Домашнее задание, Исаенков Александр, Б.09

Задача 1 (Фурье)

Предложение

По заданной последовательности $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$ создадим новую последовательность $\{b_i\}_{i=0}^{n-1}$ по следующему правилу:

$$b_i = \left[\begin{smallmatrix}1, \text{ if } a_i < x \\ 0, \text{ if } a_i \geq x\end{smallmatrix}\right.$$

Посчитаем префиксные суммы $\{p_i\}_{i=0}^{n}$: $\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_i = b_i + p_{i-1}, \ \forall i \in [1, n] \end{cases}$

Рассмотрим такой многочлен: $f(y) := \left(\sum\limits_{i=0}^{n} y^{p_i}\right) \cdot \left(\left(\sum\limits_{i=0}^{n} y^{-p_i}\right) \cdot y^n\right)$.
(Перемножение выполним с помощью FFT за $O(n \log n)$)

$\forall k \in [1, n]$ коэффициент при y^{k+n} будет ответом.

Для $k = 0$ пройдём по массиву за $O(n)$, поддерживая счётчик cnt подряд идущих нулей. Если встретим 1 или конец последовательности, то добавим к ответу $\frac{1 + \text{cnt}}{2} \cdot \text{cnt}$ и обнулим cnt.

Доказательство: Заметим, что $\{p_i\}_{i=0}^{n} \uparrow$, и у $\sum\limits_{i=0}^{n} y^{p_i}$ коэффициент при y^{p_i} будет отражать то, насколько долго мы шли по последоватльности с одинаковыми p_i.

Теперь рассмотрим $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} y^{p_i}\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=0}^{n} y^{-p_i}\right)$. Множитель y^k равен сумме произведений коэффициентов при y^{p_i} и y^{-p_j} $\forall i, j : p_i - p_j = k$. Несложно заметить, что это и есть наш ответ.

Наконец, для того, чтобы дать FFT перемножить наши многочлены $\sum\limits_{i=0}^{n} y^{p_i}$ и $\sum\limits_{i=0}^{n} y^{-p_i}$, мы хотим сделать так, чтобы у второго из них не было мономов с отрицательной степенью, поэтому сначала домножаем его на y^n. ∎