ГЛАВА ШЕСТАЯ

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 26. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Истоки теории квадратичных форм лежат в аналитической геометрии, а именно в теории кривых (и поверхностей) второго порядка. Известно, что уравнение центральной кривой второго порядка на плоскости, после перенесения начала прямоугольных координат в центр этой кривой, имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D. \tag{1}$$

Известно, далее, что можно совершить такой поворот осей координат на некоторый угол α, т. е. такой переход от координат x, y к координатам x', y':

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

что в новых координатах уравнение нашей кривой будет иметь «канонический» вид

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D; \tag{3}$$

в этом уравнении коэффициент при произведении неизвестных $x'y'$ равен, следовательно, нулю. Преобразование координат (2) можно толковать, очевидно, как линейное преобразование неизвестных (см. § 13), притом невырожденное, так как определитель из его коэффициентов равен единице. Это преобразование применяется к левой части уравнения (1), и поэтому можно сказать, что левая часть уравнения (1) невырожденным линейным преобразованием (2) превращается в левую часть уравнения (3).

Многочисленные приложения потребовали построения аналогичной теории для случая, когда число неизвестных вместо двух равно любому n, а коэффициенты являются или действительными, или же любыми комплексными числами.

Обобщая выражение, стоящее в левой части уравнения (1), мы приходим к следующему понятию.

Квадратичной формой f от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждый член которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных. Квадратичная форма называется *действительной* или *комплексной* в зависимости от того, являются ли ее коэффициенты действительными или же могут быть любыми комплексными числами.

Считая, что в квадратичной форме f уже сделано приведение подобных членов, введем следующие обозначения для коэффициентов этой формы: коэффициент при x_i^2 обозначим через a_{ii}, а коэффициент при произведении x_ix_j для $i \neq j$ — через $2a_{ij}$ (сравнить с (1)!). Так как, однако, $x_ix_j = x_jx_i$, то коэффициент при этом произведении мог бы быть обозначен и через $2a_{ji}$, т. е. введенные нами обозначения предполагают справедливость равенства

$$a_{ji} = a_{ij}. \tag{4}$$

Член $2a_{ij}x_ix_j$ можно записать теперь в виде

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i,$$

а всю квадратичную форму f — в виде суммы всевозможных членов $a_{ij}x_ix_j$, где i и j уже независимо друг от друга принимают значения от 1 до n:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j; \tag{5}$$

в частности, при $i = j$ получается член $a_{ii}x_i^2$.

Из коэффициентов a_{ij} можно составить, очевидно, квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n; она называется *матрицей квадратичной формы* f, а ее ранг r — *рангом* этой квадратичной формы. Если, в частности, $r = n$, т. е. матрица — невырожденная, то и квадратичная форма f называется *невырожденной*. Ввиду равенства (4) элементы матрицы A, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой, т. е. матрица A — *симметрическая*. Обратно, для любой симметрической матрицы A n-го порядка можно указать вполне определенную квадратичную форму (5) от n неизвестных, имеющую элементы матрицы A своими коэффициентами.

Квадратичную форму (5) можно записать в ином виде, используя введенное в § 14 умножение прямоугольных матриц. Условимся сначала о следующем обозначении: если дана квадратная или вообще прямоугольная матрица A, то через A' будет обозначаться матрица, полученная из матрицы A транспонированием. Если матрицы A и B таковы, что их произведение определено, то имеет место равенство:

$$(AB)' = B'A', \tag{6}$$

т. е. *матрица, полученная транспонированием произведения, равна произведению матриц, получающихся транспонированием сомножителей, притом взятых в обратном порядке.*

В самом деле, если произведение AB определено, то будет определено, как легко проверить, и произведение $B'A'$: число столбцов матрицы B' равно числу строк матрицы A'. Элемент матрицы $(AB)'$, стоящий в ее i-й строке и j-м столбце, в матрице AB расположен в j-й строке и i-м столбце. Он равен поэтому сумме произведений соответственных элементов j-й строки матрицы A и i-го столбца матрицы B, т. е. равен сумме произведений соответственных элементов j-го столбца матрицы A' и i-й строки матрицы B'. Этим равенство (6) доказано.

Заметим, что *матрица A тогда и только тогда будет симметрической, если она совпадает со своей транспонированной*, т. е. если

$$A' = A.$$

Обозначим теперь через X столбец, составленный из неизвестных,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

X является матрицей, имеющей n строк и один столбец. Транспонируя эту матрицу, получим матрицу

$$X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

составленную из одной строки.

Квадратичная форма (5) с матрицей $A = (a_{ij})$ может быть записана теперь в виде следующего произведения:

$$f = X'AX. \tag{7}$$

Действительно, произведение AX будет матрицей, состоящей из одного столбца:

$$AX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу слева на матрицу X', мы получим «матрицу», состоящую из одной строки и одного столбца, а именно правую часть равенства (5).

Что произойдет с квадратичной формой f, если входящие в нее неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут подвергнуты линейному преобразованию

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

с матрицей $Q = (q_{ik})$? Будем считать при этом, что если форма f действительная, то и элементы матрицы Q должны быть действительными. Обозначая через Y столбец из неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, запишем линейное преобразование (8) в виде матричного равенства:

$$X = QY. \tag{9}$$

Отсюда по (6)

$$X' = Y'Q'. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в запись (7) формы f, получаем:

$$f = Y'(Q'AQ)Y,$$

или

$$f = Y'BY,$$

где

$$B = Q'AQ.$$

Матрица B будет симметрической, так как ввиду равенства (6), справедливого, очевидно, для любого числа множителей, и равенства $A' = A$, равносильного симметричности матрицы A, имеем:

$$B' = Q'A'Q = Q'AQ = B.$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Квадратичная форма от n неизвестных, имеющая матрицу A, после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей Q превращается в квадратичную форму от новых неизвестных, причем матрицей этой формы служит произведение $Q'AQ$.

Предположим теперь, что мы выполняем невырожденное линейное преобразование, т. е. Q, а поэтому и Q' — матрицы невырожденные. Произведение $Q'AQ$ получается в этом случае умножением матрицы A на невырожденные матрицы и поэтому, как следует из результатов § 14, ранг этого произведения равен рангу матрицы A. Таким образом, *ранг квадратичной формы не меняется при выполнении невырожденного линейного преобразования.*

Рассмотрим теперь, по аналогии с указанной в начале параграфа геометрической задачей приведения уравнения центральной кривой второго порядка к каноническому виду (3), вопрос о приведении произвольной квадратичной формы некоторым невырожденным линейным преобразованием к виду суммы квадратов неизвестных, т. е. к такому виду, когда все коэффициенты при произведениях различных неизвестных равны нулю; этот специальный вид квадратичной формы называется *каноническим*. Предположим сначала, что квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уже приведена невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \ldots + b_n y_n^2, \tag{11}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — новые неизвестные. Некоторые из коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ могут, конечно, быть нулями. Докажем, что *число отличных от нуля коэффициентов в* (11) *непременно равно рангу* r *формы* f.

В самом деле, так как мы пришли к (11) при помощи невырожденного преобразования, то квадратичная форма, стоящая в правой части равенства (11), также должна быть ранга r. Однако матрица этой квадратичной формы имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & \mathbf{0} \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & b_n \end{pmatrix},$$

и требование, чтобы эта матрица имела ранг r, равносильно предположению, что на ее главной диагонали стоит ровно r отличных от нуля элементов.

Перейдем к доказательству следующей основной теоремы о квадратичных формах.

Всякая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду. Если при этом рассматривается действительная квадратичная форма, то все коэффициенты указанного линейного преобразования можно считать действительными.

Эта теорема верна для случая квадратичных форм от одного неизвестного, так как всякая такая форма имеет вид ax^2, являющийся каноническим. Мы можем, следовательно, вести доказательство индукцией по числу неизвестных, т. е. доказывать теорему для квадратичных форм от n неизвестных, считая ее уже доказанной для форм с меньшим числом неизвестных.

Пусть дана квадратичная форма

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{12}$$

от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы постараемся найти такое невырожденное линейное преобразование, которое выделило бы из f квадрат одного из неизвестных, т. е. привело бы f к виду суммы этого квадрата и некоторой квадратичной формы от остальных неизвестных. Эта цель легко достигается в том случае, если среди коэффициентов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, стоящих в матрице формы f на главной диагонали, есть отличные от нуля, т. е. если в (12) входит с отличным от нуля коэффициентом квадрат хотя бы одного из неизвестных x_i.

Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Тогда, как легко проверить, выражение $a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$, являющееся квадратичной формой, содержит такие же члены с неизвестным x_1, как и наша форма f, а поэтому разность

$$f - a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 = g$$

будет квадратичной формой, содержащей лишь неизвестные $x_2, \ldots, x_n$, но не x_1. Отсюда

$$f = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + g.$$

Если мы введем обозначения

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \quad y_i = x_i \quad \text{при} \quad i = 2, 3, \ldots, n, \tag{13}$$

то получим

$$f = a_{11}^{-1}y_1^2 + g, \tag{14}$$

где g будет теперь квадратичной формой от неизвестных $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Выражение (14) есть искомое выражение для формы f, так как оно получено из (12) невырожденным линейным преобразованием, а именно преобразованием, обратным линейному преобразованию (13), которое имеет своим определителем a_{11} и поэтому не вырождено.

Если же имеют место равенства $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$, то предварительно нужно совершить вспомогательное линейное преобразование, приводящее к появлению в нашей форме f квадратов неизвестных. Так как среди коэффициентов в записи (12) этой формы должны быть отличные от нуля,— иначе нечего было бы доказывать,— то пусть, например, $a_{12} \neq 0$, т. е. f является суммой члена $2a_{12}x_1x_2$ и членов, в каждый из которых входит хотя бы одно из неизвестных $x_3, \ldots, x_n$.

Совершим теперь линейное преобразование

$$x_1 = z_1 - z_2, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_i = z_i \quad \text{при } i = 3, \ldots, n. \tag{15}$$

Оно будет невырожденным, так как имеет определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

В результате этого преобразования член $2a_{12}x_1x_2$ нашей формы примет вид

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2,$$

т. е. в форме f появятся, с отличными от нуля коэффициентами, квадраты сразу двух неизвестных, причем они не могут сократиться ни с одним из остальных членов, так как в каждый из этих последних входит хотя бы одно из неизвестных $z_3, \ldots, z_n$. Теперь мы находимся в условиях уже рассмотренного выше случая, т. е. еще одним невырожденным линейным преобразованием можем привести форму f к виду (14).

Для окончания доказательства остается отметить, что квадратичная форма g зависит от меньшего, чем n, числа неизвестных и поэтому, по предположению индукции, некоторым невырожденным преобразованием неизвестных $y_2, y_3, \ldots, y_n$ приводится к каноническому виду. Это преобразование, рассматриваемое как (невырожденное, как легко видеть) преобразование всех n неизвестных, при котором y_1 остается без изменения, приводит, следовательно, (14) к каноническому виду. Таким образом, квадратичная форма f двумя или тремя невырожденными линейными преобразованиями, которые можно заменить одним невырожденным преобразованием — их произведением, приводится к виду суммы квадратов неизвестных с некоторыми коэффициентами. Число этих квадратов равно, как мы знаем, рангу формы r. Если, сверх того, квадратичная форма f действительная, то коэффициенты как в каноническом виде формы f, так и в линейном преобразовании, приводящем f к этому виду, будут действительными; в самом деле, и линейное преобразование, обратное (13), и линейное преобразование (15) имеют действительные коэффициенты.

Доказательство основной теоремы закончено. Метод, использованный в этом доказательстве, может быть применен в конкретных примерах для действительного приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нужно лишь вместо индукции, которую мы использовали в доказательстве, последовательно выделять изложенным выше методом квадраты неизвестных.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1. \tag{16}$$

Ввиду отсутствия в этой форме квадратов неизвестных мы выполним сначала невырожденное линейное преобразование

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

после чего получим:

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

Теперь коэффициент при y_1^2 отличен от нуля, и поэтому из нашей формы можно выделить квадрат одного неизвестного. Полагая

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3,$$

т. е. совершая линейное преобразование, для которого обратное будет иметь матрицу

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы приведем f к виду

$$f=\frac{1}{2}z_1^2-2z_2^2-2z_3^2-8z_2z_3.$$

Пока выделился лишь квадрат неизвестного z_1, так как форма еще содержит произведение двух других неизвестных. Используя неравенство нулю коэффицента при z_2^2, еще раз применим изложенный выше метод. Совершая линейное преобразование

$$t_1=z_1,\quad t_2=-2z_2-4z_3,\quad t_3=z_3,$$

для которого обратное имеет матрицу

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы приведем, наконец, форму f к каноническому виду

$$f=\frac{1}{2}t_1^2-\frac{1}{2}t_2^2+6t_3^2. \tag{17}$$

Линейное преобразование, приводящее (16) сразу к виду (17), будет иметь своей матрицей произведение

$$ABC=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно и непосредственной подстановкой проверить, что невырожденное $\left(\text{так как определитель равен } -\frac{1}{2}\right)$ линейное преобразование

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+3t_3, \\ x_2&=\frac{1}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2-t_3, \\ x_3&=\qquad\qquad\qquad t_3 \end{aligned}$$

превращает (16) в (17).

Теория приведения квадратичной формы к каноническому виду построена по аналогии с геометрической теорией центральных кривых второго порядка, но не может считаться обобщением этой последней теории. В самом деле, в нашей теории допускается использование любых невырожденных линейных преобразований, в то время как приведение кривой второго порядка к каноническому виду достигается применением линейных преобразований весьма специального вида (2), являющихся вращениями плоскости. Эта геометрическая теория может быть, однако, обобщена на случай квадратичных форм от n неизвестных с **действительными** коэффициентами. Изложение этого обобщения, называемого **приведением квадратичных форм к главным осям**, будет дано в гл. 8.

§ 27. Закон инерции

Канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, вовсе не является для нее однозначно определенным: всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими различными способами. Так, рассмотренная в предшествующем параграфе квадратичная форма $f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1$ невырожденным линейным преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1+3t_2+2t_3,\\ x_2 &= t_1-t_2-2t_3,\\ x_3 &= \quad\;\; t_2 \end{aligned}$$

приводится к каноническому виду

$$f=2t_1^2+6t_2^2-8t_3^2,$$

отличному от полученного ранее.

Возникает вопрос, что общего у тех различных канонических квадратичных форм, к которым приводится данная форма f? Этот вопрос тесно связан, как мы увидим, с таким вопросом: при каком условии одна из двух данных квадратичных форм может быть переведена в другую невырожденным линейным преобразованием? Ответ на эти вопросы зависит, однако, от того, рассматриваются ли комплексные или действительные квадратичные формы.

Предположим сначала, что рассматриваются произвольные **комплексные** квадратичные формы и, вместе с тем, допускается употребление невырожденных линейных преобразований также с произвольными комплексными коэффициентами. Мы знаем, что всякая квадратичная форма f от n неизвестных, имеющая ранг r, приводится к каноническому виду

$$f=c_1y_1^2+c_2y_2^2+\ldots+c_ry_r^2,$$

где все коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_r$ отличны от нуля. Пользуясь тем, что из всякого комплексного числа извлекается квадратный корень, выполним следующее невырожденное линейное преобразование:

$$z_i=\sqrt{c_i}\,y_i \quad \text{при} \quad i=1, 2, \ldots, r; \; z_j=y_j \quad \text{при} \quad j=r+1, \ldots, n.$$

Оно приводит форму f к виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2, \tag{1}$$

называемому *нормальным*; это — просто сумма квадратов r неизвестных с коэффициентами, равными единице.

Нормальный вид зависит лишь от ранга r формы f, т. е. все квадратичные формы ранга r приводятся к одному и тому же нормальному виду (1). Если, следовательно, формы f и g от n неизвестных имеют одинаковый ранг r, то можно перевести f в (1), а затем (1) в g, т. е. существует невырожденное линейное преобразование, переводящее f в g. Так как, с другой стороны, никакое невырожденное линейное преобразование не изменяет ранга формы, то мы приходим к следующему результату:

Две комплексные квадратичные формы от n неизвестных тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными линейными преобразованиями с комплексными коэффициентами, если эти формы имеют один и тот же ранг.

Из этой теоремы без труда вытекает, что *каноническим видом комплексной квадратичной формы ранга r может служить всякая сумма квадратов r неизвестных с любыми отличными от нуля комплексными коэффициентами.*

Положение несколько более сложно в том случае, если рассматриваются действительные квадратичные формы и, что особенно важно, допускаются лишь линейные преобразования с действительными коэффициентами. В этом случае уже не всякую форму можно привести к виду (1), так как это могло бы потребовать извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Если, однако, мы назовем теперь *нормальным видом* квадратичной формы сумму квадратов нескольких неизвестных с коэффициентами $+1$ или -1, то легко показать, что *всякую действительную квадратичную форму f можно привести невырожденным линейным преобразованием с действительными коэффициентами к нормальному виду.*

В самом деле, форма f ранга r от n неизвестных приводится к каноническому виду, который можно записать следующим образом (меняя, если нужно, нумерацию неизвестных):

$$f = c_1 y_1^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - c_r y_r^2, \quad 0 \leqslant k \leqslant r,$$

где все числа $c_1, \ldots, c_k;\ c_{k+1}, \ldots, c_r$ отличны от нуля и положительны. Тогда невырожденное линейное преобразование с действительными коэффициентами

$$z_i = \sqrt{c_i}\, y_i \ \text{ при } i = 1, 2, \ldots, r, \quad z_j = y_j \ \text{ при } j = r+1, \ldots, n,$$

приводит f к нормальному виду,

$$f = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

Общее число входящих сюда квадратов будет равно рангу формы.

Действительная квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду многими различными преобразованиями, однако с точностью до нумерации неизвестных она приводится лишь к одному нормальному виду. Это показывает следующая важная теорема, называемая *законом инерции действительных квадратичных форм*:

Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная квадратичная форма с действительными коэффициентами действительным невырожденным линейным преобразованием, не зависят от выбора этого преобразования.

Пусть, в самом деле, квадратичная форма f ранга r от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ двумя способами приведена к нормальному виду:

$$\begin{aligned} f &= y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = \\ &= z_1^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как переход от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к неизвестным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ был невырожденным линейным преобразованием, то, обратно, вторые неизвестные также будут линейно выражаться через первые с отличным от нуля определителем:

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Аналогично

$$z_j = \sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

причем определитель из коэффициентов снова отличен от нуля. Коэффициенты же как в (3), так и в (4) — действительные числа.

Предположим теперь, что $k < l$, и напишем систему равенств

$$y_1 = 0, \ \ldots, \ y_k = 0, \quad z_{l+1} = 0, \ \ldots, \ z_r = 0, \ \ldots, \ z_n = 0. \tag{5}$$

Если левые части этих равенств будут заменены их выражениями из (3) и (4), мы получим систему $n - l + k$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных, поэтому, как мы знаем из § 1, наша система обладает ненулевым действительным решением $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Заменим теперь в равенстве (2) все y и все z их выражениями (3) и (4), а затем подставим вместо неизвестных числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Если для краткости через $y_i(\alpha)$ и $z_j(\alpha)$ будут обозначены значения неизвестных y_i и z_j, получающиеся после такой подстановки, то (2) превращается, ввиду (5), в равенство

$$-y_{k+1}^2(\alpha) - \ldots - y_r^2(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \ldots + z_l^2(\alpha). \tag{6}$$

Так как все коэффициенты в (3) и (4) действительные, то все квадраты, входящие в равенство (6), положительны, а поэтому (6) влечет за собой равенство нулю всех этих квадратов; отсюда следуют равенства

$$z_1(\alpha)=0, \ \ldots, \ z_l(\alpha)=0. \tag{7}$$

С другой стороны, по самому выбору чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

$$z_{l+1}(\alpha)=0, \ \ldots, \ z_r(\alpha)=0, \ \ldots, \ z_n(\alpha)=0. \tag{8}$$

Таким образом, система n линейных однородных уравнений

$$z_i=0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обладает, ввиду (7) и (8), ненулевым решением $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, т. е. определитель этой системы должен быть равен нулю. Это противоречит, однако, тому, что преобразование (4) предполагалось невырожденным. К такому же противоречию мы придем при $l<k$. Отсюда следует равенство $k=l$, доказывающее теорему.

Число положительных квадратов в той нормальной форме, к которой приводится данная действительная квадратичная форма f, называется *положительным индексом инерции* этой формы, число отрицательных квадратов — *отрицательным индексом инерции*, а разность между положительным и отрицательным индексами инерции — *сигнатурой* формы f. Понятно, что при заданном ранге формы задание любого из определенных сейчас трех чисел вполне определяет два других, и поэтому в дальнейших формулировках можно будет говорить о любом из этих трех чисел.

Докажем теперь следующую теорему:

Две квадратичные формы от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями, если эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.

В самом деле, пусть форма f переводится в форму g невырожденным действительным преобразованием. Мы знаем, что это преобразование не меняет ранга формы. Оно не может менять и сигнатуры, так как в противном случае f и g приводились бы к различным нормальным видам, а тогда форма f приводилась бы, в противоречие с законом инерции, к этим обоим нормальным видам. Обратно, если формы f и g имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры, то они приводятся к одному и тому же нормальному виду и поэтому могут быть переведены друг в друга.

Если дана квадратичная форма g в каноническом виде,

$$g=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ry_r^2, \tag{9}$$

с не равными нулю действительными коэффициентами, то ранг этой формы равен, очевидно, r. Легко видеть, далее, употребляя уже применявшийся выше способ приведения такой формы к нормальному виду, что положительный индекс инерции формы g равен числу положительных коэффициентов в правой части равенства (9). Отсюда и из предшествующей теоремы вытекает такой результат:

Квадратичная форма f тогда и только тогда будет иметь форму (9) *своим каноническим видом, если ранг формы f равен r, а положительный индекс инерции этой формы совпадает с числом положительных коэффициентов в* (9).

Распадающиеся квадратичные формы. Перемножая любые две линейные формы от n неизвестных,

$$\varphi = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \quad \psi = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,$$

мы получим, очевидно, некоторую квадратичную форму. Не всякая квадратичная форма может быть представлена в виде произведения двух линейных форм, и мы хотим вывести условия, при которых это имеет место, т. е. при которых квадратичная форма является *распадающейся*.

Комплексная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ распадается тогда и только тогда, если ее ранг меньше или равен двум. Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ распадается тогда и только тогда, если или ее ранг не больше единицы, или же он равен двум, а сигнатура равна нулю.

Рассмотрим сначала произведение линейных форм φ и ψ. Если хотя бы одна из этих форм нулевая, то их произведение будет квадратичной формой с нулевыми коэффициентами, т. е. оно имеет ранг 0. Если линейные формы φ и ψ пропорциональны,

$$\psi = c\varphi,$$

причем $c \neq 0$ и форма φ ненулевая, то пусть, например, коэффициент a_1 отличен от нуля. Тогда невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \quad y_i = x_i \quad \text{при} \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

приводит квадратичную форму $\varphi\psi$ к виду

$$\varphi\psi = cy_1^2.$$

Справа стоит квадратичная форма ранга 1, а поэтому и квадратичная форма $\varphi\psi$ имеет ранг 1. Если же, наконец, линейные формы φ и ψ не являются пропорциональными, то пусть, например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда линейное преобразование

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\\
y_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n,\\
y_i &= x_i \text{ при } i = 3,\ 4,\ \ldots,\ n
\end{aligned}
$$

будет невырожденным; оно приводит квадратичную форму $\varphi\psi$ к виду

$$\varphi\psi = y_1y_2.$$

Справа стоит квадратичная форма ранга 2, имеющая в случае действительных коэффициентов сигнатуру 0.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Квадратичная форма ранга 0 может, конечно, рассматриваться как произведение двух линейных форм, одна из которых нулевая. Далее, квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга 1 невырожденным линейным преобразованием приводится к виду

$$f = cy_1^2, \quad c \neq 0,$$

т. е. к виду

$$f = (cy_1)\,y_1.$$

Выражая y_1 линейно через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, мы получим представление формы f в виде произведения двух линейных форм. Наконец, действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ранга 2 и сигнатуры 0 приводится невырожденным линейным преобразованием к виду

$$f = y_1^2 - y_2^2;$$

к этому же виду может быть приведена любая комплексная квадратичная форма ранга 2. Однако

$$y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2),$$

но справа, после замены y_1 и y_2 их линейными выражениями через $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будет стоять произведение двух линейных форм. Теорема доказана.

§ 28. Положительно определенные формы

Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами называется *положительно определенной*, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов, т. е. если и ранг, и положительный индекс инерции этой формы равны числу неизвестных.

Следующая теорема дает возможность охарактеризовать положительно определенные формы, не приводя их к нормальному или каноническому виду.

Квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если при всяких действительных значениях этих неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, эта форма получает положительные значения.

Доказательство. Пусть форма f положительно определенная, т. е. приводится к нормальному виду

$$f=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2, \tag{1}$$

причем

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

с отличным от нуля определителем из действительных коэффициентов a_{ij}. Если мы хотим подставить в f произвольные действительные значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то можно подставить их сначала в (2), а затем значения, полученные для всех y_i,— в (1). Заметим, что значения, полученные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ из (2), не могут все сразу равняться нулю, так как иначе мы получили бы, что система линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

обладает ненулевым решением, хотя ее определитель отличен от нуля. Подставляя найденные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ значения в (1), мы получим значение формы f, равное сумме квадратов n действительных чисел, которые не все равны нулю; это значение будет, следовательно, строго положительным.

Обратно, пусть форма f не является положительно определенной, т. е. или ее ранг, или положительный индекс инерции меньше n. Это означает, что в нормальном виде этой формы, к которому она приводится, скажем, невырожденным линейным преобразованием (2), квадрат хотя бы одного из новых неизвестных, например y_n, или отсутствует совсем, или же содержится со знаком минус. Покажем, что в этом случае можно подобрать такие действительные значения для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые не все равны нулю, что значение формы f при этих значениях неизвестных равно нулю или даже отрицательно. Такими будут, например, те значения для $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые мы получим, решая по правилу Крамера систему линейных уравнений, получающихся из (2) при $y_1=y_2=\ldots$ $\ldots=y_{n-1}=0$, $y_n=1$. Действительно, при этих значениях неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ форма f равна нулю, если y_n^2 не входит в нормальный вид этой формы, и равна -1, если y_n^2 входит в нормальный вид со знаком минус.

Теорема, сейчас доказанная, используется всюду, где применяются положительно определенные квадратичные формы. С ее помощью нельзя, однако, по коэффициентам формы установить, будет ли эта форма положительно определенной. Для этой цели служит другая теорема, которую мы сформулируем и докажем после того, как введем одно вспомогательное понятие.

Пусть дана квадратичная форма f от n неизвестных с матрицей $A=(a_{ij})$. Миноры порядка 1, 2, ..., n этой матрицы, расположенные в ее левом верхнем углу, т. е. миноры

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

из которых последний совпадает, очевидно, с определителем матрицы A, называются ***главными минорами*** формы f.

Справедлива следующая теорема:

Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если все ее главные миноры строго положительны.

Доказательство. При $n=1$ теорема верна, так как форма имеет в этом случае вид ax^2 и поэтому положительно определена тогда и только тогда, если $a>0$. Будем поэтому доказывать теорему для случая n неизвестных, предполагая, что для квадратичных форм от $n-1$ неизвестных она уже доказана.

Сделаем сначала следующее замечание:

Если квадратичная форма f с действительными коэффициентами, составляющими матрицу A, подвергается невырожденному линейному преобразованию с действительной матрицей Q, то ***знак определителя формы (т. е. определителя ее матрицы) не меняется.***

Действительно, после преобразования мы получаем квадратичную форму с матрицей $Q'AQ$, однако, ввиду $|Q'|=|Q|$,

$$|Q'AQ|=|Q'|\cdot|A|\cdot|Q|=|A|\cdot|Q|^2,$$

т. е. определитель $|A|$ умножается на положительное число.

Пусть теперь дана квадратичная форма

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Ее можно записать в виде

$$f=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2, \tag{3}$$

где φ будет квадратичной формой от $n-1$ неизвестных, составленной из тех членов формы f, в которые не входит неизвестное x_n.

Главные миноры формы φ совпадают, очевидно, со всеми, кроме последнего, главными минорами формы f.

Пусть форма f положительно определена. Форма φ также будет в этом случае положительно определенной: если бы существовали такие значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, не все равные нулю, при которых форма φ получает не строго положительное значение, то, полагая дополнительно $x_n=0$, мы получили бы, ввиду (3), также не строго положительное значение формы f, хотя не все значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ равны нулю. Поэтому, по индуктивному предположению, все главные миноры формы φ, т. е. все главные миноры формы f, кроме последнего, строго положительны. Что же касается последнего главного минора формы f, т. е. определителя самой матрицы A, то его положительность вытекает из следующих соображений: форма f, ввиду ее положительной определенности, невырожденным линейным преобразованием приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов. Определитель этого нормального вида строго положителен, а поэтому ввиду сделанного выше замечания положителен и определитель самой формы f.

Пусть теперь строго положительны все главные миноры формы f. Отсюда вытекает положительность всех главных миноров формы φ, т. е., по индуктивному предположению, положительная определенность этой формы. Существует, следовательно, такое невырожденное линейное преобразование неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, которое приводит форму φ к виду суммы $n-1$ положительных квадратов от новых неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Это линейное преобразование можно дополнить до (невырожденного) линейного преобразования всех неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полагая $x_n=y_n$. Ввиду (3) форма f приводится указанным преобразованием к виду

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in}y_iy_n+b_{nn}y_n^2; \tag{4}$$

точные выражения коэффициентов b_{in} для нас несущественны. Так как

$$y_i^2+2b_{in}y_iy_n=(y_i+b_{in}y_n)^2-b_{in}^2y_n^2,$$

то невырожденное линейное преобразование

$$\begin{aligned} z_i &= y_i+b_{in}y_n, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\\ z_n &= \qquad\quad y_n \end{aligned}$$

приводит, ввиду (4), форму f к каноническому виду

$$f=\sum_{i=1}^{n-1} z_i^2+cz_n^2. \tag{5}$$

Для доказательства положительной определенности формы f остается доказать положительность числа c. Определитель формы, стоящей в правой части равенства (5), равен c. Этот определитель должен, однако, быть положительным, так как правая часть равенства (5) получена из формы f двумя невырожденными линейными преобразованиями, а определитель формы f был, как последний из главных миноров этой формы, положительным.

Доказательство теоремы закончено.

Примеры 1. Квадратичная форма

$$f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

положительно определена, так как ее главные миноры

$$5,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1$$

положительны.

2. Квадратичная форма

$$f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

не будет положительно определенной, так как ее второй главный минор отрицателен:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Заметим, что по аналогии с положительно определенными квадратичными формами можно ввести *отрицательно определенные формы*, т. е. такие невырожденные квадратичные формы с действительными коэффициентами, нормальный вид которых содержит лишь отрицательные квадраты неизвестных. Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых состоит из квадратов одного знака, называются иногда *полуопределенными*. Наконец, *неопределенными* будут такие квадратичные формы, нормальный вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты неизвестных.