Федеральное агентство по образованию
Сибирский государственный аэрокосмический университет
имени академика М. Ф. Решетнева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Методические указания к выполнению лабораторной работы 3

Красноярск 2005

УДК 537.2(075.5)

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой физики Е. В. БАБКИН

Определение момента инерции физического маятника: Метод. указания к выполнению лабораторной работы 3 / Сост. Т. А. Слинкина; СибГАУ. Красноярск, 2005. 16 с.

В методической разработке приведены краткая теория, описание экспериментальной установки и порядок проведения работы. Даны вопросы и список рекомендуемой литературы, необходимые для подготовки, проведения и защиты работы. По содержанию и объему работа соответствует программе курса общей физики для высших технических учебных заведений.

Лабораторная работа 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Приборы и принадлежности: 1) оборотный маятник; 2) секундомер; 3) отвертка.

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Гармоническое колебательное движение

Колебательным движением, или просто *колебанием* называют всякое движение или изменение состояния, характеризуемое той или иной степенью повторяемости во времени значений физических величин, определяющих это движение или состояние. С колебаниями мы встречаемся при изучении самых различных физических явлений: звука, света, радиоволн, качаний маятников и т. д.

Колебательное движение называют *периодическим*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые гармонические колебания, то есть колебания, которые подчиняются закону косинуса или синуса:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x – смещение колеблющегося тела; A – амплитуда (максимальное смещение маятника от положения равновесия); ($\omega t + \varphi_0$) – *фаза колебаний* (определяет угловое смещение в данный момент времени t); φ_0 – *начальная фаза* (в момент отсчета времени $t = 0$); ω– *циклическая частота* (численно равна числу полных колебаний, совершаемых за 2π секунд).

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T},$$

где ν – *частота* (число полных колебаний, совершаемых за единицу времени); T – *период* (наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания). За время T совершается одно полное колебание.

Скорость тела найдем как первую производную от x во времени:

$$V = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $A\omega$ – амплитуда скорости.

Так как скорость тела при гармоническом колебании непрерывно изменяется, то это движение является ускоренным; при этом величина ускорения изменяется со временем по закону

$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A\omega^2$ – максимальное (амплитудное) значение ускорения.

Всякое колебательное движение есть движение, происходящее с ускорением, поэтому на колеблющиеся тела должны действовать силы, сообщающие им эти ускорения. В частности, если точечное тело массой m совершает гармоническое колебание, то, согласно второму закону механики, на него должна действовать сила, равная

$$F = ma = -mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x = -kx,$$

где $k = m\omega^2$ (k – постоянная положительная величина).

Силы такого вида, независимо от их природы, принято называть *квазиупругими*.

Для того чтобы сообщить системе смещение x, нужно совершить против квазиупругой силы работу (рис. 1)

$$A = \int_0^x (-F)dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{kx^2}{2}.$$

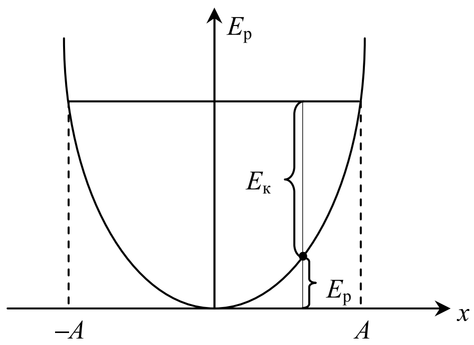


Рис. 1

Эта работа идет на создание потенциальной энергии системы

$$\left(E_р = \frac{kx^2}{2}\right).$$

Итак, уравнение второго закона Ньютона для тела массой m имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Коэффициент при x положителен. Поэтому его можно представить в виде

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ – дифференциальное уравнение гармонических колебаний, оно связывает величину $x(t)$ с ее второй производной по времени (уравнение такого вида называют уравнением *одномерного классического гармонического осциллятора с частотой* ω). Важным свойством этого уравнения является линейность.

Рассмотрим пример из осцилляторов – физический маятник.

Физическим маятником называют абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг горизонтальной оси O, не проходящей через центр тяжести.

В положении равновесия центр инерции маятника C находится под точкой подвеса O, на одной с ней вертикалью (рис. 2). При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия и аналогичен в этом случае квазиупругой силе. Поэтому так же, как смещению и квазиупругой силе, моменту M и угловому смещению φ нужно приписывать противоположные знаки.

Этот момент равен

$$M = -mgl \sin\varphi,$$

где m – масса маятника; l – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника.

Обозначим момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса, буквой J. На основании закона динамики вращательного движения можно написать:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi.$$

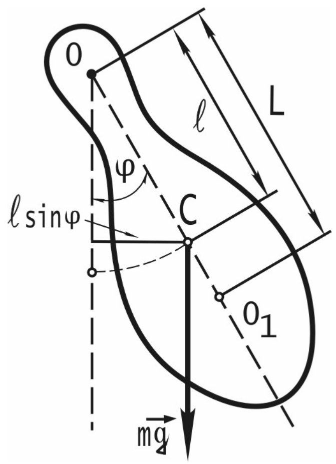


Рис. 2

В случае малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$, то

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $\omega^2 = \frac{mgl}{J}$.

Итак, при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника.

Период колебания физического маятника определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}.$$

Величину $L = \frac{J}{ml}$ *будем называть приведенной длиной физического маятника*. Таким образом, приведенная длина физического маятника – длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Из уравнения (1) следует, что период колебания увеличивается с увеличением момента инерции.

1.2. Определение момента инерции физического маятника

По формуле (1) можно определить ускорение свободного падения

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}, \qquad (2)$$

но для этого необходимо знать, кроме периода колебаний физического маятника, еще и его приведенную длину. Приведенную длину физического маятника можно определить с помощью оборотного маятника.

Оборотный маятник является частным случаем физического маятника. Он состоит из однородного стержня, на концы которого навинчены массивные грузы C и D (рис. 3).

С помощью стопорных винтов между грузами C и D закрепляются оборотные призмы A и B. *Применение оборотного маятника основано на свойстве сопряженности центра качения и точки подвеса.* Это свойство заключается в том, что во всяком физическом маятнике можно найти путем перемещения призм A и B такие две точки, что при последовательном подвешивании маятника за ту или другую из них период колебаний его T остается одним и тем же. Расстояние между этими точками определяет собой приведенную длину L данного маятника. Тогда $OC = l$ будет равна $0{,}5L$ ($l = 0{,}5L$) и формула периода колебаний физического маятника примет вид

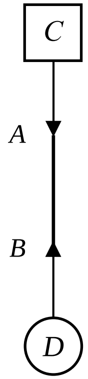


Рис. 3

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mgL}}, \qquad (3)$$

откуда

$$J = \frac{T^2 mgL}{8\pi^2}. \qquad (4)$$

Таким образом, для определения момента инерции физического маятника данной массы, необходимо определить период его колебаний T, приведенную длину L и ускорение свободного падения для данного места Земли.

2. Порядок работы

1. Подвесим маятник на призму A и измерим время 20-ти полных колебаний маятника. Повернем маятник на призму B и так же измерим время 20-ти полных колебаний. Перемещением призмы B вдоль стержня оборотного маятника добиваемся полного совпадения времени 20-ти полных колебаний маятника на призмах A и B.

2. Только после этого отсчитываем 100 колебаний на призме A, а затем на призме B и теперь уже путем незначительных перемещений призм добиваемся, чтобы время 100 колебаний на одной и другой призме отличались не более чем на 1 с.

3. При таком совпадении периодов на одной и другой призмах расстояние между призмами A и B будет равно приведенной длине физического маятника. Измеряем L с помощью штангенциркуля с точностью до 0,1 мм.

4. Так как $T_A = T_B$ и $T = \dfrac{t}{100}$ (где t – время 100 колебаний), то ускорение свободного падения удобно определять по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 L \cdot 10^4}{t_A t_B}, \qquad (5)$$

где t_A и t_B – время 100 полных колебаний соответственно на призмах A и B, измеренное с точностью не менее трех знаков после запятой.

5. Зная массу физического маятника m, приведенную длину L и, рассчитав ускорение свободного падения для данной точки Земли по формуле (5), определяем момент инерции маятника по формуле (4).

Замечание. Определять величину периода колебания физического маятника нужно только при малых амплитудах. Так, при длине маятника 1 м нижний конец его нужно отводить на 3–4 см от положения равновесия.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие колебания называют гармоническими? Дайте определения их основных характеристик (амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты).

2. Какие колебания называют свободными? В каком случае свободные колебания системы будут незатухающими?

3. Как связаны между собой амплитуды и фазы смещения, скорости и ускорения в прямолинейных гармонических колебаниях?

4. От чего зависит полная энергия тела, совершающего прямолинейные гармонические колебания?

5. Какой маятник называется физическим, оборотным?

6. Выведите формулу периода колебаний физического маятника.

7. Что называется приведенной длиной физического маятника?

8. От чего зависит период колебаний физического маятника?

Библиографический список

1. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. М.: Высш. шк., 1999. Т. 1–3.

2. Савельев И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. М.: Наука, 1998. Т. 1–5.

3. Трофимова, Т. И. Курс физики / И. Т. Трофимова. М. Высш. шк., 1998.

Приложение

Динамика твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Чтобы твердое тело с неподвижной осью привести во вращательное движение, необходимо хотя бы в одной из его точек приложить внешнюю силу $\vec{F}$, не проходящую через ось вращения и не параллельную ей. Рассмотрим простейший случай, когда сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения. При этом действие силы $\vec{F}$ зависит не только от ее величины, но и от кратчайшего расстояния от оси вращения до линии действия силы, называемом плечом l.

Произведение силы на плечо носит название *вращательного момента* M или *момента силы относительно оси вращения* (рис. П-1):

$$M = F \cdot l = Fr\sin\alpha \qquad (1)$$

или в векторной форме

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \qquad (2)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, соединяющий в плоскости действия силы ось с точкой приложения силы $\vec{F}$; α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

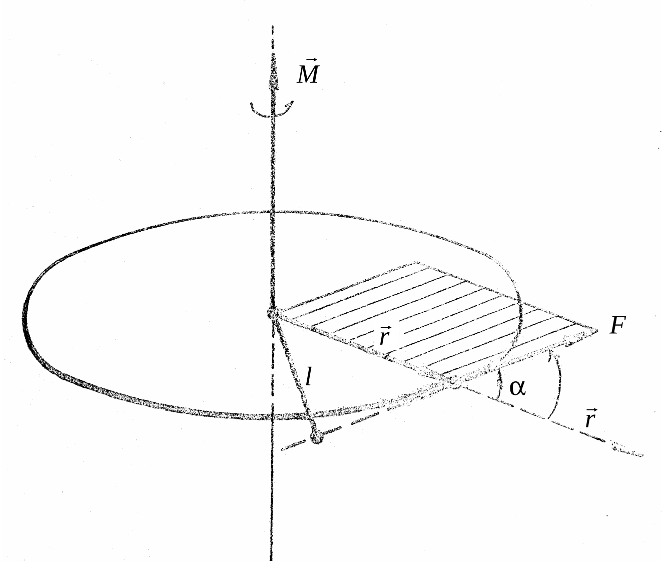
Вектор $\vec{M}$ считается направленным по оси вращения в сторону, определяемую правилом векторного произведения или правилом правого винта: если вращать головку винта, ориентированного вдоль оси вращения, в направлении действия силы, то поступательное движение его укажет направление момента $\vec{M}$.

В случае, когда на тело действуют несколько сил, результирующий момент сил равен векторной сумме моментов отдельных сил. Так как все моменты сил направлены по одной оси, то векторная сумма может быть заменена *алгебраической*.

Произведение массы материальной точки (частицы) на квадрат ее расстояния от оси вращения называется ***моментом инерции материальной точки*** *относительно этой оси.* Сумму моментов инерций материальных точек называют *моментом инерции тела* J относительно заданной оси

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \qquad (3)$$

В системе СИ единицей измерения момента инерции является кг · м^2. Величина момента инерции зависит не только от массы всего тела и ее распределения в теле, но также от положения тела относи-



тельно оси вращения.

Рис. П-1

Если ось вращения произвольна (рис. П-2), то по *теореме Штейнера* момент инерции J тела относительно оси O_1O_1' равен сумме момента инерции этого тела J_0 относительно оси OO', проходящей параллельно оси O_1O_1' через центр инерции тела, и произведению массы этого тела на квадрат расстояния α между осями O_1O_1' и OO', (рис. П-2):

$$J = J_O + m\alpha^2. \qquad (4)$$

Соотношение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J} \qquad (5)$$

называют *основным законом динамики вращения (или вторым законом Ньютона для вращательного движения)*. Этот закон формулируется так:

Угловое ускорение, которое тело приобретает под действием момента сил, прямо пропорционально результирующему моменту всех внешних сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно некоторой оси.

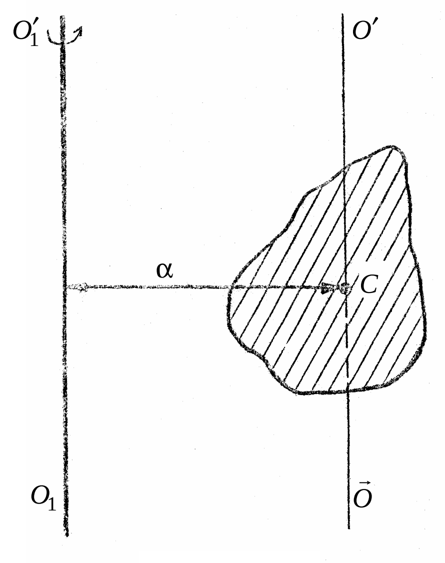


Рис. П-2

Из формулы (5) видно, что угловое ускорение, приобретаемое телом под действием момента силы, зависит от момента инерции тела. Чем больше момент инерции, тем меньше угловое ускорение. Следовательно, *момент инерции характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении подобно тому, как масса характеризует инерционные свойства тела при поступательном движении.* Однако в отличие от массы момент инерции твердого тела может иметь множество значений в соответствии с множеством возможных осей вращения. Поэтому, говоря о моменте инерции твердого тела, необходимо указать относительно какой оси он рассматривается.

Уравнение (5) можно записать так

$$\vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega}), \qquad (6)$$

где $J = \text{const}$.

Произведение момента инерции на угловую скорость вращения называется моментом импульса тела L относительно оси

$$J\vec{\omega} = \vec{L}. \qquad (7)$$

Учитывая (7), можно основное уравнение динамики вращательного движения (5) переписать так:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (8)$$

т. е. *скорость изменения момента импульса тела относительно некоторой оси равна результирующему моменту относительно той же оси всех внешних сил, приложенных к телу*.

Для выяснения физического смысла величины $J\omega$ вернемся к рассмотрению движения отдельных точек вращающегося тела [1]. Каждая из этих точек с массой m_i движется по окружности радиусом r_1.

Ее скорость в данный момент времени $\vec{v}_i$ и вектор импульса точки $m_i\vec{v}_i$ перпендикулярны к этому радиусу. Таким образом, радиус r_i является плечом по отношению к $m_i\vec{v}_i$ и мы можем (аналогично моменту силы) ввести понятие *момента импульса материальной точки* (*момента количества движения*)

$$L_i = m_i v_i r_i \qquad (9)$$

как произведение величины вектора количества движения на его плечо относительно оси вращения.

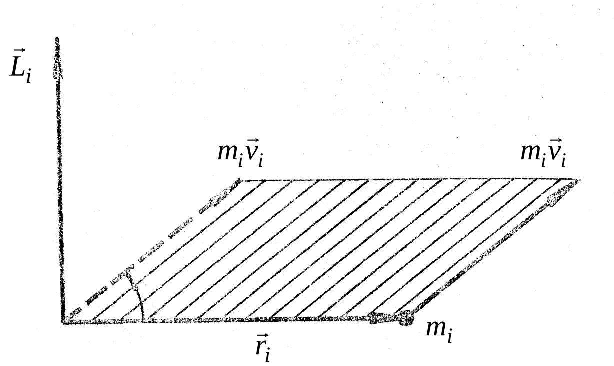


Рис. П-3

В векторной форме

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i], \qquad (10)$$

т. е. *векторное произведение радиуса-вектора* $\vec{r}_i$ *материальной точки на вектор импульса* $m_i\vec{v}_i$ *называют моментом импульса* $\vec{L}_i$ *этой материальной точки.* Вектор $\vec{L}_i$ направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы $\vec{r}_i$ и $m_i\vec{v}_i$ и образуют с ними *правую тройку векторов* (при наблюдении из конца $\vec{L}_i$ видно, что вращение по кратчайшему расстоянию оси $\vec{r}_i$ к $m_i\vec{v}_i$ происходит против часовой стрелки (рис. П-3)).

Алгебраическая сумма моментов количества движения всех точек вращающегося твердого тела носит название *момента количества движения тела L* относительно оси (*момента импульса тела*):

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i. \qquad (11)$$

Подставляя в (11) выражение для L_i из (9) и, используя $v = \omega r$, получаем, что

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J\omega,$$

т. е. величина $J\omega$ есть момент импульса вращающегося тела. Направление $J\vec{\omega}$ совпадает с направлением угловой скорости.

Если внешние силы отсутствуют (замкнутая система) или таковы, что их суммарный момент равен нулю $(\vec{M}_{\text{внеш}} = 0)$, то (8) принимает вид так называемого закона сохранения момента импульса тела [1]:

$$J\vec{\omega} = \text{const}.$$

Уравнение (5) по формуле сходно с уравнением второго закона Ньютона для поступательного движения $\left(\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}\right)$. Из их сопоставления вытекает, что при вращательном движении роль силы играет момент силы, роль массы — момент инерции и роль линейного ускорения — угловое ускорение. Для наглядности дадим это сопоставление в виде таблицы.

Поступательное движение	Вращательное движение около неподвижной оси
1. Линейная скорость $\vec{v}$	1. Угловая скорость $\vec{\omega}$
2. Линейное ускорение $\vec{a}$	2. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$
3. Масса m	3. Момент инерции J
4. Сила $\vec{F}$	4. Момент силы M
5. Импульс тела $\vec{p} = m\vec{v}$	5. Момент импульса $\vec{L} = J\vec{\omega}$
6. Второй закон Ньютона $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad m\vec{a} = \vec{F}$	6. Второй закон Ньютона $\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \vec{M}, \quad J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
7. Кинетическая энергия $T = \frac{m\vec{v}^2}{2}$	7. Кинетическая энергия $T = \frac{J\omega^2}{2}$
8. Работа силы $A = \int_0^l F dl$	8. Работа момента силы $A = \int_0^\varphi M d\varphi$
9. Связь работы с изменением кинетической энергии $A = \Delta T = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$	9. Связь работы с изменением кинетической энергии $A = \Delta T = \frac{J\omega_2^2 - J\omega_1^2}{2}$

Методическое издание

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Методические указания
к выполнению лабораторной работы 3

Составитель
СЛИНКИНА Тамара Александровна

Подписано в печать 12.01.2005. Формат 60×84/16. Бумага офисная.
Гарнитура «Таймс». Печать плоская. Уч.-изд. л. 1,11. Усл. п. л. 0,93.
Тираж 200 экз. Заказ С

Отпечатано в отделе копировально-множительной техники СибГАУ.
660014, г. Красноярск, просп. им. газ. «Красноярский рабочий», 31.