном из следующих трех случаев:

а) $\boldsymbol{a} = 0$, тогда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны;

б) $|[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]| = 0$, тогда $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны, а значит, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны;

в) $\cos\varphi = 0$, тогда вектор $\boldsymbol{a}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, т. е. векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то либо по крайней мере один из них нулевой, и тогда ситуация рассмотрена в пунктах а) и б), либо все три вектора лежат в одной плоскости и выполняется пункт в).

Таким образом, равенство нулю смешанного произведения дает критерий компланарности векторов сомножителей.

5. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ верны равенства

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}).$$

При перестановке сомножителей в смешанном произведении самое большее может измениться только ориентация тройки этих векторов. Поэтому может измениться только знак смешанного произведения.

6. Для любых векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и чисел α, β верно равенство

$$(\alpha\, \boldsymbol{a}_1 + \beta \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha\, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + \beta\, (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Это свойство следует из свойств скалярного произведения. С учетом предыдущего свойства получаем для векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{c}$ и чисел α, β

$$(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}_1 + \beta\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}) = \alpha\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{c}) + \beta\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c})$$

и для векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ и чисел α, β

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \alpha\boldsymbol{c}_1 + \beta\boldsymbol{c}_2) = \alpha\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1) + \beta\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_2).$$

Таким образом, смешанное произведение линейно по любому своему сомножителю.

Найдем выражение смешанного произведения через координаты сомножителей. Пусть $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – ортонормированный базис. Векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ образуют правую тройку векторов. Тогда координаты векторного произведения $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ находятся по следующей формуле:

$$[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right).$$

Умножим этот вектор на вектор $\boldsymbol{a}$ по формуле скалярного произведения:

$$(\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Полученное выражение можно рассматривать как разложение определителя третьего порядка по первой строке, в которой стоят координаты вектора $\boldsymbol{a}$, алгебраическими дополнениями служат координаты векторного произведения. Следовательно, можно считать, что выражение смешанного произведения через координаты сомножителей имеет вид

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Данная формула верна только в том случае, когда координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ заданы в ортонормированном базисе.

Примеры решения типовых задач

В данном параграфе рассмотрим задачи, связанные с различными системами координат, делением отрезка в заданном отношении.

Пример 1

Даны координаты точек: $A(4;\ 3)$, $B(7;\ 6)$, $C(2;\ 11)$. Докажем, что треугольник ABC прямоугольный.

Найдем длины сторон треугольника ABC. С этой целью используем формулу, позволяющую находить расстояние между двумя точками на плоскости:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Длины сторон будут равны:

$$|AB| = \sqrt{(7-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}\,,$$
$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (11-3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}\,,$$
$$|BC| = \sqrt{(2-7)^2 + (11-6)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}\,.$$

С учетом того, что для сторон данного треугольника выполняется теорема Пифагора

$$|AB|^2 + |BC|^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 + \left(\sqrt{18}\right)^2 = \left(\sqrt{68}\right)^2 = |AC|^2,$$

треугольник ABC – прямоугольный.

Пример 2

Даны точки $A(2;\ 1)$ и $B(8;\ 4)$. Найдем координаты точки $M(x;\ y)$, которая делит отрезок в отношении 2:1.

Напомним, что точка $M(x;\ y)$ делит отрезок AB, где $A(x_A,\ y_A)$, $B(x_B,\ y_B)$, в отношении $\lambda : \mu$, если ее координаты удовлетворяют условиям:

$$x = \frac{\mu x_A + \lambda x_B}{\mu + \lambda},\ \ y = \frac{\mu y_A + \lambda y_B}{\mu + \lambda}\,.$$

Найдем точку M для данного отрезка:

$$x = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 8}{1 + 2} = 6, \; y = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 3.$$

Таким образом, точка $M(6; 3)$ делит отрезок AB в отношении 2:1.

Пример 3

Найдем прямоугольные координаты точки $A(2\sqrt{2}; 3\pi/4)$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось направлена по оси абсцисс.

Учитывая формулы перехода от полярной к прямоугольной системе координат

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi,$$

получаем

$$x = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2,$$

$$y = 2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2.$$

В прямоугольной декартовой системе координат координаты точки $A(-2; 2)$.

Пример 4

Найдем полярные координаты точек, имеющих следующие прямоугольные координаты:

$$A(2\sqrt{3}; 2), \; B(-4; 4), \; C(-7; 0).$$

Используем формулы перехода от прямоугольных координат к полярным:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Получим координаты для точки A:

$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

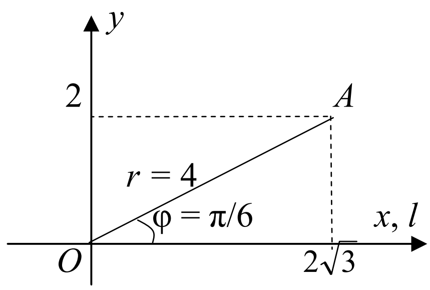


Рис. 15

Таким образом $A(4;\ \pi/6)$ – полярные координаты (рис. 15).

Для точки B (рис. 16) имеем:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{-4} = -1,\ \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, полярные координаты точки $B(4\sqrt{2},\ 3\pi/4)$.

Рассмотрим точку $C(-7;\ 0)$ (рис. 17). В этом случае

$$r = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{-7} = 0,\ \varphi = \pi.$$

Можно записать полярные координаты точки $C(7;\ \pi)$.

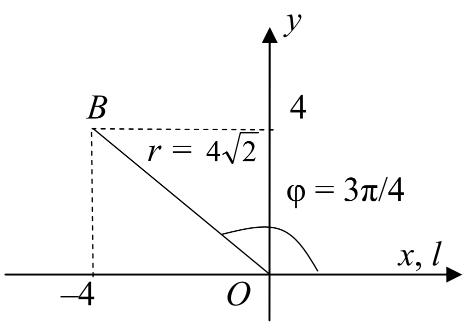


Рис. 16

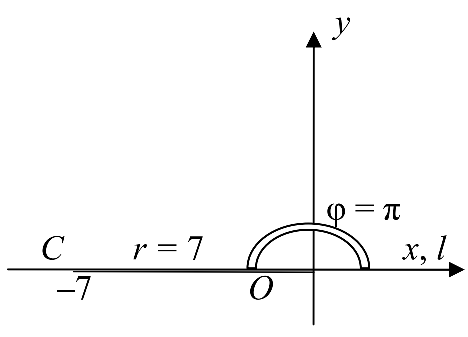


Рис. 17

Пример 5

Найдем длину вектора $\boldsymbol{a} = 20\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j} - 60\boldsymbol{k}$ и его направляющие косинусы.

Напомним, что направляющие косинусы – это косинусы углов, которые вектор $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ образует с осями координат:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathrm{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathrm{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathrm{a}|},$$

где $|\mathrm{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$.

Применим эти формулы к данному вектору, получим

$$\cos\alpha = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2}} = \frac{20}{\sqrt{400 + 900 + 3600}} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7},$$

$$\cos\beta = \frac{30}{\sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7},$$

$$\cos\gamma = \frac{-60}{\sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2}} = -\frac{60}{70} = -\frac{6}{7}.$$

Пример 6

Нормируем вектор $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$.

Нормировать вектор – это найти вектор единичной длины $\boldsymbol{a}_0$, направленный так же, как и данный вектор. Для произвольного вектора $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ соответствующий вектор единичной длины можно найти, умножив $\boldsymbol{a}$ на дробь $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$:

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

В нашем случае $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$, и вектор единичной длины

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}}{13} = \frac{3}{13}\boldsymbol{i} + \frac{4}{13}\boldsymbol{j} - \frac{12}{13}\boldsymbol{k}\ .$$

Пример 7

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Для того чтобы найти скалярное произведение векторов, нужно умножить соответствующие координаты и полученные произведения сложить. Так, для векторов $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ скалярное произведение имеет вид

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Для данных векторов получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) + 6 \cdot 1 = 12 - 20 + 6 = -2.$$

Пример 8

Покажем, что векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ перпендикулярны.

Два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Найдем скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2\cdot 1 + (-3) \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 2 - 12 + 10 = 0.$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Пример 9

Выясним, при каком значении параметра m векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + m\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ перпендикулярны.

Найдем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot m - 2 \cdot m = 6 + m.$$

Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. Приравниваем к нулю произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$6 + m = 0.$$

При $m = -6$ векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны.

Пример 10

Найдем скалярное произведение $(3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b})$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 1$ и угол φ между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен $\pi/3$.

Воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$(\alpha\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2,$$

а также определением скалярного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi$. Перепишем скалярное произведение в виде

$$(3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}) = 6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - 9(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + 8(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - 12(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) =$$
$$= 6|\boldsymbol{a}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 12|\boldsymbol{b}|^2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos(\pi/3) - 12 \cdot 1^2 = 11.$$

Пример 11

Определим угол между векторами

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Для нахождения угла воспользуемся определением скалярного произведения двух векторов:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Выразим $\cos\varphi$ из этой формулы:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

Учитывая, что

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 8,$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \; |b| = \sqrt{6^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{14},$$

получаем

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{8}{2 \cdot 14} = \frac{2}{7}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

Пример 12

Найдем векторное произведение векторов

$$\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

Известно, что векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ находится по формуле

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, для данных векторов

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} =$$

$$= 2\boldsymbol{i} + 23\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}.$$

Рассмотрим пример, где для нахождения модуля векторного произведения будет использоваться определение векторного произведения, а не выражение его через координаты сомножителей, как было в предыдущем примере.

Пример 13

Найдем модуль векторного произведения векторов $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ и угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30°.

Из определения векторного произведения видно, что для произвольных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ его модуль равен

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi.$$

Учитывая свойства векторного произведения

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}],$$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = 0,$$

$$[\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] + \beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}],$$

получаем

$$[\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}] = 2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - 3[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + 4[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] - 6[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = -7[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Значит, модуль векторного произведения равен

$$|[\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}]| = |-7[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 7 \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin 30° = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 7.$$

Пример 14

Вычислим площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}.$$

Известно, что модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Найдем векторное произведение по формуле

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$. Затем вычислим его модуль.

Для данных векторов получаем:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} =$$

$$= 14\boldsymbol{i} - 42\boldsymbol{j} - 21\boldsymbol{k}.$$

Следовательно, площадь параллелограмма равна

$$S = |[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \sqrt{196 + 1\,764 + 441} = 49 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 15

Вычислим площадь треугольника с вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; 3; 4)$, $C(2; 1; 3)$.

Очевидно, что площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

В свою очередь площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, равна модулю векторного произведения $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$. Таким образом,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, вычитая из координат конца вектора соответствующие координаты начала, получим

$$\overrightarrow{AB} = (3-1)\boldsymbol{i} + (3-2)\boldsymbol{j} + (4-1)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1)\boldsymbol{i} + (1-2)\boldsymbol{j} + (3-1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}.$$

Найдем векторное произведение:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Найдем модуль векторного произведения:

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}\,.$$

Следовательно, можем получить площадь треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{35} \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 16

Вычислим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 1$ и угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30°.

Найдем модуль векторного произведения, используя его определение и свойства, указанные в примере 13, получим

$$[\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}] = 3[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + 9[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] - 3[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = -10[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Значит, искомая площадь равна

$$S = |[\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}, 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}]| = |-10[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]| = 10 \cdot |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin 30° =$$
$$= 10 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = 10 \text{ (кв. ед.)}.$$

Следующие примеры будут связаны с использованием смешанного произведения векторов.

Пример 17

Показать, что векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ компланарны.

Векторы компланарны, если их смешанное произведение равно нулю. Для произвольных векторов

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$$

смешанное произведение находим по формуле

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для данных векторов получаем

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 12 - 4 + 6 = 0.$$

Таким образом, данные векторы компланарны.

Пример 18

Найдем объем треугольной пирамиды с вершинами $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 4;\ 3)$, $D(5;\ 2;\ 4)$.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающих с ребрами пирамиды. Вычитая из координат конца вектора соответствующие координаты начала, получаем

$$\overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{AD} = 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}.$$

Известно, что объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Таким образом,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал}}.$$

В свою очередь объем параллелепипеда равен модулю смешанного произведения

$$V_{\text{парал}} = |(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})|.$$

Найдем смешанное произведение

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 24 - 4 - 9 = 29.$$

Итак, объем пирамиды равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал}} = \frac{1}{6} \cdot 29 = \frac{29}{6} \text{ (куб. ед.).}$$

В следующих примерах покажем возможное применение векторной алгебры.

Пример 19

Проверим, являются ли коллинеарными векторы $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

Найдем координаты векторов $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$:

$$2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 2(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} - 3(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{k}.$$

Известно, что у коллинеарных векторов пропорциональные координаты. Учитывая, что

$$\frac{5}{-1} \neq \frac{4}{-5} \neq \frac{-2}{-15},$$

получаем, что вектора $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ неколлинеарны.

Эту задачу можно было решить и другим способом. Критерием коллинеарности векторов является равенство нулю векторного произведения:

$$[2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}] = 2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] - 6[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] - 3[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}] = -7[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Найдем векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} =$$

$$= 10\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \neq 0.$$

Следовательно,

$$[2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}] = -7[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \neq 0$$

и векторы $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ неколлинеарны.

Пример 20

Найдем работу силы $\boldsymbol{F}(3;\ 2;\ 1)$, когда точка ее приложения $A(2;\ 4;\ -6)$, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(5;\ 2;\ 3)$.

Известно, что работа силы – это скалярное произведение силы $\boldsymbol{F}$ на вектор перемещения $\overrightarrow{AB}$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}.$$

Следовательно, работа силы $\boldsymbol{F}$ по перемещению точки A в точку B будет равна скалярному произведению

$$(\boldsymbol{F}, \overrightarrow{AB}) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 9 = 9 - 4 + 9 = 14.$$

Пример 21

Пусть сила $\boldsymbol{F}(2;\ 3;\ -1)$ приложена к точке $A(4;\ 2;\ 3)$. Под действием силы $\boldsymbol{F}$ точка A перемещается в точку $B(3;\ 1;\ 2)$. Найдем модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

Известно, что момент силы равен векторному произведению силы на перемещение. Найдем вектор перемещения $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 4)\boldsymbol{i} + (1 - 2)\boldsymbol{j} + (2 - 3)\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Найдем момент силы как векторное произведение:

$$\left[\boldsymbol{F}, \overrightarrow{AB}\right] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} =$$

$$= -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

Следовательно, модуль момента силы равен модулю векторного произведения:

$$|[\boldsymbol{F}, \overrightarrow{AB}]| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется вектором?
2. Какие возможны линейные операции над векторами?
3. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными?
4. Что такое линейная зависимость векторов?
5. Какие векторы образуют базис?
6. Опишите системы координат.
7. Дайте определение скалярного произведения, перечислите его свойства.
8. Как вычислить скалярное произведение, зная координаты векторов?
9. Какие тройки векторов называются правыми?
10. Что называется векторным произведением?
11. Как определяется смешанное произведение?
12. Каковы условия ортогональности, коллинеарности, компланарности?
13. Какими геометрическими свойствами обладают векторное и смешанное произведения?

Глава 2

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

§ 1. Уравнение прямой на плоскости

1. Общее уравнение прямой

Прямая на плоскости задается однозначно, если известны вектор, которому она перпендикулярна, и точка, через которую она проходит. Вектор, перпендикулярный прямой, будем называть *нормальным* вектором, или вектором *нормали*, и обозначим через $\boldsymbol{n}(A, B)$, где (A, B) – координаты в прямоугольной декартовой системе координат. Точка, через которую проходит данная прямая, называется *начальной точкой*, обозначим ее $M_0(x_0, y_0)$.

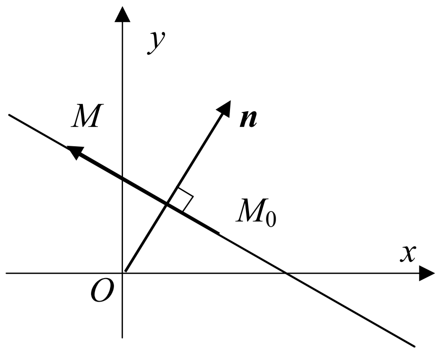


Рис. 18

Произвольная точка $M(x, y)$ лежит на прямой в том и только том случае, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору нормали $\boldsymbol{n}$ (рис. 18). В свою очередь $\overrightarrow{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0.$$

Учитывая, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x - x_0, y - y_0)$, запишем скалярное произведение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Преобразуем это равенство:

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0,$$

обозначим через $C = -Ax_0 - By_0$, получим

$$Ax + By + C = 0.$$

Это уравнение есть *общее уравнение прямой.* Напомним, что (A, B) – координаты нормального вектора.

Рассмотрим частные случаи:

1) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ (т. е. вектор нормали $\boldsymbol{n}(A, B)$), тогда уравнение примет вид

$$Ax + By = 0.$$

Эта прямая проходит через начало координат (0, 0);

2) $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$ (т. е. вектор нормали $\boldsymbol{n}(A, 0)$), тогда

$$Ax + C = 0, \text{ или } x = -\frac{C}{A}.$$

Эта прямая параллельна оси Oy (рис. 19);

3) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ (т. е. вектор нормали $\boldsymbol{n}(0, B)$), тогда

$$By + C = 0, \text{ или } y = -\frac{C}{B}.$$

Эта прямая параллельна оси Ox (рис. 20);

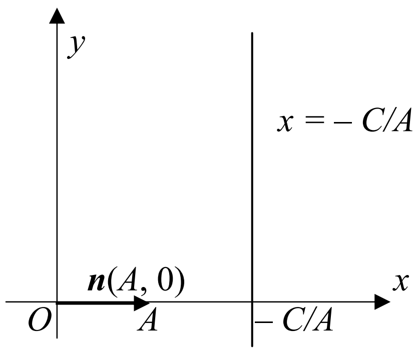


Рис. 19

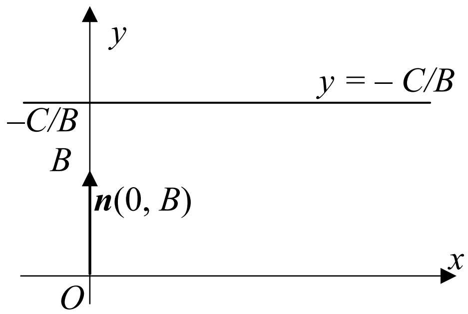


Рис. 20

4) $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$ (т. е. вектор нормали $\boldsymbol{n}(A, 0)$), тогда

$$Ax = 0, \text{ или } x = 0.$$

Это уравнение оси Oy;

5) $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ (т. е. вектор нормали $\boldsymbol{n}(0, B)$), тогда

$$By = 0, \text{ или } y = 0.$$

Это уравнение оси Ox.

2. Уравнение прямой в отрезках

Пусть задано общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

и $C \neq 0$, т. е. прямая не проходит через начало координат. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$Ax + By = -C,$$

разделим уравнение на $(-C)$, получим

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1;$$

перепишем дроби в виде

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1;$$

обозначим $-\frac{C}{A} = a$ и $-\frac{C}{B} = b$, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравнение называется уравнением *прямой в отрезках*.

Установим смысл входящих в уравнение параметров, для этого дадим переменной x значение a, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad => \quad 1 + \frac{y}{b} = 1 \quad => \quad y = 0.$$

Значит, прямая проходит через точку с координатами $(a, 0)$.

Пусть теперь $y = b$, уравнение примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{b}{b} = 1 \quad => \quad \frac{x}{a} + 1 = 1 \quad => \quad x = 0.$$

Следовательно, прямая проходит через точку $(0, b)$. Полученные точки $(a, 0)$ и $(0, b)$ представляют собой точки пересечения прямой с осями координат. Заметим, что параметры a и b могут быть как положительными, так и отрицательными, независимо друг от друга.

Геометрический смысл их заключается в следующем: a – это отрезок, который прямая отсекает по оси Ox от начала координат, $a > 0$, если отрезок отсекается в положительной части оси и $a < 0$ в другом случае; b – это отрезок, который прямая отсекает по оси Oy (рис. 21).

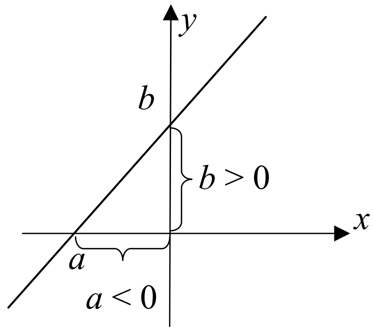


Рис. 21

3. Векторно-параметрическое и параметрические уравнения прямой на плоскости

Прямая может быть задана однозначно не только с помощью нормального вектора, т. е. вектора, ей перпендикулярного. Прямая на плоскости задана однозначно, если известны вектор, параллельный прямой, и начальная точка. Вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором* прямой и обозначается $\boldsymbol{q}(q_1, q_2)$ (рис. 22).

Произвольная точка $M(x, y)$ лежит на прямой только в том случае, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{q}$, и, следовательно, найдется такое число t, что будет выполняться равенство

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{q}.$$

Обозначим через $\boldsymbol{r}(x, y)$ радиус-вектор точки $M(x, y)$, через $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0)$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$, тогда $\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, и получаем

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{q}.$$

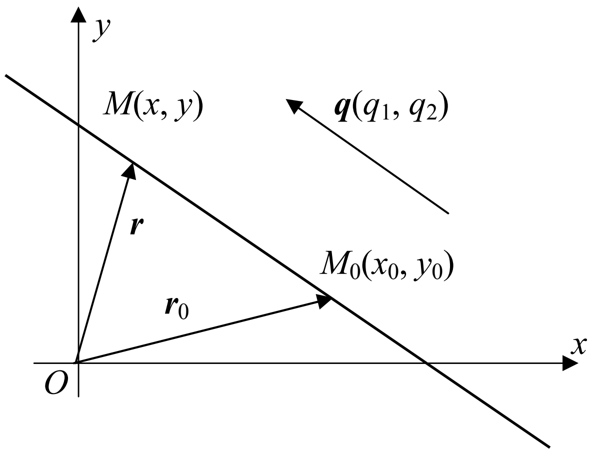


Рис. 22

Это *векторно-параметрическое уравнение прямой.* В полученном уравнении участвуют вектора: $\boldsymbol{q}$ – направляющий вектор, $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор начальной точки, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой и параметр t. Запишем это уравнение через координаты соответствующих векторов:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x - x_0, y - y_0),\ t\boldsymbol{q} = (q_1 t, q_2 t),$$

следовательно,

$$(x - x_0, y - y_0) = (q_1 t, q_2 t).$$

Приравняем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} x - x_0 = q_1 t, \\ y - y_0 = q_2 t. \end{cases}$$

Получили *параметрические уравнения прямой* на плоскости, где (q_1, q_2) – координаты направляющего вектора; (x_0, y_0) – координаты начальной точки. Иногда эти уравнения записывают в виде

$$\begin{cases} x = q_1 t + x_0, \\ y = q_2 t + y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $q_1 = 0$, $q_2 \neq 0$ (рис. 23), тогда

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = q_2 t + y_0. \end{cases}$$

С учетом того, что t – произвольное число, y принимает любые значения независимо от x, и прямая задается уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y \text{ – любое.} \end{cases}$$

2. Пусть $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$ (рис. 24), тогда уравнения принимают вид

$$\begin{cases} x = q_1 t + x_0, \\ y = y_0, \end{cases}$$

и, значит, x – любое и $y = y_0$.

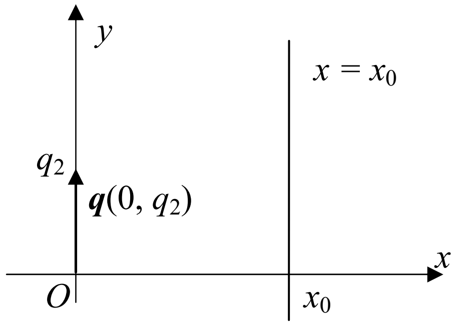


Рис. 23

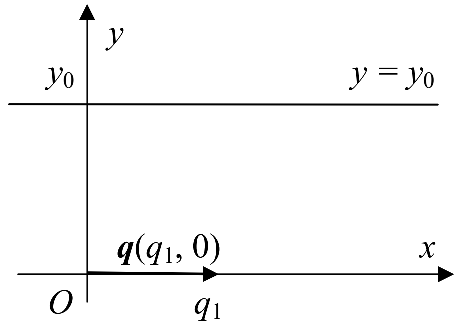


Рис. 24

4. Каноническое уравнение прямой на плоскости

Пусть прямая задана своим направляющим вектором $\boldsymbol{q}(q_1, q_2)$ и начальной точкой $M_0(x_0, y_0)$, предположим, что $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. Из параметрических уравнений прямой вытекает, что

$$t = \frac{x - x_0}{q_1} \text{ и } t = \frac{y - y_0}{q_2};$$

приравнивая правые части этих выражений, получим

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2}.$$

Это *каноническое уравнение прямой* на плоскости.

Частные случаи этого уравнения уже обсуждались, когда рассматривали параметрические уравнения прямой.

Когда $q_1 = 0$, $q_2 \neq 0$, $\boldsymbol{q}(0, q_2)$, тогда уравнение $x = x_0$ можно рассматривать и как каноническое уравнение.

В случае $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$, $\boldsymbol{q}(q_1, 0)$ получаем $y = y_0$.

5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть даны точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

Запишем каноническое уравнение. В качестве направляющего вектора прямой (AB) можно взять вектор $\overrightarrow{AB}$ с координатами $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. В качестве начальной точки можно выбрать любую из точек A или B.

Пусть это будет точка $A(x_A, y_A)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Полученное уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.*

Очевидно, что если $x_A = x_B = C$ (C = const), то $A(C, y_A)$, $B(C, y_B)$ и уравнение прямой будет иметь вид $x = C$ (рис. 25).

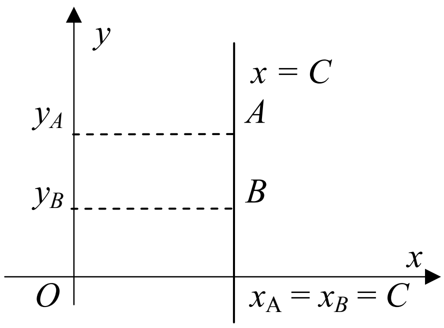


Рис. 25

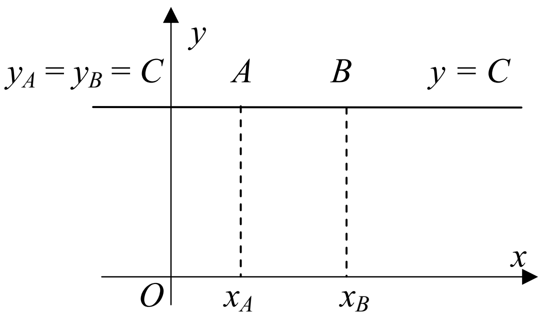


Рис. 26

Если $y_A = y_B = C$, то уравнение будет следующим: $y = C$ (рис. 26).

6. Нормальное уравнение прямой

Рассмотрим общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0,$$

очевидно, что $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$. Разделим уравнение на корень $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, получим уравнение

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Знак перед корнем выбираем противоположный знаку C. Учитывая, что (A, B) – координаты нормального вектора $\boldsymbol{n}$, то деление на $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ приводит нормаль к вектору единичной длины, коллинеарному исходному вектору $\boldsymbol{n}$.

Действительно, пусть

$$\boldsymbol{n}_0 = \left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}; \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \right),$$

тогда модуль

$$\left|\boldsymbol{n}_0\right| = \sqrt{\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2}} = 1.$$

Пусть φ – угол между вектором единичной длины $\boldsymbol{n}_0$ и положительным направлением оси Ox (рис. 27), тогда

$$\cos\varphi = \frac{\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}}{\left|\boldsymbol{n}_0\right|} = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}}{\left|\boldsymbol{n}_0\right|} = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

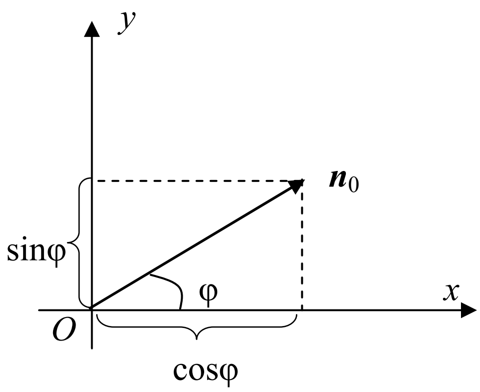


Рис. 27

Учитывая, что величина $\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ всегда отрицательна, обозначим эту дробь $(-p)$, где $p > 0$, уравнение при этом примет вид

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.$$

Геометрический смысл угла φ ясен – это угол между вектором $\boldsymbol{n}_0$ и положительным направлением оси Ox, выясним смысл параметра p.

Найдем расстояние от прямой $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ до начала координат (рис. 28). Для этого запишем уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно данной. Очевидно, что в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\boldsymbol{n}_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$, вместо начальной

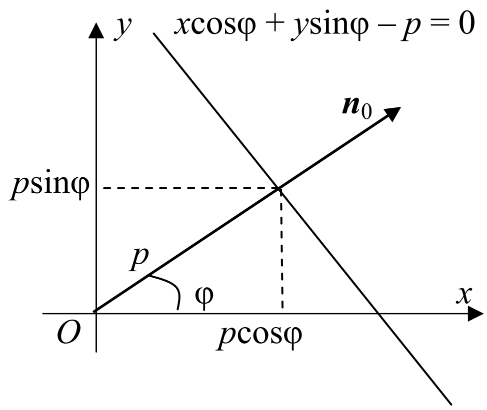


Рис. 28

точки точку $O(0,\ 0)$. Воспользовавшись каноническим уравнением, получим

$$\frac{x-0}{\cos\varphi}=\frac{y-0}{\sin\varphi}.$$

Решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\cos\varphi}=\dfrac{y}{\sin\varphi}, \\ x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0, \end{cases}$$

найдем точку пересечения этих прямых. Из первого уравнения имеем

$$y=x\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

подставляем во второе уравнение:

$$x\cos\varphi+x\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}-p=0 \quad => \quad \frac{x\cos^2\varphi+x\sin^2\varphi}{\cos\varphi}-p=0 \quad =>$$

$$=> \quad \frac{x}{\cos\varphi}-p=0.$$

Решение системы:

$$\begin{cases} x=p\cos\varphi, \\ y=p\sin\varphi. \end{cases}$$

Следовательно, $(p\ \cos\varphi,\ p\ \sin\varphi)$ – точка пересечения прямых. Найдем расстояние от точки пересечения до начала координат, получим

$$\sqrt{(p\cos\varphi)^2+(p\sin\varphi)^2}=\sqrt{p^2\cos^2\varphi+p^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\sqrt{p^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\sqrt{p^2}=p.$$

Таким образом, p – это расстояние от прямой $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$ до начала координат. Уравнение

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$$

называют *нормальным уравнением прямой.*

Нормальное уравнение может быть записано в другой форме. Как уже было указано, вектор нормали в такой записи имеет единичную длину, следовательно, его координаты есть направляющие косинусы, т. е. $\boldsymbol{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$, где α и β – углы, образованные нормалью с осями координат. Тогда нормальное уравнение прямой примет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0.$$

7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, предположим, что $B \neq 0$, тогда

$$By = -Ax - C \;\Rightarrow\; y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обозначим $-\frac{A}{B} = k$, для второй дроби было введено обозначение, когда рассматривалась прямая в отрезках, $-\frac{C}{B} = b$. Получим привычное со средней школы уравнение

$$y = kx + b,$$

называемое *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

Смысл параметра b был выяснен ранее: это длина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. При этом $b > 0$, если отсекается отрезок в положительной части оси Oy, и $b < 0$, если отрезок отсекается в отрицательной части оси Oy. Как известно из школьного курса математики, k – это тангенс угла наклона, образованный прямой и положительной частью оси Ox (угол считается от оси Ox против часовой стрелки). Если $k > 0$, то угол острый, при $k < 0$ угол тупой (рис. 29, 30).

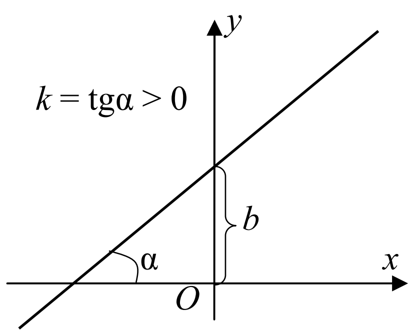


Рис. 29

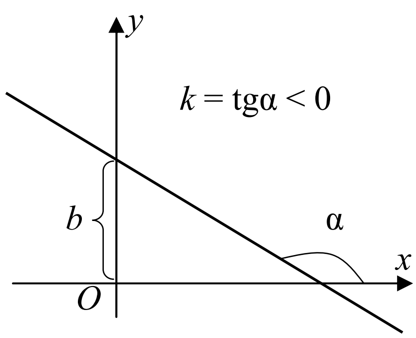


Рис. 30

Уравнение прямой с угловым коэффициентом можно получить и из канонического уравнения. Пусть прямая задана уравнением

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2}.$$

Тогда, выражая y, получаем

$$q_2(x - x_0) = q_1(y - y_0) \quad => \quad y - y_0 = \frac{q_2}{q_1}(x - x_0) \quad =>$$

$$=> \quad y = \frac{q_2}{q_1}x - \frac{q_2}{q_1}x_0 + y_0.$$

Обозначим $k = \frac{q_2}{q_1}$, $b = -\frac{q_2}{q_1}x_0 + y_0$, получаем требуемое уравнение

$$y = kx + b.$$

Примеры решения типовых задач

Рассмотрим несколько задач, иллюстрирующих связь и преимущества различных способов задания прямой на плоскости.

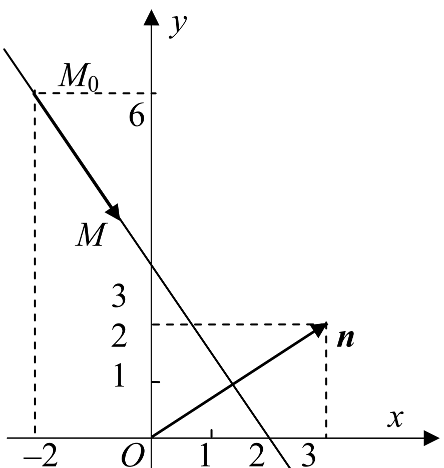


Рис. 31

Пример 1

Дано: $\boldsymbol{n}(3;\ 2)$ – нормальный вектор, точка $M_0(–2;\ 6)$ – начальная точка (рис. 31). Запишем уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$.

Пусть точка $M(x, y)$ лежит на прямой, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ $(x + 2, y – 6)$ перпендикулярен $\boldsymbol{n}$, и, значит, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0,$$
$$3(x + 2) + 2(y – 6) = 0,$$
$$3x + 6 + 2y – 12 = 0,$$
$$3x + 2y – 6 = 0.$$

Это общее уравнение прямой.

Перейдем к уравнению в отрезках. Для этого перенесем свободный член в правую часть:

$$3x + 2y = 6.$$

Разделим уравнение на 6:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1.$$

Из уравнения в отрезках видно, что отрезки, отсекаемые на осях Ox и Oy, соответственно равны $a = 2$, $b = 3$ (рис. 32).

Выразим из общего уравнения $3x + 2y - 6 = 0$ переменную y, получим

$$2y = -3x + 6 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}x + 3.$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом, где $k = -3/2 < 0$, угол α – тупой, $b = 3$.

В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\boldsymbol{q}(-2; 3)$. Действительно, указанный вектор $\boldsymbol{q}(-2; 3)$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}(3; 2)$, так как их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{q}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0,$$

следовательно, $\boldsymbol{q}$ параллелен прямой (рис. 33).

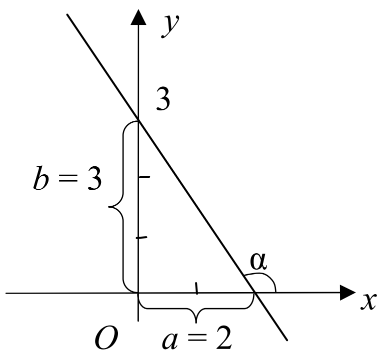


Рис. 32

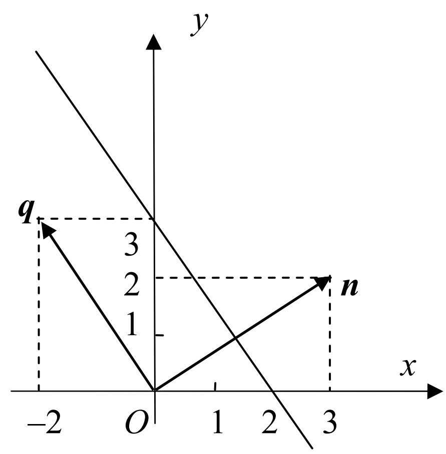


Рис. 33

Запишем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-6}{3}$$

с начальной точкой $M_0(-2; 6)$ и направляющим вектором $\boldsymbol{q}(-2; 3)$.

Приравняем полученные дроби параметру t, получим

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-6}{3}=t\,.$$

Выражаем переменные x и y:

$$\frac{x+2}{-2}=t \text{ и } \frac{y-6}{3}=t\,,$$

получаем уравнения

$$\begin{cases} x+2=-2t, \\ y-6=3t, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-2t-2, \\ y=3t+6. \end{cases}$$

Это параметрические уравнения прямой.

Заметим, что точки $M_0(-2;\ 6)$ и $M_1(4;\ -3)$ лежат на прямой. Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x+2}{4+2}=\frac{y-6}{-3-6} \quad => \quad \frac{x+2}{6}=\frac{y-6}{-9}\,.$$

Преобразовав это уравнение, получим:

$$-9x-18=6y-36 \quad => \quad 3x+2y-6=0.$$

Мы получили первоначальное общее уравнение.

Разделим общее уравнение на $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, придем к уравнению

$$\frac{3}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0\,.$$

Это нормальное уравнение прямой, где $\cos\varphi=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ и расстояние от начала координат до прямой равно $\dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

Пример 2

Даны вершины треугольника $A(1;\ 1)$, $B(10;\ 13)$, $C(13;\ 6)$. Составить уравнения медианы, высоты и биссектрисы угла A.

Медиана – прямая, проходящая через точку A и середину противоположной стороны BC. Найдем середину стороны BC и обозначим ее A':

$$x_{A'} = \frac{10+13}{2} = 11,5; \; y_{A'} = \frac{13+6}{2} = 9,5.$$

Получаем $A'(11,5; 9,5)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки A и A':

$$\frac{x-1}{11,5-1} = \frac{y-1}{9,5-1} \;\; => \;\; \frac{x-1}{10,5} = \frac{y-1}{8,5}.$$

Преобразовывая это уравнение, получим:

$$8,5x - 8,5 = 10,5y - 10,5 \;\; => \;\; 8,5x - 10,5y + 2 = 0 \;\; =>$$
$$=> \;\; 17x - 21y + 4 = 0.$$

Это общее уравнение медианы AA'.

Высота – прямая, проходящая через точку A перпендикулярно прямой BC. Запишем уравнение прямой BC:

$$\frac{x-10}{13-10} = \frac{y-13}{6-13} \;\; => \;\; \frac{x-10}{3} = \frac{y-13}{-7}.$$

Воспользовавшись свойством пропорции, преобразуем уравнение:

$$-7x + 70 = 3y - 39 \;\; => \;\; 7x + 3y - 109 = 0.$$

Это общее уравнение прямой BC.

Записать уравнение прямой, перпендикулярной данной, можно разными способами. Например, можно записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 1)$ с направляющим вектором $\boldsymbol{q}(7; 3)$. (В данном случае вектор нормали $\boldsymbol{n}$ прямой BC можно рассматривать как направляющий вектор высоты).

Каноническое уравнение высоты будет иметь вид

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{3}.$$

Перейдем к общему уравнению:

$$3x - 3 = 7y - 7 \;\; => \;\; 3x - 7y + 4 = 0.$$

Можно было бы получить уравнение высоты, используя уравнение с угловым коэффициентом. Две прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$. Запишем уравнение прямой BC с угловым коэффициентом:

$$7x + 3y - 109 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = -7x + 109 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{7}{3}x + \frac{109}{3};$$

$k_1 = -7/3$, значит, $k_2 = 3/7$. Тогда уравнение прямой, перпендикулярной BC, будет иметь вид

$$y = \frac{3}{7}x + b.$$

Значение параметра b найдем, подставив в уравнение координаты точки $A(1; 1)$:

$$1 = \frac{3}{7} + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{4}{7}.$$

Уравнение приобретет вид $y = \frac{3}{7}x + \frac{4}{7}$.

Найдем уравнение биссектрисы. Пусть D – точка пересечения биссектрисы со стороной BC. Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$. Найдем длины сторон треугольника:

$$|AB| = \sqrt{(10-1)^2 + (13-1)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15,$$

$$|AC| = \sqrt{(13-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Следовательно, точка D делит отрезок BC в отношении $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{13}$, и, значит, координаты D будут определяться следующими формулами:

$$x = \frac{\mu x_B + \lambda x_C}{\mu + \lambda} = \frac{13 \cdot 10 + 15 \cdot 13}{13 + 15} = \frac{325}{28},$$

$$y = \frac{\mu y_B + \lambda y_C}{\mu + \lambda} = \frac{13 \cdot 13 + 15 \cdot 6}{13 + 15} = \frac{259}{28}.$$

Остается записать уравнение прямой, проходящей через две точки $A(1;\ 1)$ и $D\left(\frac{325}{28}; \frac{259}{28}\right)$:

$$\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1} = \frac{y-1}{\frac{259}{28}-1} \quad => \quad \frac{x-1}{297} = \frac{y-1}{231}.$$

Воспользовавшись свойством пропорции, получаем

$$231x - 231 = 297y - 297 \quad => \quad 231x - 297y + 66 = 0.$$

Разделим уравнение на 33, получим

$$7x - 9y + 2 = 0.$$

Это общее уравнение биссектрисы.

Эту задачу можно было решить, используя формулу для нахождения расстояния d от точки $M(x_1;\ y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Биссектрису угла можно рассматривать как прямую, каждая точка которой равноудалена от сторон угла. Найдем уравнение сторон AB и AC. Для стороны AB имеем:

$$\frac{x-1}{10-1} = \frac{y-1}{13-1} \quad => \quad \frac{x-1}{9} = \frac{y-1}{12} \quad => \quad 12x - 12 = 9y - 9.$$

Разделим уравнение на 3 и приведем подобные слагаемые:

$$4x - 3y - 1 = 0.$$

Это уравнение прямой AB. Для стороны AC аналогично получаем:

$$\frac{x-1}{13-1} = \frac{y-1}{6-1} \quad => \quad \frac{x-1}{12} = \frac{y-1}{5} \quad => \quad 5x - 5 = 12y - 12 \quad =>$$
$$=> \quad 5x - 12y + 7 = 0.$$

Это уравнение прямой AC. Расстояние от произвольной точки $M(x;\ y)$ до прямой AB

$$d_{AB} = \frac{|4x - 3y - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|4x - 3y - 1|}{5}.$$

Расстояние от M до прямой AC

$$d_{AC} = \frac{|5x - 12y + 7|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|5x - 12y + 7|}{13}.$$

Учитывая, что $d_{AB} = d_{AC}$, получаем

$$\frac{|4x - 3y - 1|}{5} = \frac{|5x - 12y + 7|}{13} \quad => \quad \frac{4x - 3y - 1}{5} = \pm\frac{5x - 12y + 7}{13} \quad =>$$

$$=> \quad 52x - 39y - 13 = \pm\,(25x - 60y + 35).$$

Одна прямая имеет вид

$$52x - 39y - 13 = 25x - 60y + 35 \quad => \quad 27x + 21y - 48 = 0 \quad =>$$

$$=> \quad 9x + 7y - 16 = 0;$$

другая прямая

$$52x - 39y - 13 = -25x + 60y - 35 \quad => \quad 77x - 99y + 22 = 0 \quad =>$$

$$=> \quad 7x - 9y + 2 = 0.$$

Мы получили два уравнения биссектрис внешнего и внутреннего углов. Найдем их точки пересечения с прямой BC, ее уравнение было получено выше:

$$7x + 3y - 109 = 0.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} 7x + 3y - 109 = 0, \\ 9x + 7y - 16 = 0. \end{cases}$$

Получаем $y = -39{,}5$, $x = 32{,}5$. Точка с координатами $(32{,}5; -39{,}5)$ не лежит на отрезке BC, где $B(10; 13)$ и $C(13; 6)$. Следовательно,

$$9x + 7y - 16 = 0 \, –$$

уравнение биссектрисы внешнего угла.

Найдем точку пересечение второй биссектрисы со стороной BC:

$$\begin{cases} 7x + 3y - 109 = 0, \\ 7x - 9y + 2 = 0. \end{cases}$$

Как видно, точка с координатами $\left(11\frac{17}{28}; 9\frac{1}{4}\right)$ лежит внутри отрезка BC. Следовательно, второе уравнение и есть уравнение биссектрисы внутреннего угла A.

§ 2. Уравнения плоскости

1. Общее уравнение плоскости

Плоскость задается однозначно, если известен вектор, которому она перпендикулярна, и точка, через которую она проходит. Аналогично прямой на плоскости такой вектор называется *нормальным* вектором, или вектором *нормали*, точка называется *начальной точкой*. Обозначим нормаль $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ и начальную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на плоскости в том и только том случае, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$ и, значит, их скалярное произведение равно нулю. Учитывая, что

$$\overrightarrow{M_0M}\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \text{ и } \boldsymbol{n}(A, B, C),$$

получаем

$$(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \quad => \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, имеем:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Обозначив $Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D, придем к уравнению

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Это *общее уравнение плоскости*.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $D = 0$, уравнение принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Очевидно, что в этом случае плоскость проходит через начало координат.
2. Если одна из координат нормального вектора равна нулю, то плоскость параллельна соответствующей оси координат. Например, $A = 0$, тогда $By + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси Ox, при $B = 0$ плоскость параллельна оси Oy, при $C = 0$ – оси Oz.

3. Если две координаты нормального вектора равны нулю, то плоскость перпендикулярна одной из осей координат и параллельна соответствующей координатной плоскости. Например, $A = B = 0$, тогда $Cz + D = 0$ или $z = –D/C$. Это уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy и перпендикулярной оси Oz. Аналогично при $A = C = 0$ плоскость перпендикулярна оси Oy и параллельна плоскости xOz, при $B = C = 0$ плоскость перпендикулярна оси Ox и параллельна плоскости yOz. Если в этих случаях и $D = 0$, то плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью.

2. Уравнение плоскости в отрезках

Предположим, что в общем уравнении плоскости $D \neq 0$, т. е. плоскость не проходит через начало координат. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$Ax + By + Cz = -D,$$

разделим уравнение на ($–D$):

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1 \quad => \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Обозначим $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Это *уравнение плоскости в отрезках*.

Выясним геометрический смысл входящих в уравнение параметров. Пусть $y = z = 0$, тогда $\frac{x}{a} = 1$ и $x = a$, следовательно, плоскость проходит через точку с координатами (a; 0; 0). Аналогично, полагая $x = y = 0$, получаем $z = c$ и соответственно точку (0; 0; c), принадлежащую плоскости. Если $x = z = 0$, то $y = b$ и точка с координатами (0; b; 0) лежит на плоскости. Полученные точки (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c) – точки пересечения плоскости с координатными осями. Следовательно, a, b, c – это длины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат, взятые со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, в какой части оси произошло пересечение.

С помощью уравнения плоскости в отрезках легко изобразить плоскость в прямоугольных декартовых координатах.

Например, плоскость, заданная общим уравнением

$$2x + 3y + z - 6 = 0,$$

преобразуется в уравнение в отрезках:

$$2x + 3y + z = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1.$$

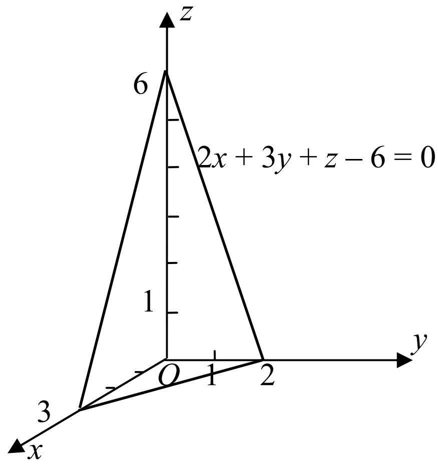


Рис. 34

Отметив точки с координатами (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 6), принадлежащие плоскости, можно начертить треугольник плоскости, отсекаемый координатными плоскостями (рис. 34).

3. Векторное и векторно-параметрическое уравнения плоскости

Пусть задан базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, тогда плоскость будет определена, если будут заданы два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ и начальная точка M_0. (Не теряя общности, можно считать, что $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ приложены к точке M_0).

Произвольная точка M лежит на плоскости, если вектор $\overline{M_0M}$ лежит на плоскости (рис. 35). Тогда вектор $\overline{M_0M}$ можно разложить по векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\overline{M_0M} = t_1\boldsymbol{p} + t_2\boldsymbol{q}.$$

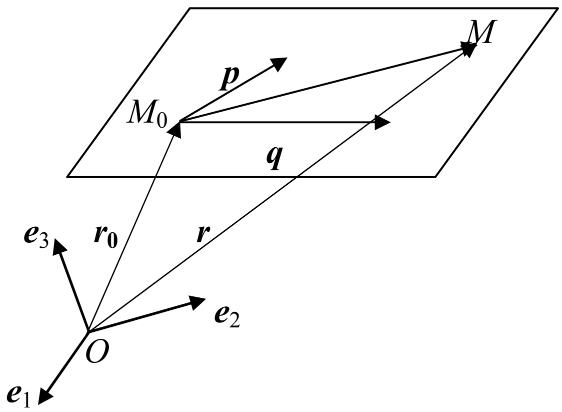


Рис. 35

С другой стороны, обозначив через $\boldsymbol{r}_0$ радиус-вектор точки M_0, а через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор точки M, получим $\overline{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$. Приравнивая правые части, получим

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t_1\boldsymbol{p} + t_2\boldsymbol{q}.$$

Это *векторное уравнение плоскости.*

В базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ имеют координаты:

$$\boldsymbol{r}(x, y, z),\ \boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0),$$

$$\boldsymbol{p}(p_1, p_2, p_3),\ \boldsymbol{q}(q_1, q_2, q_3).$$

Найдем координаты векторов векторного уравнения плоскости:

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$t_1\boldsymbol{p} + t_2\boldsymbol{q} = (t_1p_1 + t_2q_1, t_1p_2 + t_2q_2, t_1p_3 + t_2q_3).$$

Приравниваем соответствующие координаты и получаем:

$$\begin{cases} x - x_0 = t_1p_1 + t_2q_1, \\ y - y_0 = t_1p_2 + t_2q_2, \\ z - z_0 = t_1p_3 + t_2q_3. \end{cases}$$

Это *параметрические уравнения плоскости.*

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Известно, что через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна плоскость. Пусть заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит в той же плоскости, что и точки M_1, M_2, M_3, если все три вектора $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_2M}$, $\overrightarrow{M_3M}$ лежат в одной плоскости.

Таким образом, точка M лежит в плоскости $M_1M_2M_3$, если векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ коллинеарны и, следовательно, их смешанное произведение равно нулю,

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

Учитывая, что указанные векторы имеют координаты

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

смешанное произведение записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это *уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.*

5. Нормальное уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ – вектор нормали. Разделим уравнение на $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, знак выбираем противоположный знаку свободного члена D. Уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z +$$
$$+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

Обозначим $\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -p$ $(p > 0)$; с учетом того, что

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\beta,$$
$$\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{n}$; α, β, γ – углы, образованные вектором $\boldsymbol{n}$ и осями координат, получаем

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Это *нормальное уравнение*, p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, т. е. расстояние от начала координат до плоскости.

Примеры решения типовых задач

Рассмотрим связь между различными способами задания плоскости.

Пример 1

Даны три точки $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 2;\ 0)$, $C(3;\ 0;\ 1)$. Найдем уравнение плоскости (ABC).

Запишем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 2-1 & 0-1 \\ 3-1 & 0-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (x-1) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (y-1) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot (z-1) = 0.$$

Вычислим определители:

$$-(x-1) - 2(y-1) - 3(z-1) = 0,$$
$$-x - 2y - 3z + 6 = 0.$$

Умножим уравнение на (–1), получим

$$x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

Это общее уравнение плоскости. Убедимся, что это искомое уравнение плоскости, которая проходит через три точки. Для этого подставим координаты точек в уравнение:

$$1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 6 = 0,$$
$$2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 6 = 0,$$
$$3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 6 = 0.$$

Действительно, полученное уравнение превратилось в тождества. Следовательно, все три точки лежат на этой плоскости.

Запишем уравнение плоскости в отрезках:

$$x + 2y + 3z = 6.$$

Делим это уравнение на 6, получаем

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1.$$

Очевидно, что плоскость отсекает по оси Ox отрезок длиной 6 единиц, по оси Oy отрезок длиной 3 и по оси Oz – отрезок в 2 единицы. Теперь нетрудно изобразить эту плоскость в декартовой системе координат (рис. 36).

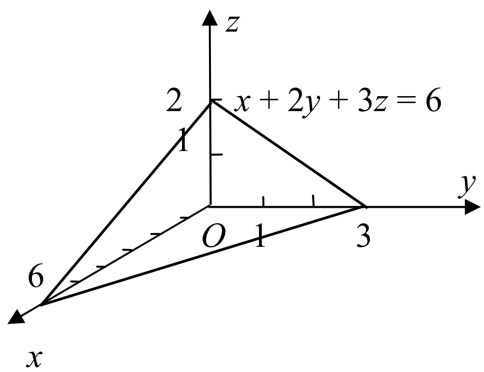


Рис. 36

В качестве двух неколлинеарных направляющих векторов плоскости можно взять векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для того чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала:

$$\overrightarrow{AB}(1;\ 1;\ -1),$$
$$\overrightarrow{AC}(2;\ -1;\ 0).$$

В качестве начальной точки выбираем точку $A(1,\ 1,\ 1)$, ее координаты совпадают с координатами ее радиус-вектора $\boldsymbol{r}_0(1,\ 1,\ 1)$. Получаем, что в уравнении

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t_1\boldsymbol{p} + t_2\boldsymbol{q}$$

$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{r}_0(1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{r}(x,\ y,\ z)$, t_1, t_2 – произвольные параметры.

Запишем это векторно-параметрическое уравнение как параметрическое. Учитывая, что

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x - 1,\ y - 1,\ z - 1),$$
$$t_1\boldsymbol{p} = t_1\overrightarrow{AB} = (t_1,\ t_1,\ -t_1),$$
$$t_2\boldsymbol{q} = t_2\overrightarrow{AC} = (2t_2,\ -t_2,\ 0)$$

и приравнивая соответствующие координаты, получаем:

$$\begin{cases} x - 1 = t_1 + 2t_2, \\ y - 1 = t_1 - t_2, \\ z - 1 = -t_1. \end{cases}$$

Это параметрическое уравнение плоскости.

Вернемся к общему уравнению плоскости

$$x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

Умножим уравнение на нормирующий множитель $\dfrac{1}{\pm|\boldsymbol{n}|}$, где $\boldsymbol{n}$ – вектор нормали. В данном случае $\boldsymbol{n}(1, 2, 3)$, тогда $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$. Знак нормирующего множителя выбираем противоположный знаку свободного члена (–6). Получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{14}}x + \frac{2}{\sqrt{14}}y + \frac{3}{\sqrt{14}}z - \frac{6}{\sqrt{14}} = 0.$$

Это нормальное уравнение плоскости. Здесь направляющие косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$, где α, β, γ – углы, образованные вектором нормали с соответствующими осями координат; $p = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$ – расстояние от начала координат до плоскости ABC.

Пример 2

Определить расстояние от точки $M(3; 5; -8)$ до плоскости

$$6x - 3y + 2z - 28 = 0.$$

Рассмотрим задачу в общем виде. Даны точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$. Требуется найти расстояние от точки M_1 до плоскости.

Расстояние d от точки M_1 до плоскости измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость:

$$d = \left|\overrightarrow{KM_1}\right|,$$

где $K(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая плоскости α. Так как векторы $\overrightarrow{KM_1}$ и $\boldsymbol{n}$ коллинеарны, то их скалярное произведение имеет вид

$$\left(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{KM_1}\right) = |\boldsymbol{n}| \cdot \left|\overrightarrow{KM_1}\right| \cdot \cos\varphi = \pm|\boldsymbol{n}| \cdot d,$$

так как угол φ равен 0° или 180°. Учитывая, что $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$, $\overrightarrow{KM_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, запишем скалярное произведение через координаты сомножителей:

$$\left(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{KM_1}\right) = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0),$$

$$\left(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{KM_1}\right) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0 =$$

$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D =$$

$$= (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

Выражение $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, так как точка $K(x_0, y_0, z_0)$ лежит на плоскости α и ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Имеем

$$\left(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{KM_1}\right) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

$$\pm|\boldsymbol{n}| \cdot d = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D.$$

Отсюда получаем важную для решения задачи формулу:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Таким образом, чтобы найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, нужно в левую часть уравнения вместо текущих координат x, y, z подставить координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и разделить полученное число на модуль вектора нормали $|\boldsymbol{n}|$, взяв результат по абсолютной величине.

Вернемся к поставленной задаче. Подставим координаты точки $M(3; 5; -8)$ в уравнение плоскости $6x - 3y + 2z - 28 = 0$ и разделим на модуль нормали:

$$d = \frac{|6 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) - 28|}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|18 - 15 - 16 - 28|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{|-41|}{7} = \frac{41}{7}.$$

Пример 3

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, 5)$ и перпендикулярной вектору $4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

Данный вектор можно рассматривать как вектор нормали искомой плоскости, общее уравнение которой имеет вид

$$4x + 3y + 2z + D = 0.$$

Для определения значения свободного члена подставим координаты точки M в уравнение:

$$4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + D = 0,$$
$$8 + 9 + 10 + D = 0,$$
$$D = -27.$$

Теперь можно записать уравнение искомой плоскости:

$$4x + 3y + 2z - 27 = 0.$$

Пример 4

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -2; 6)$, $M_2(5; -4; -2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy.

Будем искать уравнение плоскости в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

По условию $a = b$, поэтому уравнение можно переписать иначе:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1.$$

Подставляя координаты точек $M_1(1; -2; 6)$, $M_2(5; -4; -2)$ в последнее уравнение, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{-2}{a} + \dfrac{6}{c} = 1, \\ \dfrac{5}{a} + \dfrac{-4}{a} + \dfrac{-2}{c} = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{a} + \dfrac{6}{c} = 1, \\ \dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{c} = 1. \end{cases}$$

Решаем систему полученных уравнений:

$$\frac{4}{c} = 2 \quad => \quad c = 2.$$

Подставляем значение $c = 2$ во второе уравнение:

$$\frac{1}{a} - 1 = 1 \quad => \quad a = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x}{1/2} + \frac{y}{1/2} + \frac{z}{2} = 1, \text{ или } 4x + 4y + z - 2 = 0.$$

Пример 5

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 2; 1)$ параллельно плоскости $3x - 5y + 2z - 6 = 0$.

Очевидно, что вектор нормали к плоскости $3x - 5y + 2z - 6 = 0$ будет перпендикулярен и искомой плоскости, параллельной данной. Его координаты: $\boldsymbol{n}(3; -5; 2)$. Следовательно, искомая плоскость имеет уравнение

$$3x - 5y + 2z + D = 0.$$

Для определения значения свободного члена подставим в уравнение координаты точки M:

$$3 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + D = 0,$$

$$9 - 10 + 2 + D = 0,$$

$$D = -1.$$

Значит, требуемое уравнение

$$3x - 5y + 2z - 1 = 0.$$

Пример 6

Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; -1)$, $M_2(3; 5; 1)$ перпендикулярно плоскости $3x + 5y - z + 7 = 0$.

Очевидно, что нормальный вектор данной плоскости $\boldsymbol{n}(3; 5; -1)$ будет параллелен искомой плоскости, а вектор $\overrightarrow{\check{E}_1\check{E}_2} = (2, 3, 2)$ лежит в искомой плоскости, и, значит, их векторное произведение будет перпендикулярно искомой плоскости и может рассматриваться как нормаль:

$$\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{n}, \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = 13\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

Уравнение плоскости будет следующим:

$$13x - 8y - z + D = 0.$$

Найдем D, для этого подставим координаты, например, точки M_1, получим

$$13 \cdot 1 - 8 \cdot 2 - (-1) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad 13 - 16 + 1 + D =$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad D = 2.$$

Окончательно имеем требуемое уравнение:

$$13x - 8y - z + 2 = 0.$$

Пример 7

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;\ -1;\ 2)$ и перпендикулярной плоскостям $3x + 5y - 2z + 7 = 0$ и $x - 2y + 3z + 6 = 0$.

Очевидно, что нормали данных плоскостей $\boldsymbol{n}_1(3, 5, -2)$ и $\boldsymbol{n}_2(1, -2, 3)$ будут параллельны искомой плоскости, и, значит, за нормаль к ней можно взять их векторное произведение:

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = 11\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}.$$

Уравнение принимает вид

$$11x - 11y - 11z + D = 0.$$

Разделим его на 11, получим

$$x - y - z + D` = 0.$$

Подставим в это уравнение координаты точки $M(3;\ -1;\ 2)$, найдем D':

$$3 + 1 - 2 + D' = 0 \quad \Rightarrow \quad D' = -2.$$

Требуемое уравнение

$$x - y - z - 2 = 0.$$

§ 3. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Векторно-параметрическое и параметрические уравнения прямой в пространстве

Пусть в трехмерном пространстве заданы вектор $\boldsymbol{q}(q_1, q_2, q_3)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Требуется записать уравнение прямой, параллельной заданному вектору $\boldsymbol{q}$, который является *направляющим*, и проходящей через *начальную точку* M_0.

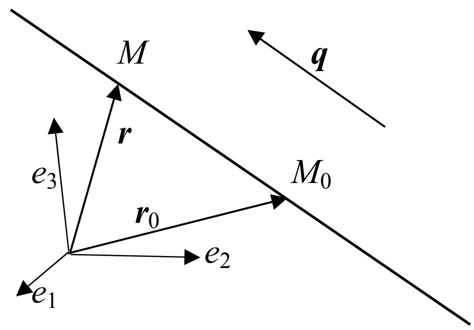


Рис. 37

Произвольная точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{q}$ (рис. 37). А это значит, что для любой $M(x, y, z)$ найдется значение параметра t такое, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\boldsymbol{q}.$$

Если обозначить через $\boldsymbol{r}_0$ радиус-вектор точки M_0, а через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор точки M, то

$$\overrightarrow{M_0M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t\boldsymbol{q}.$$

Это *векторно-параметрическое уравнение прямой в пространстве.* По внешнему виду это уравнение неотличимо от векторно-параметрического уравнения прямой на плоскости. Отличие состоит в том, что на плоскости векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{q}$ имеют две координаты, а в пространстве – три.

Учитывая, что координаты радиус-вектора и соответствующей точки одинаковы, получаем

$$\boldsymbol{r}(x, y, z),\ \boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$t\boldsymbol{q} = (q_1t, q_2t, q_3t),$$

приравниваем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} x - x_0 = q_1 t, \\ y - y_0 = q_2 t, \\ z - z_0 = q_3 t. \end{cases}$$

Полученная система представляет собой *векторные уравнения прямой в пространстве.*

2. Каноническое уравнение прямой в пространстве

Рассмотрим векторное уравнение прямой. Предположим, что координаты направляющего вектора отличны от нуля: $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $q_3 \neq 0$. Выразим параметр t из уравнений

$$\begin{cases} x - x_0 = q_1 t, \\ y - y_0 = q_2 t, \\ z - z_0 = q_3 t. \end{cases}$$

Получим

$$t = \frac{x - x_0}{q_1},\ t = \frac{y - y_0}{q_2},\ t = \frac{z - z_0}{q_3},$$

значит,

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2} = \frac{z - z_0}{q_3}.$$

Это *каноническое* уравнение прямой в пространстве.

Пусть $q_1 = 0$, $q_2 \neq 0$, $q_3 \neq 0$, векторные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = q_2 t, \\ z - z_0 = q_3 t, \end{cases}$$

и, выражая t, получаем равенства

$$\frac{y - y_0}{q_2} = \frac{z - z_0}{q_3} \text{ и } x = x_0.$$

Аналогично при $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$, $q_3 \neq 0$ получаем

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{z - z_0}{q_3} \text{ и } y = y_0.$$

При $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $q_3 = 0$

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2} \text{ и } z = z_0.$$

Таким образом, при равенстве нулю какой-либо координаты направляющего вектора приравниваем к нулю соответствующий числитель в каноническом уравнении.

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется записать уравнение прямой, проходящей через M_1 и M_2. В качестве направляющего вектора можно взять $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а в качестве начальной точки – любую из точек, например M_1. Запишем каноническое уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* в пространстве.

Очевидно, что если $x_2 = x_1$, то уравнение имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \; x = x_1.$$

При $y_2 = y_1$ и при $z_2 = z_1$ аналогично.

4. Задание прямой как пересечение двух плоскостей

Очевидно, что две плоскости в пространстве пересекаются по прямой. Две плоскости пересекаются, если нормальные векторы не являются коллинеарными. Таким образом, систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

в случае если $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны, можно рассматривать как способ задания прямой в пространстве.

Заметим, что прямая лежит в первой плоскости и, значит, нормаль $\boldsymbol{n}_1$ ей перпендикулярна, аналогично из того, что прямая лежит и во второй плоскости, следует, что нормаль $\boldsymbol{n}_2$ ей тоже перпендикулярна. Мы нашли два вектора, перпендикулярные прямой, для того чтобы найти вектор, параллельный прямой, возьмем векторное произведение векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Таким образом, направляющий вектор прямой $\boldsymbol{q}$ можно найти по формуле

$$\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что любая прямая в пространстве пересекает по крайней мере одну из координатных плоскостей, и, значит, по крайней мере одна из систем

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + C_2z + D_2 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

будет иметь решение, которое можно рассматривать как начальную точку прямой. Это позволяет переходить от уравнений прямой, заданных как пересечение двух плоскостей, к каноническому, параметрическому, векторно-параметрическому уравнениям.

Примеры решения типовых задач

Пример 1

Найти, если возможно, параметрические, каноническое уравнения, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (точки пересечения с координатными плоскостями) для прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Нормали к плоскостям имеют координаты $\boldsymbol{n}_1(2, 1, -2)$ и $\boldsymbol{n}_2(1, 2, -1)$. Найдем направляющий вектор прямой:

$$\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k} = (3, 0, 3).$$

Найдем точки пересечения прямой с координатными плоскостями:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z - 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2z - 1 = 0, \\ 2y - z - 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ y = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Получили, что точка (0, 1, 0) является точкой пересечения прямой и с плоскостью yOz ($x = 0$), и с плоскостью xOy ($z = 0$), так как эта точка лежит на оси Oy.

Полученная точка может рассматриваться как начальная точка прямой $M_0(0, 1, 0)$. Таким образом, зная направляющий вектор $\boldsymbol{q}(3, 0, 3)$, можем записать параметрическое и каноническое уравнения:

$$\frac{x-0}{3} = \frac{z-0}{3}, y = 1.$$

$$\frac{x}{3} = \frac{z}{3}, y = 1.$$

Умножим первое уравнение на 3, получим

$$x = z, y = 1.$$

Запишем параметрические уравнения

$$\begin{cases} x - 0 = 3t, \\ y - 1 = 0, \\ z - 0 = 3t, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1, \\ z = 3t, \end{cases}$$

учитывая, что t – произвольный параметр, поэтому $3t$ также принимает все значения на числовой прямой, можно переписать систему:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 1, \\ z = t. \end{cases}$$

Эта система представляет собой параметрические уравнения прямой.

Найдем точку пересечения прямой с плоскостью xOz ($y = 0$). Для этого решим систему

$$\begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0, \\ x + 2y - z - 2 = 0, \\ y = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x - 2z - 1 = 0, \\ x - z - 2 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на 2, получим

$$\begin{cases} x - z = \dfrac{1}{2}, \\ x - z = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что первые два уравнения противоречивы, и, значит, система несовместна. Следовательно, прямая плоскость xOz не пересекает, а плоскости xOy и yOz пересекает в одной точке на оси Oy, значит, невозможно записать уравнение этой прямой как прямой, проходящей через две заданные точки, если за точки предлагают взять точки пересечения с координатными плоскостями.

Пример 2

Записать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(1; 2; 3)$ и $M_2(3; 0; 1)$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{0-2} = \frac{z-3}{1-3} \text{ или } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-2}.$$

Умножим полученное уравнение на 2. Получим

$$x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}.$$

Пусть они равны некоторому параметру t:

$$x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}=t,$$

тогда

$$\begin{cases} x-1=t, \\ \dfrac{y-2}{-1}=t, \\ \dfrac{z-1}{-1}=t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1=t, \\ y-2=-t, \\ z-1=-t. \end{cases}$$

Это можно переписать в виде

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=-t+2, \\ z=-t+1. \end{cases}$$

Полученная система представляет собой параметрические уравнения прямой.

§ 4. Взаимное расположение прямых и плоскостей

1. Прямые на плоскости

Рассмотрим расположение двух прямых на плоскости. Они могут быть параллельными или пересекаться. Совпадающие прямые будем рассматривать как частный случай параллельных прямых. Перпендикулярные прямые – как частный случай пересекающихся прямых.

Очевидно, что две прямые параллельны, если у них коллинеарны направляющие вектора или, соответственно, нормальные вектора. В остальных случаях прямые пересекаются.

Найдем угол между двумя прямыми. Пусть уравнение прямой L_1 имеет вид $y = k_1x + b_1$, где $k_1 = \text{tg}\alpha_1$, а уравнение прямой L_2 – вид $y = k_2x + b_2$, где $k_2 = \text{tg}\alpha_2$.

Видно, что $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ и, значит, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (рис. 38). Следовательно,

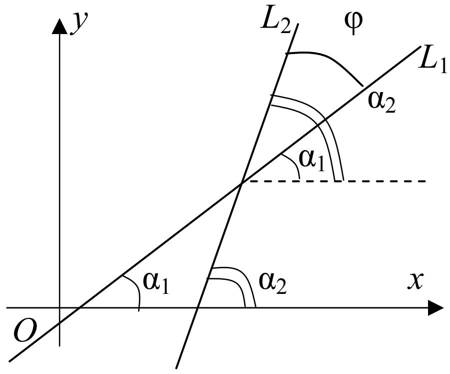


Рис. 38

$$\text{tg}\,\varphi = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{\text{tg}\,\alpha_2 - \text{tg}\,\alpha_1}{1 + \text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Полученная формула

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

определяет *один из углов между прямыми*, другой угол равен $\pi - \varphi$.

Пример 1

Прямые заданы уравнениями $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 2$. Найти угол между этими прямыми.

Очевидно, что $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, поэтому

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{-3 - 2}{1 + (-3) \cdot 2} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Таким образом, один из углов между данными прямыми равен $\frac{\pi}{4}$, другой угол равен $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Если прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

тогда $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ и $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$. Подставим значения k_1 и k_2 в формулу угла между прямыми и получим:

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2}} = \frac{\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{B_1B_2}}{\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{B_1B_2}} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Получили аналогичную *формулу для нахождения угла*:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Для простоты можно условиться под углом φ между двумя прямыми понимать острый положительный угол. Тогда тангенс этого угла будет всегда положительным. Поэтому для острого угла φ получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|.$$

Пример 2

Определить угол между прямыми $2x - 3y + 7 = 0$ и $4x - 8y + 9 = 0$.

По последней формуле имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2\cdot(-8)-(-3)\cdot 4}{2\cdot 4+(-3)\cdot(-8)}\right| = \left|\frac{-4}{32}\right| = \frac{1}{8}.$$

Очевидно, что для параллельных прямых тангенс угла между ними равен нулю. Поэтому для прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами

$$y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2,$$

получим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = 0$ и, значит, $k_1 = k_2$ – *условие параллельности* прямых. Для прямых, заданных общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right| = 0.$$

Значит, $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ – *условие параллельности прямых.*

Учитывая, что для прямой $Ax + By + C = 0$ вектор $\boldsymbol{q} = (-B, A)$ можно рассматривать как направляющий, то аналогичные формулы можно вывести, рассматривая угол между прямыми как угол между их направляющими векторами.

Очевидно, чтобы угол между прямыми был прямым, т. е. они были перпендикулярны, необходимо, чтобы были перпендикулярны их нормали или, соответственно, их направляющие вектора. Для прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

получаем

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Это *условие перпендикулярности прямых.*

Преобразуем последнее уравнение, разделив обе его части на B_1B_2, получаем

$$1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = 0, \text{ или } 1 + \left(-\frac{A_1}{B_1}\right) \cdot \left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = 0.$$

Заменим $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)$ на k_1 и $\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)$ на k_2, получим

$$1 + k_1k_2 = 0 \text{ или } k_1k_2 = -1.$$

Полученное соотношение

$$k_1k_2 = -1$$

дает *условие перпендикулярности прямых*, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.

Пример 3

Показать, что прямые $2x - 4y + 1 = 0$ и $-x + 2y + 3 = 0$ параллельны.

Действительно $A_1 = 2$, $B_2 = -4$ и $A_2 = -1$, $B_2 = 2$. Подставим эти значения в условие параллельности прямых $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$:

$$2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) = 0.$$

Получим верное тождество.

Пример 4

Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Приведем уравнения прямых к уравнениям с угловыми коэффициентами:

$$5y = 3x + 7 \;\Rightarrow\; y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5};$$

$$6y = -10x + 3 \;\Rightarrow\; y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $k_1 = \frac{3}{5}$ и $k_2 = -\frac{5}{3}$ и, значит, $k_1k_2 = -1$. Данные прямые перпендикулярны.

Пусть заданы две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Пусть известно, что они параллельны, т. е.

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

Если координаты нормального вектора n_2 ненулевые, то это условие можно переписать:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Это *условие параллельности прямых*.

Если пропорциональны и свободные члены этих уравнений, то прямые совпадают:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Это *условие совпадения прямых*.

2. Плоскости

Очевидно, что две плоскости могут быть параллельны или пересекаться. Совпадение двух плоскостей будем рассматривать как частный случай параллельных плоскостей. Частным случаем пересекающихся плоскостей являются перпендикулярные плоскости.

Угол между плоскостями – это угол между их нормальными векторами. Следовательно, если две плоскости заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то угол φ между плоскостями можно найти как угол между векторами $\boldsymbol{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, используя скалярное произведение

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Это *формула нахождения угла между плоскостями*.

Очевидно, что если мы хотим найти острый угол между плоскостями, то $\cos\varphi > 0$ и дробь берем со знаком «плюс».

Если две плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы, и, значит, их скалярное произведение равно нулю:

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = 0$$

или

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Это *условие перпендикулярности плоскостей*.

Две плоскости параллельны, если параллельны их нормальные вектора, а это значит, что их векторное произведение равно нулю:

$$[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = 0.$$

Значит, *условие параллельности плоскостей* можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. координаты нормалей пропорциональны.

Если все координаты вектора $\boldsymbol{n}_2$ отличны от нуля, условие параллельности можно записать иначе:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Выясним, при каком условии плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

совпадают.

Для решения этой задачи заметим, что мы рассматриваем совпадение как частный случай параллельности. Поэтому должно выполняться условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{1}$$

С другой стороны, ввиду совпадения плоскостей координаты (x, y, z) в обоих уравнениях принимают одни и те же значения.

Умножая уравнение $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ на общую величину из соотношения

$$\mu = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\acute{N}_1}{\acute{N}_2},$$

получаем

$$\mu A_2x + \mu B_2y + \mu C_2z + \mu D_2 = 0, \text{ или } \frac{A_1}{A_2}A_2x + \frac{B_1}{B_2}B_2y + \frac{C_1}{C_2}C_2z + \mu D_2 = 0.$$

Сокращая выражения, получаем

$$A_1x + B_1y + C_1z + \mu D_2 = 0. \tag{2}$$

Вычтем из полученного уравнения (2) уравнение первой плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, получим

$$D_2\mu - D_1 = 0,$$

и, следовательно, $\mu = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Итак, пропорция (1) дополняется еще одним звеном и принимает вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{3}$$

Обратно: при соблюдении условия (3) уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

действительно изображают одну и ту же плоскость, так как первое уравнение получается из второго умножением на общую величину μ. Следовательно, условие (3) – *условие совпадения плоскостей.*

Пример 5

Убедимся, что уравнения $2x - 3y + z - 4 = 0$ и $-4x + 6y - 2z + 8 = 0$ задают одну и ту же прямую.

Запишем соответствующее соотношение:

$$\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{1}{-2} = \frac{-4}{8}.$$

Каждая из дробей при сокращении равна (–1/2), и, следовательно, условие совпадения плоскостей выполнено.

Заметим, что условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

предполагает ненулевые коэффициенты второй плоскости. Для того чтобы избежать этого ограничения, данные условия можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Эти условия также представляют собой *условия совпадения плоскостей.*

3. Прямые в пространстве

Две прямые в пространстве могут пересекаться, быть параллельными и скрещиваться.

Угол между прямыми в пространстве – это угол между направляющими векторами. Две прямые образуют два угла, в сумме составляющие 180º. Косинусы обоих углов отличаются только знаком. Если требуется найти острый угол, то косинус берут со знаком «плюс».

Пусть даны две прямые, заданные каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{q_1}=\frac{y-y_1}{q_2}=\frac{z-z_1}{q_3} \text{ и } \frac{x-x_2}{s_1}=\frac{y-y_2}{s_2}=\frac{z-z_2}{s_3}.$$

Направляющие векторы $\boldsymbol{q}(q_1, q_2, q_3)$ и $\boldsymbol{s}(s_1, s_2, s_3)$ образуют угол, косинус которого можно найти по формуле

$$\cos\varphi=\frac{(\mathrm{q},\mathrm{s})}{|\mathrm{q}|\cdot|\mathrm{s}|}=\frac{q_1s_1+q_2s_2+q_3s_3}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}}.$$

Таким образом, эту формулу можно рассматривать и как формулу *угла между двумя прямыми в пространстве.*

Очевидно, что прямые параллельны, если их направляющие векторы коллинеарны. Условие коллинеарности векторов можно записать в следующем виде:

$$[\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix}=0,$$

или, приравнивая к нулю координаты векторного произведения $[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}]$, получим

$$\begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} q_1 & q_3 \\ s_1 & s_3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}=0.$$

Если координаты направляющего вектора $\boldsymbol{s}(s_1, s_2, s_3)$ отличны от нуля, то условие коллинеарности векторов можно записать в более удобной форме:

$$\frac{q_1}{s_1}=\frac{q_2}{s_2}=\frac{q_3}{s_3}.$$

Последние два соотношения можно рассматривать как *условие параллельности двух прямых.*

Очевидно, если направляющие вектора двух прямых коллинеарны, а координаты начальной точки одной прямой удовлетворяют уравнению другой прямой, то прямые совпадают.

Пример 1

Покажем, что уравнения

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{3} \text{ и } \frac{x-3}{-4}=\frac{y-5}{-6}=\frac{z-2}{-6}$$

задают одну и ту же прямую. Действительно, направляющие векторы этих прямых коллинеарны:

$$\frac{2}{-4}=\frac{3}{-6}=\frac{3}{-6}.$$

Покажем, что координаты начальной точки второго уравнения (3; 5; 2) удовлетворяют первому уравнению:

$$\frac{3-1}{2}=\frac{5-2}{3}=\frac{2+1}{3} \text{ или } \frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{3}{3}.$$

Таким образом, эти прямые параллельны и проходят через одну и ту же точку, и, следовательно, эти прямые совпадают.

Если прямые пересекаются или скрещиваются под прямым углом, то скалярное произведение направляющих векторов будет равно нулю. Например, для прямых

$$\frac{x-x_1}{q_1}=\frac{y-y_1}{q_2}=\frac{z-z_1}{q_3} \text{ и } \frac{x-x_2}{s_1}=\frac{y-y_2}{s_2}=\frac{z-z_2}{s_3}$$

условие перпендикулярности прямых будет иметь следующий вид:

$$q_1s_1+q_2s_2+q_3s_3=0.$$

Для того чтобы определить, являются ли две непараллельные прямые пересекающимися или скрещивающимися, рассмотрим их параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x=q_1t_1+x_1, \\ y=q_2t_1+y_1, \\ z=q_3t_1+z_1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=s_1t_2+x_2, \\ y=s_2t_2+y_2, \\ z=s_3t_2+z_2. \end{cases}$$

Очевидно, если точка пересечения существует, то найдутся такие значения параметров t_1 и t_2, для которых будут выполняться равенства

$$\begin{cases} q_1t_1 + x_1 = s_1t_2 + x_2, \\ q_2t_1 + y_1 = s_2t_2 + y_2, \\ q_3t_1 + z_1 = s_3t_2 + z_2 \end{cases}$$

и, следовательно, система будет иметь решение. Подставляя полученные значения t_1 и t_2 в параметрические уравнения, получим координаты точки пересечения.

Если система несовместна, то прямые не пересекаются и, значит, являются скрещивающимися.

Пример 2

Покажем, что прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{3} \text{ и } \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}$$

пересекаются, и найдем координаты точки пересечения.

Перейдем от канонических уравнений к параметрическим:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{3} = t \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-1 = 2t, \\ y-2 = 3t, \\ z+1 = 3t, \end{cases} \Rightarrow\; \begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 3t+2, \\ z = 3t-1. \end{cases}$$

Аналогично для второй прямой:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1} = t_1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-3 = 3t_1, \\ y-5 = 2t_1, \\ z-2 = t_1, \end{cases} \Rightarrow\; \begin{cases} x = 3t_1+3, \\ y = 2t_1+5, \\ z = t_1+2. \end{cases}$$

Приравняем соответствующие координаты для систем, получим

$$\begin{cases} 2t+1 = 3t_1+3, \\ 3t+2 = 2t_1+5, \\ 3t-1 = t_1+2, \end{cases} \Rightarrow\; \begin{cases} 2t-3t_1 = 2, \\ 3t-2t_1 = 3, \\ 3t-t_1 = 3. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получим $t = 1$, $t_1 = 0$. Подставляя значение параметров в параметрические уравнения прямых, получаем координаты точки пересечения:

$$x = 3,\; y = 5,\; z = 2.$$

Рассмотрим расположение в пространстве прямой и плоскости. Прямая и плоскость либо пересекаются, либо параллельны. Очевидно, что плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая, заданная уравнением

$$\frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{q_2} = \frac{z - z_1}{q_3},$$

параллельны тогда и только тогда, когда вектор нормали $\boldsymbol{n}(A, B, C)$ перпендикулярен направляющему вектору прямой $\boldsymbol{q}(q_1, q_2, q_3)$. И, значит, их скалярное произведение равно нулю:

$$Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 = 0.$$

Это *условие параллельности прямой и плоскости*.

Если $Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 \neq 0$, то прямая и плоскость пересекаются. Для того чтобы найти координаты точки пересечения, запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{q_2} = \frac{z - z_1}{q_3} = t \quad => \quad \begin{cases} x = q_1 t + x_1, \\ y = q_2 t + y_1, \\ z = q_3 t + z_1. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения для x, y и z в уравнение плоскости, получим

$$A(q_1 t + x_1) + B(q_2 t + y_1) + C(q_3 t + z_1) + D = 0.$$

Решаем полученное уравнение относительно t:

$$(Aq_1 + Bq_2 + Cq_3)t = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 - D,$$

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Aq_1 + Bq_2 + Cq_3}.$$

Подставляем полученное значение t в параметрические уравнения, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Пример 3

Найдем точку пересечения плоскости $5x + 2y - 3z + 4 = 0$ и прямой, заданной уравнением

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}.$$

Перепишем уравнение прямой в виде

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = t \quad => \quad \begin{cases} x-1 = 2t, \\ y-3 = 4t, \\ z-2 = 3t. \end{cases}$$

Следовательно, параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 4t+3, \\ z = 3t+2. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в уравнение плоскости, получим:

$$5(2t + 1) + 2(4t + 3) - 3(3t + 2) + 4 = 0,$$

$$10t + 5 + 8t + 6 - 9t - 6 + 4 = 0,$$

$$9t + 9 = 0,$$

$$t = -1.$$

Подставим $t = -1$ в параметрические уравнения прямой, найдем координаты:

$$x = -2 + 1 = -1,$$

$$y = -4 + 3 = -1,$$

$$z = -3 + 2 = -1.$$

Получили координаты точки пересечения $M_1(-1; -1; -1)$ прямой и плоскости.

Сделаем проверку, подставив координаты $M_1(-1; -1; -1)$ в уравнение плоскости:

$$-5 - 2 + 3 + 4 = 0.$$

Убеждаемся, что M_1 лежит в плоскости. Подставим координаты M_1 в каноническое уравнение прямой:

$$\frac{-1-1}{2}=\frac{-1-3}{4}=\frac{-1-2}{3}=-1.$$

Следовательно, точка принадлежит прямой. Итак, точка $M_1(-1; -1; -1)$ является точкой пересечения прямой и плоскости.

Вопросы для самопроверки

1. Какими уравнениями задается прямая на плоскости?
2. Как можно задать плоскость?
3. Какие уравнения задают прямую в пространстве?
4. Какие возможны взаимные расположения прямой и плоскости?

Глава 3

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Исследование уравнения кривой второго порядка

Линию второго порядка на плоскости в общем виде можно задать с помощью уравнения

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

в котором коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно. Систему координат будем предполагать декартовой прямоугольной.

Предположим, что коэффициент $B \neq 0$. Для того чтобы упростить общее уравнение, совершим поворот декартовой прямоугольной системы координат на угол φ вокруг начала координат. Старые координаты x и y будут связаны с новыми координатами x', y' формулами перехода:

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y = y'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

В новых координатах уравнение примет вид

$$A(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2B(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(y'\sin\varphi + y'\cos\varphi) +$$

$$+ C(y'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + 2D(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi) + 2E(y'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + F = 0.$$

Выпишем коэффициент, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных членов при произведении $x'y'$:

$$B' = -2A\cos\varphi\,\sin\varphi - 2B\sin^2\varphi + 2B\cos^2\varphi + 2C\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

Выберем угол φ таким образом, чтобы B' был равен нулю:

$$B' = (C - A)2\cos\varphi\,\sin\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

или

$$2B\cos 2\varphi = (A - C)\sin 2\varphi.$$

Если $A = C$, то в качестве угла поворота φ можно положить $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Если $A \neq C$, то получаем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2B}{A - C}$ и угол

$\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2B}{A-C}\right)$. Важно, что такой угол существует, и после поворота системы координат на этот угол рассматриваемое уравнение заменяется на уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

Если в это уравнение входит с ненулевым коэффициентом квадрат одной из координат, то при помощи переноса начала координат вдоль соответствующей оси можно обратить в нуль член с первой степенью этой координаты.

В самом деле, пусть, например, $A' \neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$A'(x'^2 + \frac{2D'}{A'}x') + C'y'^2 + 2E'y' + F' = 0.$$

Дополним выражение в скобках до полного квадрата, получим

$$A'\left(x'^2 + \frac{2D'}{A'}x' + \left(\frac{D'}{A'}\right)^2\right) - \left(\frac{D'}{A'}\right)^2 + C'y'^2 + 2E'y' + F' = 0,$$

или

$$A'\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2 + C'y'^2 + 2E'y' + F' - \left(\frac{D'}{A'}\right)^2 = 0.$$

Если мы сделаем перенос начала координат, определенный формулами

$$x'' = x' + \frac{D'}{A'},$$

$$y'' = y',$$

то уравнение примет вид

$$A'x''^2 + C'y''^2 + 2E'y'' + F'' = 0.$$

Если $C' \neq 0$, то выделяем полный квадрат со слагаемыми, содержащими y'' и, делая перенос начала координат вдоль оси Oy, получим еще более упрощенное уравнение.

Рассматривая в упрощенных уравнениях различные комбинации знаков коэффициентов, приходим к следующей теореме.

Теорема. Пусть в декартовой системе координат задано уравнение второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из девяти канонических видов:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – уравнение эллипса;
2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – уравнение мнимого эллипса;
3) $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$ – уравнение пары мнимых пересекающихся прямых;
4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – уравнение гиперболы;
5) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$ – уравнение пары пересекающихся прямых;
6) $y^2 = 2px$ – уравнение параболы;
7) $y^2 - a^2 = 0$ – уравнение пары параллельных прямых;
8) $y^2 + a^2 = 0$ – уравнение пары мнимых параллельных прямых;
9) $y^2 = 0$ – уравнение пары совпавших прямых.

Заметим, что уравнению мнимого эллипса и уравнению пары мнимых параллельных прямых не удовлетворяет ни одна точка на действительной плоскости.

Собственно линиями второго порядка являются *эллипс*, *гипербола*, *парабола*. Другие случаи линий второго порядка называются *вырожденными*. Окружность рассматривается как частный случай эллипса.

В следующих параграфах подробнее остановимся на невырожденных случаях кривых второго порядка, которые определим через их геометрические свойства и покажем, что линии с этими свойствами сводятся к перечисленным в теореме уравнениям.

§ 2. Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая расстояния между фокусами.

Для вывода уравнения эллипса введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы эллипса лежали на оси абсцисс, а начало координат делило бы расстояние между фокусами пополам. Выведем уравнение эллипса в выбранной системе координат.

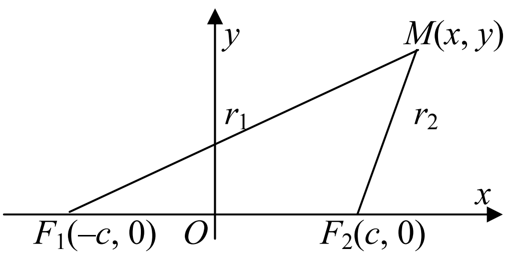


Рис. 39

Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2 (рис. 39). Пусть M – произвольная точка эллипса. Расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами обозначим через $2c$, сумму расстояний от точки M до фокусов – через $2a$. Так как по определению эллипса $|F_1M| + |F_2M| > |F_1F_2|$, то $2a > 2c$, или $a > c$.

Далее, обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки M до фокусов ($r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$). Числа r_1 и r_2 называют *фокальными радиусами* точки M. Из определения следует, что точка $M(x, y)$ лежит на данном эллипсе тогда и только тогда, когда

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{4}$$

Чтобы получить искомое уравнение эллипса, нужно в равенстве (4) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через координаты x и y. Так как F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(–c; 0)$ и $(c; 0)$; учитывая это и применяя формулу расстояния между двумя точками, находим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ,\ r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ . \tag{5}$$

Подставив эти выражения в равенство (4), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{6}$$

Это и есть искомое уравнение эллипса. Однако для практического использования оно неудобно, поэтому уравнение эллипса обычно приводят к более простому виду. Для этого перенесем второй радикал в правую часть уравнения (6), а затем возведем обе части равенства в квадрат:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 – \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x – c)^2 + y^2,$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx. \tag{7}$$

Снова возведем обе части в квадрат:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Отсюда

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь новую величину

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \tag{9}$$

геометрический смысл которой будет раскрыт далее. Так как по условию $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$ и, следовательно, b – положительное число. Из равенства (9) имеем $b^2 = a^2 - c^2$, поэтому уравнение (8) можно переписать в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив обе части на a^2b^2, окончательно получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Так как уравнение (10) получено из уравнения (6), то координаты любой точки эллипса, удовлетворяющие уравнению (6), будут удовлетворять и уравнению (10). Однако при упрощении уравнения (6) обе его части были дважды возведены в квадрат, и могли появиться «лишние» корни, так что уравнение (10) могло оказаться неравносильным уравнению (6). Убедимся в том, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (10), то они удовлетворяют и уравнению (6), т. е. уравнения (6) и (10) равносильны. Для этого, очевидно, достаточно показать, что величины r_1 и r_2 для любой точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (10), удовлетворяют соотношению (4).

Действительно, пусть координаты x и y некоторой точки удовлетворяют уравнению (10). Тогда, подставляя в выражения (5) для r_1 значение $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, полученное из (10), после несложных преобразований найдем $r_1 = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}$. Так как $|x| < a$ (это следует из (10)) и $\frac{c}{a} < 1$, то $a + \frac{c}{a} > 0$, и поэтому $r_1 = a + \frac{c}{a}x$. Аналогично найдем $r_1 = a - \frac{c}{a}x$.

Складывая почленно эти равенства, получаем соотношение (4), что и требовалось установить. Итак, любая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (10), принадлежит эллипсу и наоборот, т. е. (10) – уравнение эллипса. Уравнение (10) называется *каноническим* (или *простейшим*) уравнением эллипса. Таким образом, эллипс – это линия второго порядка.

Исследуем теперь форму эллипса по его каноническому уравнению (10). Заметим, что уравнение (10) содержит члены только с четными степенями координат x и y, поэтому эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно начала координат. В силу сказанного будет известна форма всего эллипса, если установить вид той его части, которая лежит в I координатном угле. Для этого разрешим уравнение (10) относительно y и получим

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Учитывая, что в I четверти $y \geq 0$, рассмотрим уравнение

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{11}$$

Из равенства (11) вытекают следующие утверждения:

1) если $x = 0$, то $y = b$, т. е. точка $B(0; b)$ лежит на эллипсе;
2) при возрастании x от 0 до a значение y уменьшается;
3) если $x = a$, то $y = 0$, т. е. точка $A(a; 0)$ лежит на эллипсе;
4) при $x > a$ получаем мнимые значения y, т. е. точек эллипса, у которых $x > a$, не существует.

Итак, частью эллипса, расположенной в I координатном угле, является дуга BA.

Отразив эту дугу симметрично относительно обеих координатных осей, получаем весь эллипс (рис. 40).

Замечание. Если $a = b$, то уравнение (10) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$. Это уравнение окружности радиуса a. Таким образом, окружность – это частный случай эллипса. Заметим, что эллипс можно получить из окружности радиуса *a*, если сжать ее в $\frac{a}{b}$ раз вдоль оси *Oy*. При таком сжатии точка (x; y) перейдет в точку (x; y_1), где $y_1 = y\frac{a}{b}$. Подставив $y_1 = y\frac{a}{b}$ в уравнение окружности, получим уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} = 1.$$

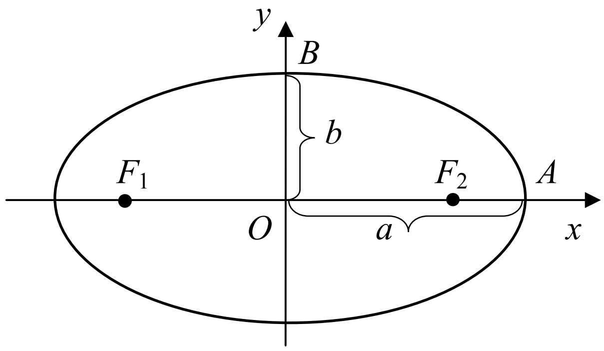


Рис. 40

Оси симметрии эллипса называются его *осями*, а центр симметрии (точка пересечения осей) – *центром* эллипса. Точки, в которых эллипс пересекает оси, называются его *вершинами*. Так как на основании равенства (9) $a \geq b$, то $2a$ – длина большой оси симметрии эллипса, $2b$ – малой оси. Следовательно, числа a и b являются длинами соответственно большой и малой полуосей эллипса.

Введем еще одну величину, характеризующую форму эллипса.

Определение. *Эксцентриситетом эллипса* называется отношение c/a, где c – половина расстояния между фокусами; a – большая полуось эллипса.

Эксцентриситет обычно обозначают буквой ε: $\varepsilon = c/a$. Так как $c < a$, то $0 \leq \varepsilon < 1$, т. е. эксцентриситет эллипса меньше единицы. Учитывая, что $c^2 = a^2 - b^2$, найдем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}\ .$$

Из последнего равенства легко получить геометрическое истолкование эксцентриситета эллипса. При очень малом ε числа a и b почти равны, т. е. эллипс близок к окружности. Если же ε близко к единице, то число b мало по сравнению с числом a, и эллипс сильно вытянут вдоль большей оси. Следовательно, эксцентриситет эллипса характеризует меру вытянутости эллипса.

Как известно, планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим орбитам. Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит очень малы, а кометных – велики, т. е. близки к единице. Таким образом, планеты движутся почти по окружности, а кометы то приближаются к Солнцу (Солнце находится в одном из фокусов), то удаляются от него.

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2;\,3)$ и $M_2(1;\,3\sqrt{5}/2)$.

Решение. Пусть искомое уравнение эллипса есть $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Координаты данных точек удовлетворяют этому уравнению. Подставив вместо x и y сначала координаты точки M_1, а затем координаты точки M_2, получим систему уравнений

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1;\ \frac{1}{a^2}+\frac{45}{b^2}=1.$$

Положим $\frac{1}{a^2}=m$; $\frac{1}{b^2}=n$ и придем к системе

$$\begin{cases} 4m+9n=1, \\ m+\dfrac{45}{4n}=1, \end{cases}$$

решив которую, найдем m = 1/16, n = 1/12, откуда a^2 = 16, b^2 = 12. Следовательно, искомое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

§ 3. Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Для вывода уравнения гиперболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы гиперболы лежали на оси абсцисс, а начало координат делило бы расстояние между фокусами пополам. Выведем уравнение гиперболы в выбранной системе координат.

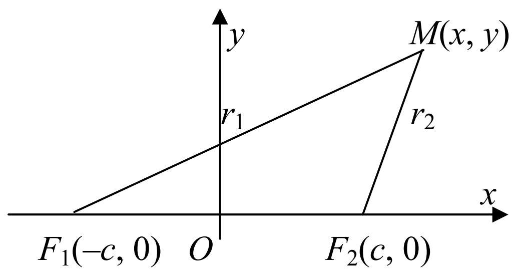


Рис. 41

Обозначим фокусы гиперболы через F_1 и F_2 (рис. 41). Пусть M – произвольная точка гиперболы. Расстояние $|F_1F_2|$ между фокусами обозначим через $2c$, а модуль разности расстояний от точки M до фокусов – через $2a$. Так как по определению $||F_1M| - |F_2M|| < |F_1F_2|$, то $2a < 2c$, или $a < c$. Числа $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются *фокальными радиусами* точки M и обозначаются через r_1 и r_2. Из определения следует, что точка $M(x; y)$ лежит на данной гиперболе тогда и только тогда, когда $|r_1 - r_2| = 2a$. Отсюда

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \tag{12}$$

По аналогии с эллипсом, чтобы получить искомое уравнение гиперболы, нужно в равенстве (12) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через координаты x и y. Так как фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(c;\ 0)$. По формуле расстояния между двумя точками находим

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,,\ r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \tag{13}$$

Подставив эти выражения в равенство (12), получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{14}$$

Это и есть искомое уравнение гиперболы. Упростим его аналогично тому, как это было сделано для уравнения (6) в случае эллипса.

Перенесем второй радикал в правую часть уравнения (14), а затем возведем обе части полученного равенства в квадрат. Имеем

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2,$$

или

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \tag{15}$$

Снова возведем обе части равенства в квадрат:

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Отсюда

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь новую величину

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}\,, \tag{17}$$

геометрический смысл которой будет раскрыт далее. Так как $c > a$, то разность $c^2 - a^2 > 0$ и b – положительное число. Из равенства (17) имеем $b^2 = c^2 - a^2$. Поэтому уравнение (16) примет вид

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{18}$$

Это и есть *каноническое уравнение гиперболы*.

Как и для эллипса, можно доказать равносильность уравнений (18) и (14).

Исследуем форму гиперболы по ее каноническому уравнению. Так как уравнение (18) содержит члены только с четными степенями текущих координат x и y, то по аналогии с эллипсом достаточно рассмотреть лишь часть гиперболы, лежащую в I координатном угле. Разрешим уравнение (18) относительно y, считая $y \geq 0$:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,. \tag{19}$$

Из равенства (19) вытекают следующие утверждения:

1) если $0 \le x < a$, то y принимает мнимые значения, т. е. точек гиперболы с абсциссами $0 \le x < a$ не существует;

2) если $x = a$, то $y = 0$, т. е. точка $A(a; 0)$ принадлежит гиперболе;

3) если $x > a$, то $y > 0$. При возрастании x значение y также возрастает, и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Переменная точка $M(x; y)$ на гиперболе перемещается с ростом x «вправо» и «вверх», причем ее начальное положение – точка $A(a; 0)$ (рис. 42). Здесь необходимо уточнить, как именно точка M «уходит в бесконечность». Для этого, кроме уравнения (19), рассмотрим уравнение

$$y = x\frac{b}{a}, \tag{20}$$

которое определяет прямую с угловым коэффициентом $k = b/a$, проходящую через начало координат. Часть этой прямой, расположенная в I координатном угле, изображена на рис. 42. Для ее построения можно использовать прямоугольный треугольник OAB, где $|OA| = a$ и $|AB| = b$.

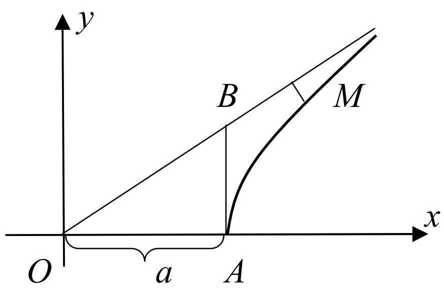


Рис. 42

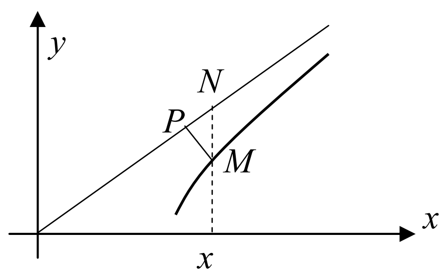


Рис. 43

Покажем, что точка M, перемещаясь по гиперболе в бесконечность, неограниченно приближается к прямой (20), которая является асимптотой гиперболы. Возьмем произвольное значение x ($x \ge a$) и рассмотрим две точки $M(x; y)$ и $N(x; Y)$, где $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и $Y = x\frac{b}{a}$. Точка M лежит на гиперболе, точка N – на прямой (20). Так как обе точки имеют одну и ту же абсциссу x, то прямая, проходящая через точки M и N, перпендикулярна оси Ox (рис. 43). Найдем длину отрезка MN.

Прежде всего заметим, что если $x > a$, то

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y.$$

Это означает, что при одной и той же абсциссе точка гиперболы лежит под соответствующей точкой асимптоты.

Таким образом,

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Из полученного выражения следует, что при $x \to +\infty$ дробь стремится к нулю, так как знаменатель растет, а числитель является постоянной величиной ab. Следовательно, $|MN| = Y - y$ стремится к нулю при $x \to +\infty$.

Обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую (20), MP – расстояние от точки M до этой прямой. Очевидно что, $|MP| < |MN|$, а так как $|MN| \to 0$, то и подавно $|MP| \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. точка M неограниченно приближается к прямой (20), а это нам и требовалось доказать. Аналогичное рассуждение можно провести для любого координатного угла.

Итак, ветвь рассматриваемой гиперболы, лежащая в I координатном угле, проходит через точку $A(a;\ 0)$ и направлена «направо» и «вверх», асимптотически приближаясь к прямой $y = x\frac{b}{a}$ (см. рис. 42).

Теперь можно легко установить вид всей гиперболы в силу ее симметрии относительно координатных осей (рис. 44).

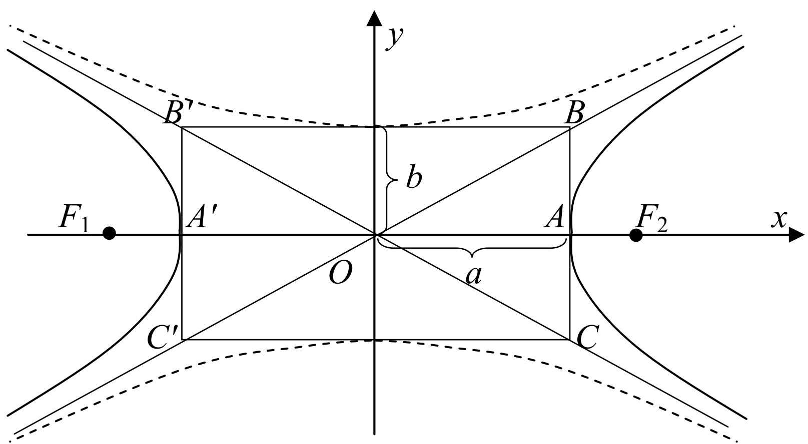


Рис. 44

Гипербола состоит из двух ветвей (правой и левой) и имеет две асимптоты: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$, первая из которых уже рассмотрена, а вторая представляет собой ее симметрическое отражение относительно оси Ox (или оси Oy).

Оси симметрии называются *осями гиперболы*, а центр симметрии (точка пересечения осей) – *центром гиперболы*. Одна из осей пересекается с гиперболой в двух точках, которые называются ее *вершинами* (на рис. 44 они обозначены буквами A' и A). Эта ось называется *действительной осью* гиперболы. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется *мнимой осью* гиперболы. Прямоугольник $BB'C'C$ со сторонами $2a$ и $2b$ (рис. 44) называется *основным прямоугольником гиперболы*. Величины a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{21}$$

переставляя буквы x и y, a и b, можно привести к виду (18). Отсюда ясно, что уравнение (21) определяет гиперболу, расположенную так, как показано на рис. 44 штриховыми линиями; вершины ее лежат на оси Oy. Эта гипербола называется *сопряженной* по отношению к гиперболе (18). Обе гиперболы имеют одни и те же асимптоты.

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется *равносторонней*, и ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{22}$$

Так как основной прямоугольник равносторонней гиперболы является квадратом, то асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг другу.

Определение. *Эксцентриситетом гиперболы* является отношение c/a, где c – половина расстояния между фокусами; a – действительная полуось гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы (как и эллипса) обозначим буквой ε. Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$, т. е. эксцентриситет гиперболы больше единицы. Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, найдем

$$\varepsilon^2 = \frac{ń^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Из последнего равенства легко получить геометрическое истолкование эксцентриситета гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе он к единице, тем меньше отношение b/a, что означает, что основной прямоугольник более вытянут в направлении действительной оси. Таким образом, эксцентриситет характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.

Для равносторонней гиперболы ($a = b$) получаем $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Пример. Дано уравнение гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$. Найти ее действительную и мнимую полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет; составить уравнение ее асимптот.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду:

$$\frac{3x^2}{12} - \frac{4y^2}{12} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1,$$

откуда находим, что действительная полуось $a = 2$, а мнимая полуось $b = \sqrt{3}$. Так как асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm \frac{b}{a} x$, фокусы – координаты $(-c;\ 0)$ и $(c;\ 0)$, эксцентриситет $\varepsilon = c/a$, а $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7}$, то для данной гиперболы получаем: координаты фокусов $(-\sqrt{7}; 0)$ и $(\sqrt{7}; 0)$; эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$ и уравнение асимптот $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} x$.

В следующем параграфе рассмотрим важное свойство эллипса и гиперболы.

§ 4. Директрисы эллипса и гиперболы

Определение. Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/ε от него, называют *директрисами эллипса* (здесь a – большая полуось, ε – эксцентриситет эллипса).

Уравнения директрис эллипса, заданного каноническим уравнением (10), имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $a/\varepsilon > a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины эллипса, а левая – левее его левой вершины (рис. 45).

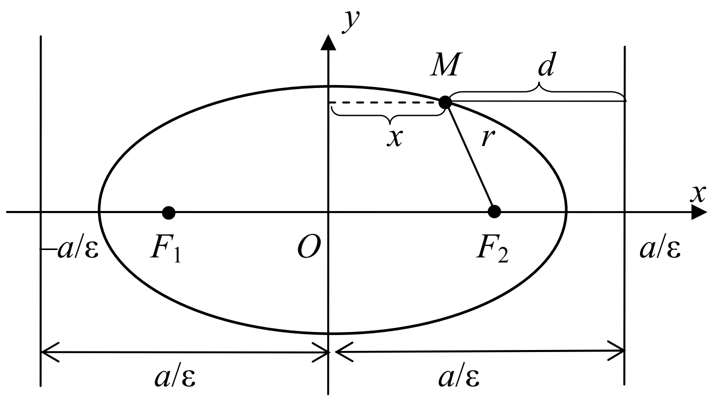


Рис. 45

Определение. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии a/ε от него, называются *директрисами гиперболы* (здесь a – действительная полуось, ε – эксцентриситет гиперболы).

Уравнения директрис гиперболы, заданной каноническим уравнением (18), имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Так как для гиперболы $\varepsilon > 1$, то $a/\varepsilon < a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, а левая – между центром и левой вершиной (рис. 46).

С помощью понятий директрисы и эксцентриситета можно сформулировать общее свойство, присущее эллипсу и гиперболе. Имеют место следующие две теоремы.

Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки M эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса.

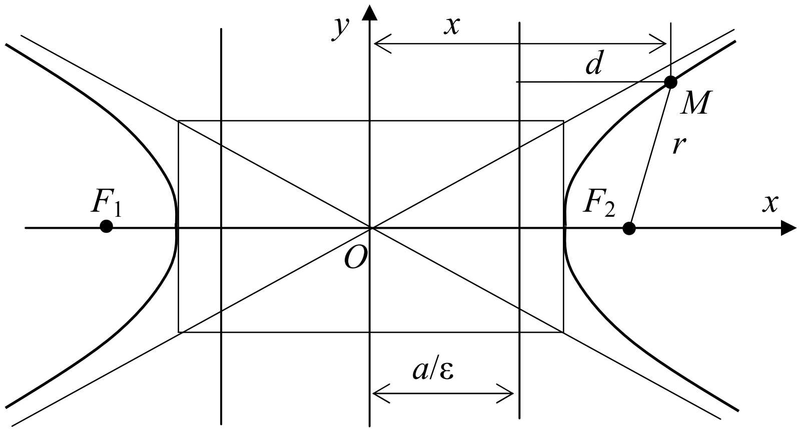


Рис. 46

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе F_2 и правой директрисе. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка эллипса (см. рис. 45). Расстояние от точки M до правой директрисы определяется равенством

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - x, \tag{23}$$

которое легко устанавливается из графика (рис. 46). Из равенств (5) и (7) имеем

$$r = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x.$$

Полагая $c/a = \varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = a - \varepsilon x. \tag{24}$$

Из соотношений (23) и (24) находим

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{a/\varepsilon - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\varepsilon}{a - \varepsilon x} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки M гиперболы до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение r/d есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе F_2 и правой директрисе. Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка гиперболы (см. рис. 46). Рассмотрим два случая.

1. Точка M находится на правой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки M до правой директрисы определяется равенством

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon}, \tag{25}$$

которое легко устанавливается из графика (рис. 46). Из равенств (13) и (15) имеем

$$r = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a .$$

Полагая $c/a = \varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = \varepsilon x - a. \tag{26}$$

По соотношениям (25) и (26) находим

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - a/\varepsilon} = \frac{(\varepsilon x - a)\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon .$$

2. Точка M находится на левой ветви гиперболы. Тогда расстояние от точки M до правой директрисы определяется равенством

$$d = -x + \frac{a}{\varepsilon}. \tag{27}$$

Из равенств (13) и (15) имеем

$$r = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -\left(\frac{c}{a}x - a\right).$$

Полагая $c/a = \varepsilon$, получаем формулу расстояния от точки M до правого фокуса:

$$r = -(\varepsilon x - a). \tag{28}$$

Из соотношений (27) и (28) находим

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + a/\varepsilon} = \frac{-(\varepsilon x - a)\varepsilon}{-\varepsilon x + a} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Установленное свойство эллипса и гиперболы можно положить в основу общего определения этих линий: множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до соответствующий директрисы является величиной постоянной, равной ε, есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, и гипербола, если $\varepsilon > 1$.

Возникает вопрос: что представляет собой множество точек, определенное аналогичным образом при условии $\varepsilon = 1$? Оказывается, это новая линия второго порядка, называемая параболой.

§ 5. Парабола

Определение. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой* и проходящей через фокус.

Для вывода уравнения параболы введем на плоскости прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус перпендикулярно директрисе, и будем считать положительным направление от директрисы к фокусу; начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой. Выведем уравнение параболы в выбранной системе координат.

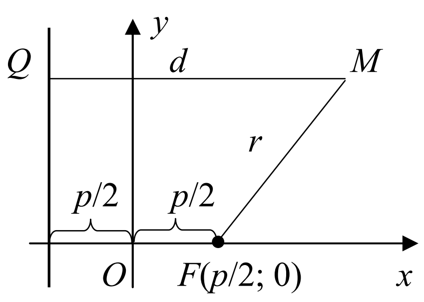


Рис. 47

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка параболы. Обозначим через r расстояние от точки M до фокуса F ($r = |FM|$), через d – расстояние от точки M до директрисы, а через p – расстояние от фокуса до директрисы (рис. 47). Величину p называют *параметром* параболы, ее геометрический смысл будет раскрыт далее. Точка M будет лежать на данной параболе тогда и только тогда, когда

$$r = d. \tag{29}$$

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве (29) заменить переменные r и d их выражениями через координаты x и y.

Фокус F имеет координаты ($p/2$; 0); поэтому, используя формулу, выражающую расстояние между точками M и F, находим

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\,. \tag{30}$$

Обозначим через Q основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Очевидно, точка Q имеет координаты ($-p/2$; y). Тогда с помощью формулы, выражающей расстояние между точками M и Q, находим

$$d=|MQ|=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}. \tag{31}$$

Заменяя в равенстве (29) r и d выражениями (30) и (31), получим

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}. \tag{32}$$

Это и есть искомое уравнение параболы. Приведем его к более удобному виду, для чего возведем обе части равенства (32) в квадрат. Получаем

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

или

$$y^2=2px. \tag{33}$$

Проверим, что уравнение (33) после возведения в квадрат обеих частей равенства (32) не приобрело «лишних» корней. Для этого достаточно показать, что для любой точки, координаты x и y которой удовлетворяют уравнению (33), выполнено соотношение (29). Действительно, из уравнения (33) вытекает, что $x \geq 0$, поэтому для точек, с неотрицательными абсциссами имеем $d = p/2 + x$. Подставляя значение y^2 из (33) в выражение (30) и учитывая, что $x \geq 0$, получаем $r = p/2 + x$, т. е. величины r и d равны, что и требовалось доказать. Таким образом, уравнению (33) удовлетворяют координаты точек данной параболы и только они, т. е. это уравнение является уравнением данной параболы.

Уравнение (33) называется *каноническим уравнением параболы*. Так как это уравнение второй степени, то парабола – линия второго порядка.

Исследуем теперь форму параболы по ее каноническому уравнению.

Так как уравнение (33) содержит y только в четной степени, то парабола симметрична относительно оси Ox. Следовательно, достаточно рассмотреть только ее часть, лежащую в верхней полуплоскости. Для этой части $y > 0$, поэтому, решая уравнение (33) относительно y, получаем

$$y = \sqrt{2px}\,. \tag{34}$$

Из равенства (34) вытекают следующие утверждения:

1) если $x < 0$, то уравнение (34) дает мнимые значения y и, следовательно, левее оси Oy ни одной точки параболы нет;

2) если $x = 0$, то $y = 0$, т. е. начало координат лежит на параболе и является самой левой ее точкой;

3) при возрастании x возрастает и y, причем если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

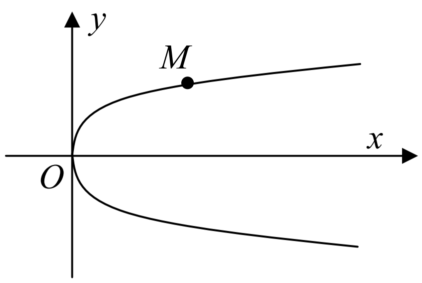


Рис. 48

Таким образом, переменная точка $M(x; y)$, перемещаясь по параболе, исходит из начала координат и с ростом x движется «вправо» и «вверх», причем при $x \to +\infty$ точка M бесконечно удаляется как от оси Oy, так и от оси Ox.

Симметрично отражая рассмотренную часть параболы относительно оси Ox, получаем всю параболу (рис. 48), заданную уравнением (33).

Точка O называется *вершиной параболы*, ось симметрии (ось Ox) – *осью параболы*. Число p, т. е. параметр параболы, как известно, выражает расстояние от фокуса до директрисы. Выясним, как влияет параметр параболы на ее форму. Для этого возьмем какое-нибудь определенное значение абсциссы, например $x = 1$, и по уравнению (33) найдем соответствующие значения ординаты: $y = \pm\sqrt{2p}$. Получаем на параболе две точки $M_1(1; \sqrt{2p})$ и $M_2(1; -\sqrt{2p})$, симметричные относительно ее оси; расстояние между ними равно $2\sqrt{2p}$. Отсюда заключаем, что это расстояние тем больше, чем больше p. Следовательно, параметр p характеризует «ширину» области, ограниченной параболой. В этом и состоит геометрический смысл параметра p.

Парабола, уравнение которой $y^2 = -2px$, где $p > 0$, расположена слева от оси ординат (рис. 49). Вершина этой параболы совпадает с началом координат, осью симметрии является ось Ox.

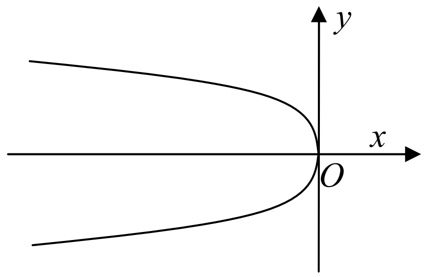


Рис. 49

По аналогии с предыдущим можно утверждать, что уравнение $x^2 = 2py$, $p > 0$ является уравнением параболы, вершина которой совпадает с началом координат, а осью симметрии является ось Oy (рис. 50). Эта парабола лежит выше оси абсцисс.

Уравнение $x^2 = -2py$, $p > 0$ определяет параболу, лежащую ниже оси Ox, с вершиной в начале координат (рис. 51).

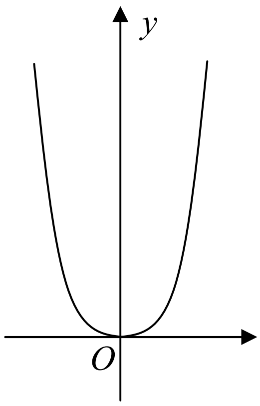


Рис. 50

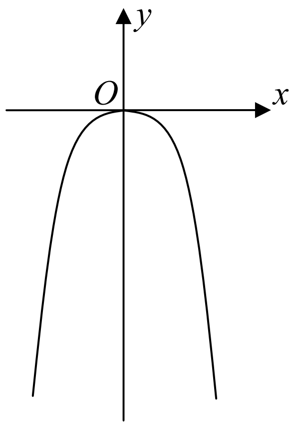


Рис. 51

Уравнение параболы, изображенной на рис. 52, имеет вид

$$x^2 = 2p(y - a),\ p > 0,\ a < 0,$$

ее вершина смещена вниз на a.

Парабола, изображенная на рис. 53, имеет вершину в точке $(b; 0)$, ее уравнение имеет вид

$$y^2 = 2p(x - b),\ p > 0,\ b > 0.$$

Пример. Дано уравнение параболы $y^2 = 6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти координаты ее фокуса.

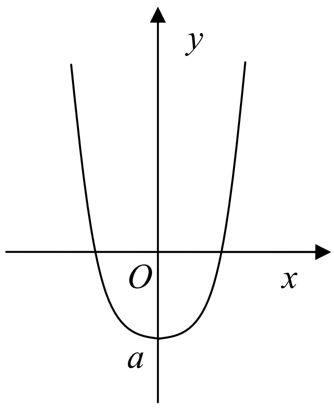


Рис. 52

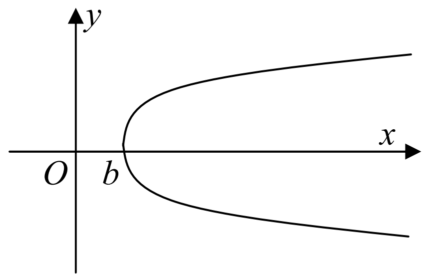


Рис. 53

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы (33), заключаем, что $2p = 6$, откуда $p = 3$. Так как фокус параболы имеет координаты $(p/2; 0)$, а директриса – уравнение $x = -p/2$, то для данной параболы получаем: координаты фокуса $(3/2; 0)$ и уравнение директрисы $x = -3/2$.

§ 6. Краткое описание различных видов поверхностей второго порядка

В этом параграфе будем предполагать систему координат прямоугольной.

1. Распадающиеся поверхности

Если многочлен второй степени $F(x, y, z)$ есть произведение двух многочленов первой степени

$$F(x, y, z) = (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2),$$

то поверхность $F(x, y, z) = 0$ распадается на пару плоскостей

$$\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Если эти плоскости пересекаются, то сделаем прямую их пересечения осью аппликат, а биссекторные плоскости двугранных углов, образуемых этими плоскостями, примем за координатные плоскости yOz и xOz прямоугольной системы координат, беря в качестве плоскости xOy любую плоскость, перпендикулярную к линии пересечения данных плоскостей.

В полученной системе координат плоскости π_1 и π_2 получают уравнения

$$Ax + By = 0 \text{ и } Ax - By = 0,$$

а поверхность $F(x, y, z) = 0$, распавшаяся на эти плоскости, будет поверхностью

$$(Ax + By)(Ax - By) = 0,$$

или

$$A^2x^2 - B^2y^2 = 0. \qquad (35)$$

Всякая поверхность второго порядка, распадающаяся на пару пересекающихся плоскостей, в некоторой системе координат имеет уравнение (35).

Если поверхность распадается на пару параллельных плоскостей π_1 и π_2, то примем за плоскость xOy прямоугольной системы координат O и векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ возьмем в плоскости π, а вектор $\boldsymbol{e}_3$ направим перпендикулярно к плоскости π, тогда плоскости π_1 и π_2 будут соответственно иметь уравнения

$$z = a \text{ и } z = -a,$$

а уравнение пары плоскостей π_1, π_2 будет

$$z^2 - a^2 = 0.$$

Уравнение $(Ax + By + Cz + D)^2 = 0$ определяет пару совпадающих между собой плоскостей

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Приняв эту плоскость за плоскость $z = 0$ новой координатной системы, мы видим, что всякая поверхность второго порядка, являющаяся парой совпадающих между собой плоскостей, в некоторой системе координат может быть задана уравнением

$$z^2 = 0.$$

Поверхность, распадающаяся на пару мнимых (сопряженных) плоскостей, может быть задана уравнением

$$A^2x^2 + B^2y^2 = 0,$$

если эти плоскости пересекаются, и уравнением

$$z^2 + a^2 = 0,$$

если они параллельны.

2. Цилиндрические поверхности

Цилиндрическая поверхность второго порядка задается в некоторой надлежаще выбранной для данной поверхности канонической системе координат уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{36}$$

где $F(x, y)$ – многочлен второй степени от переменных x и y. Кривая, определенная уравнением (36) в плоскости xOy, является направляющей кривой (основанием) цилиндрической поверхности. Эта кривая может быть эллипсом, действительным или мнимым, гиперболой или параболой, в зависимости от чего мы и различаем эллиптические, мнимые эллиптические, гиперболические и параболические цилиндры, канонические уравнения которых совпадают с каноническими уравнениями их направляющих кривых (36).

Если направляющая (36) есть пара прямых, то цилиндрическая поверхность вырождается в пару плоскостей (пересекающихся, параллельных или совпадающих, действительных или мнимых – в зависимости от соответствующего свойства лежащей в основании пары прямых).

3. Поверхности вращения

Поверхность S называется *поверхностью вращения* с осью d, если она составлена из окружностей, которые имеют центры на прямой d и лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой.

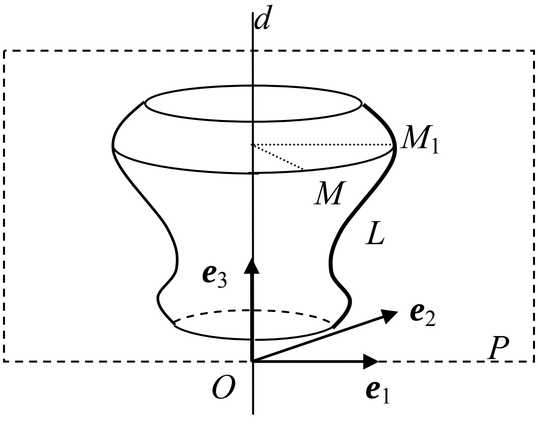


Рис. 54

Рассмотрим линию L, которая лежит в плоскости P, проходящей через ось вращения d, и будем вращать ее вокруг этой оси (рис. 54). Каждая точка линии опишет окружность, а вся линия – поверхность вращения.

Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат O на оси вращения d, вектор $\boldsymbol{e}_3$ направлен вдоль d, а вектор $\boldsymbol{e}_1$ поместим в плоскости P. Таким образом, точка O и векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$ образуют на плоскости P декартову систему координат. Очевидно, вектор $\boldsymbol{e}_2$ выбираем таким образом, чтобы тройка векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ была правой.

Допустим, что линия L, вращением которой получена поверхность, имеет в этой системе координат уравнение $\varphi(x, z) = 0$. Рассмотрим точку $M(x; y; z)$, лежащую на поверхности вращения. Через нее проходит окружность, которая имеет центр на оси d и лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси. Радиус окружности равен расстоянию от M до оси, т. е. $\sqrt{x^2+y^2}$. Точка M лежит на поверхности вращения тогда и только тогда, когда на указанной окружности имеется точка M_1, принадлежащая вращаемой линии L.

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит в плоскости P, и потому $y_1 = 0$. С учетом того, что M_1 и M лежат на одной окружности, перпендикулярной оси $\boldsymbol{e}_3$, то $z_1 = z$ и $|x_1| = \sqrt{x^2+y^2}$. Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению линии L: $\varphi(x_1, z_1) = 0$.

Подставляя в это уравнение x_1 и z_1, мы получаем следующее условие на координаты точки M, необходимое и достаточное для того, чтобы M лежала на поверхности вращения S:

$$\varphi\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0. \tag{37}$$

Это равенство должно быть выполнено хотя бы при одном из двух знаков перед корнем. Это условие, которое может быть записано в эквивалентном виде:

$$\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right)\,\varphi\left(-\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0,$$

и является уравнением поверхности вращения линии L вокруг оси d.

4. Эллипсоид

Рассмотрим поверхности, которые получаются при вращении эллипса вокруг его осей симметрии. Направим вектор $\boldsymbol{e}_3$ сначала вдоль малой оси эллипса (рис. 55), а затем вдоль его большой оси (рис. 56). Получим уравнение эллипса в следующих видах:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{c^2}=1.$$

(Здесь через c обозначена малая полуось эллипса.) В силу формулы (37), для того чтобы перейти к уравнениям соответствующих поверхностей вращения, мы должны заменить x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ в уравнении кривой. Получаем

$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{z^2}{a^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{c^2}=1.$$

И, следовательно, уравнения поверхностей будут:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2+y^2}{c^2}=1. \qquad (38)$$

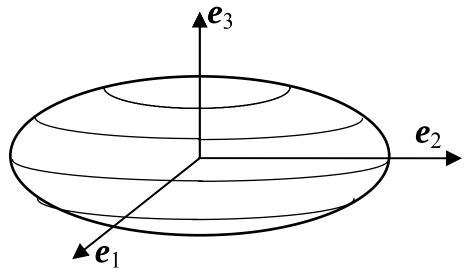


Рис. 55

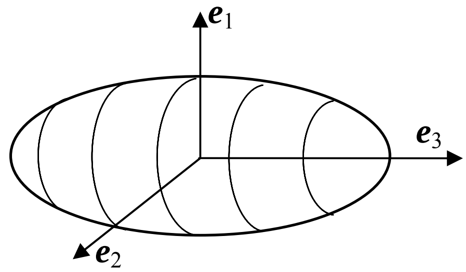


Рис. 56

Поверхности, описываемые уравнениями (38), называются сжатым и вытянутым *эллипсоидами вращения*.

Каждую точку $M(x;\ y;\ z)$ на эллипсоиде вращения сдвинем к плоскости xOz так, чтобы расстояние от точки до этой плоскости уменьшилось в постоянном для всех точек отношении $\lambda < 1$. После сдвига точка M совпадает с точкой M', координаты которой определяются равенствами

$$x' = x,\ y' = \lambda y,\ z' = z.$$

Таким образом, все точки эллипсоида вращения (38) переходят в точки поверхности с уравнением

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \qquad (39)$$

где $b = \lambda a$. Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (39), назовем *эллипсоидом*. Положительные числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида* (39).

Эллипсоид лежит внутри прямоугольного параллелепипеда

$$-a \le x \le a\,,\ -b \le y \le b\,,\ -c \le z \le c\,.$$

Другими словами, эллипсоиды суть ограниченные поверхности. Все плоские сечения эллипсоида являются ограниченными кривыми второго порядка – эллипсами.

Поверхность, задаваемая в какой-нибудь прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

называется *мнимым эллипсоидом*. Мнимый эллипсоид не имеет ни одной вещественной точки.

Очевидно, что сфера является частным случаем эллипсоида, когда все полуоси равны между собой:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \text{ или } x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Это уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом a.

5. Конус второго порядка

Рассмотрим на плоскости P пару пересекающихся прямых, задаваемую в системе координат O, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$ уравнением $a^2x^2 - c^2z^2 = 0$. Поверхность, получаемая вращением этой линии вокруг оси аппликат, имеет уравнение

$$a^2(x^2+y^2)-c^2z^2=0$$

и носит название *прямого кругового конуса*. Сжатие к плоскости xOz переводит прямой круговой конус в поверхность с уравнением

$$a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2=0. \qquad (40)$$

Поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат имеет уравнение (40), называется конусом или *ко-*

нусом второго порядка. Конус состоит из прямых линий, проходящих через начало координат (рис. 57).

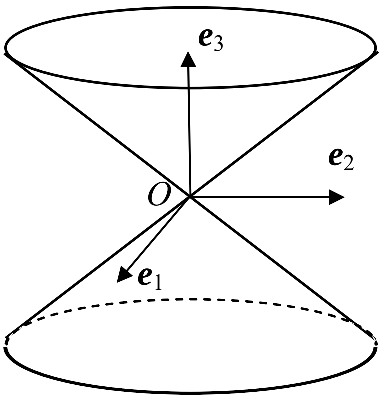


Рис. 57

Рассмотрим сечения конуса плоскостями. Плоскость, параллельная плоскости xOy, $z = \alpha$, пересекает конус по эллипсу. Действительно,

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2\alpha^2 = 0,$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 = c^2\alpha^2,$$

делим уравнение на $c^2\alpha^2$:

$$\frac{a^2x^2}{c^2\alpha^2} + \frac{b^2y^2}{c^2\alpha^2} = 1 \ => \ \frac{x^2}{\frac{c^2\alpha^2}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2\alpha^2}{b^2}} = 1.$$

Обозначив $\frac{c^2\alpha^2}{a^2} = (a')^2$ и $\frac{c^2\alpha^2}{b^2} = (b')^2$, получаем уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1.$$

Плоскости, параллельные плоскостям xOz и yOz, пересекают конус по гиперболам. Действительно, пусть $x = \beta$, тогда имеем

$$a^2\beta^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0,$$

$$b^2y^2 - c^2z^2 = -a^2\beta^2.$$

Умножим это уравнение на (–1), получим

$$c^2z^2 - b^2y^2 = a^2\beta^2.$$

Разделим это уравнение на $a^2\beta^2$:

$$\frac{\acute{n}^2z^2}{a^2\beta^2} - \frac{b^2y^2}{a^2\beta^2} = 1 \ => \ \frac{z^2}{\frac{a^2\beta^2}{c^2}} - \frac{y^2}{\frac{a^2\beta^2}{b^2}} = 1.$$

Обозначив $\frac{a^2\beta^2}{c^2} = (a')^2$; $\frac{a^2\beta^2}{b^2} = (b')^2$, видим, что

$$\frac{z^2}{(a')^2} - \frac{y^2}{(b')^2} = 1,$$

т. е. в сечении конуса плоскостью $x = \beta$ лежит гипербола. Аналогичный результат можно получить, рассматривая сечения конуса плоскостями, параллельными плоскости xOz.

Не только эллипс и гипербола, но и парабола являются плоскими сечениями конуса. Для простоты рассмотрим круговой конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{41}$$

Докажем, что параболой является, например, сечение конуса (41) плоскостью π, заданной уравнением

$$x - z + 1 = 0.$$

Выразим $z = x + 1$ из уравнения плоскости и подставим в уравнение конуса (41):

$$x^2 + y^2 - (x + 1)^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$y^2 = 2x + 1,$$

$$y^2 = 2(x + 0{,}5).$$

Обозначив $x + 0{,}5 = x'$, получаем уравнение параболы:

$$y^2 = 2x'.$$

Итак, и эллипс, и гипербола, и парабола являются сечениями конуса. Поэтому эти кривые и называются *коническими сечениями*.

Наряду с действительным и конусами второго порядка существуют еще мнимые конусы, которые в канонической для них системе координат имеют уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Единственная действительная точка мнимого конуса есть точка начала координат $O(0; 0; 0)$.

Заметим, что цилиндрические и канонические поверхности второго порядка объединяются под общим наименованием *вырождающихся поверхностей второго порядка*; им в качестве невырождающихся поверхностей противополагаются эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды.

6. Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид вращения – это поверхность вращения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг мнимой полуоси (той оси, которая ее не пересекает).

Для того чтобы от уравнения кривой перейти к уравнению поверхности, заменим x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получим

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \;=>\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Это уравнение однополостного гиперболоида вращения.

В результате сжатия этой поверхности мы получаем поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{42}$$

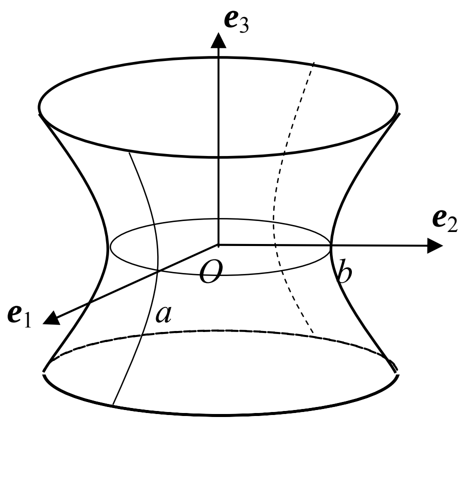


Рис. 58

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (42), называется *однополостным гиперболоидом* (рис. 58). Положительные числа a, b и c называются *полуосями гиперболоида*.

Если вместе с гиперболой мы будем вращать и ее асимптоты, то они опишут прямой круговой конус, называемый *асимптотическим конусом* гиперболоида вращения. При сжатии гиперболоида вращения в общий однополостный гиперболоид прямой круговой конус сжимается в некоторый конус, который называется *асимптотическим конусом* однополостного гиперболоида.

Из уравнения (42) видно, что начало канонической для данного гиперболоида системы координат является его центром симметрии, координатные плоскости прямоугольной канонической системы – его плоскостями симметрии, а оси координат этой системы – осями симметрии.

Если $a = b = c$, то гиперболоид называется *правильным.*

Плоскость $z = h$ пересекает однополостный гиперболоид (42) по кривой

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\ z=h. \tag{43}$$

Положим $1+\frac{h^2}{c^2}=\lambda_h^2$, видим, что кривая (43) есть эллипс

$$\frac{x^2}{(a\lambda_h)^2}+\frac{y^2}{(b\lambda_h)^2}=1,\ z=h.$$

Все эти эллипсы подобны между собой, отношения их полуосей

$$\frac{b\lambda_h}{a\lambda_h}=\frac{b}{a}$$

одни и те же, их эксцентриситеты равны эксцентриситету эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0,$$

являющегося пересечением однополостного гиперболоида (42) с плоскостью $z = 0$; этот эллипс называется *горловым эллипсом* данного однополостного гиперболоида.

Сечения однополостного гиперболоида (42) плоскостями $y = \beta$ есть кривые

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{\beta^2}{b^2}.$$

Полагая $1-\frac{\beta^2}{b^2}=\lambda_\beta^2$ при $|\beta| < b$ и $\frac{\beta^2}{b^2}-1=\lambda_\beta^2$ при $|\beta| > b$, видно, что эти кривые есть гиперболы:

$$\frac{x^2}{(a\lambda_\beta)^2}-\frac{z^2}{(c\lambda_\beta)^2}=1 \text{ и } \frac{z^2}{(c\lambda_\beta)^2}-\frac{x^2}{(a\lambda_\beta)^2}=1 \text{ при } y=\beta.$$

Аналогично можно доказать, что сечения однополостного гиперболоида плоскостями $x = \alpha$ также будут гиперболами.

Сечение однополостного гиперболоида (42) каждой из плоскостей $y = \pm b$ есть пара прямых:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ y = \pm b;$$

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0,\ y = \pm b;$$

$$z = \frac{cx}{a},\ y = \pm b \text{ и } z = -\frac{cx}{a},\ y = \pm b.$$

Точно так же сечение однополостного гиперболоида (42) каждой из плоскостей $x = \pm a$ есть пара прямых

$$z = \frac{cy}{b},\ x = \pm a \text{ и } z = -\frac{cy}{b},\ x = \pm a.$$

Интересное свойство однополостного гиперболоида – наличие у него прямолинейных образующих (рис. 59). *Прямолинейные образующие* – прямые линии, всеми своими точками лежащие на поверхности. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие. Докажем это и получим уравнение прямолинейных образующих.

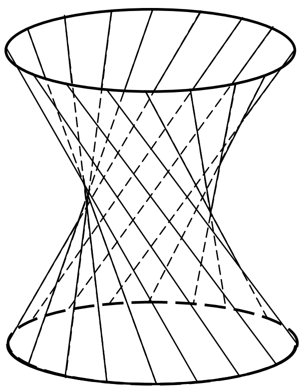


Рис. 59

В уравнении однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

перенесем второе слагаемое в правую часть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

и разделим обе части равенства на множители:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Рассмотрим теперь прямую линию, заданную как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{44}$$

где μ и λ – некоторые числа. Легко преобразовать эти уравнения к привычному виду плоскостей:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{a}x-\dfrac{\lambda}{b}y+\dfrac{\mu}{c}z-\lambda=0, \\ \dfrac{\lambda}{a}x+\dfrac{\mu}{b}y-\dfrac{\lambda}{c}z-\mu=0. \end{cases}$$

Координаты каждой точки прямой удовлетворяют обоим уравнениям, а следовательно, и их произведению – уравнению (42). Поэтому все точки прямых линий с уравнениями вида (44) при всевозможных λ и μ лежат на однополостном гиперболоиде. Такое же рассуждение можно провести и для семейства прямых

$$\begin{cases} \lambda'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\mu'\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \mu'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\lambda'\left(1+\dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{45}$$

Подставляя координаты точки, лежащей на однополостном гиперболоиде, в одно из уравнений (44) и в одно из уравнений (45), мы найдем значения параметров λ, μ и λ', μ', которые соответствуют прямолинейным образующим, проходящим через эту точку. Естественно, что каждая пара параметров определена с точностью до общего множителя.

7. Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид вращения – это поверхность вращения гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \tag{46}$$

вокруг той оси, которая ее пересекает (вокруг действительной оси).

Для того чтобы перейти от уравнения линии (46) к уравнению поверхности вращения, заменим x на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получим уравнение двуполостного гиперболоида вращения:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1.$$

В результате сжатия этой поверхности получается поверхность, задаваемая уравнением

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{47}$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение вида (47), называется *двуполостным гиперболоидом.* Двум ветвям гиперболы здесь соответствуют две несвязанные между собой части («полости») поверхности, в то время как при построении однополостного гиперболоида вращения каждая ветвь гиперболы описывает всю поверхность (рис. 60).

Асимптотический конус для двуполостного гиперболоида определяется так же, как и для однополостного (рис. 61).

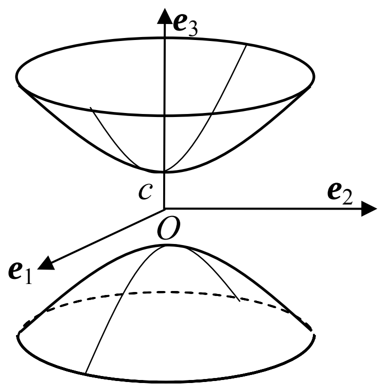


Рис. 60

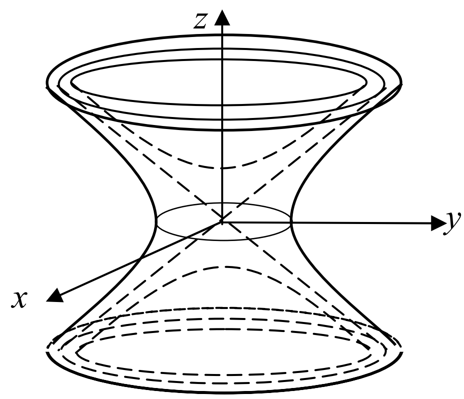


Рис. 61

Рассмотрим теперь пересечения двуполостного гиперболоида (47) с плоскостями, параллельными координатным.

Плоскость $z = h$ при $|h| < c$ пересекает поверхность (47) по мнимым эллипсам, при $|h| > c$ – по вещественным. Если $a = b$, то эти эллипсы являются окружностями, а гиперболоид есть гиперболоид вращения. При $|h| = c$ получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

т. е. пару сопряженных прямых с одной вещественной точкой (0; 0; *c*) (или (0; 0; –*c*) соответственно).

Плоскости $x = \alpha$ и $y = \beta$ пересекают гиперболоид (47) по гиперболам

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{a^2} \text{ и } \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{\beta^2}{b^2}.$$

8. Эллиптический параболоид

При вращении параболы $x^2 = 2pz$ вокруг ее оси симметрии получим поверхность с уравнением

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

называемую *параболоидом вращения*. Сжатие к плоскости $y = 0$ переводит параболоид вращения в поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \qquad (48)$$

Поверхность, которая имеет такое уравнение в некоторой декартовой прямоугольной системе координат, называется *эллиптическим параболоидом.*

Внешний вид эллиптического параболоида ясен из способа его построения. Он весь расположен по одну сторону от плоскости $z = 0$, в полупространстве $z > 0$ (рис. 62). Сечения плоскостями $z = h$, $h > 0$ имеют уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h$$

или

$$\frac{x^2}{2ha^2} + \frac{y^2}{2hb^2} = 1$$

и являются эллипсами.

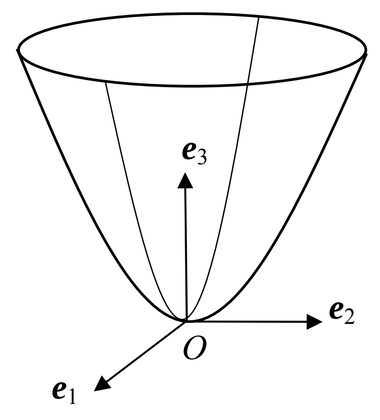


Рис. 62

Сечения эллиптического параболоида (48) плоскостями $y = 0$ и $x = 0$ являются параболами

$$x^2 = 2a^2z,\ y = 0; \tag{49}$$

$$y^2 = 2b^2z,\ x = 0. \tag{50}$$

Эти параболы называют *главными параболами* эллиптического параболоида, при этом параболу (49) условно назовем *неподвижной*, а параболу (50) – *подвижной*.

Можно дать следующее очень наглядное построение эллиптического параболоида посредством скольжения одной параболы вдоль другой (система координат предполагается прямоугольной).

Возьмем сечение параболоида (48) плоскостью $x = \alpha$, получим в этой плоскости, содержащей систему координат $O_0\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, где $O_0 = (\alpha, 0, 0)$, кривую, которая будет описана уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{\alpha^2}{a^2},\ x = \alpha,$$

или

$$y^2 = 2b^2(z - \gamma),\ x = \alpha, \tag{51}$$

где $\gamma = \dfrac{\alpha^2}{2a^2}$.

Перейдем в плоскости $x = \alpha$ от системы координат $O\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ к системе координат $O'\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, где $O' = (\alpha, 0, \gamma)$ есть точка пересечения плоскости $x = \alpha$ с неподвижной параболой $x^2 = 2a^2z$, $y = 0$.

Перенеся начало координат системы $O_0\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ в точку O', произвели следующее преобразование координат:

$$y = y',\ z = z' + \gamma.$$

В результате этого преобразования уравнение (51) получает вид

$$y'^2 = 2pz',\ x = \alpha.$$

Кривая (51) – это та же «подвижная» парабола, но перенесенная параллельно себе в плоскость $x = \alpha$. Этот перенос можно осуществить следующим образом. Вершина подвижной параболы скользит по неподвижной параболе из точки O в точку O', а сама парабола при этом перемещается как твердое тело, оставаясь все время в плоскости, параллельной плоскости yOz.

Этот результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Эллиптический параболоид есть поверхность, описываемая при движении одной («подвижной») параболы (50) вдоль другой, неподвижной (49), так, что вершина подвижной параболы скользит по неподвижной, а плоскость и ось подвижной параболы остаются все время параллельными самим себе, причем предполагается, что обе параболы (подвижная и неподвижная) обращены вогнутостью в одну и ту же сторону (а именно: в положительную сторону оси Oz).

Заметим, что эллиптический параболоид прямолинейных образующих не имеет. Действительно, прямая, параллельная плоскости xOy, может пересекать лишь сечение параболоида некоторой плоскостью $z = h$, а это сечение, как уже было отмечено, представляет собой эллипс. И значит, у прямой не более двух общих точек с параболоидом.

Если же прямая не параллельна плоскости xOy, то ее полупрямая лежит в полупространстве $z < 0$, где нет ни одной точки параболоида. Таким образом, нет прямой, которая всеми своими точками лежала бы на эллиптическом параболоиде.

9. Гиперболический параболоид

По аналогии с уравнением (48) можем записать уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{52}$$

Поверхность, которая имеет в некоторой системе координат уравнение вида (52), назовем *гиперболическим параболоидом*.

Исследуем внешний вид гиперболического параболоида с помощью сечений (рис. 63). Сечение плоскостью $z = h$ представляет собой гиперболу, которая в этой плоскости имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h, \text{ или } \frac{x^2}{2ha^2} - \frac{y^2}{2hb^2} = 1.$$

Для больших значений h полуоси гиперболы $\sqrt{2ha}$ и $\sqrt{2hb}$ велики и уменьшаются с уменьшением h. При этом ось гиперболы, которая ее пересекает, параллельна вектору $\boldsymbol{e}_1$.

При $h = 0$ гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0,$$

или

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x.$$

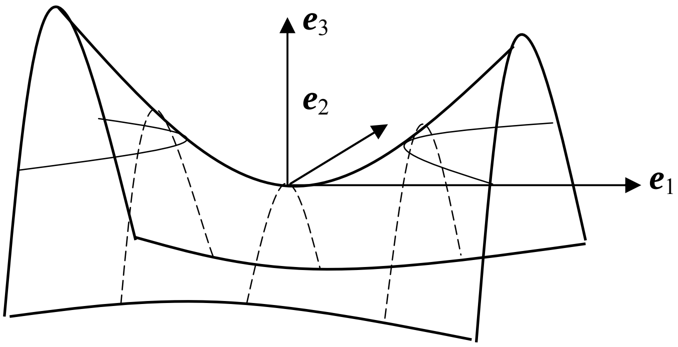


Рис. 63

Если $h < 0$, то ось гиперболы, которая ее пересекает, параллельна вектору $\boldsymbol{e}_2$. Полуоси растут с увеличением $|h|$. Отношение полуосей для всех гипербол при одном знаке h одно и то же. Поэтому если мы нарисуем все сечения гиперболического параболоида на одной и той же плоскости, то получим семейство всех гипербол, имеющих в качестве асимптот пару пересекающихся прямых с уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x.$$

Сечения гиперболического параболоида с плоскостями $y = 0$ и $x = 0$ являются двумя «главными параболами»:

$$x^2 = 2a^2z, y = 0 \tag{53}$$

– неподвижная парабола и

$$y^2 = -2b^2z, x = 0 \tag{54}$$

– подвижная парабола.

Эти параболы обращены вогнутостью в противоположные стороны: неподвижная – «вверх» (т. е. в положительном направлении оси Oz), а подвижная – «вниз» (т. е. в отрицательном направлении оси Oz). Сечение в плоскости $x = \alpha$ имеет в системе координат $O_0\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, где $O_0 = (\alpha; 0; 0)$, уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} = -2z + \frac{\alpha^2}{a^2}, x = \alpha,$$

или

$$y^2 = -2b^2(z - z_0),\ x = \alpha, \tag{55}$$

где $z_0 = \dfrac{\alpha^2}{2a^2}$.

После перенесения начала координат в точку $O' = (\alpha,\ 0,\ z_0)$, уравнение (54) примет вид

$$y'^2 = -2b^2 z',\ x = \alpha,$$

где $y = y'$, $z = z' + z_0$. Последнее уравнение показывает, что кривая (55) – это та же подвижная парабола (54), только сдвинутая параллельно себе при скольжении ее вершины вдоль неподвижной параболы из точки O в O'.

Отсюда вытекает следующее утверждение. Гиперболический параболоид, заданный (в прямоугольной системе координат) уравнением (52), есть поверхность, описываемая параболой $y^2 = -2b^2z$, $x = 0$ при ее движении вдоль неподвижной параболы (53) так, что вершина подвижной параболы скользит по неподвижной параболе, а плоскость и ось подвижной параболы остаются все время параллельными себе самим, при этом обе параболы вогнутостью все время обращены в противоположные стороны: неподвижная – вогнутостью «вверх», т. е. в положительном направлении оси Oz, а подвижная – «вниз».

Из этого построения видно, что гиперболический параболоид имеет вид седла.

Гиперболический параболоид, как и однополостной гиперболоид, имеет два семейства прямолинейных образующих (рис. 64). Через каждую точку гиперболического параболоида проходят две прямые, которые всеми точками лежат на этой плоскости.

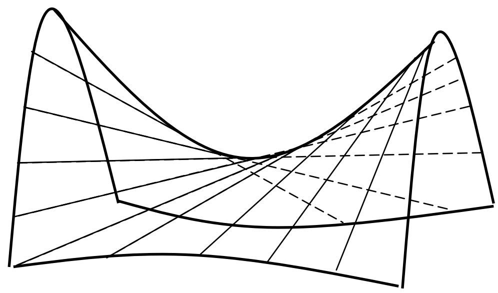


Рис. 64

Найдем уравнения прямолинейных образующих. Перепишем уравнение (52) в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z .$$

Рассмотрим прямую, заданную как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2\lambda z, \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=\mu, \end{cases} \tag{56}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{a}x+\dfrac{\mu}{b}y-2\lambda z=0, \\ \dfrac{\lambda}{a}x-\dfrac{\lambda}{b}y-\mu=0. \end{cases}$$

Очевидно, что любая точка, удовлетворяющая уравнениям (56), удовлетворяет и уравнению (52), которое является произведением уравнений (56)

$$\lambda\mu\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=\mu\lambda\cdot 2z$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\,.$$

А это значит, что каждая точка прямой (56) принадлежит гиперболическому параболоиду (52).

Аналогично рассматривается прямая

$$\begin{cases} \dfrac{\mu'}{a}x-\dfrac{\mu'}{b}y-2\lambda' z=0, \\ \dfrac{\lambda'}{a}x+\dfrac{\lambda'}{b}y-\mu'=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \mu'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2\lambda' z, \\ \lambda'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=\mu'. \end{cases} \tag{57}$$

Прямая (57) также всеми своими точками лежит на гиперболическом параболоиде.

Примеры решения типовых задач

Напомним, что окружность является частным случаем эллипса. Если в уравнении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

полуоси равны $a^2 = b^2 = R^2$, то уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1,$$

умножая его на R^2, получим

$$x^2 + y^2 = R^2$$

– уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R.

Если центр окружности в точке (α, β), то, делая сдвиг начала координат в центр окружности, получаем уравнение

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Рассмотрим примеры решения задач на использование уравнения окружности.

Пример 1

Написать уравнение окружности радиуса $R = 6$ с центром в точке $N(2; -3)$.

После подстановки $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $R = 6$ в уравнение окружности получаем

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 6^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36.$$

Пример 2

Найти координаты центра и радиуса окружности

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0.$$

Выделим в данном уравнении полные квадраты:

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2+ 10y + 25) - 25 - 15 = 0,$$

$$(x-3)^2+(y+5)^2=49.$$

Получили уравнение окружности с центром в точке с координатами (3; –5) и радиусом 7.

Напомним, что числа a и b ($a > 0$, $b > 0$) из уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

называются большой и малой полуосью эллипса. Введя обозначение

$$c^2 = a^2 - b^2,\ c > 0,$$

получим координаты фокусов $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$ и эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{\acute{n}}{a}$.

Пример 3

Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 16.$$

Разделив на 16 обе части уравнения, получим

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16/9}=1.$$

Таким образом, $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ и $b^2 = 16/9 \Rightarrow b = 4/3$. Найдем c^2:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 16/9 = 20/9$$

и, значит, $c = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. Следовательно, фокусы имеют следующие координаты: $F_1(-2\sqrt{5}/3;\ 0)$, $F_2(2\sqrt{5}/3;\ 0)$. Найдем эксцентриситет:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Пример 4

Написать каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей и проходящего через точки $L(3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2})$, $N(6;\ 0)$.

Учитывая, что уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, подставим в него координаты точек L и N:

$$\frac{18}{a^2}+\frac{8}{b^2}=1 \text{ и } \frac{36}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1.$$

Следовательно, $a^2 = 36$. Найдем b^2:

$$\frac{18}{36}+\frac{8}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{8}{b^2}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 16.$$

Таким образом, искомое уравнение будет

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Перейдем к рассмотрению гиперболы.

Пример 5

Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы

$$9x^2 - 16y^2 = 144.$$

Приведем данное уравнение к каноническому виду, для чего необходимо разделить обе его части на 144, получим

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Таким образом, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ и $a = 4$ – действительная полуось, $b = 3$ – мнимая. Следовательно, $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, и координаты фокусов

$$F_1(-5;\ 0),\ F_2(5;\ 0).$$

Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$. Учитывая, что асимптоты гиперболы задаются уравнениями $y=\pm\frac{b}{a}x$, получаем $y=\pm\frac{3}{4}x$ – уравнение асимптот.

Аналогично, учитывая, что директрисы гиперболы определяются как и директрисы эллипса $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, получаем $x = \pm\dfrac{16}{5}$.

Пример 6

Составить каноническое уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, пересекающих ось Oy и проходящей через две точки $M(24;\ 5\sqrt{5})$, $N(0;\ 5)$. Найти фокусы этой гиперболы.

По условию задачи искомая гипербола пересекает ось Oy, поэтому ее уравнение ищем в виде

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Так как точки M и N лежат на гиперболе, то их координаты удовлетворяют уравнению гиперболы. Подставим координаты данных точек в это уравнение:

$$\frac{125}{b^2} - \frac{24^2}{a^2} = 1 \text{ и } \frac{25}{b^2} = 1.$$

Из второго уравнения следует, что $b^2 = 25$, и, значит, первое уравнение принимает вид

$$\frac{125}{25} - \frac{24^2}{a^2} = 1 \Rightarrow -\frac{24^2}{a^2} = -4 \Rightarrow a^2 = 12^2 = 144 \text{ и } a = 12.$$

Уравнение гиперболы приобретает вид

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1.$$

Учитывая, что $c^2 = a^2 + b^2$, найдем c: $c^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow c = 13$. Фокусы данной гиперболы лежат на оси Oy и $F_1(0; -13)$, $F_2(0; 13)$.

Перейдем к рассмотрению параболы.

Пример 7

Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы

$$y^2 = 12x.$$

Определить расстояние от точки $M(3; 6)$ до фокуса.

Сравнивая каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$ с уравнением $y^2 = 12x$, получаем $2p = 12$ и $p = 6$. Следовательно, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2} = -3$. Фокус находится в точке $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, т. е. $F(3; 0)$. Найдем расстояние от точки $M(3; 6)$ до фокуса $F(3; 0)$:

$$\left|FM\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (6-0)^2} = 6.$$

Пример 8

Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки $F(0; 3)$ и прямой $y = -5$. Определить точки пересечения этой кривой с осями координат.

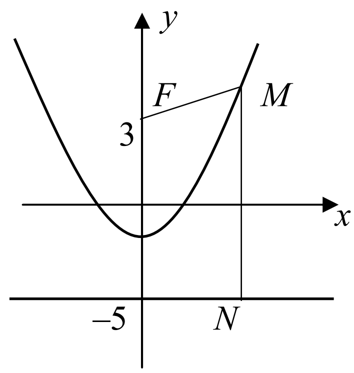


Рис. 65

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка геометрического места (рис. 65). По условию $|FM| = |NM|$, где N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y = -5$. Так как

$$\left|FM\right| = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \text{ и } \left|NM\right| = \sqrt{(y-(-5))^2},$$

то $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(y+5)^2}$, откуда получаем после возведения в квадрат

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 10y + 25.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение $x^2 = 16y + 16$, или $x^2 = 16(y + 1)$. Это уравнение параболы с вершиной в точке $A(0; -1)$, симметричной относительно оси Oy. Заданные в условии точка и прямая являются соответственно ее фокусом и директрисой.

Для определения точек пересечения с осью Ox необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 16y + 16, \\ \quad y = 0. \end{cases}$$

Получаем $x = 4$ и $x = -4$. Таком образом, $M_1(-4; 0)$, $M_2(4; 0)$ – две точки пересечения с осью Ox. Полагая в уравнении параболы $x = 0$, получаем точку $M_3(0; -1)$ – точку пресечения параболы с осью Oy.

Рассмотрим еще один пример на определение геометрического места точек.

Пример 9

Составить уравнение линии, расстояние от каждой точки которой до точки $A(2;\ 0)$ относится к ее расстоянию до прямой $5x + 8 = 0$ как 5:4.

Пусть $M(x;\ y)$ – произвольная точка данной линии, N – основание перпендикуляра, проведенного через точку M к прямой $5x + 8 = 0$, или $x = -8/5$. Расстояние от точки M до точки A и прямой $x = -8/5$ определяется, соответственно, формулами

$$\left|AM\right| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}\ ,\ \left|NM\right| = \sqrt{\left(x - \left(-\frac{8}{5}\right)\right)^2} = \left|x + \frac{8}{5}\right|.$$

По условию задачи

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} : \left|x + \frac{8}{5}\right| = 5:4.$$

Откуда $4\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 5\left|x + \frac{8}{5}\right|$. Возведем это уравнение в квадрат:

$$16((x-2)^2 + y^2) = 25(x + 8/5)^2,$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2) = 25(x^2 + 16/5x + 64/25),$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$16x^2 - 64x + 64 + 16y^2 = 25x^2 + 80x + 64,$$

$$9x^2 - 16y^2 + 144x = 0.$$

Выделим полные квадраты в левой части полученного уравнения:

$$9(x^2 + 16x + 64) - 16y^2 - 9 \cdot 64 = 0,$$

$$9(x + 8)^2 - 16y^2 = 9 \cdot 64,$$

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Полученное уравнение – уравнение гиперболы с центром в точке $C(-8;\ 0)$ и полуосями $a = 8$, $b = 6$.

Рассмотрим поверхности второго порядка.

Пример 10

Привести к каноническому виду уравнение

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми переменными:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) + 13 = 0.$$

Дополним каждую из скобок до полного квадрата:

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + 9(y^2 - 2y + 1) - 9 + 36(z^2 - 2z + 1) - 36 + 13 = 0,$$

$$4(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2 + 36(z - 1)^2 = 36.$$

Делим полученное уравнение на 36, получаем

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'(1;\ 1;\ 1)$. Формулы преобразования координат имеют следующий вид:

$$x = x' + 1,$$

$$y = y' + 1,$$

$$z = z' + 1.$$

Тогда уравнение поверхности примет вид

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 1.$$

Это уравнение эллипсоида с центром в точке $O'(1;\ 1;\ 1)$ и полуосями 3, 2 и 1 соответственно.

Пример 11

Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0.$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые переменные:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) - 2z = 0.$$

Выделим полные квадраты:

$$(x^2-4x+4)-4-(y^2-8y+16)+16-2z=0,$$

$$(x-2)^2-(y-4)^2-2(z-6)=0.$$

Введем обозначения: $x'=x-2$, $y'=y-4$, $z'=z-6$, перенеся начало координат в точку $O'(2;\ 4;\ 6)$. Уравнение поверхности будет иметь вид

$$x'^2-y'^2=2z'.$$

Это уравнение гиперболического параболоида.

Вопросы для самопроверки

1. Какие кривые второго порядка существуют?
2. Как определяется эллипс?
3. Что такое гипербола?
4. Что такое полуоси?
5. Каково геометрическое определение параболы?
6. Какая прямая называется директрисой?
7. Какие линии имеют фокус?
8. Какие поверхности называются поверхностями вращения?
9. Какие существуют поверхности второго порядка?
10. Какие поверхности второго порядка имеют прямолинейные образующие?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

Вариант 1

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{b}$, $-4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3;\ 4;\ 5)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(-2;\ -3;\ 6)$, $D(3;\ -6;\ -3)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины C и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (5;\ -3;\ 9)$ приложена к точке $A(3;\ 4;\ -6)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2;\ 6;\ 5)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (2;\ -1;\ 4)$, $\boldsymbol{b} = (-3;\ 0;\ -2)$, $\boldsymbol{c} = (4;\ 5;\ -3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (7;\ 23;\ 4)$ в этом базисе.

Вариант 2

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 21\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $4\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $5\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $2\boldsymbol{a}$, $-3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-7; -5; -6)$, $B(-2; 5; 1)$, $C(3; -2; 4)$, $D(1; 2; 2)$;

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра CD и две вершины A и B пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (-3; 1; -9)$ приложена к точке $A(6; -3; 5)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(9; 5; -7)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (2; -1; 4)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 0; -2)$, $\boldsymbol{c} = (4; 5; -3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (0; 11; -14)$ в этом базисе.

Вариант 3

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $-2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\boldsymbol{b}$, $-7\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $3\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(1; 3; 1)$, $B(-1; 4; 6)$, $C(-2; -3; 4)$, $D(3; 4; -4)$;

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (2; 19; -4)$ приложена к точке $A(5; 3; 4)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(6; -4; -1)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (-1; 1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (2; -3; -5)$, $\boldsymbol{c} = (-6; 3; -1)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (28; -19; -7)$ в этом базисе.

Вариант 4

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $2\boldsymbol{a}$, $-7\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $4\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{b}$, $-7\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $2\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2; 4; 1)$, $B(-3; -2; 4)$, $C(3; 5; -2)$, $D(4; 2; -3)$.

Вычислить:

а)

площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AC и две вершины B и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (-4; 5; -7)$ приложена к точке $A(4; -2; 3)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(7; 0; -3)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (1; 3; 4)$, $\boldsymbol{b} = (-2; 5; 0)$, $\boldsymbol{c} = (3; -2; -4)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (13; -5; -4)$ в этом базисе.

Вариант 5

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$, $-4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $6\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $\boldsymbol{a}$, $6\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-5; -3; -4)$, $B(1; 4; 6)$, $C(3; 2; -2)$, $D(8; -2; 4)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (4; 11; -6)$ приложена к точке $A(3; 5; 1)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; -2; -3)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (1; -1; 1)$, $\boldsymbol{b} = (-5; -3; 1)$, $\boldsymbol{c} = (2; -1; 0)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-15; -10; 5)$ в этом базисе.

Вариант 6

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = - 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $-2\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $5\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $-3\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $5\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3; 4; 2)$, $B(-2; 3; -5)$, $C(4; -3; 6)$, $D(6; -5; 3)$.

Вычислить:

а) площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (3; -5; 7)$ приложена к точке $A(2; 3; -5)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(0; 4; 3)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (3; 1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (-7; -2; -4)$, $\boldsymbol{c} = (-4; 0; 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (16; 6; 15)$ в этом базисе.

Вариант 7

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $2\boldsymbol{b}$, $4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\boldsymbol{a}$, $5\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $7\boldsymbol{a}$, $-4\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $7\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $5\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4; 6; 3)$, $B(3; -5; 1)$, $C(2; 6; -4)$, $D(2; 4; -5)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AD и две вершины B и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (5; 4; 11)$ приложена к точке $A(6; 1; -5)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; 2; -6)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (-3; 0; 1)$, $\boldsymbol{b} = (2; 7; -3)$, $\boldsymbol{c} = (-4; 3; 5)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-16; 33; 13)$ в этом базисе.

Вариант 8

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -12\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{b}$, $-4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $4\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $2\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $2\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $-4\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7; 5; 8)$, $B(–4; –5; 3)$, $C(2; –3; 5)$, $D(5; 1; –4)$.

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (–9; 5; 7)$ приложена к точке $A(1; 6; –3)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; –3; 5)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (5; 1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (–2; 1; –3)$, $\boldsymbol{c} = (4; –3; 5)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (15; –15; 24)$ в этом базисе.

Вариант 9

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = –\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = –3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = –2\boldsymbol{i} – 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $2\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{a}$;

б) найти модуль векторного произведения $7\boldsymbol{a}$, $–3\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $3\boldsymbol{a}$, $–4\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить будут ли компланарны три вектора $7\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $–3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3; –2; 6)$, $B(–6; –2; 3)$, $C(1; 1; –4)$, $D(4; 6; –7)$.

Вычислить:

а) площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (6; 5; –7)$ приложена к точке $A(7; –6; 4)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; 9; –6)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (0; 2; –3)$, $\boldsymbol{b} = (4; –3; –2)$, $\boldsymbol{c}= (–5; –4; 0)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (–19; –5; –4)$ в этом базисе.

Вариант 10

1. Даны вектора $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} – 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 9\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} – 8\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $3\boldsymbol{a}$, $–5\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\boldsymbol{b}$, $–9\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $2\boldsymbol{a}$, $–4\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $3\boldsymbol{a}$, $–4\boldsymbol{b}$, $–5\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(–5; –4; –3)$, $B(7; 3; –1)$, $C(6; –2; 0)$, $D(3; 2; –7)$.

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AD и две вершины B и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (– 5; 4; 4)$ приложена к точке $A(3; 7; –5)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2; –4; 1)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (3; –1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (– 2; 3; 1)$, $\boldsymbol{c} = (4; –5; –3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (–3; 2; –3)$ в этом базисе.

Вариант 11

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} – 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} – 4\boldsymbol{j} – 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} – 7\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $–3\boldsymbol{a}$, $6\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $–2\boldsymbol{b}$, $4\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $–4\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $\boldsymbol{a}$, $–2\boldsymbol{b}$, $6\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3; -5; -2)$, $B(-4; 2; 3)$, $C(1; 5; 7)$, $D(-2; -4; 5)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (4; 7; -3)$ приложена к точке $A(5; -4; 2)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(8; 5; -4)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (5; 3; 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1; 2; -3)$, $\boldsymbol{c} = (3; -4; 2)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-9; 34; -20)$ в этом базисе.

Вариант 12

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $5\boldsymbol{a}$, $-3\boldsymbol{b}$;

б) найти модуль векторного произведения $4\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $-2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $-2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить будут ли компланарны три вектора $-2\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7; 4; 9)$, $B(1; -2; -3)$, $C(-5; -3; 0)$, $D(1; -3; 4)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\boldsymbol{F} = (2; 2; 9)$ приложена к точке $A(4; 2; -3)$.

Вычислить:

а) работу силы $\boldsymbol{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2; 4; 0)$;

б) модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (3; 1; -3)$, $\boldsymbol{b} = (-2; 4; 1)$, $\boldsymbol{c} = (1; -2; 5)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (1; 12; -20)$ в этом базисе.

Вариант 13

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $8\boldsymbol{a}$, $-6\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $3\boldsymbol{b}$, $11\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $2\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, $-5\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить будут ли компланарны три вектора $-8\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $11\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4; -7; -3)$, $B(-4; -5; 7)$, $C(2; -3; 3)$, $D(3; 2; 1)$.

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (9; -3; 4)$, $\boldsymbol{Q} = (5; 6; -2)$, $\boldsymbol{R} = (-4; -2; 7)$, приложенные к точке $A(-5; 4; -2)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; 6; -5)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (6; 1; -3)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 2; 1)$, $\boldsymbol{c} = (-1; -3; 4)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (15; 6; -17)$ в этом базисе.

Вариант 14

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\,\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $3\boldsymbol{a}$, $-7\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $-4\boldsymbol{b}$, $11\boldsymbol{a}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $5\boldsymbol{a}$, $7\boldsymbol{b}$, $5\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $3\boldsymbol{a}$, $7\boldsymbol{b}$, $-2\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4; -5; -3)$, $B(3; 1; 2)$, $C(5; 7; -6)$, $D(6; -1; 5)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (5; -2; 3)$, $\boldsymbol{Q} = (4; 5; -3)$, $\boldsymbol{R} = (-1; -3; 6)$, приложенные к точке $A(7; 1; -5)$. Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2; -3; -6)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (4; 2; 3)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 1; -8)$, $\boldsymbol{c} = (2; -4; 5)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-12; 14; -31)$ в этом базисе.

Вариант 15

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $3\boldsymbol{a}$, $9\boldsymbol{b}$;

б) найти модуль векторного произведения $-7\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $5\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $3\boldsymbol{a}$, $-9\boldsymbol{b}$, $4\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(5; 2; 4)$, $B(-3; 5; -7)$, $C(1; -5; 8)$, $D(9; -3; 5)$.

Вычислить:

а) площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (3; -5; 4)$, $\boldsymbol{Q} = (5; 6; -3)$, $\boldsymbol{R} = (-1; -3; 6)$, приложенные к точке $A(-3; 5; 9)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(5; 6; -3)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (-2; 1; 3)$, $\boldsymbol{b} = (3; -6; 2)$, $\boldsymbol{c} = (-5; -3; -1)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (31; -6; 22)$ в этом базисе.

Вариант 16

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 8\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $3\boldsymbol{b}$, $-8\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $-7\boldsymbol{a}$, $9\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $4\boldsymbol{a}$, $-6\boldsymbol{b}$, $5\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $4\boldsymbol{a}$, $-6\boldsymbol{b}$, $9\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-6; 4; 5)$, $B(5; -7; 3)$, $C(4; 2; -8)$, $D(2; 8; -3)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AD и две вершины, B и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (-10; 6; 5)$, $\boldsymbol{Q} = (4; -9; 7)$, $\boldsymbol{R} = (5; 3; -3)$, приложенные к точке $A(4; -5; 9)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; 7; -5)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (1; 3; 6)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 4; -5)$, $\boldsymbol{c} = (1; -7; 2)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-2; 17; 5)$ в этом базисе.

Вариант 17

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} – 4\boldsymbol{j} – 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = –9\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} – 7\boldsymbol{k}$.
Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $3\boldsymbol{b}$, $–8\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $–5\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $7\boldsymbol{a}$, $5\boldsymbol{b}$, $–\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $2\boldsymbol{a}$, $–7\boldsymbol{b}$, $–\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(5; 3; 6)$, $B(–3; –4; 4)$, $C(5; –6; 8)$, $D(4; 0; –3)$.

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (5; –3; 1)$, $\boldsymbol{Q} = (4; 2; –6)$, $\boldsymbol{R} = (–5; –3; 7)$, приложенные к точке $A(–5; 3; 7)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(3; 8; –5)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (7; 2; 1)$, $\boldsymbol{b} = (5; 1; –2)$, $\boldsymbol{c} = (–3; 4; 5)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (26; 11; 1)$ в этом базисе.

Вариант 18

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 9\boldsymbol{i} – 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} – 15\boldsymbol{j} + 21\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} – 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$.
Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $5\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{a}$;

б) найти модуль векторного произведения $–6\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $2\boldsymbol{a}$, $–7\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $2\boldsymbol{a}$, $–4\boldsymbol{b}$, $4\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(5; –4; 4)$, $B(–4; –6; 5)$, $C(3; 2; –7)$, $D(6; 2; –9)$;

Вычислить:

а) площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (–5; 8; 4)$, $\boldsymbol{Q} = (6; –7; 3)$, $\boldsymbol{R} = (3; 1; –5)$, приложенные к точке $A(2; –4; 7)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(0; 7; 4)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (3; 5; 2)$, $\boldsymbol{b} = (–2; 7; –5)$, $\boldsymbol{c} = (6; –2; 1)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (6; –9; 22)$ в этом базисе.

Вариант 19

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = –2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} – 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} – 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} – \boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $–9\boldsymbol{a}$, $7\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $–8\boldsymbol{b}$, $5\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $–6\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

д) проверить будут ли компланарны три вектора $\boldsymbol{a}$, $–6\boldsymbol{b}$, $5\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(–7; –6; –5)$, $B(5; 1; –3)$, $C(8; –4; 0)$, $D(3; 4; –7)$.

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AD и две вершины B и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (7; –5; 2)$, $\boldsymbol{Q} = (3; 4; –8)$, $\boldsymbol{R} = (–2; –4; 3)$, приложенные к точке $A(–3; 2; 0)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(6; 4; –3)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (5; 3; 2)$, $\boldsymbol{b} = (2; –5; 1)$, $\boldsymbol{c} = (–7; 4; –3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (36; 1; 15)$ в этом базисе.

Вариант 20

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = –9\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} – 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} – 2\boldsymbol{j} +4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = –5\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} – 2\boldsymbol{k}$. Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $9\boldsymbol{a}$, $–4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $–6\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $–2\boldsymbol{a}$, $7\boldsymbol{b}$, $5\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $2\boldsymbol{a}$, $7\boldsymbol{b}$, $4\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(7; –1; –2)$, $B(1; 7; 8)$, $C(3; 7; 9)$, $D(–3; –5; 2)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (3; –4; 2)$, $\boldsymbol{Q} = (2; 3; –5)$, $\boldsymbol{R} = (–3; –2; 4)$, приложенные к точке $A(5; 3; –7)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; –1; –4)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (11; 1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (–3; 3; 4)$, $\boldsymbol{c} = (–4; –2; 7)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (–5; 11; –15)$ в этом базисе.

Вариант 21

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $7\boldsymbol{a}$, $-4\boldsymbol{b}$;

б) найти модуль векторного произведения $5\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $-3\boldsymbol{a}$, $6\boldsymbol{b}$, $-\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $7\boldsymbol{a}$, $-4\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(5; 2; 7)$, $B(7; -6; -9)$, $C(-7; -6; 3)$, $D(1; -5; 2)$.

Вычислить:

а) площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины C и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (4; -2; -5)$, $\boldsymbol{Q} = (5; 1; -3)$, $\boldsymbol{R} = (-6; 2; 5)$, приложенные к точке $A(-3; 2; -6)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; 5; -3)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (9; 5; 3)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 2; 1)$, $\boldsymbol{c} = (4; -7; 4)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-10; -13; 8)$ в этом базисе.

Вариант 22

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 7\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $-4\boldsymbol{a}$, $-5\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $2\boldsymbol{b}$, $6\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $3\boldsymbol{a}$, $-7\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $-4\boldsymbol{a}$, $2\boldsymbol{b}$, $6\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-2; -5; -1)$, $B(-6; -7; 9)$, $C(4; -5; 1)$, $D(2; 1; 4)$.

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (7; 3; -4)$, $\boldsymbol{Q} = (9; -4; 2)$, $\boldsymbol{R} = (-6; 1; 4)$, приложенные к точке $A(-7; 2; 5)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; -2; 11)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (7; 2; 1)$, $\boldsymbol{b} = (3; -5; 6)$, $\boldsymbol{c} = (-4; 3; -4)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-1; 18; -16)$ в этом базисе.

Вариант 23

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $-5\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $-7\boldsymbol{b}$, $6\boldsymbol{a}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $6\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $-5\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-6; -3; -5)$, $B(5; 1; 7)$, $C(3; 5; -1)$, $D(4; -2; 9)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (9; -4; 4)$, $\boldsymbol{Q} = (-6; 2; -1)$, $\boldsymbol{R} = (3; 4; 2)$, приложенные к точке $A(5; -4; 3)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B (4; –5; 9);

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}$ = (1; 2; 3), $\boldsymbol{b}$ = (–5; 3; –1), $\boldsymbol{c}$ = (–6; 4; 5) образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d}$ = (–4; 11; 20) в этом базисе.

Вариант 24

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $-2\boldsymbol{a}$, $5\boldsymbol{b}$;

б) найти модуль векторного произведения $6\boldsymbol{a}$, $-4\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $4\boldsymbol{a}$, $-7\boldsymbol{b}$, $-2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $6\boldsymbol{a}$, $-7\boldsymbol{b}$, $-2\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках A(7; 4; 2), B(–5; 3; –9), C(1; –5; 3), D(7; –9; 1);

Вычислить:

а) площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P}$ = (6; –4; 5), $\boldsymbol{Q}$ = (–4; 7; 8), $\boldsymbol{R}$ = (5; 1; –3), приложенные к точке A(–5; –4; 2).

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B(7; –3; 6);

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}$ = (– 2; 5; 1), $\boldsymbol{b}$ = (3; 2; –7), $\boldsymbol{c}$ = (4; –3; 2) образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d}$ = (–4; 22; –13) в этом базисе.

Вариант 25

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $5\boldsymbol{b}$, $-6\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $-9\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $2\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $2\boldsymbol{a}$, $5\boldsymbol{b}$, $-6\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-8; 2; 7)$, $B(3; -5; 9)$, $C(2; 4; -6)$, $D(4; 6; -5)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AD и две вершины B и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (5; 5; -6)$, $\boldsymbol{Q} = (7; -6; 6)$, $\boldsymbol{R} = (-4; 3; 4)$, приложенные к точке $A(-9; 4; 7)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(8; -1; 7)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (3; 1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (-4; 3; -1)$, $\boldsymbol{c} = (2; 3; 4)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (14; 14; -20)$ в этом базисе.

Вариант 26

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $3\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $5\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $2\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $-2\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $7\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(4; 3; 1)$, $B(2; 7; 5)$, $C(–4; –2; 4)$, $D(2; –3; –5)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины C и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (7; –6; 2)$, $\boldsymbol{Q} = (–6; 2; –1)$, $\boldsymbol{R} = (1; 6; 4)$, приложенные к точке $A(3; –6; 1)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(6; –2; 7)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (3; –1; 2)$, $\boldsymbol{b} = (–2; 4; 1)$, $\boldsymbol{c} = (4; –5; –1)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (–5; 11; 1)$ в этом базисе.

Вариант 27

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} – \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} – 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} – \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $6\boldsymbol{b}$, $3\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $–3\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, $–5\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $3\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, $–5\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(–9; –7; 4)$, $B(–4; 3; –1)$, $C(5; –4; 2)$, $D(3; 4; 4)$.

Вычислить:

а) площадь грани BCD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра CD, и две вершины A и B пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (4; –2; 3)$, $\boldsymbol{Q} = (–2; 5; 6)$, $\boldsymbol{R} = (7; 3; –1)$, приложенные к точке $A(–3; –2; 5)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(9; -5; 4)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (4; 5; 1)$, $\boldsymbol{b} = (1; 3; 1)$, $\boldsymbol{c} = (-3; -6; 7)$, образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (19; 33; 0)$ в этом базисе.

Вариант 28

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $8\boldsymbol{a}$, $-3\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $-5\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $\boldsymbol{a}$, $7\boldsymbol{b}$, $-2\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $-3\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, $8\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(3; 5; 3)$, $B(-3; 2; 8)$, $C(-3; -2; 6)$, $D(7; 8; -2)$;

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BD и две вершины A и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (7; 3; -4)$, $\boldsymbol{Q} = (3; -2; 2)$, $\boldsymbol{R} = (-5; 4; 3)$, приложенные к точке $A(-5; 0; 4)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; -3; 5)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (1; -3; 1)$, $\boldsymbol{b} = (-2; -4; 3)$, $\boldsymbol{c} = (0; -2; 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (-8; -10; 13)$ в этом базисе.

Вариант 29

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = -9\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $-2\boldsymbol{a}$, $8\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $6\boldsymbol{b}$, $2\boldsymbol{c}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $3\boldsymbol{a}$, $-5\boldsymbol{b}$, $-4\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;

д) проверить будут ли компланарны три вектора $3\boldsymbol{a}$, $6\boldsymbol{b}$, $-4\boldsymbol{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(4; 2; 3)$, $B(-5; -4; 2)$, $C(5; 7; -4)$, $D(6; 4; -7)$.

Вычислить:

а) площадь грани ABD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AD, и две вершины B и C пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (3; -2; 4)$, $\boldsymbol{Q} = (-4; 4; -3)$, $\boldsymbol{R} = (3; 4; 2)$, приложенные к точке $A(1; -4; 3)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(4; 0; -2)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (5; 7; -2)$, $\boldsymbol{b} = (-3; 1; 3)$, $\boldsymbol{c} = (1; -4; 6)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (14; 9; -1)$ в этом базисе.

Вариант 30

1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$.

Необходимо:

а) вычислить скалярное произведение двух векторов $7\boldsymbol{a}$, $-2\boldsymbol{c}$;

б) найти модуль векторного произведения $4\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$;

в) вычислить смешанное произведение трех векторов $5\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{b}$, $-4\boldsymbol{c}$;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора $5\boldsymbol{a}$, $4\boldsymbol{b}$, -2;.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(-4; -2; -3)$, $B(2; 5; 7)$, $C(6; 3; -1)$, $D(6; -4; 1)$.

Вычислить:

а) площадь грани ACD;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра BC, и две вершины A и D пирамиды;

в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Даны три силы $\boldsymbol{P} = (2; -1; -3)$, $\boldsymbol{Q} = (3; 2; -1)$, $\boldsymbol{R} = (-4; 1; 3)$, приложенные к точке $A(-1; 4; -2)$.

Вычислить:

а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(2; 3; -1)$;

б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B.

4. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a} = (-1; 4; 3)$, $\boldsymbol{b} = (3; 2; -4)$, $\boldsymbol{c} = (-2; -7; 1)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\boldsymbol{d} = (6; 20; -3)$ в этом базисе.

Задание 2

Вариант 1

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$, $C(10; 7)$.

Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(4; 2; 5)$, $B(0; 7; 2)$, $C(0; 2; 7)$, $D(1; 5; 0)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку *M*(–2; 7; 3) параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$.

4. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ и $\begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x+6z-6=0 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–3; –2), *B*(14; 4), *C*(6; 8). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD: A*(4; 4; 10), *B*(4; 10; 2), *C*(2; 8; 4), *D*(9; 6; 4). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка *MN* перпендикулярно к этому отрезку, если *M*(1; 5; 6), *N*(–1; 7; 10).

4. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

Вариант 3

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(1; 0), *B*(–1; 4), *C*(9; 5). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(4;\ 6;\ 5)$, $B(6;\ 9;\ 4)$, $C(2;\ 10;\ 10)$, $D(7;\ 5;\ 9)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Найти расстояние от точки $M\left(2; 0; -\frac{1}{2}\right)$ до плоскости $4x-4y+2z+17=0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -3; 3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные $60^0, 45^0, 120^0$.

Вариант 4

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(1;\ –2)$, $B(7;\ 1)$, $C(3;\ 7)$.
Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(3;\ 5;\ 4)$, $B(8;\ 7;\ 4)$, $C(5;\ 10;\ 4)$, $D(4;\ 7;\ 8)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; –3; 5)$ параллельно плоскости Oxy.

4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-6}$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5+4=0. \end{cases}$

Вариант 5

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(–2, –3)$, $B(1; 6)$, $C(6; 1)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(10; 6; 6)$, $B(–2; 8; 2)$, $C(6; 8; 9)$, $D(7; 10; 3)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2; 5; -1)$.

4. Составить параметрическое уравнение медианы треугольника с вершинами $A(3; 6; -7), B(-5; 1; -4), C(0; 2; 3)$ из вершины C.

Вариант 6

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(–4; 2)$, $B(–6; 6)$, $C(6; 2)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(1; 8; 2), *B*(5; 2; 6), *C*(5; 7; 4), *D*(4; 10; 9). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 5; -1)$ и $B(-3;\ 1;\ 3)$ параллельно оси Oy.

4. При каком n прямая $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{n}=\frac{z}{1}$ параллельна прямой $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0? \end{cases}$

Вариант 7

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(4; –3), *B*(7; 3), *C*(1; 10). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(6; 6; 5), *B*(4; 9; 5), *C*(4; 6; 11), *D*(6; 9; 3).

Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; 4; 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

4. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Вариант 8

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(4; –4), *B*(8; 2), *C*(3; 8).

Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD: A*(3; 1; 4), *B*(–1; 6; 1), *C*(–1; 1; 6), *D*(0; 4; –1).

Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

4. Найти проекцию точки $P(3;\ 1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

Вариант 9

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(1; –6), *B*(3; 4), *C*(–3; 3).

Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD:* *A*(3; 3; 0), *B*(6; 9; 1), *C*(1; 7; 3), *D*(8; 5; 8).

Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить общее уравнение прямой, образованной пересечением плоскости $3x-5y-7z+9=0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3;2;-5)$.

4. Определить, при каком значении *C* плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны.

Вариант 10

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–3; –3), *B*(5; –7), *C*(7; 7).

Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(7; 7; 3), *B*(6; 5; 8), *C*(3; 5; 8), *D*(8; 4; 1).

Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости в отрезках, если она проходит через точку $M(6;-10;1)$ и отсекает на оси Ox отрезок, равный –3, а на оси Oz – равный 2.

4. Определить, при каком значении A плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$.

Вариант 11

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(–4; 2)$, $B(8; –6)$, $C(2; 6)$.
Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы AM;
г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;
д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;
е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; –2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(–5; –4; 8)$.
Составить:
а) уравнение плоскости ABC;
б) уравнение прямой AB;
в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;
г) уравнение прямой CN, параллельной AB;
д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-4)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=(4;1;-1)$, $\vec{b}=(2;-1;2)$.

4. Определить, при каком значении m и C прямая $\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна плоскости $3x-2y+Cz-1=0$.

Вариант 12

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(–4; 2)$, $B(6; –4)$, $C(4; 10)$.
Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы AM;
г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;
д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;
е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(3; 3; 9), *B*(6; 9; 1), *C*(1; 7; 3), *D*(8; 5; 8).

Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;1;0)$, $B(2;-1;-1)$ перпендикулярно к плоскости $5x+2y+$ $+3z-7=0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-3t+1, \\ z=-7t-4. \end{cases}$

Вариант 13

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(3; –1), *B*(11; 3), *C*(–6; 2).

Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(3; 5; 4), *B*(5; 8; 3), *C*(1; 9; 9), *D*(6; 4; 8). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-1)$ и прямую $\begin{cases} x=t-3, \\ y=2t+5, \\ z=-3t+1. \end{cases}$

4. Определить, при каком значении C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ перпендикулярны.

Вариант 14

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–3; –1), *B*(–4; –5), *C*(8; 1). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD: A*(2; 4; 3), *B*(7; 6; 3), *C*(4; 9; 3), *D*(3; 6; 7). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;-1;2)$, $B(2;\ 1;4)$ параллельно вектору $\vec{a}=(5;-2;-1)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-5;3)$ параллельно прямой $\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\5x+4y-z-7=0.\end{cases}$.

Вариант 15

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–2; –6), *B*(–3; 5), *C*(4; 0). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(9;\ 5;\ 5)$, $B(-3;\ 7;\ 1)$, $C(5;\ 7;\ 8)$, $D(6;\ 9;\ 2)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярно вектору AB, если $A\left(5;-2;3\right)$, $B\left(1;-3;5\right)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(2;-3;4\right)$ перпендикулярно прямым $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ и $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-3}$.

Вариант 16

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(-7;-2)$, $B(3;-8)$, $C(-4;\ 6)$.
Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(3;\ 3;-9)$, $B(-6;\ 0;\ 1)$, $C(-1;\ 7;\ 3)$, $D(0;\ 5;\ 0)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Найти величину отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M\left(2;-3;3\right)$ параллельно плоскости $3x+y-3z=0$.

4. При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+6x-7=0$ перпендикулярна к прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$?

Вариант 17

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(-7; -2)$, $B(3; -8)$, $C(-4; 6)$.
Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы AM;
г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;
д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;
е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2; 3; 5)$, $B(3; -2; 6)$, $C(2; 2; -5)$, $D(6; 3; -3)$. Составить:
а) уравнение плоскости ABC;
б) уравнение прямой AB;
в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;
г) уравнение прямой CN, параллельной AB;
д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ и перпендикулярно отрезку AB, где $A(2; 3; -4)$, $B(-1; 2; -3)$.

4. Показать, что прямая $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y-3}{-8}=\dfrac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z+1=0$, а прямая $\begin{cases} x=t+7, \\ y=t-2, \\ z=2t+1 \end{cases}$ лежит в этой плоскости.

Вариант 18

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(0; 2)$, $B(-7; -4)$, $C(3; 2)$.
Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD: A*(–4; 1; –4), *B*(9; –5; 0), *C*(2; 2; –2), *D*(–1; 3; 1). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку $N(-3;1;-2)$.

4. Определить, при каком значении *A* плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{7}$.

Вариант 19

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(4; 1), *B*(–3; –1), *C*(7; –3).
Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(9; 5; 0), *B*(–3; 0; 1), *C*(5; 1; 8), *D*(0; 9; 2). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3;-4;1)$ параллельно координатной плоскости Oxz.

4. Показать, что прямые $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$ перпендикулярны.

Вариант 20

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(0; 2), *B*(–7; –4), *C*(3; 2).
Найти:
а) уравнение стороны *AB*;
б) уравнение высоты *CH*;
в) уравнение медианы *AM*;
г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;
д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;
е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(0; 5; 5), *B*(–3; 7; 1), *C*(5; 0; 8), *D*(6; 0; 2). Составить:
а) уравнение плоскости *ABC*;
б) уравнение прямой *AB*;
в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;
г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;
д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3;-3;2)$.

4. Определить, при каком значении *D* прямая $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0, \\ x+4y-z+D=0. \end{cases}$ пересекает ось Oz.

Вариант 21

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(4; 1), *B*(–3; –1), *C*(7; –3).
Найти:
а) уравнение стороны *AB*;
б) уравнение высоты *CH*;
в) уравнение медианы *AM*;
г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;
д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;
е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(3;\ 1;\ 4)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(-1;\ -1;\ 0)$, $D(0;\ 4;\ -1)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3)$ и $B(-3;4;-5)$ параллельно оси Oz.

4. Определить, при каком значении P прямые $\begin{cases} x = 2t+5, \\ y = -y+2, \\ z = Pt-7. \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$ параллельны.

Вариант 22

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(-1;-4)$, $B(9;6)$, $C(-5;4)$. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(-3;\ 3;\ 0)$, $B(-6;\ 0;\ 1)$, $C(1;\ -7;\ 3)$, $D(0;\ 5;\ 8)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ и прямую $\begin{cases} x = t-3, \\ y = 2t+5, \\ z = -3t+1. \end{cases}$.

Вариант 23

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(1; 0)$, $B(–1; 4)$, $C(9; 5)$.
Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы AM;
г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;
д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;
е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(–3; 5; 4)$, $B(–5; 8; –3)$, $C(1; 0; 9)$, $D(0; 4; 0)$. Составить:
а) уравнение плоскости ABC;
б) уравнение прямой AB;
в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;
г) уравнение прямой CN, параллельной AB;
д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Найти проекцию точки $P(4;-3;1)$ на плоскость $x-2y-3z-15=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2;-5;3)$ параллельно плоскости Oxz.

Вариант 24

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(4; –4)$, $B(8; 2)$, $C(3; 8)$.
Найти:
а) уравнение стороны AB;
б) уравнение высоты CH;
в) уравнение медианы AM;
г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;
д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;
е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(–2; 4; 0), *B*(– 7; 6; 3), *C*(4; 0; 3), *D*(–3; 0; 7). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить общее уравнение прямой, образованной пересечением плоскости $x+2y-z+5=0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M\left(5;3;2\right)$.

4. Определить, при каком значении *B* плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ перпендикулярны.

Вариант 25

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–4; 2), *B*(6; –4), *C*(4; 10). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(9; 5; 5), *B*(–3; 7; 1), *C*(5; 0; 0), *D*(6; 0; 2). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *A*(–4; 1; –4) и отсекающей на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковый величины.

4. Определить, при каких значениях *B* и *D* прямая $\begin{cases} x-2y+z-9=0, \\ 3x+By+z+D=0 \end{cases}$ лежит в плоскости Oxy.

Вариант 26

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–2; – 6), *B*(–3; 5), *C*(4; 0). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(–4; 1; –4), *B*(0; –5; 2), *C*(2; 0; –2), *D*(–1; 3; 4). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой *CN*, параллельной *AB*;

д) уравнение плоскости, проходящей через *D* и перпендикулярно *AB*.

3. Определить, при каких значениях *n* и *A* прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-5}{n}=\frac{z+5}{6}$ перпендикулярна плоскости $Ax+2y-2z-7=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(2;3;3\right)$ параллельно векторам $\vec{a}=\left(-1;-3;1\right)$, $\vec{b}=\left(4;1;6\right)$.

Вариант 27

1. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(1; 0), *B*(–1; 4), *C*(9; 5). Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку пересечения и угол между медианой *AM* и высотой *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через точку *C* и параллельно *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

2. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A*(3; 5; –4), *B*(–5; 0; 3), *C*(1; –9; 0), *D*(0; –4; 8). Составить:

а) уравнение плоскости *ABC*;

б) уравнение прямой *AB*;

в) уравнение прямой *DM*, перпендикулярной плоскости *ABC*;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; 3; -1)$ и $B(1;\ 1;\ 4)$ перпендикулярно к плоскости $x-4y+3z+2=0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3; 4; -5)$ параллельно оси Ox.

Вариант 28

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(0; 2)$, $B(-7; -4)$, $C(3; 2)$.

Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(-2;\ 4;\ 3)$, $B(-7; 0; 3)$, $C(4; 0; -3)$, $D(3; 0; 1)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x+5y-z+7=0$ и $3x-y+2z-3=0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ 1)$ и перпендикулярно прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Вариант 29

1.Даны вершины треугольника ABC: $A(1; -2)$, $B(7; 1)$, $C(3; 7)$.

Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2; 4; 3)$, $B(0; 0; 3)$, $C(4; 0; 3)$, $D(–3; 6; 7)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 3; -5)$ и $N(-1; 1; -6)$ параллельно вектору $\vec{a} = (4; 4; 3)$.

4. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -5; 3)$ перпендикулярно прямым $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ и $\begin{cases} x = 3t+1, \\ y = -t-5, \\ z = 2t+3. \end{cases}$

Вариант 30

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(2; 4)$, $B(0; 3)$, $C(4; 0)$.
Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку пересечения и угол между медианой AM и высотой CH;

д) уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельно AB;

е) расстояние от точки C до прямой AB.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(3; 5; 4)$, $B(–5; 0; 3)$, $C(1; 0; 0)$, $D(6; 4; 8)$. Составить:

а) уравнение плоскости ABC;

б) уравнение прямой AB;

в) уравнение прямой DM, перпендикулярной плоскости ABC;

г) уравнение прямой CN, параллельной AB;

д) уравнение плоскости, проходящей через D и перпендикулярно AB.

3. Определить, при каком C плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны.

4. Найти точку, симметричную точке $M(4;3;10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$.

Задание 3

Вариант 1

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x=-6$ на расстояние в два раза большее, чем от точки $A(1;\ 3)$.

2. Построить кривую $r=2\sin 4\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/8.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $49x^2-16y^2=784$; б) $x^2+y^2-2x+1=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $4x^2-y^2-16z^2+16=0$; б) $x^2+4z=0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линией $x=2+3\cos t,\quad y=3+2\sin t$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z=4-x^2-y^2,\quad z=0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $y^2=2z,\quad Oz$; б) $9y^2+4z^2=36,\quad Oy$.

Вариант 2

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x=-2$ на расстояние в два раза большее, чем от точки $A(4;0)$.

2. Построить кривую $r=2(1-\ \sin 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/8.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $25x^2+36y^2=900$; б) $x^2-4y^2-2x-16y-19=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $3x^2+y^2+9z^2-9=0$; б) $x^2+2y^2-2z=0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y=x^2, \quad y=2x, \quad y=x$;

б) тело, ограниченное поверхностями $y+z=3, \quad y=x^2, \quad z=0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $4x^2-3y^2=12, \quad Ox$; б) $x=1, y=2, \quad Oz$.

Вариант 3

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $y=-2$ на расстояние в три раза большее, чем от точки $A(5;\,0)$.

2. Построить кривую $r=2\sin 2\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом $\pi/8$.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $16x^2-25y^2=400$; б) $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $-5x^2+10y^2-z^2+20=0$; б) $y^2+4z^2=5x^2$.

5. Построить:

а) тело, ограниченное поверхностями $3z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1, \quad z=0$;

б) область, ограниченную астроидой $x=\cos^3 t, \quad y=\sin^3 t$, $t\in[0;2\pi]$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $x^2=-3z, \quad Oz$; б) $3x^2+5z^2=15, \quad Ox$.

Вариант 4

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: отношение расстояний от точки M до точек $A(2;3)$ и $B(-1;2)$ равно $3/4$.

2. Построить кривую $r = 3\sin 6\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/12.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $9x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y = x^2 - 2x + 3, \quad y = 3x - 1$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 + z^2 = 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 2$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $3y^2 - 4z^2 = 12, \quad Oz$; б) $y = 4, z = 2, \quad Ox$.

Вариант 5

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: отношение расстояний от точки M до точек $A(2;3)$ и $B(-1;2)$ равно $3/4$.

2. Построить кривую $r = 2/(1+\cos\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $25x^2 - 9y^2 = 225$; б) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их.

а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$.

5. Построить:

а) область, ограниченную одной аркой циклоиды $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$ и прямой $y = \dfrac{1}{2}$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2=3y$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $x^2=3y,\quad Oy$; б) $3x^2+4z^2=24,\quad Oz$.

Вариант 6

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4;0)$ и $B(-2;2)$ равна 28.

2. Построить кривую $r=3(1+\sin\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом $\pi/6$.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $4x^2+y^2=36$; б) $x^2-4y^2-4x-8y-4=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $z=8-x^2-4y^2$; б) $4x^2+9y^2+36z^2=72$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$, $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2+y^2=2z,\quad z=0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $2x^2-6y^2=12,\quad Ox$; б) $y^2=4z,\quad Oz$.

Вариант 7

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(1;0)$ на расстояние в пять раз меньшее, чем от прямой $x=8$.

2. Построить кривую $r=2(1-\cos\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $49x^2-y^2=49$; б) $x^2+4y^2-4x-8y+4=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $4x^2+6y^2-24z^2=96$; б) $y^2+8z^2=20x^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линией $\rho=3(1+\sin\varphi)$;

б) тело, ограниченное поверхностями $4-y^2=z,\ x^2=2y,\ z=0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $x^2+3z^2=9,\quad Oz$; б) $x=4, z=6,\quad Oy$.

Вариант 8

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x=-5$ на расстояние в три раза большее, чем от точки $A(6;1)$.

2. Построить кривую $r=3(1-\cos 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $25x^2+4y^2=100$; б) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $4x^2-5y^2-5z^2+40=0$; б) $y=5x^2+3z^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y^2=2x+1,\quad y=x-1$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z=4-4x^2-y^2,\quad z=0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $3x^2-5z^2=15,\quad Oz$; б) $z=-1, y=3,\quad Ox$.

Вариант 9

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $y = 7$ на расстояние в пять раза большее, чем от точки $A(4; -3)$.

2. Построить кривую $r = 4\sin 3\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом $\pi/6$.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $9x^2 - 16y^2 = 144$; б) $4x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; б) $x^2 + 4z^2 = 2y$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линией $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 = 2y, \quad x = 2, \quad z = 5, \quad y = 0, \quad z = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $y^2 = 3z, \quad Oz$; б) $2x^2 + 3z^2 = 6, \quad Ox$.

Вариант 10

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: отношение расстояний от точки M до точек $A(-3;\ 5)$ и $B(4;\ 2)$ равно $1/3$.

2. Построить кривую $r = 4\sin 4\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом $\pi/8$.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $x^2 + 4y^2 = 64$; б) $4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $x^2 = 8\left(y^2 + z^2\right)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 18$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y = x^2 - 6, \quad y = -x^2 + 5x - 6$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z^2 = 4x$, $y^2 = 4x$, $x = 1$, $z = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $y^2 - 5x^2 = 5$, Oy; б) $y = 3, z = 1$, Ox.

Вариант 11

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5; -1)$ и $B(3; 2)$ равна 40,5.

2. Построить кривую $r = 3(1 + \cos 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом $\pi/6$.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $4x^2 + y^2 = 16$; б) $y^2 - 4x + 4y = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$; б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линией $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;

б) тело, ограниченное поверхностями $(x-1)^2 + y^2 = z$, $2x + z = 2$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $x^2 = -4z$, Oz; б) $y^2 + 4z^2 = 4$, Oy.

Вариант 12

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(2; 1)$ на расстояние, в три раза большее, чем от прямой $x = -5$.

2. Построить кривую $r = 1/(2 - \sin\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом $\pi/6$.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $x^2 - 4y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$; б) $8y^2 + 2z^2 = x$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y = 6 - x - 2x^2, \quad y = x + 2$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $5x^2 - 6z^2 = 30, \quad Ox$; б) $x = 3, z = -2, \quad Oy$.

Вариант 13

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(-3; 3)$ на расстояние в три раза большее, чем от точки $B(5;\ 1)$.

2. Построить кривую $r = 5(1 - \sin 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/12.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $4x^2 - 9y^2 = 36$; б) $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y + 4 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$; б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную лемнискатой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z = 4 - y^2, \quad z = y^2 + 2,$ $x = -1, \quad x = 2.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $z^2 = 2y, \quad Oy$; б) $2x^2 + 3z^2 = 6, \quad Oz$.

Вариант 14

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x=8$ на расстояние в два раза большее, чем от точки $A(-1;7)$.

2. Построить кривую $r=3(2-\cos 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $49x^2+16y^2=784$; б) $x^2-9y^2-4x+18y-14=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $5x^2-y^2-15z^2+15=0$; б) $x^2+4z=0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y=\dfrac{1}{2}x^2$, $y=0$, $x=2$, $x=3$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2+(y-1)^2=1$, $z+y=2$, $z+2y=4$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $y^2=-4z$, Oz; б) $3y^2+z^2=6$, Oy.

Вариант 15

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x=9$ на расстояние в четыре раза меньшее, чем от точки $A(-1;2)$.

2. Построить кривую $r=6\sin 4\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/8.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $25x^2-36y^2=900$; б) $x^2-4x-8y+12=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; б) $3x^2+y^2-3z=0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $\rho = 4\sin\varphi, \quad \rho = 2\sin\varphi$;

б) тело, ограниченное поверхностями $y^2 = 4 - z, \quad 2x + 5y = 10, \quad x = 5, \quad z = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $7x^2 - 5y^2 = 35, \quad Ox$; б) $x = -1, y = -3, \quad Oz$.

Вариант 16

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: отношение расстояний от точки M до точек $A(2; -4)$ и $B(3; 5)$ равно $2/3$.

2. Построить кривую $r = 2\cos 6\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом $\pi/12$.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $16x^2 + 25y^2 = 400$; б) $x^2 - 4x - 2y + 9 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$; б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y = \dfrac{x^2}{4}, \quad y = 2\sqrt{x}$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 = 4, \quad y^2 - x + 1 = 0, \quad z = 4, \quad z = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $2x^2 = z, \quad Oz$; б) $x^2 + 4z^2 = 4, \quad Ox$.

Вариант 17

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3; 3)$ и $B(4; 1)$ равна 31.

2. Построить кривую $r = 3/(1-\cos 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/12.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $9x^2 - y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$; б) $x^2 - 2y = -z^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную первым завитком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ и полярной осью;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 = 9, \quad 2x + z = 8, \quad z = 0, \quad y = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $2y^2 - z = 10, \quad Oz$; б) $y = 2, z = 6, \quad Ox$.

Вариант 18

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: отстоит от точки $A(0;-5)$ на расстояние в два раза меньшее, чем от прямой $x = 3$.

2. Построить кривую $r = 2(1-\cos 3\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $25x^2 + 9y^2 = 225$; б) $x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 12 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $3x^2 = 25y, \quad 5y^2 = 9x$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z = -x^2 - y^2 + 8, \quad z = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $x^2 = -5y, \quad Oy$; б) $2x^2 + 3z = 6, \quad Oz$.

Вариант 19

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(4;-2)$ на расстояние в два раза меньшее, чем от точки $B(1;6)$.

2. Построить кривую $r=3(1-\cos 4\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/8.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $4x^2-y^2=36$; б) $3x^2-y^2-18x+4y+14=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $z=4-x^2-y^2$; б) $3x^2+12y^2+4z^2=48$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $\rho=a(1-\cos\varphi),\quad \rho=a$;

б) тело, ограниченное поверхностями $2y=x^2+z^2,\quad y=2$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $x^2-9y^2=9,\quad Ox$; б) $3\,y^2=z,\quad Oz$.

Вариант 20

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x=-7$ на расстояние в три раза меньшее, чем от точки $A(1;4)$.

2. Построить кривую $r=5(2-\ \sin\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $49x^2+y^2=49$; б) $x^2-6x-4y+17=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $4x^2+5y^2-10z^2=60$; б) $7y^2+z^2=14x^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y=\dfrac{2}{x},\quad y=0,\quad x=2,\quad x=3$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z=(x-1)^2$, $z=1,\quad y=4,\quad y=0.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $x^2+2z=4,\quad Oz$; б) $x=3, z=-3,\quad Oy$.

Вариант 21

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x=14$ на расстояние в два раза меньшее, чем от точки $A\ (2;\ 3)$.

2. Построить кривую $r=3\sin 4\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/8.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $x^2+9y^2=18$; б) $x^2-4y^2-36x+24y-36=0.$

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$; б) $10x^2+6y^2=15z$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $x^2+y^2=4x,\quad 2x=y^2$;

б) тело, ограниченное поверхностями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=1,$ $z=0,\quad z=4.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $15x^2-3y^2=1,\quad Ox$; б) $x=3, y=4,\quad Oz$.

Вариант 22

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: отношение расстояний от точки M до точек $A(3;-2)$ и B(4; 6) равно $3/5$.

2. Построить кривую $r=2\cos 4\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/8.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $x^2 - 4y^2 = 36$; б) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $x^2 = 5\left(y^2 + z^2\right)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $xy = 6, \quad x + y = 7$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 = y, \quad z = 4,$ $y = 4, \quad z = 0.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $y^2 = 5z, \quad Oz$; б) $3x^2 + 7y^2 = 21, \quad Ox.$

Вариант 23

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5; 3)$ и $B(2; -4)$ равна 65.

2. Построить кривую $r = 4(1 + \cos 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36$; б) $x^2 + 4x - 10y + 44 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $4x^2 + 3y^2 = 12x$; б) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $x^2 + 4x - y = 0, \ x - y + 4 = 0$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z = y^2 + 1, \ z + x = 5, \quad x = 0.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $15y^2 - x^2 = 6, \quad Oy$; б) $y = 5, z = 2, \quad Oy$.

Вариант 24

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3; -4)$ на расстояние в три раза большее, чем от прямой $x = 5$.

2. Построить кривую $r = 2/(2 - \cos 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $x^2 - 25y^2 = 100$; б) $y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$; б) $y - 4z^2 = 3x^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную астроидой $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$;

б) тело, ограниченное поверхностями $y = 2x^2, \; z + 2y = 4, \quad z = 0.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $-x^2 = 5z, \quad Oz$; б) $3y^2 + 18z^2 = 1, \quad Oy$.

Вариант 25

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(5; 7)$ на расстояние в четыре раза большее, чем от точки $B(-2; 1)$.

2. Построить кривую $r = 4(1 - \sin\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $4x^2 - y^2 = 4$; б) $9x^2 + y^2 - 36x - 2y + 36 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$; б) $x - 3z^2 = 9y^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $x^2 - 6x + y = 0, \quad y = 0$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 = 9,$ $z = -2x, \quad z = 0.$

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $3x^2 - 8y^2 = 288, \quad Ox$; б) $x = 5, z = -3, \quad Oy$.

Вариант 26

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x = 2$ на расстояние в пять раз большее, чем от точки $A(4; -3)$.

2. Построить кривую $r = 3(1 + \cos 2\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $16x^2 + y^2 = 144$; б) $4x^2 - 2y^2 - 16x + 2y - 101 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$; б) $2x^2 + 3z = 0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $\rho = 2\sqrt{3}a\cos\varphi, \quad \rho = 2a\sin\varphi$;

б) тело, ограниченное поверхностями $4x^2 + 9y^2 = 36$, $z = -x, \quad z = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $2y^2 = 72, \quad Oz$; б) $6y^2 + 5z^2 = 30, \quad Oy$.

Вариант 27

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от прямой $x = -7$ на расстояние в три раза меньшее, чем от точки $A(3; 1)$.

2. Построить кривую $r = 3\cos 2\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $9x^2 + 25y^2 = 225$; б) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 19 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $7x^2+2y^2+6z^2-42=0$; б) $2x^2+4y^2-5z=0$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y=\dfrac{3}{x}, \quad y+x=4$;

б) тело, ограниченное поверхностями $z=3x^2+y^2, \quad z=3$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $5x^2-7y^2=35, \quad Ox$; б) $x=2, y=-2, \quad Oz$.

Вариант 28

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: отношение расстояний от точки M до точек $A(3;-5)$ и $B(4;1)$ равно $1/4$.

2. Построить кривую $r=2\sin 3\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $x^2-9y^2=9$; б) $x^2-10x-3y+31=0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$; б) $2y^2+6z^2=3x$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линией $x=a\cos t, \quad y=a\sin t$;

б) тело, ограниченное поверхностями $16x^2+9y^2=144$, $4x+3y+6z=12, \quad z=0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $3x^2=-2z, \quad Oz$; б) $8x^2+11z^2=88, \quad Ox$.

Вариант 29

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет условию: сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1;2)$ и $B(3;-1)$ равна 18,5.

2. Построить кривую $r = 2/(2-\cos\varphi)$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $2x^2 + y^2 = 4$; б) $y^2 - 2x + 2y + 7 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $z^2 - 2y = -4x^2$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x$;

б) тело, ограниченное поверхностями $x^2 + z^2 = 4$, $y - 3 = x^2 + z^2, \quad y = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $5y^2 - 8z^2 = 40, \quad Oz$; б) $y = 3, z = 1, \quad Ox$.

Вариант 30

1. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(1;5)$ на расстояние в четыре раза меньшее, чем от прямой $x = -1$.

2. Построить кривую $r = 2 - \cos 2\varphi$ в полярной системе координат, задавая значения φ от 0 до 2π с шагом π/6.

3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить кривые:

а) $30x^2 - 25y^2 = 900$; б) $x^2 + 9y^2 - 16x - 54y + 61 = 0$.

4. Установить тип поверхностей и построить их:

а) $27x^2 - 63y^2 = 21z^2 = 0$; б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$.

5. Построить:

а) область, ограниченную линиями $4y = 8x - x^2, \quad 4y = x + 6$;

б) тело, ограниченное поверхностями $y^2 = 4x, \quad z = 2 - x, \quad z = 0$.

6. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок:

а) $3x^2 = -4y, \quad Oy$; б) $4x^2 + 3z^2 = 12, \quad Oz$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Физматлит, 2005.

2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова и др. – М. : Оникс 21 век : Мир и Образование, 2003.

3. Ефимов, Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2014.

4. Ефимов, Н. В. Кратнкий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Книга по требованию, 2012.

5. Зимина, О. В. Высшая математика. Решебник / О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова. – М. : Физматлит, 2005.

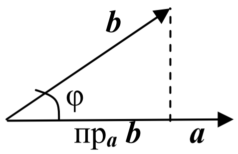
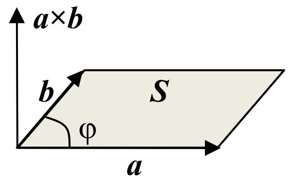
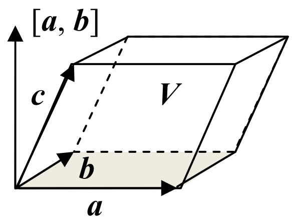
6. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1986.

7. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М. : Наука, 1979.

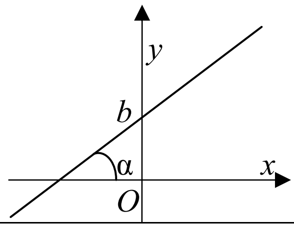
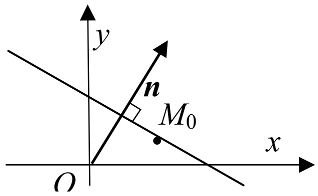
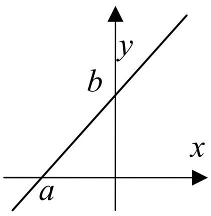
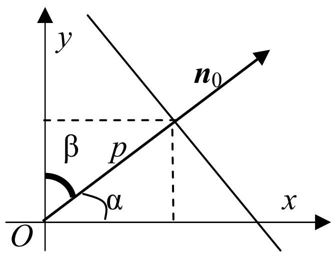
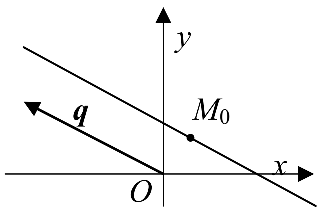
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Произведения векторов

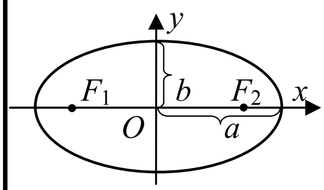
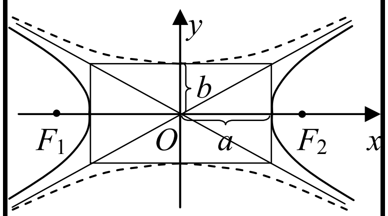
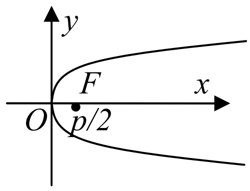
Произведение	Скалярное	Векторное	Смешанное
Обозначение	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	$\mathbf{abc} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
Результат	число (скаляр)	вектор $\perp$ $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	число (скаляр)
Вычисление: по определению	$\lvert\mathbf{a}\rvert \cdot \lvert\mathbf{b}\rvert \cdot \cos\varphi$ 	модуль $\lvert\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rvert = \lvert\mathbf{a}\rvert \cdot \lvert\mathbf{b}\rvert \cdot \sin\varphi$ 	$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$ 
по координатам	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ $= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$	$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
Свойства	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \lvert\mathbf{a}\rvert^2$	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ $= (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) =$ $= -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) =$ $= -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$
Условие	ортогональности: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$	коллинеарности: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$	компланарности: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$
Геометрическое приложение	$\cos\varphi = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert}$, $np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert}$	площадь параллелограмма $S = \lvert\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,\rvert$	объем параллелепипеда $V = \pm\,\mathbf{abc}$
Механическое приложение	работа силы $A = (\mathbf{F}, \mathbf{S})$	момент силы $\mathbf{M} = [\,\mathbf{r}, \mathbf{F}\,]$	

Прямая и плоскость

Уравнение	Прямая на плоскости	Плоскость в пространстве
С угловым коэффициентом	$y = kx + b$ $k = \mathrm{tg}\,\alpha$ – угловой коэффициент 	
Через точку M_0 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n}$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $\boldsymbol{n}\,(A, B)$ – нормаль 	$A(x - x_0) + B(y - y_0) +$ $+ C(z - z_0) = 0$ $\boldsymbol{n}\,(A, B, C)$ – нормаль
Общее	$Ax + By + C = 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$
«В отрезках»	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ a, b – отрезки, отсекаемые на осях 	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ a, b, c – отрезки, отсекаемые на осях
Нормальное	$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ p – расстояние до начала координат 	$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ p – расстояние до начала координат, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали
		Прямая в пространстве
Каноническое	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ $\boldsymbol{q}(l, m)$ – направляющий вектор 	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ – направляющий вектор
Параметрическое	$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$
Через две точки	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

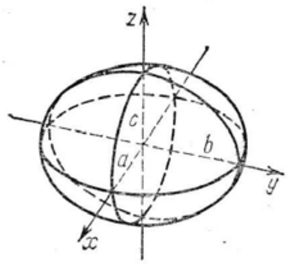
Приложение 3

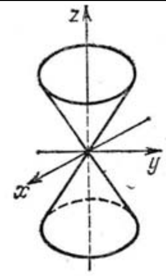
Кривые второго порядка

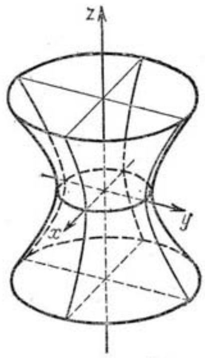
Уравнение	Эллипс	Гипербола	Парабола
			
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$
Главные оси	Ox, Oy	Ox – действительная Oy – мнимая	Ox
Полуоси	a, b – большая и малая полуоси	a – действительная, b – мнимая полуоси	p – параметр
Вершины	$(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(0, 0)$
Фокусы	$(\pm c, 0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$	$(\pm c, 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2$	$(p/2; 0)$
Эксцентриситет (мера сплюснутости)	$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ $0 \le \varepsilon < 1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ $1 < \varepsilon < \infty$	$\varepsilon = 1$
Директрисы ($\varepsilon = r/d$)	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$x=-\frac{p}{2}$
Асимптоты		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

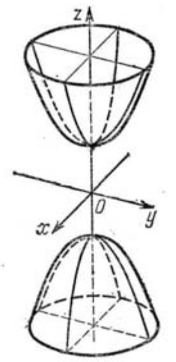
Приложение 4

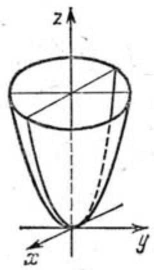
Поверхности второго порядка

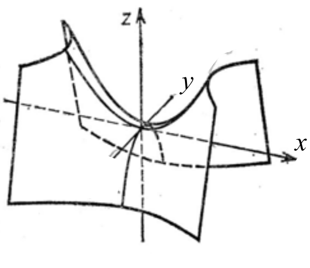
<table>
<tr><th colspan="3">Эллипсоид</th><th colspan="3">Конус</th></tr>
<tr><td colspan="3">

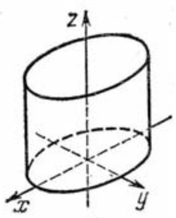
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$</td><td colspan="3">

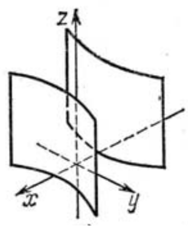
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Гиперболоиды</th></tr>
<tr><th colspan="3">однополостный</th><th colspan="3">двуполостный</th></tr>
<tr><td colspan="3">

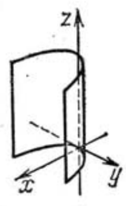
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$</td><td colspan="3">

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или}$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Параболоиды</th></tr>
<tr><th colspan="3">эллиптический</th><th colspan="3">гиперболический</th></tr>
<tr><td colspan="3">

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$</td><td colspan="3">

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$</td></tr>
<tr><th colspan="6">Цилиндры</th></tr>
<tr><th colspan="2">эллиптический</th><th colspan="2">гиперболический</th><th colspan="2">параболический</th></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$</td><td colspan="2">

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=$$</td><td colspan="2">

$$y^2=2px$$</td></tr>
</table>

Учебно-теоретическое издание

Вишневская Софья Романовна
Мартынова Лариса Александровна
Погодина Елена Петровна
Попов Алексей Михайлович

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор *Т. Л. Патюкова*
Оригинал-макет и верстка *М. А. Светлаковой*

Подписано в печать 07.12.2016. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать плоская. Усл. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 12,8. Тираж 100 экз.
Заказ . С 100/16.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 24.49.04.953.П.000032.01.03 от 29.01.2003 г.

Редакционно-издательский отдел Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.
Отпечатано в отделе копировально-множительной техники
Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.
660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.