Однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ)

Рассмотрим ОСЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Эта система всегда совместна, так как существует тривиальное её решение:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0.$$

Основная матрица системы (1) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть ранг $r(A)$ матрицы A равен r. Если $r = n$ (n – количество неизвестных системы), то нулевое решение будет единственным решением системы (1); при $r < n$ система будет обладать также решениями, отличными от нулевого. В частности, система n линейных однородных уравнений с n неизвестными обладает решениями, отличными от нулевого, тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы этой системы равен нулю.

Сформулируем ***свойства решений*** *ОСЛУ* (1).

Пусть $r(A) < n$. Если $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – решения системы (1), то:

1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ – решение системы (1);
2) $k\boldsymbol{a}$ – решение системы (1) (k – произвольная постоянная);
3) любая линейная комбинация решений системы (1) также является решением системы (1).

1. Фундаментальный набор решений (ФНР)

Всякая максимальная линейно независимая система решений однородной системы линейных уравнений называется её *фундаментальной системой решений (ФСР)* или *фундаментальным набором решений (ФНР)*. Можно сформулировать и такое определение: базис множества всех решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальным набором решений* этой системы.

Очевидно, что ФНР будет существовать лишь в том случае, когда система (1) обладает ненулевыми решениями, то есть если ранг её основной матрицы будет меньше числа неизвестных ($r < n$). При этом система (1) может обладать многими различными фундаментальными наборами решений, и все эти наборы эквивалентны между собой (состоят из одного и того же числа решений).

Теорема (о ФНР). Фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений (при $r < n$) состоит из $n - r$ векторов решений, где r – ранг основной матрицы системы, n – число неизвестных.

Доказательство. Рассмотрим ОСЛУ (1). Так как ранг основной матрицы этой системы равен r, то система имеет r главных неизвестных и $n - r$ свободных.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_r$ – главные неизвестные и $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ – свободные неизвестные. И пусть, например, главные неизвестные выражаются через свободные так:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + c_{13}x_{r+3} + ... + c_{1(n-r)}x_n, \\ x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + c_{23}x_{r+3} + ... + c_{2(n-r)}x_n, \\ . \\ x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + c_{r3}x_{r+3} + ... + c_{r(n-r)}x_n. \end{cases} \tag{2}$$

Видим, что главные неизвестные выражаются через свободные линейно.

Придадим свободным неизвестным значения компонент единичных векторов:

x_{r+1}	x_{r+2}	x_{r+3}	...	x_n
1	0	0	...	0
0	1	0	...	0
0	0	1	...	0
...	...	...	...	...
0	0	0	...	1

Тогда при этих значениях получаем следующие векторы решений системы:

$$\boldsymbol{l_1} = \left(c_{11},\ c_{21},\ c_{31},\ ...,\ c_{r1},\ 1, 0, 0, ..., 0\right),$$
$$\boldsymbol{l_2} = \left(c_{12},\ c_{22},\ c_{32},\ ...,\ c_{r2},\ 0, 1, 0, ..., 0\right),$$
$$\boldsymbol{l_3} = \left(c_{13},\ c_{23},\ c_{33},\ ...,\ c_{r3},\ 0, 0, 1, ..., 0\right),$$
$$\cdots$$
$$\boldsymbol{l_{n-r}} = \left(c_{1(n-r)},\ c_{2(n-r)},\ c_{3(n-r)},\ ...,\ c_{r(n-r)},\ 0, 0, 0, ..., 1\right).$$

Покажем, что именно эти векторы составляют базис во множестве решений системы (1). Составим матрицу, строками которой являются векторы $\boldsymbol{l_1}, \ldots, \boldsymbol{l_{n-r}}$:

$$L = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & ... & c_{r1} & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & ... & c_{r2} & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & ... & c_{r3} & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ c_{1(n-r)} & c_{2(n-r)} & c_{3(n-r)} & ... & c_{r(n-r)} & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что ранг матрицы L не может быть больше числа её строк, то есть $r\left(L\right) \le n - r$. Но и меньше, чем $n - r$, он тоже быть не может, так как в этой матрице содержится минор порядка $n - r$, отличный от нуля:

$$M_{n-r}=\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\.&.&.&.&.\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}.$$

Этот минор является базисным, и поэтому ранг матрицы L равен $n-r$: $r(L)=n-r$. L содержит $n-r$ линейно независимых строк. Значит, все векторы $\boldsymbol{l_1}$, …, $\boldsymbol{l_{n-r}}$ линейно независимы.

Покажем теперь, что любое решение ОСЛУ (1) является линейной комбинацией векторов решений $\boldsymbol{l_1}$, …, $\boldsymbol{l_{n-r}}$. Пусть $\boldsymbol{a} = \left(a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_r,\, a_{r+1},\, a_{r+2},\, \dots,\, a_n\right)$ – решение системы (1). Заметим, что в этом решении $a_1, a_2, \dots, a_r$ – значения главных неизвестных, свободные неизвестные принимают значения $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$.

Для доказательства того, что любое решение системы (1) есть линейная комбинация фундаментального набора решений $\boldsymbol{l_1}$, …, $\boldsymbol{l_{n-r}}$, рассмотрим вектор $\boldsymbol{b}$, являющийся линейной комбинацией этих линейно независимых векторов:

$$\boldsymbol{b} = a_{r+1}\boldsymbol{l_1} + a_{r+2}\boldsymbol{l_2} + \dots + a_n \boldsymbol{l_{n-r}}.$$

Заметим, что по свойству 3 решений ОСЛУ вектор $\boldsymbol{b}$ как линейная комбинация решений также является решением системы (1).

Найдём компоненты вектора $\boldsymbol{b}$. Очевидно, что значения свободных неизвестных вектора $\boldsymbol{b}$ соответственно равны значениям свободных неизвестных вектора $\boldsymbol{a}$. Но тогда по формулам (2) получим, что и значения главных неизвестных у векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ совпадают:

$$\boldsymbol{b} = \left(a_1,\, a_2,\, \dots,\, a_r,\, a_{r+1},\, a_{r+2},\, \dots,\, a_n\right).$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ совпадают, и любое решение системы (1) является линейной комбинацией векторов фундаментального набора решений.

Теорема доказана.

Пример. Решить систему и найти фундаментальный набор решений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0,\\2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+6x_5=0,\\3x_1+5x_2+7x_3+9x_4+11x_5=0,\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$$

Решение. Определим ранг основной матрицы системы. Для этого приведем её к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c}(-1)\\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&5&7&9&11\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}(-2)(-3)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&-1&-2&-3&-4\\0&-1&-2&-3&-4\\0&-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}\begin{array}{c} \\(-1)\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\0&-1&-2&-3&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

В полученной ступенчатой матрице две ненулевые строки, поэтому её ранг r равен 2. В системе 5 неизвестных.

Итак, $r=2,\ n=5,$ ФНР состоит из $n-r=3$ векторов решений. Переменные $x_1,\ x_2$ можно назначить главными; минор, составленный из коэффициентов перед ними, является базисным:

$$M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Тогда свободные неизвестные – $x_3,\ x_4,\ x_5$. Выпишем систему, соответствующую ступенчатой матрице, и выразим главные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=0,\\ -x_2-2x_3-3x_4-4x_5=0,\end{cases}$$

откуда $x_2=-2x_3-3x_4-4x_5$, $x_1=x_3+2x_4+3x_5$.

Пусть $x_3=t_1,\ x_4=t_2,\ x_5=t_3$. Тогда $x_1=t_1+2t_2+3t_3$, $x_2=-2t_1-3t_2-4t_3$, и общее решение системы имеет вид:

$$\left(t_1+2t_2+3t_3,\ -2t_1-3t_2-4t_3,\ t_1,\ t_2,\ t_3\right).$$

Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. И найдём, тем самым, частное решение системы. Например, при $t_1=1,\ t_2=2,\ t_3=3$ получаем решение

$$\boldsymbol{a}=\left(14,\ -20,\ 1,\ 2,\ 3\right).$$

Найдём фундаментальный набор решений системы. Для этого придадим свободным неизвестным, например, значения компонент единичных векторов и получим соответствующие значения главных неизвестных:

$$\boldsymbol{l_1}=\left(1,\ -2,\ 1,\ 0,\ 0\right)\ (\text{при } x_3=1,\ x_4=0,\ x_5=0),$$
$$\boldsymbol{l_2}=\left(2,\ -3,\ 0,\ 1,\ 0\right)\ (\text{при } x_3=0,\ x_4=1,\ x_5=0),$$
$$\boldsymbol{l_3}=\left(3,\ -4,\ 0,\ 0,\ 1\right)\ (\text{при } x_3=0,\ x_4=0,\ x_5=1).$$

Таким образом, векторы решений $\boldsymbol{l_1},\ \boldsymbol{l_2},\ \boldsymbol{l_3}$ образуют ФНР рассматриваемой однородной системы линейных уравнений.

Заметим, что полученное выше частное решение $\boldsymbol{a}$ системы, является линейной комбинацией векторов ФНР:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l_1}+2\boldsymbol{l_2}+3\boldsymbol{l_3}.$$

Вообще, любая линейная комбинация решений фундаментального набора будет являться решением однородной системы линейных уравнений:

$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{l_1}+b_2\boldsymbol{l_2}+b_3\boldsymbol{l_3}$ – произвольное решение системы (здесь $b_1,\ b_2,\ b_3\in\mathbb{R}$).

2. Связь между решениями однородных и неоднородных систем

Пусть дана система линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (S)$$

Система линейных уравнений, полученная из системы (S) заменой свободных членов нулями, называется *приведённой системой* для системы (S):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (S_0)$$

Между решениями систем (S) и (S_0) существует тесная связь, как показывают следующие две теоремы.

Теорема 1. Сумма любого решения системы (S) с любым решением приведённой системы (S_0) снова будет решением системы (S).

Доказательство. Пусть $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ – решение системы (S), $\left(d_1, d_2, \ldots, d_n\right)$ – решение системы (S_0). Возьмём любое из уравнений системы (S); например, i–тое:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

или (что то же самое):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i .$$

Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i$ – верное равенство, так как $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ – решение системы (S).

По аналогии, для произвольного i–того уравнения $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$ системы (S_0) верным будет равенство $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = 0$.

Если $\left(c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n\right)$ есть решение системы (S), то $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\left(c_j + d_j\right) = b_i$ – верное равенство. Для того чтобы это показать, подставим вместо неизвестных числа $c_1 + d_1, c_2 + d_2, \ldots, c_n + d_n$ в i–тое уравнение системы (S). В самом деле:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(c_j + d_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}d_j = b_i + 0 = b_i .$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Разность любых двух решений системы (S) служит решением для приведенной системы (S_0).

Доказательство. Действительно, пусть $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ и $\left(c'_1, c'_2, \ldots, c'_n\right)$ – решения системы (S). Берём любое из уравнений системы (S_0), например, i–тое, и подставляем в него вместо неизвестных числа $c_1 - c'_1, c_2 - c'_2, \ldots, c_n - c'_n$. Получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(c_j - c'_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c'_j = b_i - b_i = 0 .$$

Теорема доказана.

Из этих теорем вытекает, что, найдя одно решение системы линейных неоднородных уравнений (S) и складывая его с каждым из решений приведенной системы (S_0), можно получить все решения системы (S).