Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

*Утверждено редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия
для бакалавров технических и экономических
направлений подготовки
всех форм обучения*

Красноярск 2015

УДК 512.8(078.5)
ББК 22.143я7
Л59

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент А. Ш. Любанова
(Сибирский федеральный университет);
кандидат физико-математических наук, доцент А. Л. Мыльников
(Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева)

Л59 **Линейная алгебра** : учеб. пособие / Л. А. Мартынова, С. Р. Вишневская, А. М. Попов, С. В. Бураков ; Сиб. гос. аэрокосмич. ун-т. – Красноярск, 2015. – 216 с.

Рассмотрены теория матриц и определителей, системы линейных алгебраических уравнений, векторные пространства.

Пособие предназначено для бакалавров технических и экономических направлений подготовки всех форм обучения.

УДК 512.8(078.5)
ББК 22.143я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическое образование в техническом вузе начинается с трех основных дисциплин: алгебры, математического анализа и аналитической геометрии. Эти дисциплины, взаимно дополняя друг друга, создают ту основу, без которой невозможно дальнейшее освоение как математических дисциплин, так и предметов естественно-научного цикла, и последующее изучение технических дисциплин.

Линейная алгебра является составной частью высшей алгебры и в первую очередь занимается изучением систем линейных уравнений. Данное учебное пособие охватывает главные разделы алгебры, которые изучаются на первом курсе: матрицы; определители; системы линейных уравнений как случаи однозначной и неоднозначной разрешимости; линейные пространства. Важность этих тем состоит в том, что они используются во всем курсе высшей математики.

Пособие предназначено для бакалавров технических и экономических направлений подготовки всех форм обучения. Несмотря на огромный выбор литературы по алгебре, им зачастую не удается найти такого учебного пособия, которое бы содержало и подробный разбор решений типовых задач, и достаточное теоретическое обоснование материала. Данное учебное пособие решает эту проблему: кроме теоретического материала, в нем даны образцы решения задач.

При изучении теории следует обратить особое внимание на план решения в общем виде (алгоритм), а затем рассмотреть пример реализации этого плана в конкретном случае.

Для закрепления материала в конце каждой главы, помимо примеров решения типовых задач, представлены задания для самостоятельного решения с ответами, приведенными в конце пособия, и контрольные вопросы и задания. В пособии также даны примеры решения контрольных заданий с образцами оформления и тридцать вариантов контрольных заданий. Все это делает его удобным для самостоятельного изучения алгебры при различных формах обучения, особенно при подготовке к сдаче зачетов и экзаменов по алгебре.

Еще одной отличительной чертой пособия являются примеры приложений алгебры. Большинство учебников по этому разделу математики не рассматривает применения матриц и систем уравнений в других дисциплинах. Исключение составляют учебники для экономистов. В этом же пособии приводятся возможные примеры использования линейной алгебры как в экономических задачах, так и в электротехнике, механике, физике твердого тела, информатике.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезно не только студентам, но и преподавателям при подготовке к лекциям и практическим занятиям.

1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1.1. Основные определения

Определение 1.1. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов.

На пересечении строк и столбцов стоят *элементы* матрицы, которые нумеруются двумя индексами: первый – номер строки, второй – номер столбца. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 4 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},$$

где A – числовая матрица размерности 2×3 (две строки на три столбца); $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = -\sqrt{3}$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = \dfrac{1}{2}$ – элементы матрицы.

Если число n строк матрицы равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной* n-го порядка. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} -$$

квадратная матрица третьего порядка.

Элементы, стоящие в квадратной матрице на диагонали, идущей от левого верхнего угла к правому нижнему, образуют *главную диагональ* матрицы. Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

главная диагональ – это элементы –1, 3, 0.

Диагональ, идущая от правого верхнего угла к левому нижнему, называется *побочной*. Для приведенной выше матрицы A это элементы –1, 3, 1.

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят некоторые элементы, а на всех остальных местах – нули, называется *диагональной матрицей*. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} -$$

диагональная матрица.

Частным случаем диагональной матрицы является *единичная матрица*, у которой на главной диагонали стоят единицы, а на остальных местах – нули. Единичные матрицы отличаются только размерностью и обозначаются E_n. Например:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой все элементы равны нулю, обозначается O и называется *нулевой*.

1.2. Действия над матрицами

Над матрицами возможны четыре основные операции: сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матриц.

Сложение определено для матриц одинаковой размерности, при этом элемент первой матрицы на позиции (i, j) прибавляется к элементу на позиции (i, j) второй матрицы. Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2+\sqrt{5} & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+3 & -1+0 \\ 0+2+\sqrt{5} & 3+3 & \sqrt{2}+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 2+\sqrt{5} & 6 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы *умножить матрицу на число*, нужно умножить каждый элемент на это число, например:

$$\frac{1}{3} \cdot A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Матрицу $-A = (-1)A$ называют *противоположной* к матрице A.

Разность двух матриц A и B можно свести к сложению:

$$A - B = A + (-B).$$

Для матриц одинаковой размерности и для любых действительных чисел α и β справедливы следующие свойства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность);

3) $A + O = O + A = A$ (существование нулевого элемента);

4) $A + (-A) = (-A) + A = O$ (существование противоположной матрицы);

5) $1 \cdot A = A$;

6) $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$, где α, β – числа;

7) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;

8) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$.

Например, найдем $2A - 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Выполняя действия, получим

$$2A - 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 11 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующую операцию над матрицами – *умножение*. В результате умножения матрицы A размерностью $m \times s$ на матрицу B размерностью $s \times n$ получается матрица C размерностью $m \times n$, где элемент c_{ij} матрицы $C = AB$, стоящий на позиции (i, j), получается по следующему правилу: берем i-ю строку матрицы A и j-й столбец матрицы B, умножаем первый элемент строки на первый элемент столбца, второй элемент строки – на второй элемент столбца и т. д., полученные произведения складываем.

Например, пусть даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем их произведение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведение этих матриц в обратном порядке:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2(-1) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 1(-1) & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 0(-1) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приведенный пример показывает, что полученные произведения AB и BA имеют даже разную размерность и в общем случае $AB \neq BA$, т. е. умножение матриц не обладает свойством коммутативности. В некоторых случаях произведение AB существует, а в обратном порядке BA – нет. Например, для двух матриц A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

произведение AB существует, а умножение в обратном порядке невозможно:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ 9 & 16 & 8 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами (при условии, что возможны соответствующие действия):

1) $(AB)\cdot C = A\cdot(BC)$ (ассоциативность);

2) $\alpha\cdot(AB) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$, где α – любое число;

3) $(A + B)\cdot C = AC + BC$ (дистрибутивность);

4) $C\cdot(A + B) = CA + CB$;

5) $AE = EA = A$, где A – квадратная матрица; E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Транспонирование матрицы – это замена строк столбцами. Результатом транспонирования матрицы A размерности $m \times n$ является матрица A^T размерности $n \times m$. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

3) $(AB)^T = B^T A^T$;

4) $(\lambda A)^T = \lambda\cdot(A^T)$, где λ – число.

Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A^T = A$. Квадратная матрица A называется *кососимметрической*, если $A^T = -A$.

1.3. Примеры решения типовых задач

Задача 1.1. Найти матрицу X, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

а) $A + X = E$;

б) $3A - 2X = E$;

в) $B - 2X = 0$;

г) $3A - \frac{1}{2}X = E$.

Решение: а) выразим матрицу X из уравнения $A + X = E$:

$$X = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 0+3 \\ 0-5 & 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix};$$

б) определим матрицу X:

$$3A-2X=E \quad => \quad -2X=E-3A \quad =>$$

$$=> X=\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}E=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{9}{2}\\ \frac{15}{2} & \frac{21}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-\frac{1}{2} & -\frac{9}{2}+0\\ \frac{15}{2}+0 & \frac{21}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{9}{2}\\ \frac{15}{2} & 10\end{pmatrix};$$

в) найдем матрицу X из уравнения $B-2X=0$:

$$2X=B \quad => \quad X=\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix};$$

г) выразим матрицу X из уравнения $3A-\frac{1}{2}X=E$:

$$-\frac{1}{2}X=E-3A \quad => \quad X=6A-2E \quad =>$$

$$=> X=6\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 7\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -18\\ 30 & 42\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -18\\ 30 & 40\end{pmatrix}.$$

Задача 1.2. Найти значения m, l:

а) $A_{(2\times3)}\cdot B_{(3\times4)}=C_{(m\times l)}$;

б) $A_{(3\times4)}\cdot B_{(m\times l)}=C_{(3\times5)}$;

в) $A_{(4\times m)}\cdot B_{(l\times5)}=C_{(4\times5)}$.

Решение. Учитывая требования к размерностям матриц, участвующих в умножении, получаем следующие ответы:

а) $m=2$, $l=4$;

б) $m=4$, $l=5$;

в) $m=l$ – любое число.

Задача 1.3. Выполнить умножение:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 2\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение: а) умножим матрицы размерностью 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 3 & 1\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 4 + 4\cdot 3 & 3\cdot 5 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 24 & 23 \end{pmatrix};$$

б) умножим матрицы размерностью 2×3 и 3×1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

в) умножим матрицы размерностью 2×3 и 3×2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1 & 3\cdot(-2) + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};$$

г) умножим три матрицы последовательно:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 3\cdot(-1) + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\\ 5 & 5\\ 7 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4+1\cdot 1\\ 3\cdot 4+3\cdot 1\\ 5\cdot 4+5\cdot 1\\ 7\cdot 4+7\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 15\\ 25\\ 35\end{pmatrix}.$$

Задача 1.4. Возвести матрицу $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ в третью степень:

Решение. Представим степень как произведение матриц:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35 & 20\\ 20 & 15\end{pmatrix}.$$

Задача 1.5. Вычислить $AB - BA$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем произведения AB и BA:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-8 & -3+2\\ 8+4 & -12-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 12 & -13\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-12 & 4+3\\ -4+4 & -8-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 7\\ 0 & -9\end{pmatrix}.$$

Вычислим разность полученных матриц:

$$AB-BA=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 12 & -13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10 & 7\\ 0 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+10 & -1-7\\ 12-0 & -13+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 12 & -4\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB - BA \neq 0$, т. е. $AB \neq BA$.

Задача 1.6. Вычислить $A\cdot A^T$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим произведение матрицы A на свою транспонированную матрицу:

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\\ 1 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+4+1+9 & 4-2+5-3 \\ 4-2+5-3 & 16+1+25+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.7. Найти $f(A)$, если $f(x) = 3x^2 - 4$ и $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем значение многочлена от матрицы A:

$$f(A)=3A^2-4\cdot E=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2-4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возведем матрицу в степень:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

В результате получим искомую матрицу:

$$f(A)=3\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}.$$

1.4. Примеры прикладных задач

Пример 1.1 (преобразование координат)**.** Матрицей можно задать преобразования координат на плоскости или в пространстве. Например, матрица

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

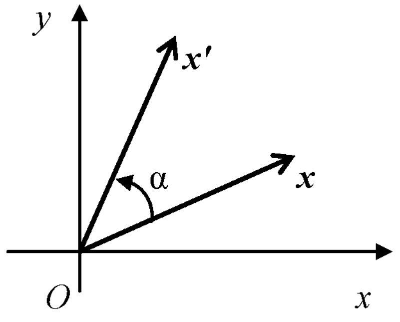


Рис. 1.1

является матрицей поворота. Это означает, что если взять на плоскости произвольный вектор $\boldsymbol{x}$, то произведение $A\boldsymbol{x}$ дает новый вектор $\boldsymbol{x}'$ той же длины, но повернутый на угол α против часовой стрелки (рис. 1.1).

Например, пусть вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\{1; 0\}$, т. е. задается матрицей-столбцом (вектором-столбцом) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\boldsymbol{x}' = A \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

В частности, если α = 45° (рис. 1.2), то

$$A = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

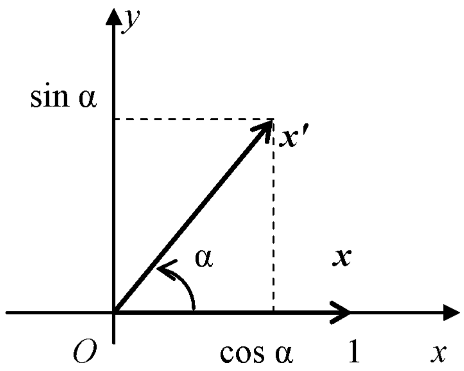


Рис. 1.2

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ задает зеркальное отображение относительно оси Ox (рис. 1.3):

$$\boldsymbol{x}' = A \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

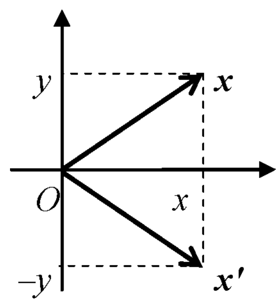


Рис. 1.3

Пример 1.2 (из экономики)**.** Предприятие производит продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы таблицей:

Тип сырья	Вид продукции		
	I	II	III
Первый тип	2	1	3
Второй тип	1	3	4

Стоимость единицы сырья первого типа – 10, второго типа – 15 условных денежных единиц. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 единиц продукции вида I, 200 единиц продукции вида II и 150 единиц продукции вида III?

Затраты сырья по видам продукции представим матрицей

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

стоимость сырья – матрицей-строкой

$$B=(10\ \ 15).$$

Произведение BA даст стоимость единиц каждого вида продукции:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10\cdot 2+15\cdot 1 & 10\cdot 1+15\cdot 3 & 10\cdot 3+15\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35 & 55 & 90\end{pmatrix}.$$

Количество единиц продукции по видам запишем как матрицу-столбец:

$$C=\begin{pmatrix}100\\ 200\\ 150\end{pmatrix}.$$

Тогда общие затраты получим, умножив BA на матрицу C:

$$B\cdot A\cdot C=\begin{pmatrix}10 & 15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\\ 200\\ 150\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}35 & 55 & 90\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\\ 200\\ 150\end{pmatrix}=35\cdot 100+55\cdot 200+90\cdot 150=28\,000.$$

Пример 1.3 (из теории информации)**.** Язык матриц может быть применен в схемных моделях вычислений.

Пусть состоянию бита на проводе соответствует вектор (матрица-столбец). Зададим соответствие так: если бит находится в состоянии «0», то он описывается вектором $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$; если в состоянии «1», то вектором $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для представления логического элемента используется оператор (матрица), воздействующий соответствующим образом на вектор состояния.

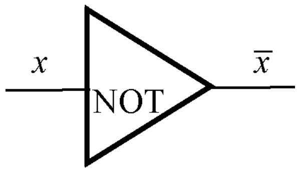
Например, логический элемент NOT (НЕ) задается матрицей

$$\mathrm{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы применить этот элемент к проводу, нужно умножить матрицу, представляющую элемент, на вектор состояния $\overline{x} = \mathrm{NOT}(x)$:

$$\mathrm{NOT}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{NOT}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$



x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Рис. 1.4

что соответствует NOT «0» = «1», NOT «1» = «0» (рис. 1.4).

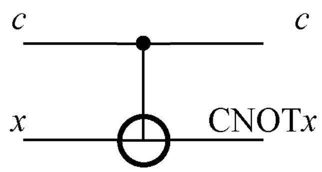
Если схема состоит из двух проводов, то ее состояние будет описываться четырехмерным вектором:

$$«0», «0» \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad «0», «1» \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$«1», «0» \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad «1», «1» \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Логические элементы тогда представляются матрицами 4×4.

Например, элемент CNOT (управляемое НЕ) меняет значение управляемого бита x на противоположное тогда, когда управляющий бит c равен 1 (рис. 1.5). Этот элемент можно представить в матричном виде:



c	x	CNOTx
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Рис. 1.5

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матричный метод не является общепринятым в классической теории вычислительных систем, но он облегчает переход к формулировке квантовых компьютеров, согласно которой состояние бита описывается вектором $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$, где p_0 – вероятность того, что бит находится в состоянии «0», а p_1 – в состоянии «1».

Пример 1.4 (из физики)**.** Будем считать, что кристалл представляет собой однородную, непрерывную, сплошную среду (континуум). Такое представление в физике твердого тела носит название континуальной модели.

Рассмотрим случай, когда напряжения во всем теле однородны и все части тела находятся в состоянии статического равновесия. Выделим в таком теле единичный куб с ребрами, параллельными осям координат (рис. 1.6).

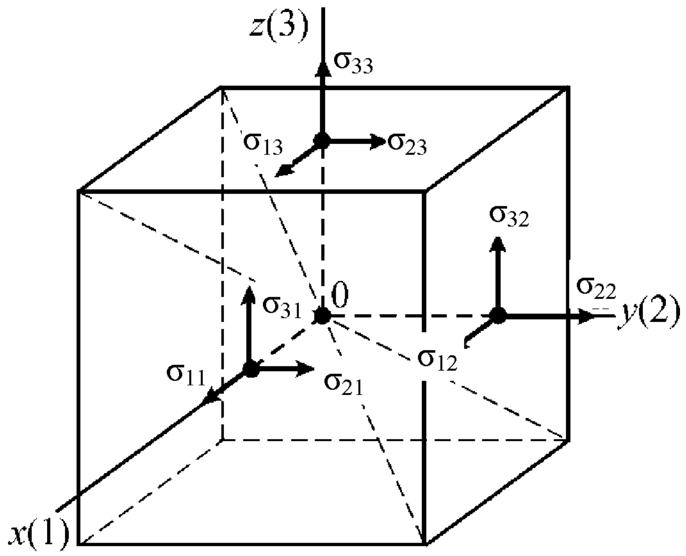


Рис. 1.6

Силы, действующие на противоположные грани куба в условиях равновесия, одинаковы, поэтому достаточно рассмотреть только те, которые действуют на непараллельные грани. Разложим каждую такую силу на одну нормальную к грани (перпендикулярную) и две касательные составляющие.

Обозначим через σ_{ij} напряжения, действующие в направлении оси i на грань куба, перпендикулярную оси j. Через каждую грань во внутреннюю часть куба будет передаваться сила, действующая со стороны внешних частей. Будем считать, что положительные значения компонент σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} соответствуют положительному направлению для передних граней куба. Для задних граней силы, действующие на эти грани, должны быть равны и направлены противоположно указанным на рис. 1.6 силам. Тогда σ_{ii} − нормальные компоненты, а σ_{ij} − касательные или сдвиговые (при $i \neq j$). Все они могут быть записаны в виде матрицы, называемой *тензором напряжений*:

$$T_{\text{напр}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы рассматриваем тело в состоянии равновесия, то полный момент сил должен быть равен нулю, т. е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Тензор напряжений симметричен и его можно записать в виде

$$T_{\text{напр}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Для случая всестороннего сжатия (например, гидростатического) сдвиговые напряжения не возникают и $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Если по нормали к граням действует одинаковая сила P, то тензор напряжений приобретает диагональный вид:

$$T_{\text{напр}} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}.$$

В физике тензоры используются очень широко, так как переход от материальной точки к объемному телу или среде приводит к необходимости рассматривать характеристики во всех направлениях и плоскостях. Так, подобно тензору напряжений вводятся тензоры инерции, теплопроводности, электрического поля, удельного сопротивления и т. д. Составляемые с их помощью уравнения являются матричными и в некоторых случаях для их решения требуются методы линейной алгебры.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите матрицу X, если $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 6 & 10\\ -2 & 8 & 9\end{pmatrix}$:

а) $X+B=3A$;

б) $\frac{1}{3}X-A=B$.

2. Найдите матрицу X, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix}$:

а) $X+2A=E$;
б) $3A+X=4E+B$.

3. Выполните умножение:

а) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 5\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -6\\ 10 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4. Найдите произведение AB и BA, если $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$.

5. Найдите A^2 и A^3, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Можно ли, не вычисляя, предсказать, чему будут равны A^4, A^5 и т. д.?

6. Найдите AA^T и A^TA, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Пусть A – произвольная матрица размера $m \times n$, B – любая квадратная матрица n-го порядка. Докажите, что AA^T, A^TA, $B + B^T$ – симметрические матрицы, а матрица $B - B^T$ – кососимметрическая.

8. Найдите $f(A)$, если $f(x) = x^2 + 2x - 5$ и $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Какое преобразование координат на плоскости задает матрица $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$? Запишите матрицу, задающую зеркальное отображение на плоскости относительно Oy.

10. Предприятие производит продукцию двух видов и использует сырье трех типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы таблицей:

Тип сырья	Вид продукции	
	I	II
Первый	2	4
Второй	3	2
Третий	1	0

Стоимость единицы сырья первого типа 5, второго – 8, третьего – 10 условных денежных единиц. Каковы общие затраты предприятия на производство 200 единиц продукции вида I и 150 единиц продукции вида II?

10. В примере 1.3 (см. п. 1.4) приведена матричная запись логического элемента CNOT. Убедитесь в ее правильности, применив к четырехмерным векторам состояний.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение матрицы.
2. Какая матрица называется квадратной?
3. Имеет ли прямоугольная матрица диагональ?

4. Какая матрица называется диагональной, нулевой, единичной?
5. Какой должна быть размерность матриц A и B, чтобы существовала их сумма?
6. Дайте определение произведения матрицы на число.
7. Каким образом вычисляется разность двух матриц?
8. Какими свойствами обладает операция сложения матриц?
9. Существуют ли требования к размерности умножаемых матриц?
10. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?
11. Дайте определение транспонирования.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Определители малых размерностей

Рассмотрим систему из двух линейных уравнений и двух неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Найдем решение данной системы в общем виде: домножим первое уравнение на $(-a_{21})$, второе уравнение – на a_{11}, сложим их, исключив переменную x:

$$\begin{array}{c} -a_{11}a_{21}x - a_{12}a_{21}y = -a_{21}b_1, \\ \underline{\quad a_{21}a_{11}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2 \quad} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{array}$$

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Аналогичным образом исключим переменную y, домножив первое уравнение на a_{22} и второе уравнение на $(-a_{12})$, сложим их, исключив переменную x:

$$\begin{array}{c} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1, \\ \underline{\quad -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \quad} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2. \end{array}$$

При условии $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$ получим

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Знаменатель выражений для x и y зависит только от коэффициентов при переменных в системе и не зависит от свободных членов.

Обозначим коэффициенты при переменных в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Число, стоящее в знаменателе выражений x и y, является характеристикой этой матрицы и называется ее *определителем*. Он обозначается $\det A$ или прямыми скобками $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

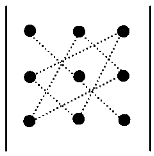
Аналогично, рассматривая систему трех линейных уравнений и трех переменных, получим определитель матрицы третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

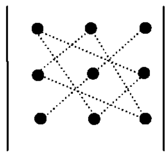
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схематически процедуру нахождения определителя можно представить следующим образом:

со знаком «плюс»



со знаком «минус»



Эти схемы позволяют легко запомнить порядок нахождения определителя третьего порядка.

2.2. Определитель произвольной матрицы

Для произвольной квадратной матрицы можно дать определение определителя по индукции.

Определителем квадратной матрицы порядка 1 является само число, образующее эту матрицу. Если для матриц порядка $(n - 1)$ мы уже умеем вычислять определитель, то для квадратной матрицы A порядка n полагаем по определению

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_i^j|$, здесь $|A_i^j|$ – определитель квадратной матрицы порядка $(n - 1)$, получаемый из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Такое вычисление определителя называют *разложением по i-й строке*.

Покажем, что введенный в п. 2.1 определитель для матрицы третьего порядка можно свести к разложению по любой строке. Рассмотрим разложение по второй строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1} a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Полученное выражение совпадает с данным выше определением определителя третьего порядка.

Кроме разложения по строке, при вычислении определителя используется разложение по столбцу, поскольку определитель не меняется при транспонировании:

$$|A| = |A^T|.$$

Определитель также не меняется, если к одной из его строк прибавить другую строку, домноженную на любое число. Это свойство позволяет сводить определитель к определителю треугольной матрицы. Матрица называется *треугольной*, если у нее выше главной диагонали и на главной диагонали стоят некоторые элементы, а ниже главной диагонали стоят нули. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

В качестве примера вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2 = -12.$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 - 2(6-2) - 3 = -12;$$

по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(4 + 1) + 0 - (1 - 4) = -12;$$

по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2 - 0) - (1 + 3) + 2(0 - 6) = -12.$$

Вычислим еще один определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Сведем его к треугольному виду. Умножим первую строку на (–3) и прибавим ко второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (–2) и прибавим к третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Умножим вторую строку на (–1/2) и прибавим к третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-6)\cdot 2 = -12\,.$$

Таким образом, искомый определитель найден.

2.3. Свойства определителей

Определители обладают следующими свойствами.

1. Определитель не меняется при транспонировании, т. е. $|A| = |A^T|$.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель этих матриц и убедимся, что они равны:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2 = -12,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2 = -12.$$

Для определителя строки и столбцы равноправны, поэтому все свойства, сформулированные для строк, верны и для столбцов.

2. Если в определителе какие-либо две строки (столбца) равны, то такой определитель равен нулю.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot(-1) - (-1)\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot(-1) =$$

$$= 2 - 6 - 2 + 6 = 0.$$

3. Общий множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3(-1) \\ 3 & 0 & 3\cdot 1 \\ 2 & 1 & 3\cdot 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-12) = -36,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot(-3) - (-3)\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 6 = -36.$$

4. Если в определителе поменять местами какие-либо две строки (столбца), то определитель меняет знак.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Если поменять местами первую и третью строки, то получим

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot(-1) = 12.$$

5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю, то такой определитель равен нулю.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 2 - 0\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot 0 = 0.$$

В этом случае каждое слагаемое определителя содержит в качестве сомножителя ноль.

6. Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца) этого же определителя, умноженные на одно и то же число λ, то определитель не изменится.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Умножим первую строку на (–2) и прибавим ко второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot(-4)\cdot 2 -$$

$$-1\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 2 = -12.$$

7. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке в первом определителе стоят первые слагаемые, а во втором – вторые.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Представим элементы второй строки в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2+1 & 1+(-1) & 3+(-2) \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot 2) +$$

$$+ (1\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-2)\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2) =$$

$$= 3 - 15 = -12.$$

Как видим, результат совпадает с полученным ранее значением.

2.4. Примеры решения типовых задач

Задача 2.1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Решение: а) найдем определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 1\cdot x_2 - 1\cdot x_1 = x_2 - x_1;$$

б) получим определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix} = (a+1)\cdot(ab-ac)-(b-c)\cdot(a^2+a) =$$

$$= a^2b - a^2c + ab - ac - ba^2 - ba + ca^2 + ca = 0;$$

в) вычислим определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Задача 2.2. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ x-2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Найдем определитель матрицы второго порядка:

$$(x+2)\cdot x - (-3)\cdot(x-2) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Таким образом, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -6$.

Задача 2.3. Вычислить определители, приводя их к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & . & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

Решение: а) умножим первую строку на 2 и прибавим к четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48;$$

б) умножим первую строку на (–1) и прибавим ко второй, третьей, четвертой строкам:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8;$$

в) умножим первую строку на (–1) и прибавим к пятой строке, затем умножим вторую строку на (–2) и прибавим к четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 1 = 24;$$

г) прибавим первую строку по очереди ко всем остальным строкам:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!.$$

Задача 2.4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ разложением по второму столбцу.

Решение. Представим определитель в виде суммы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(9-4+10-6+60-1)+2(6-20+5-3+40-5)-$$

$$-2(2+10+15-1-20-15)+(-8+10+9-1-12+60) =$$

$$= -68+46+18+58 = 54.$$

Итак, мы рассмотрели два основных способа вычисления определителя: приведением к треугольному виду и разложением по строке. Иногда эти способы удобно комбинировать.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите определитель:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} a & b-a \\ a^2+ab & b^2-a^2 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$.

2. Решите уравнение $\begin{vmatrix} x & 6 \\ x+1 & x+5 \end{vmatrix} = 0.$

3. Найдите определитель по правилу Саррюса:

а) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 1 & 6 & x \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

4. Вычислите определитель разложением по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Не вычисляя определителей, укажите, почему они равны нулю:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 17 \\ 2 & 2 & 15 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$.

6. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & 10 & -14 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & -14 \\ 2 & 0 & -5 & -13 & 19 \\ -2 & 0 & -4 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение определителя второго и третьего порядка.
2. Каким образом можно найти разложение определителя по строке?
3. В чем состоит метод приведения определителя к треугольному виду?
4. Что произойдет с определителем при транспонировании матрицы?
5. В каких случаях можно, не вычисляя, увидеть, что определитель равен нулю?
6. Каким образом изменится определитель, если две его строки поменять местами?

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

3.1. Замена строк в разложении

Рассмотрим определитель матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 6 + 8 - 6 = 24.$$

Разложим этот определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (8-3) - 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 8 = 10 + 6 + 8 = 24.$$

Заменим элементы первой строки в разложении определителя на элементы другой строки, например второй, и получим

$$(-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 4 \cdot (-2) + 1 \cdot (-8) = 8 - 8 = 0.$$

Возникает вопрос: является ли этот результат случайным? Заменим в разложении определителя элементы первой строки на элементы третьей строки:

$$(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (8-3) - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-8) = 10 + 6 - 16 = 0.$$

Получив дважды ноль, можно построить гипотезу: если элементы строки определителя умножать на алгебраические дополнения к другой строке, то в сумме получается ноль. Для того чтобы доказать эту гипотезу, посмотрим на выражение

$$(-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

как на определитель некоторой матрицы, у которой в первой строке стоят элементы 0, 4, 1 с соответствующими алгебраическими дополнениями $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. Эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что ее определитель будет равен нулю, так как она содержит две одинаковые строки.

Аналогично в определителе

$$(-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

первая и третья строки одинаковы.

Докажем, что для любой квадратной матрицы будет выполняться следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения к этой строке равна определителю данной матрицы, а сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения к другой строке равна нулю:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $i \neq j$. Заменим в данной матрице A j-ю строку i-й строкой, а все остальные строки, включая и i-ю, оставим неизменными. В результате получим некоторую матрицу B, у которой i-я и j-я строки одинаковы. Определитель матрицы B равен нулю, так как у нее две одинаковые по построению строки. В то же время миноры элементов j-й строки у определителя матриц A и B совпадают. Разлагая определитель B по элементам j-й строки, получим

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j). \tag{3.1}$$

Утверждение доказано.

Учитывая, что при транспонировании определитель не меняется, получим аналогичное утверждение

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j)$$

для столбцов матрицы.

3.2. Схема нахождения обратной матрицы

Определение 3.1. Пусть дана квадратная матрица A. Если найдется такая матрица, обозначим ее символом A^{-1}, что

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E,$$

то A^{-1} называется *обратной матрицей* по отношению к данной матрице A.

Выведем алгоритм нахождения обратной матрицы. Для этого рассмотрим произведение $A\cdot\left(A^*\right)^T$, где матрица

$$\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

составлена из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам матрицы a_{ij} и транспонирована. Эту матрицу называют *присоединенной*. С учетом доказанного равенства (3.1) получим

$$A\cdot\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |A| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot E\,.$$

Действительно, на главной диагонали стоят суммы произведений элементов строки на соответствующие алгебраические дополнения, что равно определителю матрицы, а на недиагональных элементах – суммы произведений элементов строки на алгебраические дополнения другой строки, что по утверждению 3.1 равно нулю.

Если определитель матрицы отличен от нуля, т. е. $|A| \neq 0$, то выведенное равенство можно разделить на определитель:

$$A \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^*\right)^T = E.$$

Мы нашли матрицу, которая при умножении на A дает единичную и, следовательно, является обратной. Итак, обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T.$$

Схема нахождения обратной матрицы:

1) находим определитель исходной матрицы A. Если он равен нулю, то делаем вывод, что матрицы, обратной к данной, не существует;

2) составляем матрицу A^*, заменяя каждый элемент матрицы A его алгебраическим дополнением. Чтобы найти алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}, вычеркиваем в матрице A i-ю строку и j-й столбец, вычисляем определитель полученной матрицы и умножаем его на $(-1)^{i+j}$, в результате получаем $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$;

3) транспонируя матрицу A^*, получаем $(A^*)^T$;

4) делим каждый элемент матрицы $(A^*)^T$ на определитель матрицы A и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T;$$

5) проверяем правильность нахождения обратной матрицы. Для этого достаточно одно из равенств

$$AA^{-1} = E, \text{ или } A^{-1}A = E,$$

$$A(A^*)^T = |A|\cdot E, \text{ или } (A^*)^T A = |A|\cdot E$$

проверить на истинность.

3.3. Примеры решения типовых задач

Задача 3.1. Найти обратную матрицу:

а) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$.

Решение: а) определим A^{-1} по схеме:

– найдем определитель матрицы:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=1\cdot4-3\cdot2=-2;$$

– составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix};$$

– транспонируем матрицу A^{*}:

$$(A^{*})^{T}=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix};$$

– найдем обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix};$$

– проверим:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3&1-1\\-6+6&3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Искомое решение: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

б) получим A^{-1} по схеме:

– найдем определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 100 - 84 - 105 + 16 + 90 = -1;$$

– составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix};$$

– транспонируем матрицу A^*:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & -34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix};$$

– найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & -34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix};$$

– проверим правильность решения:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомое решение: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & 34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$

Задача 3.2. Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

б) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение: а) умножим уравнение слева на $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \;\; => \;\; EX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вычислим искомую матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6+5 & -10+9 \\ \frac{9}{2}-\frac{5}{2} & \frac{15}{2}-\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

б) умножим уравнение справа на $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =>$$

$$=> X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Найдем матрицу $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$ по схеме:

– вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2;$$

– составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

– транспонируем матрицу A^*:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix};$$

– найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Вычислим искомую матрицу X:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5 & 1-3 \\ -10+15 & 5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

3.4. Пример прикладной задачи

Пример 3.1 (из экономики)**.** Пусть рассматривается n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а часть предназначена для целей конечного (вне сферы производства) личного и общественного потребления. Математическая модель межотраслевого баланса, разработанная профессором Гарвардсого университета (США) В. Леонтьевым, в матричной форме имеет вид

$$AX + Y = X, \tag{3.2}$$

где $A = (a_{ij})$ − матрица коэффициентов прямых затрат, здесь a_{ij} – затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли; X − вектор валовых выпусков, x_i – объем продукции i-й отрасли; Y − вектор конечного продукта, y_i – объем конечного продукта i-й отрасли для непроизводственного потребления.

Перепишем уравнение (3.2) в виде

$$(E - A) \cdot X = Y,$$

где E − единичная матрица. Решение матричного уравнения относительно неизвестных значений объемов производства продукции при заданном векторе конечного продукта находится по формуле

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y,$$

где $(E - A)^{-1}$ − матрица коэффициентов полных затрат, обозначим ее B. Тогда $X = BY$. Элемент b_{ij} матрицы B характеризует потребность в валовом выпуске отрасли i, который необходим для получения в процессе материального производства единицы конечного продукта отрасли j.

Пусть дана леонтьевская балансовая модель:

$$AX + Y = X.$$

Найти матрицу коэффициентов полных затрат B и вектор валовых выпусков X при заданных Y и A:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Как было показано выше, уравнение баланса имеет решение

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = BY.$$

В нашем случае

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,7 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

Найдем к этой матрице обратную. Для этого вычислим ее определитель:

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0,9 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,7 & -0,1 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,099,$$

и соответствующие алгебраические дополнения:

$$A_{11} = 0,35, \quad A_{12} = 0,14, \quad A_{13} = 0,21,$$
$$A_{21} = 0,06, \quad A_{22} = 0,39, \quad A_{23} = 0,09,$$
$$A_{31} = 0,18, \quad A_{32} = 0,18, \quad A_{33} = 0,27.$$

Определим матрицу коэффициентов полных затрат:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,099} \cdot \begin{pmatrix} 0,35 & 0,06 & 0,18 \\ 0,14 & 0,39 & 0,18 \\ 0,21 & 0,09 & 0,27 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3,535 & 0,606 & 1,818 \\ 1,414 & 3,939 & 1,818 \\ 2,121 & 0,909 & 2,727 \end{pmatrix}.$$

Вектор валовых выпусков X находим следующим образом:

$$X = (E - A)^{-1} Y = \frac{1}{0,099} \cdot \begin{pmatrix} 0,35 & 0,06 & 0,18 \\ 0,14 & 0,39 & 0,18 \\ 0,21 & 0,09 & 0,27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0,099} \cdot \begin{pmatrix} 9,9 \\ 19,8 \\ 14,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите обратную матрицу A^{-1}:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Решите матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 13 & -24 \end{pmatrix}$;

б) $X \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 2 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Дана квадратная матрица A n-го порядка. Найдите определитель присоединенной матрицы A^*.

Контрольные вопросы

1. Чему равна сумма произведений элементов третьей строки на соответствующие алгебраические дополнения элементов второй строки?
2. Какая матрица называется обратной?
3. Существует ли обратная матрица к прямоугольной матрице? При каком условии квадратная матрица имеет обратную?
4. Каким образом проверить правильность нахождения обратной матрицы?
5. По какой формуле вычисляется обратная матрица?

4. РАНГ МАТРИЦЫ

4.1. Определение ранга матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу, состоящую из m строк и n столбцов. Пусть $k \le m$ и $k \le n$. Выделим в этой матрице какие-нибудь k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами* матрицы.

Например, из матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

можно составить двенадцать миноров первого порядка:

$$3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 4,\ 5,\ 1;$$

восемнадцать миноров второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix};$$

четыре минора третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

У данной матрицы A среди миноров первого и второго порядка есть ненулевые, а все миноры третьего порядка равны нулю.

Рангом матрицы по минорам называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

В приведенном выше примере ранг матрицы A равен 2. Обозначим ранг по минорам $\mathrm{rang}_{\text{мин}} A$.

Пусть дана произвольная матрица A размерности $m \times n$. Обозначим строки этой матрицы: $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Линейной комбинацией строк матрицы A назовем сумму этих строк с некоторыми коэффициентами $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m$.

Линейная комбинация строк называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю. Очевидно, что тривиальная линейная комбинация представляет собой нулевую строку.

Строки матрицы являются *линейно зависимыми*, если найдется нетривиальная линейная комбинация, равная нулю, т. е. $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_m a_m = 0$, где 0 – нулевая строка, и среди коэффициентов найдется по крайней мере один ненулевой.

Можно дать равносильное определение линейной зависимости: строки матрицы *линейно зависимы*, если одну из строк можно представить в виде линейной комбинации оставшихся строк.

Удаляя из матрицы строки, являющиеся линейной комбинацией оставшихся, мы придем к матрице с линейно независимыми строками.

Покажем, что первое и второе определения линейно зависимых строк матрицы эквивалентны, т. е. из первого определения следует второе и из второго – первое.

Пусть строки матрицы A, обозначим их через $a_1, a_2, \ldots, a_m$, являются линейно зависимыми в смысле первого определения, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{m-1} a_{m-1} + \alpha_m a_m$, равная нулевой строке:

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{m-1} a_{m-1} + \alpha_m a_m = 0. \tag{4.1}$$

В нетривиальной линейной комбинации хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Можно считать, что таким коэффициентом является $\alpha_m \neq 0$.

Перепишем равенство (4.1) в виде $\alpha_m a_m = -\alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_{m-1} a_{m-1}$. Разделим его на α_m:

$$a_m = -\frac{\alpha_1}{\alpha_m} a_1 - \ldots - \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} a_{m-1}.$$

Обозначив коэффициенты $-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_m} = \beta_1$, $-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_m} = \beta_2$, $\dfrac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m} = \beta_{m-1}$, получим выражение строки a_m как линейную комбинацию оставшихся строк:

$$a_m = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{m-1} a_{m-1}.$$

Таким образом, из первого определения следует второе.

Покажем обратное, что из второго определения следует первое.

Пусть даны строки матрицы A: $a_1, a_2, \ldots, a_m$, и одна из строк, допустим a_m, представлена в виде линейной комбинации других строк:

$$a_m = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{m-1} a_{m-1}.$$

Перенесем a_m в правую часть и получим линейную комбинацию строк, равную нулю:

$$\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{m-1} a_{m-1} - a_m = 0.$$

Эта линейная комбинация с коэффициентами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}, -1$ является нетривиальной, так как по крайней мере коэффициент при a_m, равный (–1), отличен от нуля.

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 4.1. Первое и второе определения линейной зависимости строк матрицы эквивалентны.

Рангом матрицы по строкам называется максимальное число линейно независимых строк. Обозначим ранг по строкам $\mathrm{rang}_{\text{стр}}\, A$.

В матрице A можно аналогично выделить столбцы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и рассмотреть их линейные комбинации с коэффициентами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$:

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n,$$

среди которых будут тривиальные и нетривиальные.

Столбцы матрицы *линейно зависимы*, если найдется нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Можно рассмотреть и другое, эквивалентное этому определение: столбцы матрицы *линейно зависимы*, если один из них может быть представлен в виде линейной комбинации оставшихся столбцов.

Удаляя из матрицы столбцы, являющиеся линейными комбинациями оставшихся, получим матрицу с линейно независимыми столбцами.

Рангом матрицы по столбцам называется наибольшее число линейно независимых столбцов. Введем обозначение ранга по столбцам: $\mathrm{rang}_{\text{столб}}\, A$.

Докажем *теорему о ранге матрицы.*

Теорема 4.1. Ранги матрицы по строкам, столбцам и минорам равны:

$$\mathrm{rang}_{\text{мин}}\, A = \mathrm{rang}_{\text{стр}}\, A = \mathrm{rang}_{\text{столб}}\, A = \mathrm{rang}\, A.$$

Таким образом, можно говорить об однозначно определенном ранге матрицы, обозначенном $\mathrm{rang}\, A$, а ранги по строкам, столбцам и минорам – $\mathrm{rang}_{\text{стр}}\, A$, $\mathrm{rang}_{\text{столб}}\, A$, $\mathrm{rang}_{\text{мин}}\, A$ – рассматривать как разные способы вычисления ранга матрицы.

4.2. Способы вычисления ранга матрицы

Для вычисления ранга матрицы ее сначала приводят к возможно более простому виду с помощью элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

– транспонирование;

– перестановка двух строк;

– перестановка двух столбцов;

– умножение всех элементов строки или столбца на любое число, отличное от нуля;

– прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Теорема 4.2. При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

В качестве примера найдем ранг для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

по строкам и по столбцам и убедимся, что они совпадают с рангом по минорам этой матрицы, вычисленном в п. 4.1.

Умножим первую строку матрицы на $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ и прибавим ко второй строке:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2/3)\\ \hookleftarrow\\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{5}{3} & -\dfrac{1}{3}\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку полученной матрицы на 3 и прибавим к третьей:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 0 & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{5}{3} & -\dfrac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Проделанные процедуры можно записать с помощью обозначений строк матрицы:

$$-3\cdot\left(\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot a_1+a_2\right)=a_3,\ \text{т. е. } a_3=2a_1-3a_2.$$

Третья строка является линейной комбинацией первых двух, которые являются линейно независимыми. Таким образом, ранг матрицы A по строкам равен 2.

Найдем ранг этой матрицы по столбцам. Поменяем местами первый и третий столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим первый столбец на (–2) и прибавим ко второму и третьему, умножим первый столбец на (–3) и прибавим к третьему столбцу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & -6 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Умножим второй столбец на $\left(-\frac{5}{2}\right)$ и прибавим ко второму, потом умножим второй столбец на $\left(-\frac{3}{2}\right)$ и прибавим к третьему, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий и четвертый столбцы этой матрицы линейно выражаются через первые два столбца, которые являются линейно независимыми и, значит, $\mathrm{rang}_{\text{столб}} A = 2$.

Таким образом, ранги матриц по строкам и по столбцам равны.

4.3. Примеры решения типовых задач

Задача 4.1. Найти двумя способами ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Первый способ. Известно, что если у матрицы есть ненулевой минор k-го порядка, а все миноры $(k + 1)$-го порядка, содержащие этот минор, равны нулю, то ранг этой матрицы равен k. На этом основывается *метод окаймляющих миноров*.

Умножим вторую строку на (-1) и прибавим к первой:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице элемент на позиции (2, 1) ненулевой, он является минором первого порядка. Рассмотрим миноры второго порядка, включающие этот минор, среди них есть ненулевой:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Все миноры третьего порядка, включающие этот минор, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы равен 2.

Второй способ. Найдем ранг заданной матрицы по строкам. Поменяем местами первую и третью строки, затем умножим первую строку на 2 и прибавим ко второй и третьей:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на (–1) и прибавим к третьей и четвертой:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили две линейно независимые строки: первую и вторую, следовательно $\operatorname{rang} A = 2$.

Задача 4.2. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Умножим первую строку на (–2) и прибавим ко второй, умножим первую строку на (–1) и прибавим к третьей, а затем умножим вторую строку на (–2):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число линейно независимых строк последней матрицы – это число ненулевых строк – равно двум. Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$.

Задача 4.3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для того чтобы в левом верхнем углу получить ненулевой элемент, поменяем местами первую и вторую строки:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы получить нули в первом столбце, кроме позиции (1, 1), умножим первую строку на 3 и прибавим к третьей, затем умножим первую строку на 2 и прибавим к пятой:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Здесь третья, четвертая и пятая строки пропорциональны второй. Вынеся общие множители из этих строк, мы получим матрицу с одинаковыми четырьмя строками:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из всех строк линейно независимыми являются первые две, следовательно

$$\operatorname{rang} A = 2.$$

Заметим, что пропорциональные и нулевые строки не влияют на ранг матрицы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -13 & 7 \\ -4 & -2 & 13 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & -1 & 6 \\ 5 & -2 & 3 & 3 & 7 \\ -10 & 4 & -2 & 10 & -9 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -3 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 12 \\ 6 & -17 & -11 \\ -6 & 20 & 16 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение минора элемента матрицы.
2. Дайте определение ранга матрицы.
3. Может ли ранг матрицы равняться нулю, единице?
4. Дайте определение линейной комбинации строк.
5. Какие строки являются линейно зависимыми?
6. Какие преобразования матрицы называются элементарными?
7. Каким образом изменяется ранг матрицы при элементарных преобразованиях?
8. Охарактеризуйте метод элементарных преобразований.
9. Опишите процедуру метода окаймляющих миноров.

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

5.1. Определения и формы записи системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений в общем виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.1}$$

Решением системы называется любая совокупность значений неизвестных

$$x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n,$$

при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождества.

Предположим, что каждой системе можно сопоставить матрицу, состоящую из коэффициентов при переменных, которая называется *матрицей системы*, или *основной матрицей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Также можно выделить *столбец переменных* и *столбец свободных членов*:

– $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец переменных;

– $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Учитывая правило умножения матриц, рассмотренное в п. 1.2, получаем произведение основной матрицы на столбец переменных:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ \dots a_{2n} \\ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \\ a_{m1} \ a_{m2} \ \dots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

т. е. левую часть исходной системы (5.1) линейных уравнений. По условиям системы следует, что:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = b.$$

Таким образом, систему (5.1) можно переписать в виде

$$AX = b. \tag{5.2}$$

Матричное уравнение (5.2) называется *матричной формой* записи системы (5.1). В этих обозначениях отыскание решения системы – это решение матричного уравнения относительно столбца переменных X.

Если число уравнений совпадает с числом неизвестных, то матрица системы будет квадратной. В этом случае система называется *квадратной*.

Если все свободные члены уравнений системы равны нулю, то система называется *однородной*.

Далее в мы будем рассматривать только квадратные системы линейных уравнений и способы их решения.

5.2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть $AX = b$ – матричная форма записи системы вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Достаточно предположить, что определитель $|A| \neq 0$, чтобы решить матричное уравнение $AX = b$. Умножим это уравнение слева на A^{-1} – матрицу, обратную к A, и получим:

$$(A^{-1}A) \cdot X = A^{-1}b,$$

$$EX = A^{-1}b,$$

$$X = A^{-1}b.$$

Таким образом, чтобы найти столбец решений, достаточно умножить обратную матрицу системы на столбец свободных членов.

Несмотря на теоретическую простоту решения, практическая трудность состоит в нахождении обратной матрицы, особенно в случае если матрица системы была большой размерности или состояла из многозначных чисел.

В качестве примера решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде $AX = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 \cdot 3 -$$

$$- (-2) \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 3 + 6 + 6 + 122 - 8 + 12 = 60.$$

Определитель матрицы A отличен от нуля и, значит, для нее существует обратная матрица.

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Составим матрицу A^* из алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -18 & -18 \\ 6 & 11 & 1 \\ 6 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу A^*:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}, разделив все ее элементы на определитель $|A| = 60$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{60} & \frac{6}{60} & \frac{6}{60} \\ -\frac{18}{60} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{18}{60} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{pmatrix}.$$

Для проверки того что полученная матрица является обратной к A, предлагаем самостоятельно рассмотреть одно из уравнений: $A^{-1}A = E$ или $AA^{-1} = E$.

Найдем решение системы:

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{11}{60} & \frac{6}{60} & \frac{6}{60} \\ -\frac{18}{60} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \\ -\frac{18}{60} & \frac{1}{60} & \frac{11}{60} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48+66+66}{60} \\ \frac{-72+121+11}{60} \\ \frac{-72+11+121}{60} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку полученного решения:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1,$$

подставив его значения в систему:

$$2\cdot 3-1-1=6-2=4,$$

$$3\cdot 3+4\cdot 1-2\cdot 1=9+4-2=11,$$

$$3\cdot 3-2\cdot 1+4\cdot 1=9-2+4=11.$$

Все уравнения системы превратились в тождества, следовательно $x_1=3, x_2=1, x_3=1$ является решением данной системы.

5.3. Метод Крамера

Метод Крамера представляет собой по сути тот же матричный метод, где лишь значения переменных отыскиваются последовательно.

Прежде чем перейти к описанию метода Крамера, напомним, что при транспонировании определитель не меняется и все свойства, верные для строк, верны и для столбцов. По аналогии с равенствами из п. 3.1, запишем свойства для столбцов:

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\ldots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j,\end{cases}$$

где $a_{1i},a_{2i},\ldots,a_{ni}$ – элементы i-го столбца матрицы A; $A_{1j},A_{2j},\ldots,A_{nj}$ – алгебраические дополнения к элементам $a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj}$ соответственно.

Можно сказать, что если элементы столбца умножаются на алгебраические дополнения к тому же столбцу, то при суммировании получается определитель матрицы A. Если элементы столбца умножаются на алгебраические дополнения к другому столбцу, то при суммировании полученных произведений получается ноль.

Пусть дана система

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

и пусть определитель матрицы этой системы отличен от нуля, т. е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Умножим первое уравнение системы на A_{11}, второе – на A_{21} и т. д., последнее – на A_{n1} и сложим их все. Получим уравнение

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1}) + \dots +$$
$$+ x_n(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}. \qquad (5.3)$$

Заметим, что заключенные в скобки выражения представляют собой суммы произведений элементов столбцов матрицы A на алгебраические дополнения к первому столбцу, поэтому все они равны нулю, кроме коэффициента к x_1:

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1} = |A|.$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства:

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1},$$

представляет собой сумму произведений элементов $b_1, b_2, \dots, b_n$ на соответствующие алгебраические дополнения к первому столбцу матрицы A и, следовательно, является определителем матрицы, у которой все столбцы будут как у матрицы A, кроме первого столбца, где стоят элементы столбца свободных членов $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Определитель матрицы с замененным первым столбцом обозначим через $|A_1|$, и тогда уравнение (5.3) приобретет вид

$$x_1 \cdot |A| = |A_1|.$$

Если $|A| \neq 0$, то $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$.

Умножим уравнения системы на соответствующие алгебраические дополнения ко второму столбцу и суммируем полученные равенства:

$$x_1(a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + \dots + a_{n1}A_{n2}) + x_2(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{n2}A_{n2}) + \dots +$$
$$+ x_n(a_{1n}A_{12} + a_{2n}A_{22} + \dots + a_{nn}A_{n2}) = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2}.$$

Введем соответствующие обозначения:

$$x_2 |A| = |A_2| \text{ или } x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},$$

где $|A_2|$ – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой второго столбца на столбец свободных членов.

Продолжая этот процесс, имеем

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

где $|A_i|$ – определитель матрицы, полученный из матрицы A заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Формулы, дающие решение системы:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_3|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

называются *формулами Крамера*.

Для установления связи формул Крамера с решением системы с помощью обратной матрицы, запишем решение системы в матричном виде:

$$X = A^{-1}b.$$

Учтем процедуру получения обратной матрицы:

$$X = \frac{1}{|A|} \cdot \left(A^*\right)^T b,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы полученного столбца к соответствующим элементам столбца переменных, выведем формулы Крамера:

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{|A|} = \frac{|A_i|}{|A|}.$$

В качестве примера решим систему, приведенную в п. 5.2, методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 - \ x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля (см. п. 5.2) и имеет вид

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60.$$

Найдем определители матриц $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, которые получаются из матрицы A заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4\cdot 4 + (-1)\cdot(-2)\cdot 11 + (-1)\cdot 11\cdot(-2) -$$

$$-(-1)\cdot 4\cdot 11 - (-2)\cdot(-2)\cdot 4 - (-1)\cdot 11\cdot 4 = 64 + 22 + 22 + 44 - 16 + 44 = 180,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 11\cdot 4 + 4\cdot(-2)\cdot 3 + (-1)\cdot 3\cdot 11 -$$

$$-(-1)\cdot 3\cdot 11 - (-2)\cdot 11\cdot 2 - 3\cdot 4\cdot 4 = 88 - 24 - 33 + 33 + 44 - 48 = 60,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 11 + (-1)\cdot 11\cdot 3 + 3\cdot(-2)\cdot 4 -$$

$$-4\cdot 4\cdot 3-(-2)\cdot 11\cdot 2-(-1)\cdot 3\cdot 11=88-33-24-48+44+33=60.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{180}{60}=3,\qquad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{60}{60}=1,\qquad x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{60}{60}=1.$$

Метод Крамера тесно связан с методом решения систем с помощью обратной матрицы, поэтому он имеет те же недостатки, например сложность для систем с большим числом уравнений и переменных или для систем с многозначными коэффициентами.

5.4. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)

Формулы Крамера, представляющие большой теоретический интерес, серьезного практического значения не имеют, так как их применение приводит к слишком громоздким вычислениям. В самом деле, чтобы воспользоваться формулами Крамера для решения системы из n уравнений (и n неизвестных), нужно вычислить $n + 1$ определитель порядка n. Даже согласно грубым оценкам, при этом придется выполнить n^4 умножений и сложений. В то же время метод Гаусса потребует значительно меньшего числа операций: примерно $\frac{4}{3}n^3$ умножений и $\frac{4}{3}n^3$ сложений.

Для того чтобы с помощью метода Гаусса решить систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

производят *элементарные преобразования*, к которым относятся следующие действия:

1) разрешается менять местами любые два уравнения системы;

2) любые уравнения системы можно умножить на любое ненулевое число;

3) любое уравнение системы можно умножить на любое число и прибавить к другому уравнению. Заметим, что при этом число уравнений в системе не меняется.

Две системы, одна из которых получается из другой с помощью элементарных преобразований, называются *эквивалентными*, или *равносильными*. Учитывая, что элементарные преобразования не меняют решения системы, эквивалентные (равносильные) системы имеют одно решение (набор значений переменных).

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований от данной системы мы переходим к эквивалентной системе, имеющей треугольный вид.

Треугольный вид системы линейных уравнений – это система, в которой каждое уравнение имеет на одну переменную меньше, чем предыдущее. Схематически это выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \qquad \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \qquad \qquad \qquad a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases}$$

Напомним, что в данной главе мы рассматриваем системы только однозначной разрешимости, т. е. системы с невырожденными матрицами, для которых $|A| \neq 0$. Покажем, что системы, удовлетворяющие этому требованию, однозначно приводятся к треугольному виду.

В любой системе с невырожденной матрицей в первом столбце обязательно найдется по крайней мере один элемент, отличный от нуля. В случае необходимости, меняя первое уравнение с уравнением, содержащим ненулевой элемент при x_1, можно получить систему, где в крайнем левом углу на позиции (1, 1) стоит ненулевой элемент.

Итак, пусть $a_{11} \neq 0$. Умножим последовательно первое уравнение сначала на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавим ко второму уравнению, потом на $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и прибавим к третьему уравнению и т. д., затем еще на $\left(-\dfrac{a_{n1}}{a_{11}}\right)$ и прибавим к последнему уравнению. В результате получим систему, у которой переменная x_1 содержится только в первом уравнении:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases}$$

Оставив без изменения первое уравнение, применим описанную процедуру ко второму и так далее до n-го уравнения и придем к системе треугольного вида. С учетом того, что на каждом этапе коэффициенты системы менялись, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\qquad\qquad \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n. \end{cases}$$

Определителем последней системы является определитель

$$\begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix} = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot \tilde{a}_{nn} \neq 0.$$

Следовательно, можно выразить $x_n = \dfrac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_{nn}}$, подставить в предыдущее уравнение, найти x_{n-1} и т. д. Поднимаясь от последнего уравнения к первому, последовательно получим все значения переменных x_1, x_2, …, x_n.

Как будет показано в дальнейшем, метод Гаусса является не только наиболее экономичным методом по числу операций, но и наиболее универсальным, так как он применяется не только к системам, где число уравнений равно числу переменных, но и к системам с произвольным числом уравнений.

В качестве примера возьмем ту же систему, которую мы решили в п. 5.3 методом Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Для того чтобы избежать действий с дробями, получим единицу на позиции (1, 1). Для этого умножим первое уравнение на (–1) и прибавим ко второму:

$$\begin{array}{r} -2x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ \hline x_1 + 5x_2 - x_3 = 7. \end{array}$$

Затем поменяем местами первое уравнение и измененное второе:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму:

$$\begin{array}{r} -2x_1 - 10x_2 + 2x_3 = -14, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ \hline -11x_2 + x_3 = -10. \end{array}$$

Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ -11x_2 + x_3 = -10, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–3) и прибавим к третьему:

$$\begin{array}{r} -3x_1 - 15x_2 + 3x_3 = -21, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \\ \hline -17x_2 + 7x_3 = -10. \end{array}$$

Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ -11x_2 + x_3 = -10, \\ -17x_2 + 7x_3 = -10. \end{cases}$$

Для того чтобы исключить переменную из третьего уравнения, умножим второе уравнение на (–17) и третье – на 11 и сложим их:

$$\begin{array}{r} 11\cdot 17x_2-17x_3=170,\\ -17\cdot 11x_2+77x_3=-110\\ \hline 60x_3=60.\end{array}$$

Получим систему

$$\begin{cases} x_1+\ \ 5x_2-\ \ x_3=7,\\ \quad -11x_2+\ \ x_3=-10,\\ \qquad\qquad 60x_3=60.\end{cases}$$

Эта система имеет треугольный вид и равносильна исходной, т. е. мы выполняли лишь элементарные преобразования.

Выразим x_3 из последнего уравнения: $x_3 = 1$. Подставим $x_3 = 1$ во второе уравнение:

$$-11x_2+1=-10 \;\;=>\;\; -11x_2=-11 \;\;=>\;\; x_2=1.$$

Подставим полученные значения $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$ в первое уравнение:

$$x_1+5-1=7 \;\;=>\;\; x_1=3.$$

Решением является набор значений (3; 1; 1).

5.5. Примеры решения типовых задач

Задача 5.1. Решить тремя способами систему:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=1,\\ x_1-6x_2=8.\end{cases}$$

Решение. Первый способ (по матричному методу). Запишем основную матрицу, столбец свободных членов и столбец переменных:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -6\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}.$$

Система имеет вид $AX = b$ и решение $X = A^{-1}b$. Найдем матрицу, обратную матрице A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -6\end{vmatrix}=-12-3=-15\neq 0,$$

и матрицу алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем A^*:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{15} & \frac{3}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix},$$

и решим систему:

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{6}{15} & \frac{3}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6+24}{15} \\ \frac{1-16}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 2, x_2 = -1$.

Второй способ (по методу Крамера). Нам уже известно, что $|A| = -15$. Найдем $|A_1|$ и $|A_2|$. Заменим в A первый столбец на столбец свободных членов и получим определитель:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 24 = -30.$$

Заменим второй столбец:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15.$$

Найдем решение:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-30}{-15} = 2, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{15}{-15} = -1.$$

Таким образом, $x_1 = 2, x_2 = -1$.

Третий способ (по методу Гаусса). Выполним преобразования исходной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ \ \ x_1 - 6x_2 = 8. \end{cases}$$

Поменяем местами уравнения:

$$\begin{cases} \ \ x_1 - 6x_2 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 = 8, \\ \qquad 15x_2 = -15. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $x_2 = -1$. Подставляя в первое уравнение, получим

$$x_1 + 6 = 8 \ \ => \ \ x_1 = 2.$$

Искомое решение: (2; –1).

Задача 5.2. Решить систему тремя известными способами:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \qquad\quad = -1, \\ \ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Первый способ (по матричному методу). Запишем матрицу системы, столбец свободных членов и столбец переменных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решением системы будет $X = A^{-1}b$. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0 -$$

$$-\,0\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot(-1)\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 1 = 4 + 2 + 1 = 7 \neq 0.$$

Запишем матрицу алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем A^*:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

и получим

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение будет следующим:

$$X = A^{-1}b = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ запишем в виде: (–1; –1; –1).

Второй способ (по методу Крамера). Известно, что $|A| = 7$. Найдем определители $|A_1|, |A_2|, |A_3|$, которые получаются из определителя A заменой соответствующих столбцов на столбец свободных членов:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 1 - 2 = -7,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 1 = -7,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 1 + 4 - 2 = -7.$$

Решение системы найдем по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-7}{7} = -1, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-7}{7} = -1, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-7}{7} = -1.$$

Ответ запишем в виде (–1; –1; –1).

Третий способ (по методу Гаусса). Поменяем местами первое и второе уравнения системы. Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ -5x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

Поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2, \\ -5x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 5 и прибавим к третьему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2, \\ 7x_3 = -7. \end{cases}$$

Из третьего уравнения следует $x_3 = -1$, из второго получим $x_2 - 1 = -2$, т. е. $x_2 = -1$, тогда из первого уравнения $x_1 - 2 + 1 = -2$, $x_1 = -1$.

Искомое решение: (–1; –1; –1).

Для сокращения решения системы методом Гаусса можно выписать расширенную матрицу, которая получается из матрицы системы приписыванием столбца свободных членов. Затем проведем все действия над расширенной матрицей, приводя матрицу A в ней к треугольному виду, а затем вернемся к записи с переменными:

$$B=\left(A\,|\,b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2)\\ \hookleftarrow\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & -5 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -5 & 2 & 3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(5)\\ \hookleftarrow\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 7 & -7\end{array}\right).$$

В результате получим

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=-2,\\ x_2+x_3=-2,\\ 7x_3=-7.\end{cases}$$

Искомое решение: (–1; –1; –1).

5.6. Примеры прикладных задач

Пример 5.1 (из механики)**.** Найдем ускорение каждого груза системы, изображенной на рис. 5.1, а также силы натяжения нитей, на которых подвешены грузы. Масса каждого груза m = 1 кг, весом блоков и нитей можно пренебречь, трение отсутствует, нити нерастяжимые.

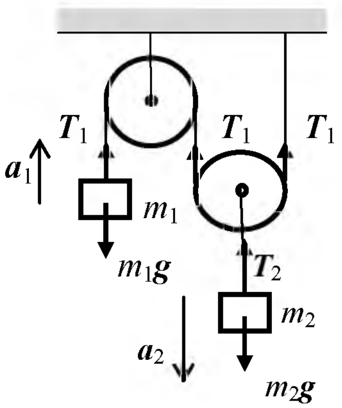


Рис. 5.1

Предположим, что первый груз движется вверх, а второй – вниз. Запишем второй закон Ньютона для каждого груза в проекциях на вертикальную ось:

$$m_1a_1 = T_1 - m_1g,$$

$$m_2a_2 = m_2g - T_2.$$

Уравнения кинематической связи имеют вид

$$a_1 = 2a_2,$$

$$T_2 = 2T_1.$$

В результате получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} m_1a_1 - T_1 = -m_1g, \\ m_2a_2 + T_2 = m_2g, \\ a_1 - 2a_2 = 0, \\ 2T_1 - T_2 = 0. \end{cases}$$

Подставим числовые значения $m_1 = m_2 = 1$, $g = 9{,}8$:

$$\begin{cases} a_1 - T_1 = -9{,}8, \\ a_2 + T_2 = 9{,}8, \\ a_1 - 2a_2 = 0, \\ 2T_1 - T_2 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим:

$$a_1 = -3{,}92 \text{ м/с}^2, \quad a_2 = -1{,}96 \text{ м/с}^2, \quad T_1 = 5{,}88 \text{ Н}, \quad T_2 = 11{,}76 \text{ Н}.$$

Отрицательные значения ускорений означают, что движение происходит в обратном направлении.

Пример 5.2 (из экономики)**.** Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Требуется записать условия выполнения задания в математической форме.

Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено $3x$ заготовок типа A, при втором – $2y$, при третьем – z.

Для полного выполнения задания по заготовкам типа A сумма $3x + 2y + z$ должна равняться 360, т. е.

$$3x + 2y + z = 360.$$

Аналогично получим уравнения

$$x + 6y + 2z = 300,$$

$$4x + y + 5z = 675,$$

которым должны удовлетворять неизвестные x, y, z для того, чтобы выполнить задание по заготовкам Б и В. Полученная система линейных уравнений и выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В.

Решим эту систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее с помощью элементарных преобразований к треугольному виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 360 \\ 1 & 6 & 2 & 300 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 1 & -1 & 4 & 315 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4\,020 \end{array}\right).$$

Следовательно, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 300, \\ 2y + 9z = 570, \\ -67z = -4\,020. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z = 60$. Подставляя значение z во второе уравнение, получим $y = 15$ и, наконец, из первого имеем $x = 90$. Итак, решение системы: (90, 15, 60).

Пример 5.3 (из электротехники)**.** Для электрической цепи (рис. 5.2) составить уравнения для определения токов путем непосредственного применения законов Кирхгофа. Значения ЭДС источников и сопротивлений: E_1 = 130 В, E_2 = 110 В, R_1 = 4 Ом, R_2 = 8 Ом, R_3 = 21 Ом, R_4 = 16 Ом, R_5 = 19 Ом, R_6 = 16 Ом.

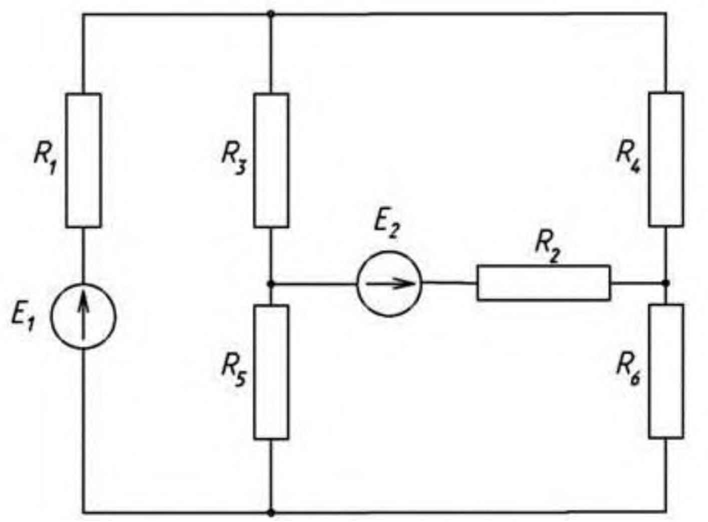


Рис. 5.2

Произвольно расставим направления токов в ветвях цепи, примем направления обхода контуров против часовой стрелки, обозначим узлы (рис. 5.3). Число узлов в цепи p = 4. Количество ветвей m = 6.

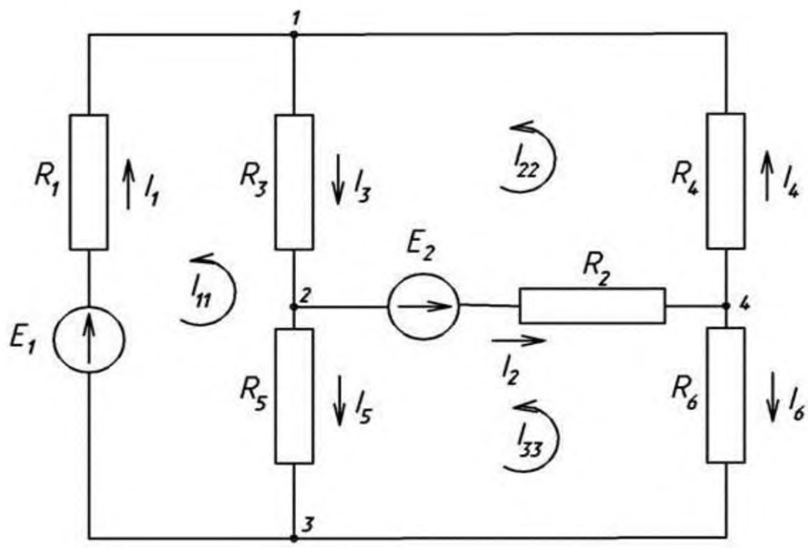


Рис. 5.3

Составим уравнения по законам Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа говорит о том, что сумма втекающих и вытекающих токов в любом узле схемы равна нулю. Число уравнений должно быть меньше числа узлов на один. Составим три уравнения для узлов 1, 2, 3:

$$I_1 + I_4 - I_3 = 0,$$

$$I_3 - I_2 - I_5 = 0,$$

$$I_5 + I_6 - I_1 = 0.$$

Второй закон Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений по замкнутому контуру равна сумме ЭДС в этом контуре. Составим недостающие $m - (p - 1)$ уравнений, т. е. $6 - (4 - 1) = 3$ уравнения, для контуров I_{11}, I_{22}, I_{33}:

$$-I_1R_1 - I_5R_5 - I_3R_3 = -E_1,$$

$$I_2R_2 + I_4R_4 + I_3R_3 = E_2,$$

$$-I_2R_2 + I_5R_5 - I_6R_6 = -E_2.$$

Токи и напряжения, совпадающие с принятыми нами направлениями, берем со знаком «плюс», несовпадающие – со знаком «минус». Таким образом, полная система уравнений для нашей цепи, составленная по законам Кирхгофа, будет такой:

$$\begin{cases} I_1 + I_4 - I_3 = 0, \\ I_3 - I_2 - I_5 = 0, \\ I_5 + I_6 - I_1 = 0, \\ -I_1R_1 - I_5R_5 - I_3R_3 = -E_1, \\ I_2R_2 + I_4R_4 + I_3R_3 = E_2, \\ -I_2R_2 + I_5R_5 - I_6R_6 = -E_2. \end{cases}$$

Получим шесть уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} I_1 - I_3 + I_4 = 0, \\ -I_2 + I_3 - I_5 = 0, \\ -I_1 + I_5 + I_6 = 0, \\ -4I_1 - 21I_3 - 19I_5 = -130, \\ 8I_2 + 21I_3 + 16I_4 = 110, \\ -8I_2 + 19I_5 - 16I_6 = -110. \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, определим токи в ветвях цепи:

$$I_1 = 5{,}88 \text{ А}, I_2 = 4{,}13 \text{ А}, I_3 = 4{,}62 \text{ А},$$

$$I_4 = -1{,}26 \text{ А}, I_5 = 0{,}49 \text{ А}, I_6 = 5{,}39 \text{ А}.$$

Положительный знак означает, что направление тока совпадает с выбранным в начале решения, а отрицательный – что ток направлен в противоположную сторону.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите систему тремя способами:

а) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 2, \\ x_1 + 3x_2 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 \qquad + x_3 = -2, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

2. Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение системы линейных уравнений.
2. Дайте определение основной матрицы системы.
3. Каким образом записывается система в матричном виде?
4. В чем состоит матричный метод решения?
5. Запишите формулы Крамера.
6. Какие ограничения на применение матричного метода и формул Крамера существуют?
7. В чем заключается суть метода Гаусса?
8. С помощью каких элементарных преобразований реализуется метод Гаусса?

6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

6.1. Теорема Кронекера–Капелли

Сформулированная в п. 4.1 теорема о ранге матрицы позволяет подойти к исследованию решений систем линейных уравнений с более общих позиций.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{6.1}$$

Напомним, что коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_i естественно располагаются в две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

где A – *основная матрица*; B – *расширенная матрица системы*.

Каждому уравнению системы (6.1) отвечает определенная строка в матрицах A и B. Перестановка уравнений в системе влечет соответствующую перестановку строк матриц A и B.

Говорят, что i-е уравнение системы (6.1) линейно зависит от остальных уравнений этой системы, если i-я строка матрицы B есть линейная комбинация других строк матрицы B.

Заметим, что если i-я строка матрицы B является линейной комбинацией остальных ее строк, то вычеркивая i-е уравнение из системы (6.1), получим сокращенную систему уравнений, имеющую ту же совокупность решений, что и система (6.1).

В более общем виде можно утверждать, что если ранг (по строкам) матрицы B равен r, то система уравнений (6.1) содержит подсистему из r линейно независимых уравнений, обладающую той же совокупностью решений, что и сама система (6.1).

Действительно, поскольку ранг матрицы B равен r, то B имеет r линейно независимых строк, через которые все остальные ее строки выражаются линейно. Взяв уравнения, отвечающие указанным r линейно независимым строкам, получим требуемую подсистему.

Если $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ – решение системы (6.1), т. е. при подстановке $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ вместо переменных в систему (6.1) мы получим тождества, то тогда можно утверждать, что последний столбец в матрице B представляет собой линейную комбинацию остальных столбцов с коэффициентами $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. Поэтому максимальное число линейно независимых столбцов матрицы B в этом случае равно максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A. Следовательно,

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B.$$

Из вышесказанного вытекает теорема Кронекера–Капелли.

Теорема 6.1 (теорема Кронекера–Капелли)**.** Для того чтобы система уравнений (6.1) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу основной матрицы этой системы. Если ранги основной и расширенной матриц совпадают с числом неизвестных n, то система имеет единственное решение. Если ранг r основной и расширенной матриц меньше числа неизвестных n, то система (6.1) имеет более одного решения.

В качестве примера исследуем с помощью теоремы Кронекера–Капелли следующие системы.

$$1.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг расширенной матрицы B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на (–1) и прибавим ко второй и к третьей, умножим первую строку на (–3) и прибавим к третьей строке, затем поменяем местами вторую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на 3 и прибавим к третьей, а затем умножим вторую строку на 2 и прибавим к четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{pmatrix}.$$

Умножив первую строку на (–1) и прибавив к четвертой, получим матрицу с тремя ненулевыми строками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы B равен трем (rang $B = 3$). Учитывая, что матрица $B = (A \mid b)$, и проделывая ту же последовательность операций, что и для B, преобразуем основную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда rang $A = 3$. Число неизвестных системы $n = 3$, т. е. rang $A =$ = rang $B = n = 3$. По теореме Кронекера–Капелли система имеет единственное решение.

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right).$$

Умножив первую строку на (–1) и прибавив ко всем остальным, получим матрицу, у которой в первом столбце имеется только один ненулевой элемент:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right).$$

Прибавляя вторую строку к третьей, умножая вторую строку на 2 и прибавляя к четвертой, получим матрицу с двумя ненулевыми строками:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

откуда rang $B = 2$. Учитывая, что $B = (A \mid b)$, и повторяя преобразования строк матрицы B, преобразуем основную матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем rang $A = 2$. Принимая во внимание, что число неизвестных $n = 4$, т. е. rang A = rang $B < n$, приходим к выводу, что данная система имеет бесконечное множество решений.

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4\\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6\end{array}\right).$$

Умножив первую строку на (–1) и прибавив ко всем остальным, получим матрицу, у которой в первом столбце только один ненулевой элемент:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4\\ 0 & 6 & 4 & -6 & 6\end{array}\right).$$

Прибавляя вторую строку к третьей, умножая вторую строку на 2 и прибавляя к четвертой, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14\end{array}\right),$$

которая содержит три ненулевые строки, следовательно $\operatorname{rang} B = 3$. Учитывая, что $B = (A \mid b)$, преобразуем матрицу A так же, как и матрицу B:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$. Таким образом,

$$\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B,$$

т. е. данная система не имеет решений.

6.2. Классификация систем линейных уравнений

Рассматривая в п. 6.1 теорему Кронекера–Капелли, мы получили, что системы линейных уравнений можно классифицировать по их решениям.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Система, не имеющая решений, называется *несовместной*. Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*. Система, имеющая бесконечное множество решений, называется *неопределенной*.

Схематически приведенную классификацию систем линейных уравнений можно изобразить следующим образом (рис. 6.1).

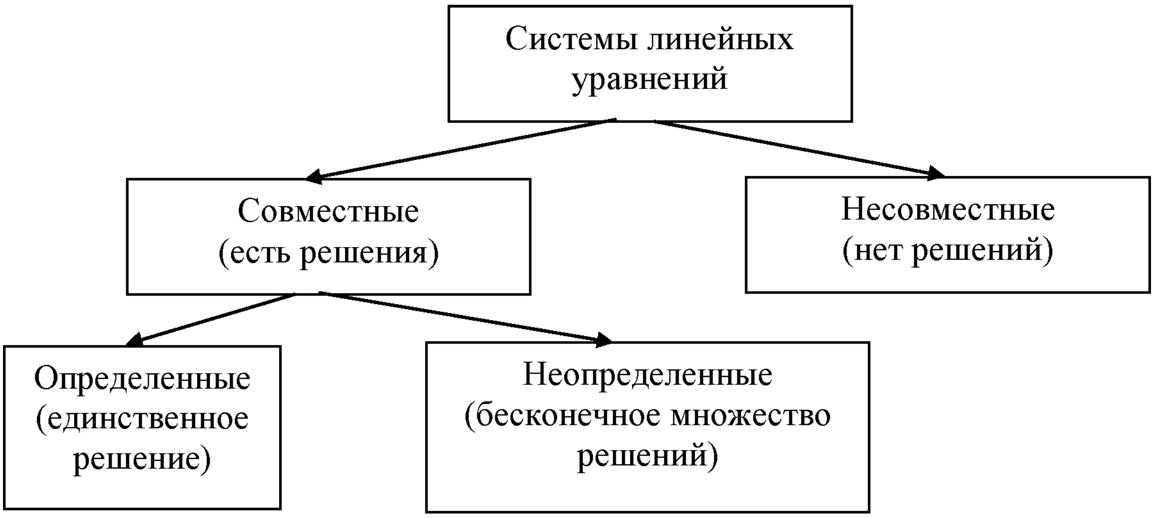


Рис. 6.1

Отметим, что для решения систем, у которых число уравнений не равно числу неизвестных, и для систем с определителем матрицы системы, равным нулю, использование обратной матрицы и метода Крамера невозможно, поэтому единственным способом решения остается метод Гаусса.

В общем случае последовательное исключение неизвестных с помощью элементарных преобразований приводит систему к трапецеидальному виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \qquad\qquad a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Переменные, коэффициенты при которых образуют определитель, отличный от нуля, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{mm} \neq 0,$$

и переменные при этих коэффициентах: $x_1, x_2, \dots, x_m$ – можно считать зависимыми, остальные переменные – независимыми, или свободными. Придавая различные значения свободным переменным, мы можем получить значения зависимых переменных.

Если в результате элементарных преобразований системы одно из уравнений превратилось в тождество, т. е. равенство, истинное при любых значениях переменных, то такое уравнение можно вычеркнуть из системы. Если в результате элементарных преобразований одно из уравнений превратилось в противоречие, т. е. равенство, ложное при любых значениях переменных, например $0 = 1$, то такая система несовместна.

Приведем три примера, иллюстрирующих данную классификацию.

Решим систему

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$$

Определитель матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0,$$

следовательно система имеет единственное решение, которое можно найти одним из способов, описанных в пп. 5.2–5.4. Решим ее методом Гаусса. Умножим первое уравнение на $\left(-\frac{2}{3}\right)$ и прибавим ко второму:

$$\begin{array}{r} -2x - \frac{4}{3}y = -\frac{14}{3}, \\ 2x + 3y = 8 \\ \hline \frac{5}{3}y = \frac{10}{3}. \end{array}$$

Получим систему

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ \quad \dfrac{5}{3}y = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем $y = 2$. Подставив в первое уравнение, получим $x = 1$. Ответом является пара (1; 2), дающая единственное решение системы, следовательно данная система является совместной и определенной.

Решим систему

$$\begin{cases} x \;\; + y = 5, \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

и определим ее тип.

Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму уравнению:

$$\begin{array}{r} -2x - \;2y = -10, \\ 2x \;+ 2y = 10 \\ \hline 0 = 0. \end{array}$$

Система примет вид

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ \quad 0 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение является тождеством, истинным при всех значениях переменных x и y, поэтому система эквивалентна одному уравнению

$$x + y = 5.$$

Пусть $x = \alpha$, тогда $y = 5 - \alpha$. Для всевозможных значений α будем получать различные пары вида (α; $5 - \alpha$), являющиеся решением данной системы. Пусть, например, $\alpha = \sqrt{2}$, этому значению соответствует пара $\left(\sqrt{2}; 5 - \sqrt{2}\right)$, которая является *частным решением*. Действительно, подставив его в уравнения системы, получим

$$\sqrt{2} + 5 - \sqrt{2} = 5,$$

$$2\sqrt{2} + 2(5 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 10 - 2\sqrt{2} = 10.$$

В отличие от частного решения, решение (α; $5 - \alpha$) называется *общим*. Проверку можно осуществлять и для общего решения:

$$\alpha + 5 - \alpha = 5,$$

$$2\alpha + 2(5 - \alpha) = 2\alpha + 10 - 2\alpha = 10.$$

Решим систему

$$\begin{cases} x + \ y = 5, \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$

и определим ее тип.

Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму уравнению:

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -10, \\ 2x + 2y = 12 \\ \hline 0 = 2. \end{array}$$

Система примет вид

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ \quad 0 = 2. \end{cases}$$

Второе уравнение свелось к утверждению, ложному для всех значений переменных. Следовательно, система решений не имеет и является несовместной.

Рассмотрим два примера систем с большим числом переменных.

Решим систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 = 2, \\ 3x_1 + \ x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

и определим ее тип.

Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к трапецеидальному виду:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Умножив первую строку на (–1) и прибавив ко второй, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Поменяем местами первую и вторую строки. Затем умножим первую строку на (–2) и прибавим ко второй, умножим первую строку на (–5) и сложим с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -11 & 9 & 4 \\ 0 & -22 & 18 & 9 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на (–2) и сложим с третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -11 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Перейдем к записи с переменными:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -1, \\ \quad -11x_2 + 9x_3 = 4, \\ \qquad\qquad 0 = 1. \end{cases}$$

С учетом того, что третье уравнение системы не может быть верным ни при каких значениях переменных, система решений не имеет и является несовместной.

Решим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ \quad -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = -5. \end{cases}$$

Определитель коэффициентов при первых двух переменных x_1 и x_2 отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Оставим x_1 и x_2 в левой части, а x_3 и x_4 перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 + x_3 - 3x_4, \\ \quad -5x_2 = -5 - 5x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Переменные x_3 и x_4 – свободные и могут принимать любые значения независимо друг от друга. Пусть $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$. Значения переменных x_1 и x_2 будут зависеть от x_3 и x_4. Найдем из второго уравнения $x_2 = 1 + \alpha - \frac{7}{5}\beta$ и подставим его в первое уравнение:

$$x_1 + 2 + 2\alpha - \frac{14}{5}\beta = 3 + \alpha - 3\beta \quad => \quad x_1 = 1 - \alpha - \frac{1}{5}\beta.$$

Общее решение запишем в виде $\left(1 - \alpha - \frac{1}{5}\beta, 1 + \alpha - \frac{7}{5}\beta, \alpha, \beta\right)$, где α, β – числа. Сделаем проверку полученного решения:

$$1 - \alpha - \frac{1}{5}\beta + 2\left(1 + \alpha - \frac{7}{5}\beta\right) - \alpha + 3\beta = 1 - \alpha - \frac{1}{5}\beta + 2 + 2\alpha - \frac{14}{5}\beta + 3\beta - \alpha = 3,$$

$$2\left(1 - \alpha - \frac{1}{5}\beta\right) - \left(1 + \alpha - \frac{7}{5}\beta\right) + 3\alpha - \beta = 2 - 2\alpha - \frac{2}{5}\beta - 1 - \alpha + \frac{7}{5}\beta + 3\alpha - \beta = 1.$$

Подставляя различные значения вместо α и β, мы сможем получить различные частные решения. Например, при $\alpha = 1$, $\beta = -1$ частным решением будет набор $\left(\frac{1}{5};\ \frac{17}{5};\ 1;\ -1\right)$.

6.3. Однородные системы линейных уравнений

Если свободные члены в системе (6.1) равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

то система называется *однородной*.

Система (6.2) всегда совместна, так как она имеет тривиальное (нулевое) решение:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Встает вопрос о том, когда система (6.2) имеет ненулевое решение.

Теорема 6.2. Для того чтобы система (6.2) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа переменных n.

Доказательство. Если $r = n$, то из теоремы Кронекера–Капелли вытекает, что система (6.2) имеет единственное и, значит, только тривиальное решение:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Если же $r < n$, то система является неопределенной (несовместной она быть не может) и имеет бесконечное множество ненулевых решений.

Теорема доказана.

Теорема 6.3. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладала ненулевым решением, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю.

Доказательство. Вторая теорема является непосредственным следствием первой. Условие равенства нулю определителя Δ системы является необходимым, так как если $\Delta \neq 0$, то $\operatorname{rang} A = n$ и система имеет единственное, а значит только тривиальное решение. Это условие также и достаточное, так как если $\Delta = 0$, то ранг матрицы системы $r < n$ и система имеет бесконечное множество ненулевых решений.

Теорема доказана.

Пусть $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ – какое-нибудь ненулевое решение однородной системы. Эту строку можно рассматривать как строку

$$\boldsymbol{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

состоящую из n элементов. Тогда строка

$$c\boldsymbol{e}_1 = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n),$$

где $c = \text{const}$, тоже будет решением. Действительно, если $\boldsymbol{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – решение, то каждое уравнение однородной системы превращается в тождество при подстановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Тогда, подставив вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения $c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n$, получим

$$\begin{cases} a_{11}c\alpha_1 + a_{12}c\alpha_2 + \ldots + a_{1n}c\alpha_n = c\left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n\right) = c\cdot 0 = 0, \\ a_{21}c\alpha_1 + a_{22}c\alpha_2 + \ldots + a_{2n}c\alpha_n = c\left(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n\right) = c\cdot 0 = 0, \\ \cdot \\ a_{m1}c\alpha_1 + a_{m2}c\alpha_2 + \ldots + a_{mn}c\alpha_n = c\left(a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n\right) = c\cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, все уравнения при подстановке $c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n$ превратились в тождества и, следовательно, $c\boldsymbol{e}_1 = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$ – решение системы.

Далее, если $\boldsymbol{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – какое-то другое решение однородной системы (6.2), т. е. верны тождества

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = 0, \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \ldots + a_{mn}\beta_n = 0, \end{cases}$$

то тогда решением системы (6.2) будет и их сумма:

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n).$$

Действительно, при подстановке $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ в систему уравнения превращаются в тождества:

$$\begin{cases} a_{11}\left(\alpha_1 + \beta_1\right) + a_{12}\left(\alpha_2 + \beta_2\right) + \ldots + a_{1n}\left(\alpha_n + \beta_n\right) = \\ = \left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n\right) + \left(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n\right) = 0, \\ a_{21}\left(\alpha_1 + \beta_1\right) + a_{22}\left(\alpha_2 + \beta_2\right) + \ldots + a_{2n}\left(\alpha_n + \beta_n\right) = \\ = \left(a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n\right) + \left(a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n\right) = 0, \\ \cdot \\ a_{m1}\left(\alpha_1 + \beta_1\right) + a_{m2}\left(\alpha_2 + \beta_2\right) + \ldots + a_{mn}\left(\alpha_n + \beta_n\right) = \\ = \left(a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n\right) + \left(a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \ldots + a_{mn}\beta_n\right) = 0. \end{cases}$$

Обобщая полученные результаты, можно сказать, что если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ – решения однородной линейной системы, то для любых чисел c_1, c_2 линейная комбинация этих решений

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1, c_1\alpha_2 + c_2\beta_2, \ldots, c_1\alpha_n + c_2\beta_n)$$

тоже будет решением системы.

В качестве примера решим однородную систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \ x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases}$$

выберем два ненулевых решения и покажем, что их линейная комбинация также будет решением.

Умножим первое уравнение на (–2) и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad 7x_2 - 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Определитель, составленный из коэффициентов при переменных x_1 и x_2, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Эти переменные можно рассматривать как зависимые. Переменные x_3 и x_4 будут свободными переменными, и, придавая им различные значения, мы можем получить значения для переменных x_1 и x_2:

$$x_2 = \frac{9x_3 + x_4}{7},$$

$$x_1 = 2 \cdot \frac{9x_3 + x_4}{7} - 3x_3 + x_4 \quad => \quad x_1 = \frac{-3x_3 + 9x_4}{7}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид

$$\left(\frac{-3\alpha + 9\beta}{7}; \frac{9\alpha + \beta}{7}; \alpha; \beta \right),$$

где α, β – числа.

Пусть $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, тогда решением системы будет

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(\frac{3}{7}; \frac{19}{7}; 2; 1 \right).$$

Пусть $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, тогда получим решение

$$\boldsymbol{e}_2 = (3; -1; -1; 2).$$

Сумма решений

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \left(\frac{3}{7} + 3; \frac{19}{7} - 1; 2 - 1; 1 + 2 \right) = \left(\frac{24}{7}; \frac{12}{7}; 1; 3 \right)$$

также будет решением системы. Убедимся в этом, подставив решение в уравнения:

$$\frac{24}{7}-2\frac{12}{7}+3\cdot 1-3=0,$$

$$2\frac{24}{7}+3\frac{12}{7}-3\cdot 1-3\cdot 3=\frac{48}{7}+\frac{36}{7}-12=\frac{84}{7}-12=0.$$

Аналогично можно показать, что любая линейная комбинация решений $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ будет являться решением системы.

6.4. Примеры решения типовых задач

Задача 6.1. Исследовать систему

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+\ x_3=2, \\ 3x_1+\ x_2-3x_3=1, \\ 5x_1-2x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу B системы и приведем ее к трапецеидальному виду:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{cc} \cdot(-3/2) & \cdot(-5/2) \\ \hookleftarrow & | \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 11/2 & -9/2 & -2 \\ 0 & 11/2 & -9/2 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \cdot(-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 11/2 & -9/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен двум, так как в матрице системы после преобразования имеются две ненулевые строки:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг расширенной матрицы равен трем, тогда $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B$. По теореме Кронекера–Капелли эта система несовместна.

Задача 6.2. Исследовать систему

$$\begin{cases} 2x-4y+\ z=3, \\ x-5y+3z=-1, \\ x\ -y+\ z=1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы $B=(A\mid b)$:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{cc} \cdot(-2) & \cdot(-1) \\ \hookleftarrow & | \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \cdot(-4/6) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 4/3 & -4/3 \end{array}\right).$$

Матрица A, так же как и матрица B, после преобразования имеет три ненулевые строки, следовательно

$$\operatorname{rang} B=\operatorname{rang} A=3.$$

Учитывая, что в системе три неизвестных, делаем вывод, что система является совместной и определенной.

Для того чтобы получить решение, запишем систему с преобразованной матрицей

$$\begin{cases} x-5y+3z=-1, \\ \quad 6y-5z=5, \\ \quad\quad \dfrac{4}{3}z=-\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Очевидно, что $z=-1$, $y=0$, $x=2$.

Задача 6.3. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} 2x_1+\ x_2+\ x_3=2, \\ x_1+3x_2+\ x_3=5, \\ x_1+\ x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу $B=(A\mid b)$:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&2\\1&3&1&5\\1&1&5&-7\\2&3&-3&14\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&5\\2&1&1&2\\1&1&5&-7\\2&3&-3&14\end{array}\right)\begin{array}{cc}\cdot(-2)&\cdot(-1)\\ \hookleftarrow & |\\ | & \hookleftarrow\\ \hookleftarrow & \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&5\\0&-5&-1&-8\\0&-2&4&-12\\0&-3&-5&4\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ \cdot(1)\\ \hookleftarrow\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&5\\0&-5&-1&-8\\0&-2&4&-12\\0&-5&-1&-8\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \cdot(-1)\\ |\\ \hookleftarrow\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&5\\0&-5&-1&-8\\0&-2&4&-12\\0&0&0&0\end{array}\right):(-2)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&5\\0&-5&-1&-8\\0&1&-2&6\\0&0&0&0\end{array}\right)\updownarrow\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&5\\0&1&-2&6\\0&-5&-1&-8\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \cdot(5)\\ \hookleftarrow\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&5\\0&1&-2&6\\0&0&-11&22\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Ранги расширенной матрицы и матрицы системы одинаковы и равны числу неизвестных:

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} B=3.$$

По теореме Кронекера–Капелли система совместна и определена.

Найдем решение системы, записав ее с преобразованной матрицей:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=5,\\ \qquad x_2-2x_3=6,\\ \qquad\quad -11x_3=22.\end{cases}$$

Получаем $x_3=-2$, $x_2=2$, $x_1=1$.

Задача 6.4. Исследовать систему по теореме Кронекера–Капелли:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу $B = (A \mid b)$ и преобразуем ее:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{cc} \cdot(-2) & \cdot(-1) \\ \hookleftarrow & | \\ & \hookleftarrow \\ & \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(1) \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

В преобразованной матрице B четыре ненулевые строки, т. е. $\operatorname{rang} B = 4$, в преобразованной матрице A – три ненулевые строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $\operatorname{rang} A = 3$. Мы получили, что $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} B$, следовательно по теореме Кронекера–Капелли система несовместна.

Задача 6.5. Исследовать и решить однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-1\\1&-3&5\\4&1&4\end{pmatrix}\updownarrow\sim\begin{pmatrix}1&-3&5\\3&4&-1\\4&1&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-3)&\cdot(-4)\\ \lrcorner & |\\ & \lrcorner\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-3&5\\0&13&-16\\0&13&-16\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ \lrcorner\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-3&5\\0&13&-16\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Здесь rang A = 2. Однородная система всегда совместна, и в нашем случае она имеет бесконечное множество решений, так как ранг системы меньше числа неизвестных.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases}x_1-\ 3x_2+\ 5x_3=0,\\ \quad\ \ 13x_2-16x_3=0.\end{cases}$$

Матрица коэффициентов при x_1 и x_2 имеет ненулевой определитель:

$$\begin{vmatrix}1&-3\\0&13\end{vmatrix}=13\neq 0,$$

поэтому переменные x_1, x_2 можно взять за базовые, а x_3 – за свободную:

$$\begin{cases}x_1-3x_2=-5x_3,\\ \quad 13x_2=16x_3.\end{cases}$$

Пусть x_3 = α, x_2 = $\dfrac{16}{13}\alpha$, $x_1=3\dfrac{16}{13}\alpha-5\alpha=\dfrac{48\alpha-65\alpha}{13}=-\dfrac{17}{13}\alpha.$

Тогда общее решение имеет вид $\left(-\dfrac{17}{13}\alpha;\dfrac{16}{13}\alpha;\alpha\right)$, где α – число.

Задача 6.6. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases}\ x_1+2x_2-\ x_3=0,\\ 2x_1+9x_2-3x_3=0.\end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы и преобразуем ее:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&9&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2)\\ \lrcorner\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&5&-1\end{pmatrix}.$$

В качестве ненулевого минора матрицы A можно выбрать минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

который соответствует переменным x_1 и x_2. Переменные x_1, x_2 будем считать базовыми переменными, а x_3 – свободной переменной. Запишем систему с преобразованной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad\ \ 5x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3, \\ \quad\ \ 5x_2 = x_3. \end{cases}$$

Если $x_3 = \alpha$, то $x_2 = \frac{1}{5}\alpha$ и $x_1 = -2x_2 + x_3 = -\frac{2}{5}\alpha + \alpha = \frac{3}{5}\alpha$. Общим решением системы будет строка $\left(\frac{3}{5}\alpha; \frac{1}{5}\alpha; \alpha\right)$, где α – число.

Задача 6.7. Решить систему и найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы и преобразуем ее:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

В матрице A в качестве ненулевого минора можно выбрать минор

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

который соответствует переменным x_1, x_2. Переменные x_1, x_2 будем считать базисными переменными, а x_3 и x_4 – свободными переменными. Запишем систему с преобразованной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ \quad\ \ 5x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3x_3 + x_4, \\ \quad\ \ x_2 = x_3 - \frac{3}{5}x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$. Тогда

$$x_2 = \alpha - \frac{3}{5}\beta,\ x_1 = 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2\alpha - \frac{6}{5}\beta - 3\alpha + \beta = -\alpha - \frac{1}{5}\beta.$$

Общим решением будет строка $\left(-\alpha - \frac{1}{5}\beta;\ \alpha - \frac{3}{5}\beta;\ \alpha;\ \beta\right)$, где α, β – числа.

Задача 6.8. Исследовать систему, найти общее решение, если оно существует, установить связь между общим решением соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\cdot(-5)\ \cdot(7) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)\cdot(2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что rang B = rang A = 3, т. е. система совместна. А поскольку rang A меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений. Найдем общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \quad 2x_3 - 4x_4 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \quad x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

В качестве свободной переменной можно выбрать x_4. Тогда матрица коэффициентов при переменных x_1, x_2, x_3 имеет отличный от нуля определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

и переменные x_1, x_2, x_3 можно выбрать базисными.

Пусть $x_4 = \alpha$. Тогда

$$x_3 = 6 + 2\alpha,\ \ x_2 = x_3 - x_4 - 3 = 6 + 2\alpha - \alpha - 3 = 3 + \alpha,$$

$$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 4 = 6 + 2\alpha - 18 - \ 6\alpha + 4\alpha + 4 = -8.$$

Общим решением системы будет строка $(-8; 3+\alpha; 6+2\alpha; \alpha)$, где α – число.

Покажем связь между общим решением неоднородной и соответствующей однородной систем:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 - \ x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - \qquad\ \ 3x_4 = 0, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

После преобразования однородная система примет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Выбрав x_4 за свободную переменную, получим

$$x_4 = \alpha,\ x_3 = 2\alpha,\ x_2 = x_3 - x_4 = \alpha,\ x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0,$$

и, значит, общим решением однородной системы будет строка $(0; \alpha; 2\alpha; \alpha)$.

В качестве частного решения неоднородной системы можно взять $e_0 = (-8; 3; 6; 0)$. Тогда общее решение неоднородной системы можно представить в виде суммы

$$(-8; 3 + \alpha; 6 + 2\alpha; \alpha) = e_0 + (0; \alpha; 2\alpha; \alpha) = (-8; 3; 6; 0) + (0; \alpha; 2\alpha; \alpha)$$

частного решения неоднородной системы $(-8; 3; 6; 0)$ и общего решения соответствующей однородной системы $(0; \alpha; 2\alpha; \alpha)$.

6.4. Примеры прикладных задач

Пример 6.1 (из химии)**.** Для уравнивания реакций в химии применяются специальные методы, но можно подойти к этому вопросу чисто математически – как к задаче на составление системы линейных уравнений.

Пусть требуется уравнять реакцию

$$KMnO_4 + H_2SO_4 + Na_2SO_3 \to MnSO_4 + Na_2SO_4 + K_2SO_4 + H_2O$$

Введем переменные:

$$x\ KMnO_4 + y\ H_2SO_4 + z\ Na_2SO_3 \to$$
$$\to k\ MnSO_4 + l\ Na_2SO_4 + m\ K_2SO_4 + n\ H_2O$$

Уравняем левую и правую части по каждому химическому элементу:

– K: $x = 2m$;
– Mn: $x = k$;
– O: $4x + 4y + 3z = 4k + 4l + 4m + n$;
– H: $2y = 2n$;
– S: $y + z = k + l + m$;
– Na: $2z = 2l$.

Мы получили семь неизвестных, связанных в систему шести однородных уравнений:

$$\begin{cases} x - 2m = 0, \\ x - k = 0, \\ 4x + 4y + 3z - 4k - 4l - 4m - n = 0, \\ y - n = 0, \\ y + z - k - l - m = 0, \\ z - l = 0. \end{cases}$$

Решим ее и убедимся, что система совместна, но не определена. Общее решение может быть записано в виде

$$x = C,\ y = \frac{3}{2}C,\ \ z = \frac{5}{2}C,\ \ k = C,\ \ l = \frac{5}{2}C,\ \ m = \frac{1}{2}C,\ \ n = \frac{3}{2}C.$$

То, что система имеет бесконечное множество решений, правильно, так как это совпадает со смыслом задачи, ведь в химической реакции все коэффициенты могут быть кратны одному числу. Но нам требуются не все решения, а только одно – целочисленное и самое простое.

Пусть $C = 2$, тогда

$$x = 2,\ y = 3,\ z = 5,\ k = 2,\ l = 5,\ m = 1,\ n = 3.$$

Таким образом, реакция записывается уравнением

$$2KMnO_4 + 3H_2SO_4 + 5Na_2SO_3 = 2MnSO_4 + 5Na_2SO_4 + K_2SO_4 + 3H_2O$$

Проверку можно сделать устно.

Если в такой задаче система уравнений оказывается несовместной, т. е. не имеет решений, то химическая реакция была составлена неправильно.

Пример 6.2 (из экономики)**.** На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	Способ I	Способ II	Способ III	Способ IV
А	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 единиц сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 94 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 574, \\ 6x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 328. \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 574 \\ 6 & 12 & 2 & 3 & 328 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 6 & -4 & -3 & -236 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 0 & 26 & 9 & 2\,080 \end{array}\right).$$

В результате имеем rang A = rang $\overline{A}$ = 3, следовательно число главных неизвестных равно трем и одна неизвестная x_4 – свободная. Тогда исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 94 - x_4, \\ -x_2 + 5x_3 = 386 - 2x_4, \\ 26x_3 = 2\,080 - 9x_4. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 80 - 9/26\ x_4$. Подставляя x_3 во второе уравнение, будем иметь: $x_2 = 14 + 7/26\ x_4$, и из первого уравнения получим: $x_1 = -\ 12/13\ x_4$. Тогда общее решение запишется в виде

$$x_1 = -\frac{12}{13}C, \quad x_2 = 14 + \frac{7}{26}C, \quad x_3 = 80 - \frac{9}{26}C, \quad x_4 = C.$$

С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т. е. она неопределенна. С учетом реального экономического содержания величины x_1 и x_4 не могут быть отрицательными. Тогда $C = 0$ и $x_1 = x_4 = 0$. Решением задачи будет частное решение системы: (0, 14, 80, 0).

Задачи для самостоятельного решения

1. Исследуйте систему на совместность и в случае совместности решите:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -3, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -12, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ -3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 20x_2 - 21x_3 = 0. \end{cases}$

2. Уравняйте реакции:

а) $FeCl_3 + K_3[Fe(CN)_6] + SnCl_2 \rightarrow KFe[Fe(CN)_6] + KCl + FeCl_2 +$ $+ SnCl_4$;

б) $K_2Cr_2O_7 + Na_2S + H_2SO_4 \rightarrow Cr_2(SO_4)_3 + H_2O + S + K_2SO_4 +$ $+ Na_2SO_4$;

в) $CrCl_3 + K_2S_2O_8 + H_2O \rightarrow K_2Cr_2O_7 + H_2SO_4 + KCl + HCl$.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте теорему Кронекера–Капелли.
2. Дайте определение расширенной матрицы системы.
3. Какие системы называются совместными?
4. Какие преимущества имеет метод Гаусса?
5. Какие системы называются однородными?
6. Может ли однородная система быть несовместной?

7. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

7.1. Определение векторного пространства

В геометрии важную роль играет понятие вектора, или направленного отрезка. Векторы можно складывать между собой и умножать на числа.

В гл. 6 мы видели, что если имеются два решения

$$\boldsymbol{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ и } \boldsymbol{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

некоторой системы линейных однородных уравнений, то их сумма

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2, \ldots\ \alpha_n + \beta_n)$$

и произведение любого из них, например e_1, на произвольное число c

$$c\boldsymbol{e}_1 = (c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$$

тоже будут решениями той же системы.

Аналогичная ситуация, когда имеется множество элементов, которые можно складывать между собой и умножать на числа, получая в результате элементы того же самого множества, встречается в математике очень часто.

Например, складывать между собой и умножать на числа можно многочлены от t с вещественными или комплексными коэффициентами степени не выше n, где n – фиксированное число, матрицы размерности $m \times n$, непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Всякий раз в результате сложения или умножения на число получаются элементы того же множества.

В качестве множества можно рассмотреть упорядоченные наборы (строки), состоящие из n чисел:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Строки можно складывать:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

и умножать на числа:

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n),$$

получая всякий раз такую же строку.

Все рассмотренные выше множества, элементы которых можно складывать и умножать на числа, получая снова элементы исходного множества, представляют собой примеры векторных пространств.

Множество V элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, называется *векторным*, или *линейным пространством*, если для любых двух его элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$

определена сумма $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$ и для каждого элемента $\boldsymbol{x}$ из V и каждого числа α определены следующие условия:

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;

2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$;

3) существует такой элемент $\mathbf{0}$ из V, называемый *нулевым*, что для всех $\boldsymbol{x}\in V$ выполняется $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$;

4) для каждого элемента $\boldsymbol{x}\in V$ существует такой элемент $(-\boldsymbol{x})$, называемый *противоположным*, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=0$;

5) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

6) $\alpha\cdot(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\cdot\boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x}\in V$ и любых чисел α и β;

7) $(\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x}\in V$ и любых чисел α и β;

8) $\alpha\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ для всех $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ и любого числа α.

Элементы векторного пространства называются *векторами.*

Числа можно рассматривать как действительные, так и комплексные. В дальнейшем мы будем рассматривать действительные числа и соответственно вещественные векторные пространства.

7.2. Простейшие свойства векторного пространства

Рассмотрим основные свойства векторного пространства.

1. Единственность нуля, т. е. элемент, удовлетворяющий условию 3 в определении векторного пространства, единственен.

Предположим противное. Пусть в пространстве V есть два элемента: $\mathbf{0}'$ и $\mathbf{0}''$, для которых выполняются равенства

$$\mathbf{0}'+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}'=\boldsymbol{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{0}''+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\mathbf{0}''=\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}\in V.$$

Тогда $\mathbf{0}'+\mathbf{0}''=\mathbf{0}'$ и $\mathbf{0}'+\mathbf{0}''=\mathbf{0}''$ и, значит, $\mathbf{0}'=\mathbf{0}''$.

2. Единственность противоположного элемента.

Предположим, что, во-первых, у вектора $\boldsymbol{x}\in V$ есть два элемента: $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{x}''\in V$, и, во-вторых, выполняются равенства

$$\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=0,$$

$$\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}''=0,$$

тогда

$$(\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}'=0+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}' \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x}'+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{x}'+0=\boldsymbol{x}'.$$

Учитывая, что $(\boldsymbol{x}''+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}''+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')$, получим $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}''$.

3. Для каждого элемента $\boldsymbol{x}\in V$ выполняется равенство $0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, где первый символ 0 обозначает число, так как он умножается на век-

тор; второй символ $\mathbf{0}$ обозначает вектор, который получается в результате умножения вектора $\boldsymbol{x}$ на число 0.

Действительно, прибавляя $(-0\boldsymbol{x})$ к обеим частям равенства

$$0\boldsymbol{x} = (0 - 0)\cdot\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} - 0\boldsymbol{x},$$

получим $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}$.

4. Для любого числа α и $\mathbf{0} \in V$ имеем $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Действительно, прибавляя $(-\mathbf{0}\alpha)$ к обеим частям равенства

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha\cdot(\mathbf{0} - \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} - \alpha\mathbf{0},$$

получим $\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0}$.

5. Если произведение $\alpha\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, то либо $\alpha = 0$, либо $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{x} = 1\cdot\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{\alpha}\cdot(\alpha\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\alpha}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

6. Для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ элемент $(-1)\boldsymbol{x}$ является противоположным к элементу $\boldsymbol{x}$.

Действительно,

$$\boldsymbol{x} + (-1)\cdot\boldsymbol{x} = 1\cdot\boldsymbol{x} + (-1)\cdot\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\cdot\boldsymbol{x} = 0\cdot\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

и, значит, $(-1)\cdot\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$, т. е. элемент (-1) является противоположным к элементу $\boldsymbol{x}$.

7.3. Линейная зависимость векторов векторного пространства

Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейного пространства V называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}.$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются *линейно независимыми.*

Приведем еще одно определение линейно зависимых векторов. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если один из векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов.

Данные определения повторяют определения линейной зависимости для строк или столбцов матрицы. Эквивалентность этих определений доказывается так же, как эквивалентность соответствующих определений линейной зависимости для строк матрицы.

Если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы в смысле первого определения и, например, $\boldsymbol{a}_k \neq 0$, то из равенства $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = 0$ следует $\boldsymbol{a}_k = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_k}\boldsymbol{a}_1 - \ldots - \dfrac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\boldsymbol{a}_k$, т. е. вектор $\boldsymbol{a}_k$ представлен в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$.

Если векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы в смысле второго определения, например $\boldsymbol{a}_k$ выражается через остальные векторы системы:

$$\boldsymbol{a}_k = \beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1},$$

то линейная комбинация $\beta_1\boldsymbol{a}_1 + \beta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1} - \boldsymbol{a}_k = 0$ имеет по крайней мере один ненулевой коэффициент (–1) при векторе $\boldsymbol{a}_k$ и данная линейная комбинация является нетривиальной и равной нулю. Значит, векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависимы согласно первому определению.

Линейно независимыми векторами на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора, линейно независимыми в пространстве являются любые три некомпланарных вектора.

7.4. Размерность и базис

Линейное пространство V называется *n-мерным*, если в нем можно найти n линейно независимых векторов, но больше чем n линейно независимых векторов оно не содержит.

Размерность пространства – это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Множество векторов на прямой имеет размерность 1, размерность множества векторов на плоскости равна 2, размерность векторов в пространстве – 3, размерность множества матриц $m \times n$ равна произведению mn. Размерность пространства многочленов степени не выше n равна $n + 1$.

Пространство, имеющее конечную размерность, называется *конечномерным.* Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется *бесконечномерным.*

Примером бесконечномерного пространства может служить множество всевозможных многочленов от одной переменной или множество C всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций одной переменной.

Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства V называется его *базисом*.

Докажем *теорему о разложении вектора по базису*.

Теорема 7.1. Каждый вектор $\boldsymbol{x}$ линейного n-мерного пространства V можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – производный базис n-мерного пространства V. Так как базис – это максимальная линейно независимая система векторов, то при добавлении к ней еще одного вектора получим линейно зависимую систему:

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x},$$

т. е. существуют такие одновременно не равные нулю числа α_1, α_2, …, α_n, α, что

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n + \alpha\boldsymbol{x} = 0.$$

Если $\alpha = 0$, то в линейной комбинации

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = 0$$

есть нулевые коэффициенты, что противоречит линейной независимости базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. К противоречию нас привело предположение $\alpha = 0$, следовательно $\alpha \neq 0$ и возможно представить вектор $\boldsymbol{x}$ как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\boldsymbol{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n.$$

Обозначим $-\dfrac{\alpha_i}{\alpha} = \boldsymbol{x}$. Тогда

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Это представление $\boldsymbol{x}$ через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ единственно, так как если

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n,$$

то, вычитая одно выражение из другого, получим

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = (x_1 - y_1)\cdot\boldsymbol{e}_1 + (x_2 - y_2)\cdot\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (x_n - y_n)\cdot\boldsymbol{e}_n = 0,$$

и ввиду линейной независимости базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ любая их линейная комбинация, равная нулю, является тривиальной, т. е. все ее коэффициенты равны нулю:

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_2 - y_2 = 0, \ \ldots, \ x_n - y_n = 0,$$

откуда

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

Теорема доказана.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из разложения вектора $\boldsymbol{x}$ называются *координатами* вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Если координаты двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ совпадают, то эти векторы одинаковы, так как тогда

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{y}.$$

Поэтому можно задавать вектор, просто указывая его координаты в определенном базисе $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots,\ x_n)$.

Заметим, что в разных базисах один и тот же вектор будет иметь разные наборы координат.

Пусть мы имеем два вектора, заданные своими координатами в некотором базисе. Тогда при сложении этих векторов их соответственные координаты складываются: если

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \text{ и } \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n,$$

то

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\cdot \boldsymbol{e}_1 + (x_2 + y_2)\cdot \boldsymbol{e}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\cdot \boldsymbol{e}_n.$$

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число: если

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + \ \ldots\ + x_n\,\boldsymbol{e}_n,$$

то $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1)\cdot \boldsymbol{e}_1 + (\alpha x_2)\cdot \boldsymbol{e}_2 + \ \ldots\ + (\alpha x_n)\cdot \boldsymbol{e}_n$.

У нулевого вектора все координаты равны нулю, а вектор $-\boldsymbol{x}$, противоположный $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, равен $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Из определения базиса n-мерного векторного пространства вытекает следующая теорема.

Теорема 7.2. Если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – линейно независимые векторы пространства V и каждый вектор $\boldsymbol{x} \in V$ линейно выражается через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то эти векторы образуют базис V.

Следствием этой теоремы будет утверждение, что пространство строк из n чисел n-мерно. Действительно, строки

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

линейно независимы и любая строка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$ линейно выражается через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, т. е. базис пространства V^n.

Пространство P_n многочленов степени не выше n имеет размерность $n + 1$. В самом деле, многочлены

$$1, t, t^2, \ldots, t^n$$

между собой линейно независимы и каждый многочлен от t степени не выше n выражается через них.

В конечномерном векторном пространстве каждое множество линейно независимых векторов можно включить в некоторый базис.

После введения нового объекта – векторного пространства – встает вопрос: а все ли векторные пространства различны или среди них есть те, которые в определенном смысле устроены одинаково?

При выборе в n-мерном пространстве V базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и по теореме о разложении вектора по базису (теореме 7.1), мы ставим вектору $\boldsymbol{x}$ во взаимно однозначное соответствие строки из координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Эти строки складываются при сложении векторов или умножаются на число при умножении вектора на число. И, значит, произвольное n-мерное пространство устроено так же, как и пространство всевозможных строк из n чисел.

Для более точного определения этой связи введем понятие изоморфизма.

Векторные пространства V и V' (оба либо вещественные, либо комплексные) называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если

$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x}', \ \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{y}',$$

где $\boldsymbol{x}$ соответствует $\boldsymbol{x}'$, а $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'$; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$; $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in V'$, то выполняются следующие соответствия:

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}'$;

2) $\alpha\boldsymbol{x} \leftrightarrow \alpha \cdot \boldsymbol{x}'$, где α – любое число.

Теорема 7.3. Для того чтобы два векторных пространства были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые размерности.

В силу этой теоремы единственной характеристикой конечномерного векторного пространства (вещественного или комплексного) является его размерность. По своей алгебраической структуре все n-мерные векторные пространства над полем или действительных, или комплексных чисел совершенно одинаковы. Следовательно, можно сказать, что n-мерное векторное пространство – это пространство всевозможных строк из n чисел.

7.5. Переход к новому базису

Пусть в пространстве R^n имеются два базиса: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$. Каждый из элементов второго базиса можно линейно выразить через векторы первого базиса:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n,\\
\boldsymbol{e}'_2 &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\boldsymbol{e}'_n &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}
$$

Можно сказать, что векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ получаются из векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ с помощью матрицы

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},
$$

причем коэффициенты разложений векторов $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ образуют столбцы этой матрицы. Матрица A называется *матрицей перехода* от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$.

Определитель матрицы A не равен нулю, так как в противном случае ее столбцы, а следовательно, и векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ были бы линейно зависимы.

Напротив, если определитель матрицы A отличен от нуля, то ее столбцы линейно независимы и, значит, векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$, получающиеся из базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ с помощью матрицы A, линейно независимы, т. е. образуют некоторый базис. Следовательно, матрицей перехода может служить любая квадратная матрица порядка n с отличным от нуля определителем.

Но как связаны между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах? Пусть

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n,$$
$$\boldsymbol{x}' = x_1'\boldsymbol{e}_1' + x_2'\boldsymbol{e}_2' + \ldots + x_n'\boldsymbol{e}_n'.$$

Подставим вместо векторов $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ их разложение по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\boldsymbol{x} = x_1' \cdot (a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n) + x_2' \cdot (a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \ldots +$$
$$+ x_n' \cdot (a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n) =$$
$$= (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n') \cdot \boldsymbol{e}_1 + (a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n') \cdot \boldsymbol{e}_2 + \ldots +$$
$$+ (a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n') \cdot \boldsymbol{e}_n.$$

Ввиду единственности разложения вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n', \\ x_2 &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n'. \end{aligned}$$

Таким образом, если мы обозначим

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

то $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$, где A – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$.

В итоге координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \ldots, \boldsymbol{e}_n'$ получаются из его координат в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ с помощью той же матрицы A, только строки этой матрицы будут образовывать коэффициенты соответствующих разложений.

7.6. Подпространства векторного пространства

Подпространством векторного пространства V называется множество V_1 его элементов, само являющееся векторным пространством относительно введенных в V операций сложения и умножения на число.

Утверждение 7.1. Множество V_1 элементов векторного пространства V является его подпространством тогда и только тогда, когда для любых двух векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ из V_1 их сумма $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ также принадлежит V_1 и для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ из V_1 и числа α вектор $\alpha\boldsymbol{x}$ лежит в V_1.

Доказательство. Если V_1 является подпространством, то очевидно, что V_1 замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число, т. е. сумма двух векторов из V_1 принадлежит V_1 и произведение вектора из V_1 на число также является вектором из V_1.

Покажем, что если для любых $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ из V_1 сумма $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$, то для любого числа α произведение $\alpha\boldsymbol{x}$ лежит в V.

Рассмотрим аксиомы определения векторного пространства:

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$;

2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$;

3) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x}\in V$;

4) $\alpha\cdot(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\cdot\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x}\in V$ и всех чисел α,β;

5) $(\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x}\in V$ и всех чисел α,β;

6) $\alpha\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$ для всех $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$ и любого числа α.

Эти аксиомы выполняются для всего пространства V и, значит, будут выполняться для элементов любого его подмножества $V_1\subset V$.

Остается показать, что для подмножества V_1 будут выполняться аксиомы 3 и 4, т. е. что нулевой элемент $\mathbf{0}$ лежит в V_1 и для любого вектора $\boldsymbol{x}\in V_1$ в подпространстве V_1 имеется и противоположный ему вектор $(-\boldsymbol{x})$. Учитывая, что если $\boldsymbol{x}\in V_1$, то для любого числа α произведение $\alpha\boldsymbol{x}\in V_1$. Возьмем $\alpha=0$, тогда $0\cdot\boldsymbol{x}\in V_1$ и, значит, $0\in V_1$. Возьмем $\alpha=-1$, тогда $(-1)\cdot\boldsymbol{x}\in V_1$, следовательно $-\boldsymbol{x}\in V_1$.

Утверждение доказано.

Рассмотрим примеры подпространств. В обычном трехмерном пространстве подпространствами будут все плоскости и все прямые, проходящие через начало координат. Подпространствами любого пространства будут само пространство V и множество, состоящее из одного нуля. В пространстве P_n многочленов степени не выше n, скажем с вещественными коэффициентами, подпространствами будут все P_k, $k<n$. Само пространство P_n будет подпространством в пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений, ранг матрицы коэффициентов которой равен r:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

И пусть в векторном пространстве R^n (пространстве строк из n чисел) зафиксирован какой-то базис. Рассмотрим каждое решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ однородной системы как вектор пространства R^n. С учетом того что сумма решений однородной системы является решением этой системы и при умножении решения на число вновь получается решение однородной системы, мы получаем, что совокупность всех решений системы является k-мерным подпространством, где $k = n - r$, в R^n, базисом которого служит любая фундаментальная система решений.

Верно и обратное утверждение.

Утверждение 7.2. Каждое подпространство векторного пространства в любом базисе определяется некоторой системой линейных однородных уравнений.

Для подпространств векторного пространства можно определить пересечение и сумму.

Пусть в векторном пространстве V есть подпространства V_1 и V_2.

Пересечением $V_1 \cap V_2 = V_3$ называется множество всевозможных векторов из V, принадлежащих одновременно V_1 и V_2.

Пересечение двух подпространств само является подпространством.

Суммой подпространств V_1 и V_2 называется множество $V_4 = V_1 + V_2$ всех векторов вида $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u} \in V_1$; $\boldsymbol{v} \in V_2$.

Сумма двух подпространств является подпространством. Действительно, если $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_4$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2$, где $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in V_1$; $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_2$. Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2),$$

где $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in V_1$ и $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V_2$, а следовательно $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V_4$.

Если α – число и $\boldsymbol{x} \in V_4$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u} \in V_1$; $\boldsymbol{v} \in V_2$, и для любого числа α с учетом того, что $\alpha\boldsymbol{u} \in V_1, \alpha\boldsymbol{v} \in V_2$, получаем

$\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{x}$ и $\alpha\boldsymbol{x}\in V_4$. Таким образом, мы показали, что V_4 является подпространством.

7.7. Собственные векторы и собственные значения

Пусть A – квадратная матрица порядка n, а вектор $\boldsymbol{x}$ принадлежит n-мерному векторному пространству.

Ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ называется *собственным вектором* матрицы A, если выполняется равенство

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$

где λ – число. При этом λ называется *собственным значением* матрицы A или линейного преобразования, заданного матрицей A.

Найдем собственный вектор и собственное значение, если задана матрица A. Предположим, что вектор $\boldsymbol{x}$, имеющий разложение $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ векторного пространства, является собственным вектором. Если матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то уравнение $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \ldots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \ldots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},$$

и, значит, перейти к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Перенесем правые части уравнений и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cdot x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) \cdot x_n = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

В результате мы получили однородную систему линейных уравнений. Как известно, однородная система имеет ненулевое решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение n-го порядка относительно переменной λ. Решая это уравнение, которое называется *характеристическим*, найдем корни λ_1, λ_2, …, λ_n, которые будут собственными числами.

Подставляя последовательно числа λ_1, λ_2, …, λ_n в систему (7.1), для каждого собственного значения получаем бесконечное множество решений, каждое ненулевое из которых можно принять за собственный вектор. Собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

В качестве примера найдем собственные значения и собственные векторы для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Запишем условие $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ имеет координаты (x_1, x_2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к системе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1, \\ 5x_1 + 4x_2 = \lambda x_2. \end{cases}$$

Перенесем правые части уравнений и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} (1-\lambda)\cdot x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + (4-\lambda)\cdot x_2 = 0. \end{cases} \qquad (7.2)$$

Система имеет ненулевые решения, если определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель и решим полученное уравнение:

$$(1-\lambda)(4-\lambda) - 10 = 0 \quad => \quad \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0.$$

Собственными числами (значениями) являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = -1$. Подставим λ_1 в систему (7.2):

$$\begin{cases} (1-(-1))x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + (4-(-1))x_2 = 0, \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнения этой системы линейно зависимы, поэтому достаточно рассмотреть первое уравнение, из которого получаем $x_2 = -x_1$. Таким образом, собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = -1$, является вектор вида (α; $-\alpha$), где α – любое отличное от нуля число. Пусть $\alpha = 1$, тогда собственный вектор будет иметь координаты (1; –1).

Теперь найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 6$. Для этого подставим λ_2 в систему (7.2):

$$\begin{cases} (1-6)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 + (4-6)x_2 = 0, \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнения этой системы также линейно зависимы. Выразим x_2 из первого уравнения:

$$x_2 = \frac{5}{2}x_1.$$

Значит, собственный вектор при $x = \alpha$ будет иметь вид $\left(\alpha; \frac{5}{2}\alpha\right)$, где α – любое число, не равное нулю. Пусть $\alpha = 2$, тогда получим вектор (2; 5).

Таким образом, сделаем вывод: в качестве собственного вектора для $\lambda_1 = -1$ можно взять вектор $\boldsymbol{x}(1; -1)$, а для $\lambda_2 = 6$ – вектор $\boldsymbol{y}(2; 5)$.

7.8. Примеры решения типовых задач

Задача 7.1. Пусть A – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ в пространстве R^3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в первом базисе, если его координаты во втором базисе $\boldsymbol{x}' = (-3, 2, 1)$; б) координаты вектора $\boldsymbol{y}'$ во втором базисе, если его координаты в первом базисе $\boldsymbol{y} = (-2, -1, 17)$.

Решение: а) найдем координаты вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix};$$

б) определим вектор $\boldsymbol{y}'$:

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{y}' \Rightarrow \boldsymbol{y}' = A^{-1}\boldsymbol{y}.$$

Найдем обратную матрицу с помощью присоединенной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -14.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -6, A_{12} = -2, A_{13} = -3,$$

$$A_{21} = 4, \; A_{22} = -8, \; A_{23} = -5,$$

$$A_{31} = 2, \; A_{32} = -4, \; A_{33} = 1.$$

Получим координаты вектора $\boldsymbol{y}'$:

$$\boldsymbol{y}' = A^{-1}\boldsymbol{y} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 \\ -2 & -8 & -4 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 17 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 42 \\ -56 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.2. Найти собственные значения и собственные векторы для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2 - \lambda)(-3 - \lambda)(-2 - \lambda) + 3 + 2(-3 - \lambda) + 5(-2 - \lambda) = 0,$$

$$(\lambda + 1)^3 = 0.$$

Собственное значение одно: $\lambda = -1$. Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению, подставив λ в систему $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2-(-1) & -1 & 2 \\ 5 & -3-(-1) & 3 \\ -1 & 0 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение системы: $x_1 = -C$, $x_2 = -C$, $x_3 = C$.

Собственный вектор: $\boldsymbol{x} = (-C, -C, C)$, где C – любое число, кроме $C = 0$.

7.9. Пример прикладной задачи

Пример 7.1 (из экономики). Рассмотрим линейную модель обмена – модель международной торговли. Пусть имеется n стран S_1, S_2, …, S_n, национальный доход которых X равен соответственно x_1, x_2, …, x_n:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим коэффициентами a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т. е. сумма в каждом столбце должна быть равна 1. Эта матрица называется *структурной матрицей торговли*.

Для любой страны S_i выручка от внутренней и внешней торговли составит

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \text{ т. е. } P = AX.$$

Для сбалансированной торговли должно выполняться условие $p_i = x_i$. Тогда $AX = X$.

Таким образом, задача сводится к нахождению собственного вектора матрицы A, соответствующего собственному значению $\lambda = 1$ (напомним, что, по определению, $AX = \lambda X$).

Например, пусть требуется найти национальные доходы трех стран для сбалансированной торговли, если дана структурная матрица торговли:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор X, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Для этого решим уравнение

$$(A - \lambda E)\cdot X = 0, \text{ т. е. } (A - E)\cdot X = 0.$$

Вычислим матрицы $A - E$ и $(A - E)\cdot X$:

$$A - E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix},$$

$$\left(A - E\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему методом Гаусса, получим:

$$x_1 = 3C/2, \quad x_2 = 2C, \quad x_3 = C.$$

Это решение означает, что сбалансированная торговля трех стран имеет место при соотношении национальных доходов 3/2 : 2 : 1 или 3 : 4 : 2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть A – матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, ..., \boldsymbol{e}'_n$ в пространстве R^3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите: а) координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в первом базисе, если во втором базисе его координаты $\boldsymbol{x}' = (2, 1, 3)$; б) координаты вектора $\boldsymbol{y}'$ во втором базисе, если в первом его координаты $\boldsymbol{y} = (2, -3, -4)$.

2. Найдите собственные значения и собственные векторы для матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение линейного пространства.
2. Какие векторы являются линейно зависимыми?
3. Охарактеризуйте размерность линейного пространства.
4. Дайте определение базиса.
5. Какие пространства называются изоморфными?
6. Каким образом записывается переход к новому базису?
7. Дайте определение подпространства.
8. Из какого уравнения определяются собственные значения и собственные векторы?
9. Сколько собственных векторов соответствует одному собственному значению матрицы?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Для заданных матриц A и B найти: $A\cdot B$, $B\cdot A$, $f(BA)$.

$$A=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}8 & 5 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{pmatrix},\quad f(x)=x^2-7x+15.$$

Решение. Найдем произведения $A\cdot B$, $B\cdot A$.

Чтобы найти произведение матриц A и B, нужно умножить элементы строки матрицы A на соответствующие элементы столбца матрицы B, просуммировать и результат записать в позицию с теми же номерами строки и столбца. Например, возьмем первую строку и первый столбец:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\boxed{-7 \quad 0}\\ 2 \quad 3\\ 1 \quad -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}8\\ 6\end{matrix}} & \begin{matrix}5\\ -1\end{matrix} & \begin{matrix}-2\\ 4\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\cdot 8+0\cdot 6 & - & -\\ - & - & -\\ - & - & -\end{pmatrix}.$$

Затем ту же строку умножим на второй столбец, результат запишем на позицию (1, 2), т. е. в первую строку и второй столбец:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\boxed{-7 \quad 0}\\ 2 \quad 3\\ 1 \quad -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\begin{matrix}8\\ 6\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}5\\ -1\end{matrix}} & \begin{matrix}-2\\ 4\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\cdot 8+0\cdot 6 & -7\cdot 5+0\cdot(-1) & -\\ - & - & -\\ - & - & -\end{pmatrix}.$$

И так далее по всем строкам матрицы A и столбцам матрицы B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 5 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7\cdot 8+0\cdot 6 & -7\cdot 5+0\cdot(-1) & -7\cdot(-2)+0\cdot 4\\ 2\cdot 8+3\cdot 6 & 2\cdot 5+3\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+3\cdot 4\\ 1\cdot 8+(-4)\cdot 6 & 1\cdot 5+(-4)\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+(-4)\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-56+0 & -35+0 & 14+0\\ 16+18 & 10-3 & -4+12\\ 8-24 & 5+4 & -2-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-56 & -35 & 14\\ 34 & 7 & 8\\ -16 & 9 & -18\end{pmatrix}.$$

Аналогично найдем произведение BA, но теперь берем строки матрицы B и столбцы матрицы A:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \boxed{8 \quad 5 \quad -2} \\ 6 \quad -1 \quad 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8\cdot(-7)+5\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 8\cdot 0+5\cdot 3+(-2)\cdot(-4) \\ 6\cdot(-7)+(-1)\cdot 2+4\cdot 1 & 6\cdot 0+(-1)\cdot 3+4\cdot(-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -56+10-2 & 0+15+8 \\ -42-2+4 & 0-3-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 23 \\ -40 & -19 \end{pmatrix}.$$

Примечание. Обратим внимание на то, что $A \cdot B \neq B \cdot A$, т. е. мы получили не только разные элементы, но и разные размеры матриц: в одном случае матрица 3×3, а в другом – 2×2. Таким образом, *для матриц важен порядок множителей, их нельзя менять местами!* В некоторых случаях при перестановке множителей произведение просто невозможно, так как количество элементов в строке первой матрицы не будет совпадать с количеством элементов в столбце второй.

Найдем $f(BA)$.

Запись $f(BA)$ означает, что мы должны вычислить значение функции $f(x)$ при $x = BA$, т. е. подставить в функцию вместо x произведение матриц BA:

$$f(x) = x^2 - 7x + 15 \;=>\; f(BA) = (BA)^2 - 7\cdot(BA) + 15.$$

Выполним вычисления по действиям. Возведение матрицы во вторую степень означает умножение матрицы на себя (это возможно только в случае если она квадратная):

$$(BA)^2 = \begin{pmatrix} -48 & 23 \\ -40 & -19 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -48 & 23 \\ -40 & -19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -48 & 23 \\ -40 & -19 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -48\cdot(-48)+23\cdot(-40) & -48\cdot 23+23\cdot(-19) \\ -40\cdot(-48)+(-19)\cdot(-40) & -40\cdot 23+(-19)\cdot(-19) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\,304-920 & -1104-437 \\ 1\,920+760 & -920+361 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,384 & -1\,541 \\ 2\,680 & -559 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число выполняется умножением всех элементов матрицы на это число:

$$-7\cdot(BA)=-7\cdot\begin{pmatrix}-48 & 23\\ -40 & -19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\cdot(-48) & -7\cdot 23\\ -7\cdot(-40) & -7\cdot(-19)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}336 & -161\\ 280 & 133\end{pmatrix}.$$

Сумма матриц вычисляется сложением соответствующих элементов, поэтому матрицы должны быть только одинаковых порядков:

$$(BA)^2-7(BA)=(BA)^2+(-7\cdot BA)=\begin{pmatrix}1\,384 & -1\,541\\ 2\,680 & -559\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}336 & -161\\ 280 & 133\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\,384+336 & -1\,541-161\\ 2\,680+280 & -559+133\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,720 & -1\,702\\ 2\,960 & -426\end{pmatrix}.$$

Теперь к полученной матрице нужно прибавить 15. Для этого число 15 умножим на единичную матрицу $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, а затем найдем сумму матриц:

$$(BA)^2-7\cdot(BA)+15=(BA)^2-7\cdot(BA)+15\cdot E=$$

$$=\begin{pmatrix}1\,720 & -1\,702\\ 2\,960 & -426\end{pmatrix}+15\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,720 & -1\,702\\ 2\,960 & -426\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & 15\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\,720+15 & -1\,702+0\\ 2\,960+0 & -426+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,735 & -1\,702\\ 2\,960 & -411\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта операция возможна только если матрица квадратная, так как единичные матрицы не могут быть прямоугольными.

При оформлении контрольных заданий теоретические пояснения можно опустить (в данном учебном пособии они приведены для лучшего понимания), записывать необходимо только основные вычислительные этапы.

Пример оформления решения:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8 & 5 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7\cdot 8+0\cdot 6 & -7\cdot 5+0\cdot(-1) & -7\cdot(-2)+0\cdot 4\\ 2\cdot 8+3\cdot 6 & 2\cdot 5+3\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+3\cdot 4\\ 1\cdot 8+(-4)\cdot 6 & 1\cdot 5+(-4)\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+(-4)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-56 & -35 & 14\\ 34 & 7 & 8\\ -16 & 9 & -18\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}8 & 5 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8\cdot(-7)+5\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 8\cdot 0+5\cdot 3+(-2)\cdot(-4)\\ 6\cdot(-7)+(-1)\cdot 2+4\cdot 1 & 6\cdot 0+(-1)\cdot 3+4\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-48 & 23\\ -40 & -19\end{pmatrix};$$

$$f(BA)=(BA)^2-7\cdot(BA)+15,$$

$$(BA)^2=\begin{pmatrix}-48 & 23\\ -40 & -19\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 23\\ -40 & -19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,384 & -1\,541\\ 2\,680 & -559\end{pmatrix},$$

$$-7\cdot(BA)=-7\cdot\begin{pmatrix}-48 & 23\\ -40 & -19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}336 & -161\\ 280 & 133\end{pmatrix},$$

$$(BA)^2-7\cdot(BA)=\begin{pmatrix}1\,384 & -1\,541\\ 2\,680 & -559\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}336 & -161\\ 280 & 133\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,720 & -1\,702\\ 2\,960 & -426\end{pmatrix},$$

$$f(BA)=(BA)^2-7\cdot(BA)+15=(BA)^2-7\cdot(BA)+15\cdot E=$$

$$=\begin{pmatrix}1\,720 & -1\,702\\ 2\,960 & -426\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,735 & -1\,702\\ 2\,960 & -411\end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}-56 & -35 & 14\\ 34 & 7 & 8\\ -16 & 9 & -18\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}-48 & 23\\ -40 & -19\end{pmatrix}$; $f(BA)=\begin{pmatrix}1\,735 & -1\,702\\ 2\,960 & -411\end{pmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix}17 & -10\\ 9 & -8\end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix}3 & -5 & 6\\ 8 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -7\end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & a \\ 4 & 5 & -2 & b \\ 0 & 1 & 6 & c \\ -3 & 7 & -4 & d \end{vmatrix};$$

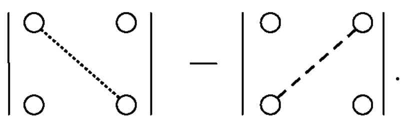
г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ -1 & -4 & -10 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 14 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix}.$$

Решение: а) определитель второго порядка вычислим по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

т. е. как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали по схеме:



Применим эту схему к заданному определителю:

$$\begin{vmatrix} 17 & -10 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = 17\cdot(-8) - 9\cdot(-10) = -136 + 90 = -46.$$

Пример оформления решения:

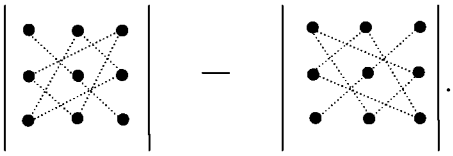
$$\begin{vmatrix} 17 & -10 \\ 9 & -8 \end{vmatrix} = 17\cdot(-8) - 9\cdot(-10) = -136 + 90 = -46;$$

б) определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Чтобы не заучивать эту формулу, используем правило Саррюса, которое можно изобразить схематически:



Вычислим определитель по этой схеме:

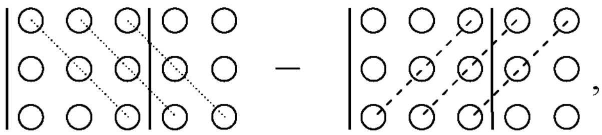
$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot(-7)+(-5)\cdot 1\cdot 0+6\cdot 8\cdot 4-6\cdot 2\cdot 0-3\cdot 1\cdot 4-5\cdot 8\cdot(-7)=$$

$$=-42+0+192-0-12-280=-142.$$

Правило Саррюса можно представить и иначе: припишем справа от определителя первый и второй столбцы:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -5 & 6 & 3 & -5 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & 4 \end{array}\right. ,$$

а затем умножим элементы по диагоналям:



откуда получим

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -5 & 6 & 3 & -5 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & 4 \end{array}\right. = 3\cdot 2\cdot(-7)+(-5)\cdot 1\cdot 0+6\cdot 8\cdot 4-$$

$$-6\cdot 2\cdot 0-3\cdot 1\cdot 4-5\cdot 8\cdot(-7)=-142.$$

Как видим, результат получается тот же. Какой схемой вычисления пользоваться, значения не имеет, выбирайте ту, которая кажется более наглядной.

Пример оформления решения:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -5 & 6 & 3 & -5 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & 4 \end{array}\right. = 3\cdot 2\cdot(-7)+(-5)\cdot 1\cdot 0+6\cdot 8\cdot 4-$$

$$-6\cdot2\cdot0-3\cdot1\cdot4-5\cdot8\cdot\left(-7\right)=-42+0+192-0-12-280=-142,$$

или

$$\begin{vmatrix}3&-5&6\\8&2&1\\0&4&-7\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-5\\8&2\\0&4\end{matrix}=3\cdot2\cdot\left(-7\right)+\left(-5\right)\cdot1\cdot0+6\cdot8\cdot4-6\cdot2\cdot0-$$

$$-3\cdot1\cdot4-5\cdot8\cdot\left(-7\right)=-42+0+192-0-12-280=-142;$$

в) разложим определитель по i-й строке в общем виде:

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}.$$

Поясним эту формулу: каждый элемент a_{ij} строки умножается на свое алгебраическое дополнение A_{ij} и полученные произведения суммируются. Такое разложение можно делать по любой строке или по любому столбцу. В этом задании разложение делается по четвертому столбцу, т. е. элементы a, b, c, d домножаются на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix}2&-1&3&a\\4&5&-2&b\\0&1&6&c\\-3&7&-4&d\end{vmatrix}=a\cdot A_{14}+b\cdot A_{24}+c\cdot A_{34}+d\cdot A_{44}.$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} – это определитель, который получается после вычеркивания i-й строки и j-го столбца, на которых находится элемент, и умножения на $(-1)^{i+j}$. Таким образом, чтобы найти алгебраическое дополнение A_{14} для элемента a, вычеркнем первую строку и четвертый столбец и полученный определитель умножим на $(-1)^{1+4}$:

$$A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}2&-1&3&a\\4&5&-2&b\\0&1&6&c\\-3&7&-4&d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&5&-2\\0&1&6\\-3&7&-4\end{vmatrix}=280.$$

Получившийся определитель третьего порядка вычисляется по любой удобной схеме: по правилу Саррюса, как в предыдущем примере, или снова разложением по строке или столбцу. Аналогично для элементов b, c, d:

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & a\\ 4 & 5 & -2 & b\\ 0 & 1 & 6 & c\\ -3 & 7 & -4 & d\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 6\\ -3 & 7 & -4\end{vmatrix}=-65,$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & a\\ 4 & 5 & -2 & b\\ 0 & 1 & 6 & c\\ -3 & 7 & -4 & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & -2\\ -3 & 7 & -4\end{vmatrix}=-95,$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & a\\ 4 & 5 & -2 & b\\ 0 & 1 & 6 & c\\ -3 & 7 & -4 & d\end{vmatrix}=+\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 6\end{vmatrix}=100.$$

Запишем разложение определителя по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & a\\ 4 & 5 & -2 & b\\ 0 & 1 & 6 & c\\ -3 & 7 & -4 & d\end{vmatrix}=a\cdot A_{14}+b\cdot A_{24}+c\cdot A_{34}+d\cdot A_{44}=$$

$$=a\cdot 280+b\cdot(-65)+c\cdot(-95)+d\cdot 100=280a-65b-95c+100d.$$

Пример оформления решения:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & a\\ 4 & 5 & -2 & b\\ 0 & 1 & 6 & c\\ -3 & 7 & -4 & d\end{vmatrix}=a\cdot A_{14}+b\cdot A_{24}+c\cdot A_{34}+d\cdot A_{44},$$

$$A_{14}=(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5 & -2\\ 0 & 1 & 6\\ -3 & 7 & -4\end{vmatrix}=-\left(-16-90+0-6-168-0\right)=280,$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 6\\ -3 & 7 & -4\end{vmatrix}=-8+18+9-84=-65,$$

$$A_{34}=(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&5&-2\\-3&7&-4\end{vmatrix}=-\left(-40-6+84+45+28-16\right)=-95,$$

$$A_{44}=(-1)^{4+4}\cdot\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&5&-2\\0&1&6\end{vmatrix}=60+12+4+24=100,$$

$$\begin{vmatrix}2&-1&3&a\\4&5&-2&b\\0&1&6&c\\-3&7&-4&d\end{vmatrix}=280a-65b-95c+100d,$$

или

$$\begin{vmatrix}2&-1&3&a\\4&5&-2&b\\0&1&6&c\\-3&7&-4&d\end{vmatrix}=-a\cdot\begin{vmatrix}4&5&-2\\0&1&6\\-3&7&-4\end{vmatrix}+b\cdot\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&1&6\\-3&7&-4\end{vmatrix}-$$

$$-c\cdot\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&5&-2\\-3&7&-4\end{vmatrix}+d\cdot\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&5&-2\\0&1&6\end{vmatrix}=$$

$$=-a\left(-16-90+0-6-168-0\right)+b\left(-8+18+9-84\right)-$$

$$-c\left(-40-6+84+45+28-16\right)+d\left(60+12+4+24\right)=$$

$$=280a-65b-95c+100d.$$

Примечание. Обратим внимание на то, что множитель $(-1)^{i+j}$ отвечает только за знаки перед определителем, которые просто чередуются: для A_{14} был минус, для A_{24} – плюс, для A_{34} – минус, для A_{44} – плюс. Поэтому можно не вычислять каждый раз $(-1)^{i+j}$, а помнить, что *знаки алгебраических дополнений меняются в шахматном порядке*, всегда начиная с плюса:

$$\begin{vmatrix}+&-&+&-&\ldots\\-&+&-&+&\ldots\\+&-&+&-&\ldots\\-&+&-&+&\ldots\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\end{vmatrix},$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} 2^{+} & -1^{-} & 3^{+} & a^{-} \\ 4^{-} & 5^{+} & -2^{-} & b^{+} \\ 0^{+} & 1^{-} & 6^{+} & c^{-} \\ -3^{-} & 7^{+} & -4^{-} & d^{+} \end{vmatrix}.$$

Приведем различные разложения, например по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2^{+} & -1^{-} & 3^{+} & a^{-} \\ 4 & 5 & -2 & b \\ 0 & 1 & 6 & c \\ -3 & 7 & -4 & d \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 & b \\ 1 & 6 & c \\ 7 & -4 & d \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 & b \\ 0 & 6 & c \\ -3 & -4 & d \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & c \\ -3 & 7 & d \end{vmatrix} - a\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -3 & 7 & -4 \end{vmatrix};$$

по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3^{+} & a \\ 4 & 5 & -2^{-} & b \\ 0 & 1 & 6^{+} & c \\ -3 & 7 & -4^{-} & d \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & c \\ -3 & 7 & d \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & c \\ -3 & 7 & d \end{vmatrix} +$$

$$+6\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 4 & 5 & b \\ -3 & 7 & d \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 4 & 5 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}.$$

Но каким бы разложением мы не воспользовались, результат всегда будет одинаковым;

г) приведем определитель к треугольному виду, т. е. обнулим все элементы с одной стороны от диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Добиваться этого будем, используя следующие свойства определителя:

– определитель не меняется, если к элементам одной строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на некоторое число;

– определитель меняет знак, если две строки (или столбца) поменять местами;

– множитель, общий для элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.

Обнулять элементы следует не хаотично, а последовательно. Начнем с первого столбца. Первый элемент $a_{11} = 1$ пусть останется нетронутым. С его помощью будем обнулять элементы, стоящие ниже в том же столбце:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ -1 & -4 & -10 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 14 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix}.$$

Чтобы во второй строке на первом месте вместо (–1) получить ноль, прибавим к этой строке первую строчку, т. е. к каждому элементу второй строки прибавим соответствующий элемент первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ -1 & -4 & -10 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 14 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ -1+1 & -4+3 & -10+7 & -3+8 \\ 1 & -2 & 2 & 14 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 14 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix}.$$

Чтобы в третьей строке получить ноль, прибавим к ней первую строку, домноженную на (–1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 14 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix} \cdot(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 1-1 & -2-3 & 2-7 & 14-8 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (–2) и прибавим к четвертой:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix}\begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \\ 2-2 & 6-6 & 14-14 & 20-16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Первый столбец приведен к нужному виду.

Теперь обнулим элементы, стоящие во втором столбце ниже элемента $a_{22} = -1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 & 6 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Сделать элемент a_{32} равным нулю можно двумя способами: либо прибавить к третьей строке вторую, домноженную на (–5), либо прибавить ко второму столбцу третий, домноженный на (–1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot(-5) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix},$$

или

$$\begin{array}{c} \qquad\quad (-1) \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

В любом случае мы получаем треугольный вид. Тогда определитель равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 10\cdot 4 = -40,$$

либо

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-5)\cdot 4 = -40.$$

Каким бы способом мы ни вычисляли определитель: разложением по строке или столбцу либо приведением к треугольному виду, результат всегда будет одинаковым (если, конечно, не сделано арифметических ошибок).

Пример оформления решения:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ -1 & -4 & -10 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 14 \\ 2 & 6 & 14 & 20 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & \cdot(-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot(-5) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 10\cdot 4 = -40.$$

Задание 3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

Решение. Обратную матрицу будем вычислять по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\left(A^*\right)^T.$$

Выполним по действиям. Найдем определитель Δ матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 6\cdot 2 + 0\cdot(-1)\cdot 4 + (-3)\cdot 5\cdot 1 - (-3)\cdot 6\cdot 4 -$$

$$-(-2)\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot 5\cdot 2 = -24 + 0 - 15 + 72 - 2 - 0 = 31.$$

Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы как в задании 2в (напомним, что алгебраическое дополнение – это определитель, получающийся в результате вычеркивания строки и столбца, на которых стоит элемент, взятый со знаком «плюс» или «минус» (знаки чередуются в шахматном порядке):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -\left(5 \cdot 2 - (-1) \cdot 4\right) = -14,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 6 \cdot 4 = -19,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\left(0 \cdot 2 - (-3) \cdot 1\right) = -3,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 8,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -\left((-2) \cdot 1 - 0 \cdot 4\right) = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - (-3) \cdot 6 = 18$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -\left((-2) \cdot (-1) - (-3) \cdot 5\right) = -17,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 6 - 0 \cdot 5 = -12.$$

Составим присоединенную матрицу A^*, в которой каждый элемент заменяется на его алгебраическое дополнение:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -14 & -19 \\ -3 & 8 & 2 \\ 18 & -17 & -12 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу A^*, т. е. поменяем строки и столбцы местами:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 18 \\ -14 & 8 & -17 \\ -19 & 2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\left(A^*\right)^T = \frac{1}{31}\cdot\begin{pmatrix} 13 & -3 & 18 \\ -14 & 8 & -17 \\ -19 & 2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{31} & -\frac{3}{31} & \frac{18}{31} \\ -\frac{14}{31} & \frac{8}{31} & -\frac{17}{31} \\ -\frac{19}{31} & \frac{2}{31} & -\frac{12}{31} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} – это такая матрица, для которой $A^{-1}\cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица. Это определение позволяет сделать проверку:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{31}\cdot\begin{pmatrix} 13 & -3 & 18 \\ -14 & 8 & -17 \\ -19 & 2 & -12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{31}\cdot\begin{pmatrix} 13\cdot(-2)+(-3)\cdot 5+18\cdot 4 & 13\cdot 0+(-3)\cdot 6+18\cdot 1 & 13\cdot(-3)+(-3)\cdot(-1)+18\cdot 2 \\ -14\cdot(-2)+8\cdot 5+(-17)\cdot 4 & -14\cdot 0+8\cdot 6+(-17)\cdot 1 & -14\cdot(-3)+8\cdot(-1)+(-17)\cdot 2 \\ -19\cdot(-2)+2\cdot 5+(-12)\cdot 4 & -19\cdot 0+2\cdot 6+(-12)\cdot 1 & -19\cdot(-3)+2\cdot(-1)+(-12)\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{31}\cdot\begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно.

При оформлении решения можно опустить словесные пояснения, но следует привести все вычислительные этапы и сделать проверку.

Задание 4. Решить матричное уравнение либо для случая 1:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix};$$

либо для случая 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -26 & 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. Случай 1. Запишем матричное уравнение в виде

$$X \cdot A = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Чтобы выразить X, умножим уравнение на обратную матрицу A^{-1} справа:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \quad => \quad X \cdot E = B \cdot A^{-1} \quad => \quad X = B \cdot A^{-1}.$$

Таким образом, для решения матричного уравнения требуется найти обратную матрицу A^{-1}. Сделаем это как в задании 3:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A^*\right)^T.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -2.$$

Получим матрицу A^*, состоящую из алгебраических дополнений:

$$A_{11} = |-1| = -1, \quad A_{12} = -|1| = -1,$$
$$A_{21} = -|2| = -2, \quad A_{22} = |0| = 0$$

(прямые скобки здесь означают не модуль, а определитель),

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем эту матрицу, т. е. поменяем строки и столбцы местами:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A^*\right)^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы намеренно не умножаем матрицу на ($-1/2$), чтобы облегчить дальнейшие вычисления. Теперь найдем решение матричного уравнения:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+12\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+12\cdot 0 \\ 1\cdot(-1)+9\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+9\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедиться, что решение верно, очень легко: нужно подставить в исходное уравнение найденную матрицу X.

Выполним проверку:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 0+2\cdot 1 & 7\cdot 2+2\cdot(-1) \\ 5\cdot 0+1\cdot 1 & 5\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Мы получили такую же матрицу, как и в левой части уравнения, следовательно решение верно.

Пример оформления решения:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$X \cdot A = B \;\; => \;\; X = B \cdot A^{-1}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1) - 2\cdot 1 = -2,$$

$$A_{11} = |-1| = -1, \quad A_{12} = -|1| = -1, \quad A_{21} = -|2| = -2, \quad A_{22} = |0| = 0,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A^*\right)^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+12\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+12\cdot 0 \\ 1\cdot(-1)+9\cdot(-1) & 1\cdot(-2)+9\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7\cdot 0+2\cdot 1 & 7\cdot 2+2\cdot(-1) \\ 5\cdot 0+1\cdot 1 & 5\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Случай 2. Запишем матричное уравнение в буквенном виде:

$$A \cdot X = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -26 & 15 \end{pmatrix}.$$

Чтобы выразить X, умножим уравнение на обратную матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;=>\; E \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad => \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким образом, для решения матричного уравнения требуется найти обратную матрицу A^{-1}. Сделаем это как в задании 3:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A^*\right)^T.$$

Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - 1\cdot 3 = -11.$$

Получим матрицу A^*, состоящую из алгебраических дополнений:

$$A_{11} = |-4| = -4, \quad A_{12} = -|3| = -3,$$

$$A_{21} = -|1| = -1, \quad A_{22} = |2| = 2$$

(прямые скобки здесь означают не модуль, а определитель),

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем эту матрицу, т. е. поменяем строки и столбцы местами:

$$\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\left(A^*\right)^T=\frac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

Здесь мы намеренно не умножаем матрицу на $(-1/11)$, чтобы облегчить дальнейшие вычисления. Теперь найдем решение матричного уравнения:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -26 & 15\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix}-4\cdot1+(-1)\cdot(-26) & -4\cdot(-1)+(-1)\cdot15\\ -3\cdot1+2\cdot(-26) & -3\cdot(-1)+2\cdot15\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}22 & -11\\ -55 & 33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

Убедиться, что решение верно, очень легко: для этого нужно подставить в исходное уравнение найденную матрицу X. Выполним проверку:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot(-2)+1\cdot5 & 2\cdot1+1\cdot(-3)\\ 3\cdot(-2)+(-4)\cdot5 & 3\cdot1+(-4)\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -26 & 15\end{pmatrix}.$$

Мы получили такую же матрицу, как и в левой части уравнения, следовательно решение верно.

Пример оформления решения:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -26 & 15\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot X=B\ \Rightarrow\ X=A^{-1}\cdot B.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}=2\cdot(-4)-1\cdot3=-11,$$

$$A_{11}=\left|-4\right|=-4,\quad A_{12}=-\left|3\right|=-3,\quad A_{21}=-\left|1\right|=-1,\quad A_{22}=\left|2\right|=2,$$

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} => \left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\left(A^*\right)^T=\frac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -26 & 15 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-11}\cdot\begin{pmatrix} -4\cdot 1+(-1)\cdot(-26) & -4\cdot(-1)+(-1)\cdot 15 \\ -3\cdot 1+2\cdot(-26) & -3\cdot(-1)+2\cdot 15 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix} 22 & -11 \\ -55 & 33 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+1\cdot 5 & 2\cdot 1+1\cdot(-3) \\ 3\cdot(-2)+(-4)\cdot 5 & 3\cdot 1+(-4)\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -26 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$

Задание 5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Ранг матрицы – порядок наибольшего минора, отличного от нуля. Минор получается так: выбираем в матрице любые k строк и любые k столбцов, те элементы, которые оказались на пересечении этих строк и столбцов, записываем в определитель. Например, для данной матрицы возьмем первую строку и третий столбец:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

на пересечении получим минор первого порядка |7| = 7, на пересечении первой строки и второго столбца

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

минор первого порядка |0| = 0. Таких миноров будет столько, сколько элементов, т. е. 12.

Приведем пример минора второго порядка: возьмем вторую и третью строки, первый и третий столбцы:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

на пересечении получим минор второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 0.$$

Или другой пример:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0 - 0 \cdot 3 = 0.$$

Для этой матрицы существует 18 миноров второго порядка.

Для составления миноров третьего порядка мы должны взять три строки и три столбца, например:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Нетрудно увидеть, что таких миноров может быть четыре. В нашем случае миноры могут быть первого, второго или третьего порядков.

Миноров большего порядка не существует, так как матрица имеет только три строки.

В решении не требуется выписывать все миноры, для нахождения ранга нам нужен самый большой неравный нулю минор. Самые большие миноры для нашей матрицы имеют третий порядок, но все они равны нулю, так как содержат нулевую строку:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

А среди миноров второго порядка можно найти минор, отличный от нуля, взяв те строки и столбцы, на которых стоят ненулевые элементы:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 7 \cdot 3 = -15.$$

Мы получили, что самый большой отличный от нуля минор – это минор второго порядка. Итак, ранг матрицы равен двум.

Пример оформления решения:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все миноры третьего порядка содержат нулевую строку и равны нулю. Наибольший отличный от нуля минор

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 7 \cdot 3 = -15 \neq 0$$

имеет порядок, равный двум.

Ответ: $\operatorname{rang} A = 2$.

Задание 6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 = -4, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -11 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

Решение. Запишем систему как матричное уравнение:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$.

Поясним это. Действительно, если умножить A на X по правилу умножения матриц (строка на столбец (см. задание 1), то получим

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ -1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице элементы строк совпадают с левыми частями уравнений системы, а в правых частях уравнений стоят числа 1, –4, –11, т. е. элементы матрицы B. Следовательно, $A \cdot X = B$;

а) матричный метод. Так как система представляется матричным уравнением, то, решая это уравнение, получим решение системы. Матричное уравнение будем решать аналогично заданию 4.

Домножим уравнение слева на матрицу A^{-1}, обратную к матрице A:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Следовательно, чтобы найти X, сначала нужно вычислить обратную матрицу A^{-1} (сделаем так же, как в задании 3):

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A^*\right)^T.$$

Найдем определитель Δ матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$- 2 \cdot 8 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) =$$

$$= -8 - 9 + 12 + 16 - 9 + 6 = 8.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то матрица A^{-1} существует и матричный метод может быть применен.

Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы (напомним, что алгебраическое дополнение – это определитель, получающийся в результате вычеркивания строки и столбца, на которых стоит элемент, взятый со знаком «плюс» или «минус» (знаки чередуются в шахматном порядке):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = -17,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\big(2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3\big) = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 8 \cdot (-1) = 14,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\big(3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3\big) = 9,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = 1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -\big(1 \cdot 3 - 3 \cdot (-1)\big) = -6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 8 = -7,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\big(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2\big) = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 2.$$

Составим присоединенную матрицу A^*, в которой каждый элемент заменяется на его алгебраическое дополнение:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -1 & 14 \\ 9 & 1 & -6 \\ -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу A^*, т. е. поменяем строки и столбцы местами:

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -17 & 9 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A^*\right)^T = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 9 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу умножать на 1/8 пока не будем, сделаем это позже.

Решение матричного уравнения:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 9 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 14 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} (-17) \cdot 1 + 9 \cdot (-4) + (-7) \cdot (-11) \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-11) \\ 14 \cdot 1 + (-6) \cdot (-4) + 2 \cdot (-11) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -17 - 36 + 77 \\ -1 - 4 - 11 \\ 14 + 24 - 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Мы получили решение системы: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. Проверку можно сделать, подставив найденные значения в систему на место неизвестных:

$$\begin{cases} 3 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 1, \\ 2 \cdot 3 + 8 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = -4, \\ -3 + 3 \cdot (-2) - 2 = -11. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1, \\ -4 = -4, \\ -11 = -11. \end{cases}$$

Мы получили тождества, следовательно решение найдено верно.

Пример оформления решения:

$$A \cdot X = B \ \Rightarrow \ X = A^{-1} \cdot B.$$

Вычислим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(A^*\right)^T .$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 \cdot \left(-1\right) + 3 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$- 2 \cdot 8 \cdot \left(-1\right) - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) =$$

$$= -8 - 9 + 12 + 16 - 9 + 6 = 8.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \left(-1\right) - 3 \cdot 3 = -17,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\left(2 \cdot (-1) - \left(-1\right) \cdot 3\right) = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 8 \cdot \left(-1\right) = 14,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\left(3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3\right) = 9,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(-1\right) - 2 \cdot (-1) = 1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -\left(1 \cdot 3 - 3 \cdot \left(-1\right)\right) = -6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 8 = -7,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\left(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2\right) = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 3 \cdot 2 = 2,$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -1 & 14 \\ 9 & 1 & -6 \\ -7 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix}-17 & 9 & -7\\ -1 & 1 & 1\\ 14 & -6 & 2\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\left(A^*\right)^T=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-17 & 9 & -7\\ -1 & 1 & 1\\ 14 & -6 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-17 & 9 & -7\\ -1 & 1 & 1\\ 14 & -6 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -4\\ -11\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}(-17)\cdot 1+9\cdot(-4)+(-7)\cdot(-11)\\ (-1)\cdot 1+1\cdot(-4)+1\cdot(-11)\\ 14\cdot 1+(-6)\cdot(-4)+2\cdot(-11)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}-17-36+77\\ -1-4-11\\ 14+24-22\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}24\\ -16\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 2\end{pmatrix}.$$

Проверка: $\begin{cases}3+3\cdot(-2)+2\cdot 2=1,\\ 2\cdot 3+8\cdot(-2)+3\cdot 2=-4,\\ -3+3\cdot(-2)-2=-11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=1,\\ -4=-4,\\ -11=-11.\end{cases}$

Ответ: $x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=2$;

б) метод Крамера. Формулы Крамера выводятся из матричного метода и имеют вид

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

или для системы с тремя неизвестными:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель основной матрицы системы. Поэтому понятно, что формулы Крамера, как и матричный метод, применяются только к квадратным системам (прямоугольных определителей не бывает!) и только при $\Delta \neq 0$ (иначе пришлось бы делить на ноль).

Определитель Δ мы уже вычисляли в предыдущем пункте:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 8\cdot(-1) + 3\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot 3 -$$

$$-2\cdot 8\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot(-1) =$$

$$= -8 - 9 + 12 + 16 - 9 + 6 = 8.$$

Определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются из Δ заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов, т. е. для того чтобы составить определитель Δ_1, нужно взять определитель основной матрицы системы Δ и заменить первый столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ на столбец $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 8 & 3 \\ -11 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 8\cdot(-1) + 3\cdot 3\cdot(-11) + 2\cdot(-4)\cdot 3 -$$

$$-2\cdot 8\cdot(-11) - 1\cdot 3\cdot 3 - 3\cdot(-4)\cdot(-1) =$$

$$= -8 - 99 - 24 + 176 - 9 - 12 = 24.$$

Аналогично заменяются второй и третий столбцы в определителях Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & -11 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 2\cdot(-11) -$$

$$-2\cdot(-4)\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot(-11) - 1\cdot 2\cdot(-1) =$$

$$= 4 - 3 - 44 - 8 + 33 + 2 = -16,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 8 & -4\\ -1 & 3 & -11\end{vmatrix}=1\cdot 8\cdot(-11)+3\cdot(-4)\cdot(-1)+1\cdot 2\cdot 3-$$

$$-1\cdot 8\cdot(-1)-1\cdot(-4)\cdot 3-3\cdot 2\cdot(-11)=$$

$$=-88+12+6+8+12+66=16.$$

Подставим найденные значения в формулы Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{24}{8}=3,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-16}{8}=-2,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{16}{8}=2.$$

Получим решение системы: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Эти значения совпали с найденными в предыдущем пункте, поэтому проверку делать уже не обязательно.

Пример оформления решения:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 3\\ -1 & 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot 8\cdot(-1)+3\cdot 3\cdot(-1)+2\cdot 2\cdot 3-$$

$$-2\cdot 8\cdot(-1)-1\cdot 3\cdot 3-3\cdot 2\cdot(-1)=$$

$$=-8-9+12+16-9+6=8,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 8 & 3\\ -11 & 3 & -1\end{vmatrix}=1\cdot 8\cdot(-1)+3\cdot 3\cdot(-11)+2\cdot(-4)\cdot 3-$$

$$-2\cdot 8\cdot(-11)-1\cdot 3\cdot 3-3\cdot(-4)\cdot(-1)=$$

$$=-8-99-24+176-9-12=24,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -4 & 3\\ -1 & -11 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-4)\cdot(-1)+1\cdot 3\cdot(-1)+2\cdot 2\cdot(-11)-$$

$$-2\cdot(-4)\cdot(-1)-1\cdot 3\cdot(-11)-1\cdot 2\cdot(-1)=$$

$$=4-3-44-8+33+2=-16,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & -4 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot 8\cdot(-11) + 3\cdot(-4)\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 3 -$$

$$-1\cdot 8\cdot(-1) - 1\cdot(-4)\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot(-11) =$$

$$= -88 + 12 + 6 + 8 + 12 + 66 = 16.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{8} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 2$;

в) метод Гаусса. Метод Гаусса является более универсальным методом, чем матричный, так как он может использоваться для любых систем, даже для квадратных систем с $\Delta = 0$ или для систем, число уравнений и число неизвестных в которых не совпадают. Суть этого метода состоит в том, чтобы привести расширенную матрицу системы к треугольному виду. Расширенная матрица $\overline{A} = (A|B)$ состоит из основной матрицы A и матрицы свободных членов B. Для рассматриваемой нами системы расширенная матрица

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -1 & -11 \end{array}\right),$$

т. е. мы выписали из системы только коэффициенты и свободные члены и опустили неизвестные, при этом важно, что в первом столбце стоят коэффициенты при x_1, во втором – при x_2, в третьем – при x_3.

Будем приводить матрицу $\overline{A}$ к треугольному виду, т. е. будем обнулять элементы, стоящие ниже диагонали. В результате мы должны получить матрицу вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots \end{array}\right).$$

Добиться этого можно с помощью следующих преобразований:

– в матрице можно менять местами строки (так же как в системе можно менять местами уравнения);

– всю строку можно умножить или разделить на какое-либо число (так же как можно умножить на число обе части уравнения);

– одну строку можно умножить на некоторое число и прибавить к другой строке (так же как уравнения в системе можно прибавлять друг к другу левую часть к левой, правую – к правой).

Обнулять элементы будем последовательно. Сначала делаем это с первым столбцом. В нашей системе первый элемент $a_{11} = 1$. С его помощью мы избавимся от элементов, стоящих под ним:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 8 & 3 & -4 \\ \boxed{-1} & 3 & -1 & -11 \end{array}\right).$$

Умножим первую строку на (–2) и прибавим ко второй строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & -1 & -11 \end{array}\right) \cdot (-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2+1\cdot(-2) & 8+3\cdot(-2) & 3+2\cdot(-2) & -4+1\cdot(-2) \\ -1 & 3 & -1 & -11 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ -1 & 3 & -1 & -11 \end{array}\right).$$

Чтобы избавиться от (–1), прибавим к третьей строке первую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ -1 & 3 & -1 & -11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ -1+1 & 3+3 & -1+2 & -11+1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -10 \end{array}\right).$$

Преобразуем второй столбец. Здесь на месте 6 необходимо получить 0. Умножим вторую строку на (−3) и прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -10 \end{array}\right) \cdot(-3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 6+2\cdot(-3) & 1+(-1)\cdot(-3) & -10+(-6)\cdot(-3) \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right).$$

Итак, мы получили треугольный вид. Эта матрица соответствует той же системе, только преобразованной.

Теперь по матрице $\overline{A}$ составим систему. Напомним, что в левой части матрицы стоят коэффициенты при неизвестных, а в правой – свободные члены:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot x_3 = 1, \\ 0\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + (-1)\cdot x_3 = -6, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = -6, \\ 4x_3 = 8. \end{cases}$$

Система значительно упростилась. Теперь ее легко решить. Начнем с третьего уравнения:

$$4x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 2.$$

Во второе уравнение можно подставить $x_3 = 2$:

$$2x_2 - x_3 = -6 \Rightarrow 2x_2 - 2 = -6 \Rightarrow 2x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -2,$$

в первое уравнение – $x_3 = 2,\ x_2 = -2$:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + 3\cdot(-2) + 2\cdot 2 = 1 \Rightarrow x_1 = 3.$$

Решение системы: $x_1 = 3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2.$

Ответ совпал с предыдущими пунктами, а для этих значений проверка уже сделана.

Пример оформления решения:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&1\\2&8&3&-4\\-1&3&-1&-11\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2)\quad\cdot 1\\ \\ \\ \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&1\\0&2&-1&-6\\0&6&1&-10\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-3)\\ \\ \end{array}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&1\\0&2&-1&-6\\0&0&4&8\end{array}\right).$$

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=1,\\ \qquad 2x_2-x_3=-6,\\ \qquad\qquad 4x_3=8.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3,\\ x_2=-2,\\ x_3=2.\end{cases}$$

Ответ: $x_1=3, x_2=-2, x_3=2.$

Задание 7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases}x_1-7x_2+7x_3=6,\\ 2x_1+4x_2-5x_3=5,\\ -6x_1+6x_2-4x_3=-20;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4x_1-32x_2-8x_3=24,\\ 3x_1-25x_2-11x_3=20.\end{cases}$

Решение: а) воспользуемся универсальным методом решения систем – методом Гаусса (как в задании 6в). Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-7&7&6\\2&4&-5&5\\-6&6&-4&-20\end{array}\right).$$

Приведем ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\dots&\dots&\dots&\dots\\0&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&\dots\end{array}\right).$$

Сначала обнулим элементы первого столбца во второй и третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ \boxed{2} & 4 & -5 & 5 \\ \boxed{-6} & 6 & -4 & -20 \end{array}\right).$$

Чтобы избавиться от 2, умножим первую строку на (–2) и прибавим ее ко второй строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 5 \\ -6 & 6 & -4 & -20 \end{array}\right)\cdot(-2) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 2+1\cdot(-2) & 4+(-7)\cdot(-2) & -5+7\cdot(-2) & 5+6\cdot(-2) \\ -6 & 6 & -4 & -20 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ -6 & 6 & -4 & -20 \end{array}\right).$$

Чтобы в левом нижнем углу получить 0, домножим первую строку на 6 и прибавим к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ -6 & 6 & -4 & -20 \end{array}\right)\cdot 6 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ 6-6 & -42+6 & 42-4 & 36-20 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ 0 & -36 & 38 & 16 \end{array}\right).$$

Во втором столбце необходимо обнулить нижний элемент (–36). Для этого нужно умножить вторую строку на 2 и прибавить к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ 0 & -36 & 38 & 16 \end{array}\right)\cdot 2 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ 0 & 36-36 & -38+38 & -42+16 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Составим по этой матрице систему уравнений:

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+(-7)\cdot x_2+7\cdot x_3=6, \\ 0\cdot x_1+18\cdot x_2+(-19)\cdot x_3=-7, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=2. \end{cases}$$

Обратим внимание на третье уравнение:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=2 \quad => \quad 0=2.$$

Мы получили невозможное равенство. Это говорит о том, что уравнения в исходной системе противоречат друг другу, они не могут быть записаны вместе, т. е. они несовместны. Такая система называется несовместной и она не имеет решений.

Примечание. Если бы к этой системе мы захотели применить формулы Крамера или использовать обратную матрицу, то первым бы шагом получили определитель $\Delta = 0$ и решение на этом закончилось бы, так как далее пришлось бы делить на 0. Метод Гаусса же можно применять к любым системам.

Пример оформления решения:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 5 \\ -6 & 6 & -4 & -20 \end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2)\ \cdot 6 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ 0 & -36 & 38 & 16 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 7 & 6 \\ 0 & 18 & -19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Ответ: система несовместна, решений не имеет;

б) в данной системе три неизвестных и только два уравнения, следовательно она не может быть однозначно разрешена, т. е. она не имеет единственного решении. Решений будет множество.

Так как количество неизвестных и количество уравнений не совпадают, то матрица системы прямоугольная, поэтому матричный метод и метод Крамера здесь неприменимы. Воспользуемся методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу $\overline{A}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -32 & -8 & 24 \\ 3 & -25 & -11 & 20 \end{array}\right).$$

Понятно, что треугольного вида мы не получим, так как в матрице всего две строки, но последовательность действий будет та же: будем обнулять элементы первого столбца, стоящие ниже $a_{11} = 4$. В данном случае это элемент $a_{21} = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -32 & -8 & 24 \\ \boxed{3} & -25 & -11 & 20 \end{array}\right).$$

Как мы уже видели в предыдущих заданиях, обнулить любой элемент проще, если на первом месте в столбце стоит 1, а у нас – 4. Здесь можно поступить двумя способами: либо всю первую строку разделить на 4, либо вычесть из первой строки вторую. Покажем это на примере второго способа:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -32 & -8 & 24 \\ 3 & -25 & -11 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4-3 & -32-(-25) & -8-(-11) & 24-20 \\ 3 & -25 & -11 & 20 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ 3 & -25 & -11 & 20 \end{array}\right).$$

А теперь прибавим ко второй строке первую, домноженную на (–3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ 3 & -25 & -11 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \hookleftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ -3+3 & 21-25 & -9-11 & -12+20 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -20 & 8 \end{array}\right).$$

Далее обнулять уже нечего, но можно немного упростить вид матрицы. Для этого разделим вторую строку на (–4):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right),$$

и составим по матрице систему:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad x_2 + 5x_3 = -2, \end{cases}$$

где три переменные и два уравнения. Таким образом, одна из переменных – лишняя.

Мы знаем, что решений будет бесконечно много. Найдем это множество. Для этого обозначим лишнюю переменную за произвольную постоянную C, тогда две других переменные этого уравнения будут выражаться через нее однозначно. Какую именно переменную взять за константу C, не важно, но для данной системы удобнее будет выбрать x_3. Итак, пусть $x_3 = C$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad\quad x_2 + 5x_3 = -2, \\ \qquad\qquad\quad x_3 = C \end{cases} => \begin{cases} x_1 - 7x_2 = 4 - 3C, \\ x_2 = -2 - 5C, \\ x_3 = C \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} x_1 = 4 - 3C + 7(-2 - 5C), \\ x_2 = -2 - 5C, \\ x_3 = C \end{cases} => \begin{cases} x_1 = -10 - 38C, \\ x_2 = -2 - 5C, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Это и есть решение, вернее – бесконечное множество решений. Здесь C – это произвольная постоянная, которая может принимать любое значение. Например, пусть $C = 1$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = -10 - 38 \cdot 1, \\ x_2 = -2 - 5 \cdot 1, \\ x_3 = 1 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = -48, \\ x_2 = -7, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Если эти значения подставить в исходную систему, то они обратят все уравнения в тождества:

$$\begin{cases} 4 \cdot (-48) - 32 \cdot (-7) - 8 \cdot 1 = 24, \\ 3 \cdot (-48) - 25 \cdot (-7) - 11 \cdot 1 = 20 \end{cases} => \begin{cases} 24 = 24, \\ 20 = 20. \end{cases}$$

Теперь пусть $C = -2$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = -10 - 38 \cdot (-2), \\ x_2 = -2 - 5 \cdot (-2), \\ x_3 = -2 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = 66, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = -2. \end{cases}$$

Эти значения тоже обратят все уравнения в тождества. И какое бы мы ни взяли значение C, мы всегда будем получать решения системы.

А что было бы, если бы за произвольную константу мы приняли другую неизвестную, например x_2? Пусть $x_2 = C_1$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad\quad x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} => \begin{cases} x_1 = 4 + 7C_1 - \dfrac{3}{5}\left(-2 - C_1\right) = \dfrac{26}{5} + \dfrac{38}{5}C_1, \\ x_2 = C_1, \\ x_3 = \dfrac{1}{5}\left(-2 - C_1\right). \end{cases}$$

Ответ, конечно же, принял другой вид, но взаимосвязь между x_1, x_2, x_3 осталась прежней. Действительно, если $C_1 = 8$, то

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{26}{5} + \dfrac{38}{5} \cdot 8 = 66, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = \dfrac{1}{5}(-2-8) = -2. \end{cases}$$

Мы получили ту же совокупность, что и в предыдущем случае при $C = -1$. Таким образом, бесконечное множество решений может быть записано в разных видах.

Пример оформления решения:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -32 & -8 & 24 \\ 3 & -25 & -11 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ 3 & -25 & -11 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \\ \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -20 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-4) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 4, \\ \qquad x_2 + 5x_3 = -2, \Rightarrow \\ \qquad\qquad x_3 = C \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -10 - 38C, \\ x_2 = -2 - 5C, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -10 - 38C$, $x_2 = -2 - 5C$, $x_3 = C$, где C – любое число.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \; f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & 2 & 3 \\ a & b & c & d \\ 0 & 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 10 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 15 & 1 \\ 3 & 3 & 15 & 11 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 11 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 6x_1 - 2x_2 + 16x_3 = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1. \end{cases}$

Вариант 2

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ f(x) = x^2 + 2x - 3.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 9 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} i & j & k & l \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \\ 8 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 10 & 2 \\ -1 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 28 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 7, \\ 2x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 10, \\ x_1 \qquad\quad - 4x_3 = -5 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 3, \\ 10x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 44, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 36. \end{cases}$

Вариант 3

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; f(x) = x^2 - 7x + 2.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -6 & 8 & 4 \end{vmatrix};$$

в) разложением по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ a & b & c & d \\ 0 & -2 & 8 & 5 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 11 & 8 \\ 3 & 9 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 22 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6, \\ -3x_1 - 5x_2 - 13x_3 = -2 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1, \\ 9x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 12x_3 = -24, \\ -3x_1 + 7x_2 - 16x_3 = -29. \end{cases}$

Вариант 4

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \; f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 3 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} -2 & 8 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 8 \\ -6 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & -4 \\ k & l & m & n \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 7 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 15x_3 = 31 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 18x_3 = -9, \\ 2x_1 + x_2 - 15x_3 = -14. \end{cases}$

Вариант 5

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B,\ B \cdot A,\ f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 5x - 7.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 3 & 5 \\ b & 4 & 0 & -8 \\ c & 7 & 1 & -1 \\ d & 6 & 9 & 2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 10 & 7 \\ -2 & -2 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 6, \\ -2x_1 - 12x_2 - 2x_3 = -20 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений

а) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2, \\ 18x_1 + 30x_2 - 3x_3 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 24x_2 + 28x_3 = -8, \\ 3x_1 + 17x_2 + 24x_3 = -18. \end{cases}$

Вариант 6

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 2x - 8.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 3 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -3 & -2 \\ 2 & y & -5 & 1 \\ 3 & z & 8 & 4 \\ 4 & t & 0 & 6 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = -1, \\ 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 6, \\ 3x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 6 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 1, \\ 12x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 20x_2 - 65x_3 = 20, \\ 4x_1 + 15x_2 - 59x_3 = 12. \end{cases}$

Вариант 7

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 3x + 9.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix};$$

в) разложением по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & a & 1 \\ 10 & 2 & b & 7 \\ -3 & 5 & c & 0 \\ 4 & 6 & d & -2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 11 & 4 & 11 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 6 & 15 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -6 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 \qquad\quad = -2 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -1, \\ 8x_1 - 2x_2 + 20x_3 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 22x_2 + 34x_3 = 16, \\ 3x_1 + 16x_2 + 27x_3 = 11. \end{cases}$

Вариант 8

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; f(x) = x^2 + 3x - 6.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & k \\ 0 & 2 & 6 & l \\ 1 & -1 & -4 & m \\ 0 & 8 & 7 & n \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 22 \\ 3 & 15 & 6 & 22 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 10, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 2, \\ 9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 22; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 25x_2 + 60x_3 = 25, \\ 4x_1 + 21x_2 + 55x_3 = 22. \end{cases}$

Вариант 9

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ f(x) = x^2 - 4x + 8.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 12 & 6 & 10 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 8 & 7 \\ x & y & z & t \\ 1 & 6 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 & -2 \\ 5 & 16 & 41 & -9 \\ 1 & 6 & 15 & 6 \\ 3 & 9 & 24 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -22 \\ -12 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 7, \\ -2x_1 \qquad + 12x_3 = 8 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 10x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 15; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 16x_3 = 18, \\ -3x_1 - 5x_2 + 12x_3 = 11. \end{cases}$

Вариант 10

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -6 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 6x - 2.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 7 & -1 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} i & j & k & l \\ 5 & 6 & -7 & 9 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 13 & 21 \\ 2 & -7 & 11 & 9 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 21 & -7 \\ 34 & 18 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = -1, \\ 3x_1 + 19x_2 - 16x_3 = 28 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 = 8, \\ 12x_1 - 20x_2 + 14x_3 = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 - 13x_2 - 25x_3 = 0, \\ 3x_1 - 11x_2 - 20x_3 = -10. \end{cases}$

Вариант 11

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 10.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 12 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 & 7 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix};$$

в) разложением по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ x & y & z & t \\ 6 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 15 & 7 & 0 \\ -2 & -11 & 7 & -9 \\ 3 & 21 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 3, \\ 3x_1 - 7x_2 - 12x_3 = 8, \\ 2x_1 \qquad\quad -3x_3 = 1 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 2, \\ 12x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 23; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 37x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + 29x_2 \qquad\quad = 2. \end{cases}$

Вариант 12

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 5x - 9.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 10 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & -2 & 5 \\ l & m & n & k \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 8 \\ 3 & 14 & -2 & 27 \\ -1 & 6 & -12 & 11 \\ 4 & 16 & 0 & 31 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_3 = 1, \\ 6x_1 + 12x_2 - 2x_3 = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + 38x_2 + 10x_3 = 16, \\ 5x_1 + 31x_2 + 7x_3 = 10. \end{cases}$

Вариант 13

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 7 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 7 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 & 8 \\ y & 1 & 0 & 4 \\ z & -2 & 6 & 7 \\ t & 5 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & 12 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -7 \\ 2 & 14 & 2 & 13 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ -3x_1 \qquad -7x_3 = -1, \\ -4x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -7 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 6, \\ 6x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 3, \\ 7x_1 - 12x_2 + 14x_3 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4x_1 + 19x_2 - 10x_3 = -18, \\ -5x_1 + 23x_2 - 17x_3 = -30. \end{cases}$

Вариант 14

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 5x + 12.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 15 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 7 & -8 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 6 & a & 4 & -2 \\ -3 & b & 1 & 0 \\ 2 & c & 5 & 3 \\ 0 & d & 6 & -1 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 & 3 \\ 3 & 19 & -3 & 10 \\ 2 & 8 & 7 & 11 \\ -1 & -7 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -2, \\ -3x_1 - 7x_2 - 9x_3 = -11. \end{cases}$

Вариант 15

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, f(x) = x^2 + 6x - 5.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 25 & 9 \\ 11 & 4 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

в) разложением по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & a & 4 \\ 7 & -1 & b & -2 \\ -8 & 1 & c & 1 \\ 10 & 2 & d & 0 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 \\ 2 & 15 & -2 & 17 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 24 & 0 & 30 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 7x_3 = -3, \\ x_1 + 15x_2 + 8x_3 = -5, \\ 2x_1 + 21x_2 + 11x_3 = -6 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 7, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 - 14x_3 = -25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 17x_2 - 67x_3 = 15, \\ 4x_1 + 13x_2 - 59x_3 = 9. \end{cases}$

Вариант 16

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 7 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; f(x) = x^2 - 3x + 12.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 23 & -6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 3 & k \\ 2 & 0 & 1 & l \\ -1 & -2 & 4 & m \\ 0 & 6 & 7 & n \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 7 & 2 \\ 1 & 15 & 8 & 6 \\ 2 & 21 & 11 & 3 \\ 3 & 36 & 21 & 13 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1, \\ 2x_1 + 15x_2 + 17x_3 = 4, \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 = -2 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ -6x_1 - 8x_2 + 14x_3 = -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -4x_1 + 24x_2 - 52x_3 = -12, \\ -5x_1 + 29x_2 - 58x_3 = -25. \end{cases}$

Вариант 17

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 10.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 46 & 9 \\ 5 & 1 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & -7 \\ -2 & 9 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & -6 & 7 \\ x & y & z & t \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 13 \\ -2 & -8 & -4 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 19x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 = -16 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 7, \\ 3x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 8, \\ -8x_1 + 18x_2 - 22x_3 = -27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x_1 + 20x_2 - 10x_3 = 8, \\ -3x_1 + 27x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

Вариант 18

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 6x - 5.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 4 & -5 & 7 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -7 & -10 \\ -4 & 4 & -7 & -16 \\ -2 & -4 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 22 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ -4x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2, \\ -6x_1 + 16x_2 + 6x_3 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 - 50x_2 = 44, \\ 5x_1 - 42x_2 - 2x_3 = 35. \end{cases}$

Вариант 19

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 15.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 55 & 8 \\ -7 & -1 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \\ 8 & -9 & 1 \end{vmatrix};$$

в) разложением по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \\ x & y & z & t \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 11 & 7 & 7 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & -12 & -6 & -15 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 1, \\ 3x_1 + 14x_2 - 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 6x_2 - 12x_3 = -15 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -4, \\ 5x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ -12x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x_1 + 59x_2 - 37x_3 = 22, \\ 6x_1 + 50x_2 - 34x_3 = 16. \end{cases}$

Вариант 20

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}, f(x) = x^2 - 5x + 11.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -3 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} -8 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -7 & 6 & 0 \end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & -12 & 19 \\ 2 & 0 & -3 & 27 \\ 4 & -12 & -20 & 18 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -16 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+7x_2+2x_3=6, \\ 2x_1+15x_2+7x_3=7, \\ -2x_1-11x_2+7x_3=-31 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1-4x_2+9x_3=5, \\ -6x_1+2x_2-x_3=4, \\ 20x_1+8x_2-32x_3=-10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x_1-x_2-57x_3=29, \\ -4x_1-3x_2-66x_3=32. \end{cases}$

Вариант 21

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x)=x^2-7x+20.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 66 & 8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 6 & -4 \\ q & -2 & 5 & 1 \\ r & 1 & 0 & 8 \\ s & -5 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -7 & 8 \\ 3 & 19 & -16 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -14 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 13x_3 = -4, \\ 2x_1 - 7x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10, \\ -6x_1 + 8x_2 - 12x_3 = -30; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + 34x_2 - 26x_3 = -58, \\ 5x_1 + 28x_2 - 23x_3 = -51. \end{cases}$

Вариант 22

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 8x + 15.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 11 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 7 & 6 \\ 1 & y & -5 & 0 \\ 4 & z & 2 & 3 \\ -5 & t & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 8 & -5 & -9 \\ -2 & 0 & 12 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & -5 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 24\\ 0 & -6\end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix}7 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1+3x_2+8x_3=1,\\ 5x_1+16x_2+41x_3=6,\\ x_1+6x_2+15x_3=0\end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases}x_1-10x_2+8x_3=9,\\ -4x_1+5x_2-6x_3=2,\\ 6x_1+10x_2-4x_3=-20;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4x_1-17x_2+6x_3=10,\\ 3x_1-14x_2+2x_3=0.\end{cases}$

Вариант 23

1. Для заданных матриц A и B найти $A\cdot B$, $B\cdot A$, $f(BA)$:

$$A=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 6 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ -2 & 4 & -4\end{pmatrix},\quad f(x)=x^2+4x-8.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix}11 & 7\\ 8 & 5\end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix};$$

в) разложением по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & a & 3 \\ -4 & 7 & b & 1 \\ 2 & 0 & c & -5 \\ -2 & 1 & d & 0 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & -5 & -6 \\ 2 & -2 & -8 & -13 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 8 & 10 & 17 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 12x_2 + 10x_3 = 8, \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 12x_1 + 27x_2 - 36x_3 = -29; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + 60x_2 - 6x_3 = 12, \\ 5x_1 + 51x_2 + x_3 = 14. \end{cases}$

Вариант 24

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 10x + 5.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & x \\ 0 & 7 & 5 & y \\ -1 & -2 & 0 & z \\ 4 & 8 & -5 & t \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 11 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 18 & 9 & 14 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 3, \\ -8x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ 14x_1 - 18x_2 + 2x_3 = -12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x_1 - 12x_2 + 38x_3 = -26, \\ -3x_1 - 20x_2 + 45x_3 = -31. \end{cases}$

Вариант 25

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 9.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 12 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & 8 \\ a & b & c & d \\ 10 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 8 & 6 & -7 \\ 3 & 9 & 9 & -8 \\ -2 & -2 & -8 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad 9x_2 + 7x_3 = -11, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 = -3 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 8x_3 = 10, \\ 3x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 8, \\ -12x_1 - 15x_2 - 3x_3 = -50; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + 44x_2 - 46x_3 = 24, \\ 5x_1 + 36x_2 - 41x_3 = 18. \end{cases}$

Вариант 26

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -7 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 3x - 25.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ -8 & -5 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 0 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ -2 & -12 & -2 & -6 \\ 3 & 21 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 2 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 5, \\ 9x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 30x_1 + 6x_2 + 24x_3 = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 17x_2 - 36x_3 = 30, \\ 4x_1 + 13x_2 - 33x_3 = 18. \end{cases}$

Вариант 27

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 8x + 9.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 8 & 4 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix};$$

в) разложением по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 4 \\ x & y & z & t \\ -1 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 15 & 5 \\ -3 & -12 & -12 & -7 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 = 9, \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 3, \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x_1 + 18x_2 + 3x_3 = -51, \\ -4x_1 + 23x_2 - 3x_3 = -59. \end{cases}$

Вариант 28

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 5 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \; f(x) = x^2 - 7x + 50.$$

2. Вычислить определители:
а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 14 & 7 \\ 6 & 3 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix};$$

в) разложением по четвертой строке:

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -6 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & 8 & 5 & -8 \\ -3 & -5 & -13 & 15 \\ 4 & 12 & 16 & -19 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 + 11x_2 + 11x_3 = 23, \\ 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 14 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 11x_3 = 9, \\ -11x_1 - 6x_2 + 5x_3 = -7, \\ 5x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 61x_3 = -43, \\ -3x_1 - 10x_2 + 69x_3 = -47. \end{cases}$

Вариант 29

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 9x + 2.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 26 & 8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

в) разложением по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 5 & 7 \\ y & 0 & 1 & -1 \\ z & 4 & 6 & 8 \\ t & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & 9 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 4 \\ -3 & -18 & 12 & -5 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 5, \\ x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 12x_2 - 10x_3 = 7, \\ 15x_1 - 4x_2 + 8x_3 = -7, \\ -8x_1 - 4x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 - 27x_2 + 24x_3 = 24, \\ 5x_1 - 23x_2 + 21x_3 = 17. \end{cases}$

Вариант 30

1. Для заданных матриц A и B найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, $f(BA)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 15.$$

2. Вычислить определители:

а) по определению:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 16 \end{vmatrix};$$

б) по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix};$$

в) разложением по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 1 & 6 \\ -6 & b & 2 & -1 \\ 8 & c & -3 & 0 \\ 0 & d & 4 & 7 \end{vmatrix};$$

г) приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 & -5 \\ -2 & -2 & -1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 12 & 8 & -11 \end{vmatrix}.$$

3. Найти для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

обратную матрицу A^{-1}.

4. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -4, \\ -2x_1 - 10x_2 - x_3 = 13, \\ x_1 + 8x_2 + 14x_3 = 4 \end{cases}$$

тремя методами: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

7. Решить системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 14x_2 + 5x_3 = 6, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \\ 3x_1 + 33x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 22x_2 - 18x_3 = 14, \\ 3x_1 + 16x_2 - 11x_3 = 6. \end{cases}$

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Представленное учебное пособие по линейной алгебре создает базу для дальнейшего изучения различных разделов высшей математики: аналитической геометрии, векторной алгебры, математического программирования, математического анализа, дискретной математики.

Знание основных методов линейной алгебры позволяет решать разнообразные задачи, сводящиеся к системам линейных уравнений, дает более общий подход к таким основным математическим понятиям, как многочлены, функции, матрицы, векторные пространства, базис.

Наиболее тесно курс алгебры связан с курсом аналитической геометрии, где абстрактные алгебраические понятия наполняются новым содержанием и приобретают геометрическую и физическую наглядность.

К сожалению, в данное учебное пособие не вошли такие темы, как квадратичные формы, многочлены и алгебраические системы (группы, кольца, поля). Для желающих более полно изучить курс линейной алгебры авторы предлагают обратиться к книгам, приведенным в рекомендательном библиографическом списке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – М. : Лань, 2009.

2. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова и др. – М. : Высш. шк., 2007.

3. Зимина, О. В. Высшая математика. Решебник / О. В. Зимина, А. И. Кириллов, Т. А. Сальникова. – М. : Физматлит, 2003.

4. Кострикин, А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – М. : Физматлит, 2004.

5. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Лань, 2006.

6. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 2009.

7. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : Бином, 2008.

8. Фаддеев, Д. К. Задачи по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – М. : Наука, 2003.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

К главе 1

1. а) $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 2 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & 9 & 42 \\ -6 & 27 & 42 \end{pmatrix}$. **2.** а) $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -20 & 15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & -9 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$. **4.** (1); $\begin{pmatrix} -10 & 0 & -2 & -8 \\ -5 & 0 & -1 & -4 \\ 15 & 0 & 3 & 12 \\ 10 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $A^2 = E$, $A^3 = A$, все четные степени равны E, нечетные – матрице A.

6. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$. **9.** Всестороннее растяжение в k раз; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **10.** 14 200.

К главе 2

1. а) $\cos 2\alpha$; б) 0; в) 0. **2.** $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. **3.** а) –182; б) $-4x^2 + 5x + 12$. **4.** а) –57; б) –110. **6.** а) 87; б) 0; в) –30.

К главе 3

1. а) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; б) $\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -4 & 16 & 16 \\ -7 & 31 & 37 \end{pmatrix}$. **2.** а) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $X = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. **3.** $|A \cdot A^*| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n$ => $|A \cdot A^*| = |A| \cdot |A^*| = |A|^n$ => $|A^*| = |A|^{n-1}$.

К главе 4

1. а) 2; б) 3; в) 2.

К главе 5

1. а) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. **2.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$.

К главе 6

1. а) несовместна; б) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$; в) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$; г) $x_1 = 17\alpha + 192/7$, $x_2 = -13\alpha + 27/7$, $x_3 = 7\alpha$; д) $x_1 = 17\alpha$, $x_2 = 9\alpha$, $x_3 = 11\alpha$. **2.** $2FeCl_3 + K_3[Fe(CN)_6] + SnCl_2 = KFe[Fe(CN)_6] + 2KCl + FeCl_2 + SnCl_4$; $K_2Cr_2O_7 + 3Na_2S + 7H_2SO_4 = Cr_2(SO_4)_3 + 7H_2O + 3S + K_2SO_4 + 3Na_2SO_4$; $2CrCl_3 + 3K_2S_2O_8 + 7H_2O = K_2Cr_2O_7 + 6H_2SO_4 + 4KCl + 2HCl$.

К главе 7

1. а) $\boldsymbol{x} = (7,\ 0,\ 7)$; б) $\boldsymbol{y}' = (1,\ -1,\ 0)$. **2.** а) $\lambda_1 = 1$, $\boldsymbol{x}_1 = (C, -C)$, $\lambda_2 = 4$, $\boldsymbol{x}_2 = (2C, C)$; б) $\lambda = 1$, $\boldsymbol{x} = (3C, C, C)$.

Учебное издание

Мартынова Лариса Александровна
Вишневская Софья Романовна
Попов Алексей Михайлович
Бураков Сергей Васильевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Редактор *Е. Г. Некрасова*
Оригинал-макет и верстка *Е. С. Завьяловой*

Подписано в печать 29.09.2015. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать плоская. Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 14,6. Тираж 100 экз.
Заказ . С 182/15.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 24.49.04.953.П.000032.01.03 от 29.01.2003 г.

Редакционно-издательский отдел Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.
Отпечатано в отделе копировально-множительной техники
Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та.
660037, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.