



Pronóstico Probabilístico Basado en Predicción Conformal para Series Temporales: Comparación con Bootstrapping y DeepAR

Pedro José Leal Mesa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá D.C., Colombia
2026

Pronóstico Probabilístico Basado en Predicción Conformal para Series Temporales: Comparación con Bootstrapping y DeepAR

Pedro José Leal Mesa

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Ciencias - Estadística

Director:
Ph.D. Mario E. Arrieta-Prieto

Línea de Investigación:
Análisis de Series de Tiempo y Predicción Conformal

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá D.C., Colombia
2026

Dedicatoria

A mi papá Antonio Leal, a mis compañeros y a mi director por su guía y apoyo constante en este proceso de formación.

“Essentially, all models are wrong, but some are useful.”

— George E. P. Box

Agradecimientos

Al Ph.D. Mario E. Arrieta-Prieto, director de esta tesis, por su invaluable orientación y paciencia. Quiero agradecerle especialmente por haberme incentivado a salir de mi zona de confort y presentar los resultados preliminares de este trabajo en el escenario internacional.

Un agradecimiento profundo y especial por la oportunidad de participar en el **45th International Symposium on Forecasting** en China. Esta experiencia marcó un hito en mi carrera profesional y fue posible gracias a un esfuerzo colectivo que jamás olvidaré: a la Universidad Nacional de Colombia por brindarme los fondos institucionales, y muy especialmente a mis compañeros, amigos, conocidos y familiares, quienes con un cariño inmenso organizaron y participaron en una rifa para completar el dinero necesario para este viaje. Su solidaridad fue el motor que me llevó al otro lado del mundo.

A mis compañeros de la Maestría en Estadística, con quienes compartí este camino académico, por las discusiones técnicas y el apoyo moral en los momentos de mayor reto.

A mi padre, Antonio Leal, por ser mi apoyo incondicional y por creer en este proyecto desde el primer día. Todo este esfuerzo es también suyo.

Con gratitud,
Pedro José Leal Mesa

Contents

Agradecimientos	v
1 Introducción y Objetivos	1
1.1 Introducción	1
1.2 Planteamiento del problema	2
1.3 Justificación	3
1.4 Objetivos	4
1.4.1 Objetivo General	4
1.4.2 Objetivos Específicos	4
1.5 Estructura de la tesis	5
2 Fundamentos de Pronóstico Probabilístico y Sistemas de Predicción Conformal	6
2.1 Pronóstico Probabilístico	6
2.1.1 Definición y Objetivos	6
2.1.2 Ventajas del Pronóstico Probabilístico	8
2.2 Métricas para Evaluación de Pronósticos Probabilísticos	9
2.2.1 Reglas de Puntuación Propias	9
2.2.2 Continuous Ranked Probability Score (CRPS)	10
2.2.3 Expected Continuous Ranked Probability Score (ECRPS)	11
2.3 Test de Diebold-Mariano para Comparación de Precisión Predictiva	12
2.3.1 Formulación del Test	12
2.3.2 Distribución Asintótica y Estimación de la Varianza	13
2.3.3 Modificaciones para Muestras Pequeñas	14
2.3.4 Enfoque de Asintótica de Suavizado Fijo	15
2.3.5 Consideraciones sobre la Generación de Pronósticos	16
2.4 Predicción Conformal por Intervalos: El Enfoque IIE	17
2.4.1 El Concepto de No-Conformidad	17

<i>Contents</i>	vii
2.4.2 Protocolo de Construcción de Intervalos	18
2.5 Robustez ante la No-Intercambiabilidad: Aproximación de Barber	19
2.5.1 El Gap de Cobertura y Variación Total	19
2.5.2 Cuantiles Pesados y Decaimiento Temporal	19
2.6 Sistemas de Predicción Conformal (CPS): De Intervalos a Densidades	20
2.6.1 Formalización de la RPD y el Suavizado (τ)	20
2.6.2 La Máquina de Predicción de Mínimos Cuadrados (LSPM)	21
2.7 Sistemas de Predicción Conformal de Mondrian (MCPS)	21
2.7.1 Origen y Motivación: Validez Marginal vs. Condicional	22
2.7.2 La Taxonomía de Mondrian (κ)	23
2.7.3 Integración del Algoritmo MCPS	23
2.8 Análisis de la Consistencia Universal de Vovk	24
2.8.1 Definición de Consistencia Universal	24
2.8.2 Mecanismo de la Demostración: El Enfoque de Histograma	25
2.8.3 La Distancia de Lévy y la Convergencia Débil	25
2.8.4 Implicaciones para el LSPM y la Eficiencia	26
2.9 Hacia la Consistencia Universal en Series de Tiempo Ergódicas	26
2.9.1 Redefinición del Objetivo de Consistencia	26
2.9.2 Supuestos Fundamentales del Marco Propuesto	27
2.9.3 Mecanismo Propuesto: Transductor Conformal por Kernel	27
2.9.4 Discusión y Perspectivas Futuras	28
3 Metodología de Simulación	29
3.1 Introducción	29
3.2 Diseño de la Simulación	29
3.2.1 Definición de Escenarios	29
3.2.2 Justificación de la Selección	30
3.2.3 Variables y Dimensiones	30
3.3 Procesos Generadores de Datos (DGP)	30
3.3.1 Modelos ARMA (Escenario I)	30
3.3.2 Modelos ARIMA (Escenario II)	31
3.3.3 Modelos SETAR (Escenario III)	31
Bibliografía	33

List of Figures

2-1	Tipos de predicciones y su relación con la incertidumbre.	7
2-2	Estética de Mondrian como analogía de la partición del espacio \mathcal{Z}	22

List of Tables

3-1	Parámetros seleccionados para el Escenario I (ARMA).	31
3-2	Configuración del modelo SETAR (Escenario III).	32

1 Introducción y Objetivos

En este primer capítulo se describe el contexto general de la investigación, enfocándose en la importancia de la cuantificación de la incertidumbre en el análisis de series temporales. Se presenta el planteamiento del problema, los retos actuales de la predicción probabilística y la justificación académica de este trabajo. Finalmente, se definen los objetivos general y específicos que guiarán el desarrollo de la tesis y se presenta la estructura general del documento.

1.1 Introducción

La predicción es una tarea fundamental en diversas disciplinas, siendo de particular interés en el análisis de series de tiempo. Tradicionalmente, la literatura y la práctica se han centrado en estimaciones puntuales, como la media o el valor esperado de una variable futura. Sin embargo, este enfoque omite información crucial sobre la incertidumbre asociada a la predicción. Problemas clásicos, como la optimización de inventarios o la gestión de riesgos financieros, ilustran la necesidad de ir más allá de la media y considerar la distribución completa de los posibles resultados futuros para una toma de decisiones óptima.

La predicción probabilística aborda esta necesidad proporcionando no solo un valor central, sino una distribución de probabilidad o un conjunto de cuantiles sobre los valores futuros. En este contexto, surge la teoría de la *Predicción Conformal* (Conformal Prediction - CP) (Vovk, Gammerman, and Shafer 2005) como un marco robusto para la construcción de regiones de predicción con garantías de cobertura válidas. Sin embargo, es importante destacar que la CP fue desarrollada originalmente para datos idéntica e independientemente distribuidos (i.i.d.), es decir, observaciones sin ningún tipo de correlación temporal. Además, en su concepción inicial, la CP se enfoca principalmente en la construcción de intervalos de predicción en lugar de distribuciones predictivas completas. A diferencia de otros métodos, la CP posee validez exacta bajo los supuestos de inter-

cambiabilidad y es aplicable a diversos modelos predictivos, lo que la convierte en una alternativa metodológica prometedora para extender hacia el pronóstico probabilístico en series temporales.

La relevancia comparativa de los métodos que se analizarán en este trabajo radica en sus características distintivas: mientras que la CP ofrece garantías teóricas de cobertura bajo supuestos mínimos en escenarios i.i.d., los métodos de remuestreo como el *Bootstrapping* (Lahiri 2003) proporcionan flexibilidad no paramétrica para capturar la estructura de dependencia temporal, y los modelos de aprendizaje profundo como *DeepAR* (Salinas et al. 2020) destacan por su capacidad de modelar dependencias temporales complejas en múltiples series simultáneamente. Esta diversidad metodológica permite una evaluación integral de las fortalezas y limitaciones de cada enfoque.

La aplicación de CP a series de tiempo presenta desafíos críticos, ya que la dependencia temporal y los desplazamientos distribucionales suelen invalidar el supuesto de intercambiabilidad. Además, la transición de CP desde la generación de intervalos hacia distribuciones predictivas completas sigue siendo un área poco explorada. Este trabajo propone adaptar y extender estos métodos para manejar la no-intercambiabilidad y permitir la predicción distribucional, contrastando su desempeño con técnicas establecidas. Con ello, se busca cerrar una brecha relevante en la literatura: la falta de una evaluación sistemática de CP aplicada a series temporales para la obtención de distribuciones predictivas integrales.

1.2 Planteamiento del problema

La predicción en series de tiempo enfrenta retos fundamentales que motivan esta investigación. En primer lugar, la naturaleza secuencial de los datos introduce dependencia temporal que viola el supuesto de independencia fundamental en muchos métodos estadísticos estándar, incluyendo la predicción conformal en su formulación original. Esta dependencia temporal implica que las observaciones consecutivas están correlacionadas, lo que afecta tanto la validez de las garantías teóricas como la eficiencia de los métodos de cuantificación de incertidumbre. En segundo lugar, las características de los datos pueden cambiar con el tiempo a través de tendencias, estacionalidad o cambios estructurales, manifestando no estacionariedad que complica el modelado a largo plazo y desafía los supuestos de intercambiabilidad requeridos por métodos como la predicción conformal. Finalmente,

generar pronósticos probabilísticos que sean simultáneamente precisos (bien calibrados) e informativos (eficientes o nítidos) representa una tarea compleja, especialmente cuando se busca construir distribuciones predictivas completas en lugar de simples intervalos de predicción.

Los métodos actuales presentan limitaciones que este estudio busca contrastar. Por un lado, los modelos clásicos de tipo autorregresivo dependen fuertemente de supuestos sobre la estructura del proceso y la distribución del ruido (usualmente Gaussiano). Por otro lado, técnicas de remuestreo como el *Bootstrapping* (Lahiri 2003), aunque flexibles para capturar dependencia temporal, pueden tener dificultades cerca de límites de no estacionariedad. Finalmente, modelos modernos de aprendizaje profundo como *DeepAR* (Salinas et al. 2020) ofrecen un alto poder predictivo y la capacidad de generar distribuciones predictivas completas, pero a menudo operan como “cajas negras” y carecen de las garantías teóricas formales de cobertura que ofrece el enfoque conformal bajo condiciones de intercambiabilidad.

El problema central de este trabajo se resume en la siguiente pregunta: **¿Cómo adaptar y evaluar un modelo de predicción probabilística basado en la teoría conformal para series de tiempo que considere la dependencia temporal y permita la construcción de distribuciones predictivas completas, y cuál es su desempeño comparativo frente a métodos de referencia como Bootstrapping y DeepAR?**

1.3 Justificación

La cuantificación precisa de la incertidumbre es esencial para la toma de decisiones informada en áreas como la economía, meteorología y planificación de recursos. Adaptar la Predicción Conformal al dominio temporal representa un avance metodológico importante, ya que ofrece garantías de cobertura en muestra finita y una aplicabilidad general (libre de distribución) que originalmente fueron desarrolladas para el caso i.i.d.

A pesar de los desarrollos recientes en predicción conformal, existe un vacío notable en la literatura respecto a su aplicación sistemática en series temporales con características de no intercambiabilidad. La brecha metodológica que este trabajo busca cerrar es doble: por un lado, la mayoría de los trabajos en CP se han centrado en la construcción de intervalos de predicción bajo supuestos de intercambiabilidad, relegando el desarrollo de métodos para predicción distribucional completa en contextos temporales. Por otro lado, la

comparación rigurosa de CP adaptada mediante ponderación temporal frente a métodos establecidos y de vanguardia utilizando métricas probabilísticas apropiadas ha sido esencialmente explorada. En particular, la evaluación mediante el promedio del *Continuous Ranked Probability Score* (ECRPS) y pruebas de significancia estadística como el test de Diebold-Mariano permitirán establecer comparaciones robustas entre las predicciones de los métodos.

La comparación sistemática con métodos estándar (Bootstrapping), estado del arte (*DeepAR*) y otros métodos proporcionará una perspectiva clara sobre las fortalezas y debilidades del enfoque conformal en escenarios reales y simulados, facilitando la selección informada de métodos de pronóstico probabilístico en aplicaciones prácticas.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Formular un modelo fundamentado en la teoría conformal para realizar predicciones probabilísticas en el contexto de series de tiempo, evaluando su desempeño mediante una comparación con modelos establecidos como Bootstrapping y DeepAR.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar un modelo de predicción probabilística que integre la teoría de predicción conformal con técnicas de modelado de series temporales.
- Diseñar un entorno de simulación para evaluar el comportamiento del modelo propuesto en diversos escenarios de series temporales, incorporando estructuras temporales y condiciones de ruido variadas.
- Comparar el desempeño del modelo propuesto con modelos de referencia como DeepAR y Bootstrapping en cada escenario simulado, utilizando métricas enfocadas en predicciones probabilísticas.
- Implementar la metodología en un caso de estudio con datos reales, cuantificando su desempeño y relevancia práctica para aplicaciones de pronóstico.

1.5 Estructura de la tesis

El presente documento se organiza de la siguiente manera:

Capítulo 2: Predicción Conformal. Se presenta una introducción al pronóstico probabilístico, se explican las principales métricas para evaluar el desempeño de los modelos (incluyendo CRPS, calibración y nitidez), se desarrollan los fundamentos de los sistemas de predicción conformal, y se incluye una discusión sobre la extensión de la demostración de consistencia universal en escenarios estacionarios y ergódicos.

Capítulo 3: Metodología de Simulación. Se detalla el diseño del entorno de simulación, incluyendo la definición de los procesos generadores de datos, la formulación de los modelos predictivos, los cambios necesarios para su aplicación en este trabajo, y las extensiones de las simulaciones para diferentes escenarios.

Capítulo 4: Resultados de Simulación. Se exponen y analizan los hallazgos derivados del marco experimental descrito en el capítulo anterior. El análisis incluye la comparación del desempeño mediante la métrica ECRPS, el examen del comportamiento de modelos específicos ante diversos escenarios y la validación de los resultados a través de pruebas de significancia estadística empleando el test de Diebold-Mariano.

Capítulo 5: Aplicaciones a Datos Reales. Se implementan los métodos desarrollados en casos de estudio con datos reales, se presentan los resultados obtenidos y se discute su relevancia práctica.

Capítulo 6: Conclusiones. Se sintetizan los hallazgos principales del trabajo, se discuten las limitaciones del estudio, y se proponen direcciones para investigación futura.

2 Fundamentos de Pronóstico Probabilístico y Sistemas de Predicción Conformal

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de esta investigación. Se inicia con una introducción al pronóstico probabilístico y su importancia en el análisis de series temporales, seguido de una discusión detallada sobre las métricas utilizadas para evaluar el desempeño predictivo. Posteriormente, se desarrollan los conceptos fundamentales de la predicción conformal y sus adaptaciones para series de tiempo.

2.1 Pronóstico Probabilístico

El pronóstico probabilístico representa un cambio de paradigma fundamental en la predicción estadística, pasando de estimaciones puntuales a distribuciones de probabilidad completas sobre cantidades futuras de interés (Gneiting and Katzfuss 2014). A diferencia de las predicciones puntuales tradicionales, que proporcionan únicamente un valor esperado o una estimación central, el pronóstico probabilístico cuantifica la incertidumbre asociada a la predicción mediante la especificación de una distribución predictiva completa (Gneiting, Balabdaoui, and Raftery 2007).

2.1.1 Definición y Objetivos

Formalmente, sea Y_{t+h} una variable aleatoria que representa el valor de una serie temporal en el tiempo $t + h$, donde $h > 0$ denota el horizonte de predicción. Un pronóstico probabilístico es una distribución de probabilidad $F_{t+h|t}$ que caracteriza la incertidumbre

sobre Y_{t+h} dado el conjunto de información disponible hasta el tiempo t , denotado por \mathcal{F}_t (Gneiting and Katzfuss 2014).

Gneiting y Raftery explican que el objetivo fundamental del pronóstico probabilístico es maximizar la nitidez de las distribuciones predictivas sujeto a calibración. Estos dos conceptos son fundamentales para entender la calidad de un pronóstico probabilístico (Gneiting and Raftery 2007; Gneiting, Balabdaoui, and Raftery 2007):

- **Calibración:** Se refiere a la consistencia estadística entre las distribuciones predictivas y las observaciones. Una predicción está calibrada si las realizaciones son estadísticamente indistinguibles de muestras aleatorias de las distribuciones predictivas (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).
- **Nitidez:** Se refiere a la concentración de las distribuciones predictivas y es una propiedad exclusiva de los pronósticos. Cuanto más concentradas sean las distribuciones predictivas, mejor, siempre que se mantenga la calibración (Gneiting and Raftery 2007).

La Figura 2-1 ilustra la diferencia entre una predicción puntual, un intervalo de predicción y una distribución predictiva completa.

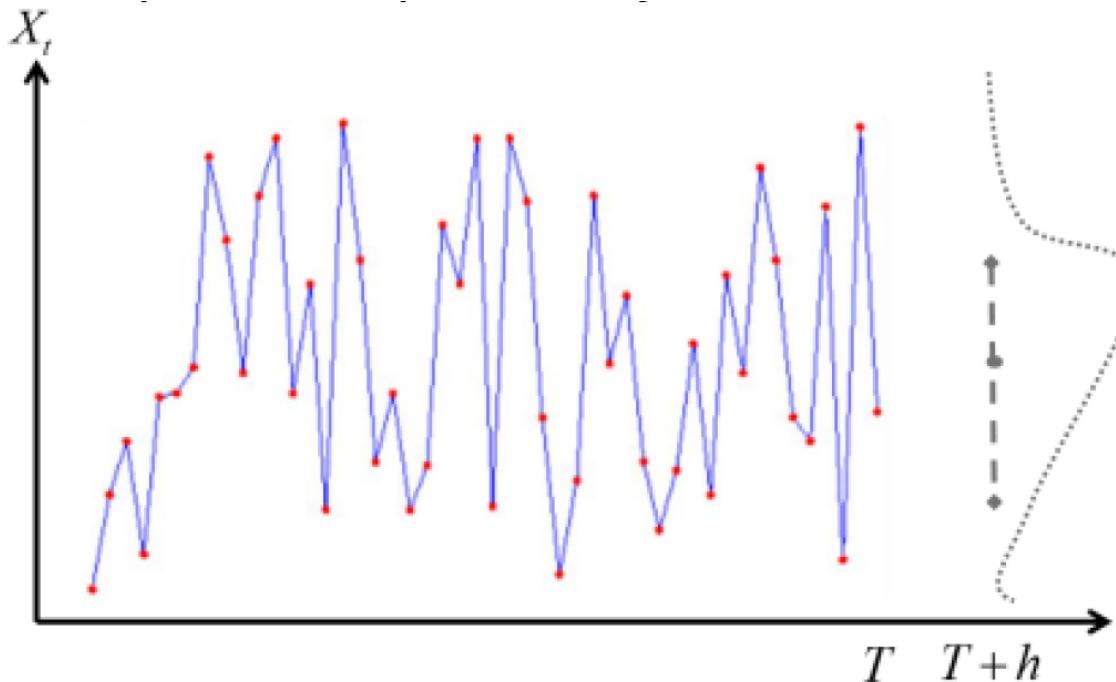


Figure 2-1: Tipos de predicciones y su relación con la incertidumbre.

2.1.2 Ventajas del Pronóstico Probabilístico

El pronóstico probabilístico ofrece múltiples ventajas sobre las predicciones puntuales tradicionales que justifican su adopción creciente en diversas aplicaciones (Gneiting and Katzfuss 2014):

1. **Cuantificación Completa de Incertidumbre:** A diferencia de las predicciones puntuales, que proporcionan únicamente un valor esperado, el pronóstico probabilístico caracteriza la incertidumbre de manera exhaustiva mediante distribuciones de probabilidad. Esto permite a los tomadores de decisiones evaluar tanto la magnitud esperada de un evento como la variabilidad asociada, facilitando una comprensión más profunda de los riesgos y oportunidades (Gneiting and Raftery 2007).
2. **Soporte para Decisiones Óptimas:** En contextos donde las decisiones deben tomarse bajo incertidumbre, como la gestión de inventarios, la planificación de recursos energéticos, o la asignación de capital, las distribuciones predictivas completas son esenciales. Permiten la optimización de funciones de utilidad esperada y la implementación de estrategias que consideren explícitamente el trade-off entre riesgo y recompensa (Gneiting and Katzfuss 2014).
3. **Evaluación de Eventos Extremos:** Las predicciones puntuales son inherente mente limitadas para caracterizar eventos raros o de cola. El pronóstico probabilístico, en cambio, permite estimar probabilidades de ocurrencia de eventos extremos, información crucial para la gestión de riesgos financieros y la planificación de infraestructura (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).
4. **Flexibilidad en la Comunicación de Incertidumbre:** Las distribuciones predictivas permiten múltiples formas de comunicación adaptadas a diferentes audiencias: intervalos de predicción, probabilidades de excedencia de umbrales críticos o visualizaciones completas mediante fan charts (Gneiting and Katzfuss 2014).

Estas ventajas han motivado la transición hacia pronósticos probabilísticos en campos tan diversos como meteorología, finanzas, energía, epidemiología y gestión de cadenas de suministro (Gneiting and Katzfuss 2014; Salinas et al. 2020).

2.2 Métricas para Evaluación de Pronósticos Probabilísticos

La evaluación rigurosa del desempeño predictivo es fundamental para comparar metodologías de pronóstico y guiar mejoras en los modelos. En el contexto de pronósticos probabilísticos, las métricas de evaluación deben considerar tanto la calibración como la nitidez de las distribuciones predictivas (Gneiting, Balabdaoui, and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

2.2.1 Reglas de Puntuación Propias

Una *regla de puntuación* (scoring rule) es una función $S : \mathcal{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que asigna una penalización numérica $S(F, y)$ a cada par formado por una distribución predictiva F y una observación realizada y (Gneiting and Raftery 2007). En nuestra notación, valores más bajos de la puntuación indican mejor desempeño predictivo.

Propriety y Strict Propriety

La *propriety* es una característica fundamental que debe satisfacer toda métrica de evaluación de pronósticos probabilísticos para garantizar que incentive predicciones honestas y bien calibradas (Gneiting and Raftery 2007).

Definición (Regla de Puntuación Proper): Una regla de puntuación S es *proper* relativa a una clase \mathcal{F} de distribuciones de probabilidad si

$$\mathbb{E}_G[S(G, Y)] \leq \mathbb{E}_G[S(F, Y)] \quad (2-1)$$

para todas las distribuciones $F, G \in \mathcal{F}$, donde $Y \sim G$ (Gneiting and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

Definición (Regla de Puntuación Strictly Proper): La regla de puntuación S es *strictly proper* si la desigualdad en (2-1) se cumple con igualdad únicamente cuando $F = G$ (Gneiting and Raftery 2007).

La importancia de la *propriety* radica en que establece un principio de alineación de incentivos: si un pronosticador desea minimizar su puntuación esperada, su mejor estrategia es

reportar sinceramente su verdadera distribución predictiva (Gneiting and Raftery 2007).

2.2.2 Continuous Ranked Probability Score (CRPS)

El *Continuous Ranked Probability Score* (CRPS) es una de las reglas de puntuación estrictamente propias más utilizadas para evaluar pronósticos probabilísticos de variables continuas (Gneiting and Katzfuss 2014). Su popularidad se debe a su sólida fundamentación teórica y su capacidad para evaluar simultáneamente calibración y nitidez (Gneiting and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

Definiciones y Representaciones

El CRPS admite varias representaciones matemáticas equivalentes, cada una con sus propias ventajas conceptuales y computacionales.

Representación integral: La definición original del CRPS está dada por (Gneiting and Raftery 2007):

$$\text{CRPS}(F, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - \mathbb{1}\{y \leq x\})^2 dx \quad (2-2)$$

donde F es la función de distribución acumulada (FDA) de la distribución predictiva y y es la observación realizada. Esta representación muestra que el CRPS mide el área entre la FDA predictiva y la FDA de la observación (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

Representación basada en esperanzas: Una forma alternativa, más conveniente para cálculos, está dada por (Gneiting and Raftery 2007):

$$\text{CRPS}(F, y) = \mathbb{E}_F |X - y| - \frac{1}{2} \mathbb{E}_F |X - X'| \quad (2-3)$$

donde X y X' son variables aleatorias independientes con distribución F . Esta representación revela una interpretación intuitiva del CRPS: el primer término mide la distancia esperada entre la predicción y la observación, mientras que el segundo término penaliza la dispersión de la distribución predictiva.

Propiedades del CRPS

El CRPS posee varias propiedades deseables que explican su amplia adopción en la literatura (Gneiting and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017):

1. **Strictly proper:** El CRPS es *strictly proper* relativo a la clase de todas las distribuciones de probabilidad en \mathbb{R} con primer momento finito (Gneiting and Raftery 2007).
2. **Unidades consistentes:** El CRPS se expresa en las mismas unidades que la variable pronosticada (Gneiting and Katzfuss 2014).
3. **Reducción al error absoluto:** Cuando F es una distribución degenerada (predicción puntual), el CRPS se reduce al error absoluto $|x - y|$, permitiendo un marco de evaluación unificado (Gneiting and Raftery 2007).
4. **Sensibilidad dual:** El CRPS evalúa simultáneamente la calibración y la nitidez (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

2.2.3 Expected Continuous Ranked Probability Score (ECRPS)

El desempeño predictivo global de una secuencia de n pares pronóstico-observación se cuantifica mediante el *Expected Continuous Ranked Probability Score* (ECRPS), definido como la media aritmética de los CRPS individuales:

$$\text{ECRPS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{CRPS}(F_i, y_i) \quad (2-4)$$

El ECRPS hereda todas las propiedades deseables del CRPS y proporciona un resumen numérico único del desempeño predictivo sobre todo el conjunto de evaluación. En particular, la comparación mediante ECRPS permite establecer comparaciones robustas entre diferentes métodos de pronóstico probabilístico.

2.3 Test de Diebold-Mariano para Comparación de Precisión Predictiva

La evaluación comparativa de distintas metodologías de pronóstico requiere herramientas estadísticas rigurosas que permitan determinar si las diferencias observadas en el desempeño predictivo son estadísticamente significativas o simplemente producto del azar. El test de Diebold-Mariano (Diebold and Mariano 1995) constituye uno de los procedimientos más ampliamente utilizados para este propósito, ofreciendo un marco general y flexible para contrastar la hipótesis nula de igual precisión predictiva entre dos métodos de pronóstico competidores.

2.3.1 Formulación del Test

Sean $\hat{y}_{t+h}^{(1)}$ y $\hat{y}_{t+h}^{(2)}$ dos pronósticos h pasos adelante para una variable y_{t+h} , producidos por dos metodologías diferentes. Los errores de pronóstico correspondientes son:

$$e_{t+h}^{(i)} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (2-5)$$

El test de Diebold-Mariano se basa en una función de pérdida $L(\cdot)$ que cuantifica el costo asociado con cada error de pronóstico. Para un horizonte temporal de evaluación que abarca n observaciones, se define el diferencial de pérdida en el tiempo t como:

$$d_t = L(e_t^{(1)}) - L(e_t^{(2)}), \quad t = 1, \dots, n \quad (2-6)$$

Tradicionalmente, el test de Diebold-Mariano se ha aplicado utilizando la pérdida cuadrática para evaluar estimaciones puntuales. Sin embargo, este marco es suficientemente general para acomodar cualquier función de pérdida (Diebold and Mariano 1995). En el presente trabajo, se utilizará principalmente el CRPS o el ECRPS, según corresponda como métrica de pérdida fundamental. Esto permite extender la comparación de Diebold-Mariano.

La hipótesis nula de igual precisión predictiva se formula como:

$$H_0 : \mathbb{E}[d_t] = 0 \quad (2-7)$$

Esta hipótesis establece que la pérdida esperada es idéntica para ambos métodos de pronóstico. El estadístico de prueba se construye a partir de la media muestral del diferencial de pérdida:

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n d_t \quad (2-8)$$

2.3.2 Distribución Asintótica y Estimación de la Varianza

Bajo condiciones de regularidad que incluyen la estacionariedad débil y la existencia de momentos de orden finito, Diebold y Mariano demuestran que:

$$\sqrt{n} \bar{d} \xrightarrow{d} N(0, 2\pi f_d(0)) \quad (2-9)$$

donde $f_d(0)$ denota la densidad espectral de la serie d_t evaluada en frecuencia cero, la cual equivale a la varianza de largo plazo:

$$\sigma^2 = \text{Var}(\sqrt{n} \bar{d}) = \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \quad (2-10)$$

siendo $\gamma_k = \text{Cov}(d_t, d_{t-k})$ la autocovarianza de orden k .

Un aspecto fundamental del test de Diebold-Mariano es que permite explícitamente la presencia de autocorrelación en el diferencial de pérdida d_t . Esta característica es especialmente relevante en el contexto de pronósticos a múltiples pasos adelante ($h > 1$), donde los errores de pronóstico exhiben típicamente estructura de autocorrelación hasta el orden $(h - 1)$ (Diebold and Mariano 1995). Esta estructura surge porque pronósticos óptimos h pasos adelante generan errores que siguen un proceso de media móvil MA($h - 1$).

En la práctica, la varianza de largo plazo σ^2 debe ser estimada. Diebold y Mariano proponen utilizar un estimador basado en autocovarianzas ponderadas por kernel:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^M k \left(\frac{k}{M} \right) \hat{\gamma}_k \quad (2-11)$$

donde $\hat{\gamma}_k = n^{-1} \sum_{t=k+1}^n (d_t - \bar{d})(d_{t-k} - \bar{d})$ son las autocovarianzas muestrales, $k(\cdot)$ es una función kernel (por ejemplo, kernel de Bartlett o Parzen), y M es el parámetro de ancho de banda o truncamiento que controla el número de autocovarianzas incluidas en la

estimación.

Para el caso específico donde se conoce que el diferencial de pérdida sigue un proceso MA($h - 1$), Diebold y Mariano sugieren simplificar el estimador utilizando $M = h - 1$ con kernel rectangular:

$$\hat{\sigma}_{DM}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^{h-1} \hat{\gamma}_k \quad (2-12)$$

El estadístico de prueba resultante es:

$$DM = \frac{\sqrt{n} \bar{d}}{\hat{\sigma}} \quad (2-13)$$

Bajo la hipótesis nula, este estadístico converge en distribución a una normal estándar: $DM \xrightarrow{d} N(0, 1)$. Para un test bilateral al nivel de significancia α , se rechaza H_0 si $|DM| > z_{\alpha/2}$, donde $z_{\alpha/2}$ denota el cuantil $(1 - \alpha/2)$ de la distribución normal estándar.

2.3.3 Modificaciones para Muestras Pequeñas

A pesar de la solidez teórica del test de Diebold-Mariano bajo asintótica estándar, diversos estudios han documentado distorsiones de tamaño en muestras finitas, particularmente cuando el número de observaciones de pronóstico es limitado. Harvey et al. (Harvey, Leybourne, and Newbold 1997) demostraron mediante simulaciones Monte Carlo que el test original tiende a sobrerrechazar la hipótesis nula (es decir, presenta un tamaño empírico superior al nominal), especialmente para horizontes de pronóstico largos y muestras pequeñas.

Para abordar estas limitaciones, Harvey et al. proponen una corrección del estadístico que mejora sustancialmente el desempeño en muestras finitas. La modificación se fundamenta en el uso de un estimador aproximadamente insesgado de la varianza de \bar{d} . Partiendo de la expresión exacta:

$$\text{Var}(\bar{d}) = n^{-1} \left[\gamma_0 + 2n^{-1} \sum_{k=1}^{h-1} (n - k) \gamma_k \right] \quad (2-14)$$

y calculando el valor esperado del estimador empleado en (2-12), se obtiene que:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_{DM}^2] \approx \left[\frac{n + 1 - 2h + n^{-1}h(h - 1)}{n} \right] \text{Var}(\bar{d}) \quad (2-15)$$

Esta relación sugiere el estadístico modificado:

$$DM^* = \left[\frac{n + 1 - 2h + n^{-1}h(h - 1)}{n} \right]^{1/2} DM \quad (2-16)$$

Adicionalmente, Harvey et al. recomiendan comparar DM^* con valores críticos de la distribución t de Student con $(n - 1)$ grados de libertad, en lugar de la distribución normal estándar. Esta segunda modificación reconoce implícitamente la incertidumbre adicional asociada con la estimación de la varianza en muestras finitas.

Los resultados de simulación reportados por Harvey et al. (Harvey, Leybourne, and Newbold 1997) indican que el test modificado presenta un tamaño empírico considerablemente más cercano al nominal, especialmente para $n \leq 50$ y horizontes de pronóstico $h \geq 2$. Aunque el test modificado exhibe una ligera pérdida de potencia en comparación con el test original cuando ambos están correctamente calibrados, esta reducción es marginal y ampliamente compensada por la ganancia en confiabilidad inferencial.

2.3.4 Enfoque de Asintótica de Suavizado Fijo

Una alternativa más reciente para abordar las distorsiones de tamaño del test de Diebold-Mariano en muestras pequeñas es el enfoque de *asintótica de suavizado fijo* (fixed-smoothing asymptotics), desarrollado por Coroneo e Iacone (Coroneo and Iacone 2020). Este marco teórico reconoce que en aplicaciones prácticas de evaluación de pronósticos, el tamaño muestral n es frecuentemente limitado, haciendo que la aproximación asintótica estándar (que requiere $M/n \rightarrow 0$) sea inadecuada.

La idea fundamental es mantener constante la razón entre el parámetro de ancho de banda y el tamaño muestral conforme n aumenta. Formalmente, bajo la *asintótica fixed-b*, se asume que $M/n \rightarrow b$ para algún $b \in (0, 1]$ fijo. Bajo este régimen asintótico alternativo, el estimador de varianza (2-11) ya no es consistente para σ^2 . Sin embargo, Kiefer y Vogelsang (2005) demostraron que el estadístico resultante converge a una distribución no estándar que depende de b y del kernel empleado.

Para el kernel de Bartlett, la distribución límite puede caracterizarse explícitamente, y sus cuantiles pueden aproximarse mediante fórmulas polinomiales. Específicamente, para un

test bilateral al 5% de significancia, el valor crítico $c_\alpha(b)$ satisface:

$$c_\alpha(b) \approx \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 b^3 \quad (2-17)$$

donde los coeficientes $\{\alpha_i\}$ han sido tabulados por Kiefer y Vogelsang.

Coroneo e Iacone (Coroneo and Iacone 2020) extienden este marco al contexto específico de evaluación de pronósticos, demostrando mediante simulaciones Monte Carlo que los tests basados en asintótica de suavizado fijo exhiben un tamaño empírico notablemente más preciso que el test de Diebold-Mariano estándar, incluso para muestras tan pequeñas como $n = 40$. Los autores proponen utilizar anchos de banda $M = \lfloor n^{1/2} \rfloor$ para el estimador con kernel de Bartlett, encontrando que esta elección ofrece un equilibrio favorable entre tamaño y potencia del test.

Una segunda variante dentro del paradigma de suavizado fijo es la *asintótica fixed-m*, que emplea un estimador de varianza basado en el periodograma suavizado con kernel de Daniell:

$$\hat{\sigma}_{DAN}^2 = \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^m I(\lambda_j) \quad (2-18)$$

donde $I(\lambda_j)$ denota el periodograma de d_t evaluado en la frecuencia de Fourier $\lambda_j = 2\pi j/n$, y m es un parámetro de truncamiento mantenido fijo conforme $n \rightarrow \infty$. Bajo condiciones de regularidad, el estadístico resultante converge a una distribución t con $2m$ grados de libertad (Coroneo and Iacone 2020).

2.3.5 Consideraciones sobre la Generación de Pronósticos

Un aspecto metodológico crucial del test de Diebold-Mariano es su tratamiento de los pronósticos como objetos dados o primitivos, sin considerar explícitamente el proceso de estimación de los modelos subyacentes. Esta perspectiva contrasta con marcos alternativos, como el de West (1996) y Clark y McCracken (2001), que desarrollan teoría asintótica específica para pronósticos derivados de modelos paramétricos estimados.

Cuando los pronósticos provienen de modelos con parámetros estimados, la incertidumbre asociada con la estimación puede afectar la distribución del estadístico de prueba. West (West 1996) demostró que, bajo ciertas condiciones, esta incertidumbre de estimación es asintóticamente despreciable si el tamaño de la muestra de entrenamiento R crece mucho

más rápido que el tamaño de la muestra de evaluación P (específicamente, si $P/R \rightarrow 0$).

Alternativamente, Giacomini y White (Giacomini and White 2006) proponen un marco donde la incertidumbre de estimación no desaparece asintóticamente (fijando $R < \infty$). Bajo este régimen, el test de Diebold-Mariano permanece válido, pero ahora evalúa el desempeño relativo de *métodos de pronóstico* (incluyendo el procedimiento de estimación) en lugar de *modelos de pronóstico* poblacionales. Este marco es particularmente apropiado cuando el objetivo es comparar estrategias de pronóstico que podrían implementarse en práctica, reconociendo que los modelos deben ser reestimados periódicamente con ventanas de datos finitas.

Para los propósitos de esta investigación, adoptamos la perspectiva de Giacomini y White, interpretando el test de Diebold-Mariano como una herramienta para evaluar el desempeño predictivo de métodos completos de pronóstico, incluyendo tanto la especificación del modelo como el procedimiento de estimación y actualización de parámetros.

2.4 Predicción Conformal por Intervalos: El Enfoque IIE

La predicción conformal clásica, introducida por Vovk et al. Vovk, Gammerman, and Shafer 2005, se fundamenta en la capacidad de generar conjuntos de predicción Γ^ϵ que garantizan una cobertura de confianza exacta para cualquier nivel de significancia $\epsilon \in (0, 1)$. A diferencia de los métodos estadísticos tradicionales que dependen de la asintótica (grandes muestras), la predicción conformal es válida para muestras finitas, siempre que se cumpla el supuesto de intercambiabilidad de los datos.

2.4.1 El Concepto de No-Conformidad

El núcleo de esta metodología es la *medida de no-conformidad* (NCM, por sus siglas en inglés). Una NCM es una función $A(B, z)$ que cuantifica el grado de “extrañeza” de un ejemplo z en relación con un multiconjunto (o *bag*) de ejemplos B . En el contexto de regresión, donde $z = (x, y)$, la medida de no-conformidad más común es el error absoluto de predicción, definido como:

$$\alpha_i = |y_i - \hat{y}_i| \quad (2-19)$$

donde \hat{y}_i es la estimación producida por un algoritmo de aprendizaje subyacente (denominado *underlying algorithm*). Es importante subrayar que la predicción conformal es agnóstica al modelo: puede envolver desde una regresión lineal simple hasta redes neuronales profundas, transformando sus predicciones puntuales en intervalos con validez estadística.

2.4.2 Protocolo de Construcción de Intervalos

Para construir un intervalo de predicción para un nuevo objeto x_n basado en un conjunto de entrenamiento z_1, \dots, z_{n-1} , el método IIE (Inducida por Errores) sigue un proceso de prueba de hipótesis inversa. Para cada valor potencial $y \in \mathbb{R}$:

1. **Aumentación del Conjunto:** Se asume hipotéticamente que la verdadera etiqueta de x_n es y , formando el conjunto aumentado $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$, donde $z_n = (x_n, y)$.
2. **Cálculo de Puntajes:** Se calculan los puntajes de no-conformidad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ para todos los elementos, incluyendo el ejemplo hipotético.
3. **Derivación del p-valor:** Se calcula la proporción de ejemplos que son “al menos tan extraños” como el nuevo ejemplo z_n :

$$p(y) = \frac{|\{i = 1, \dots, n : \alpha_i \geq \alpha_n\}|}{n} \quad (2-20)$$

4. **Inversión de la Región de Aceptación:** El intervalo de predicción $\Gamma^{1-\epsilon}$ se define como el conjunto de todos los valores y que no pueden ser rechazados al nivel de significancia ϵ :

$$\Gamma^\epsilon(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n) = \{y \in \mathbb{R} : p(y) > \epsilon\} \quad (2-21)$$

Este procedimiento garantiza que $P(y_n \notin \Gamma^\epsilon) \leq \epsilon$. Si los puntajes α_i tienen una distribución continua (sin empates), la probabilidad de error es exactamente ϵ Vovk, Gammerman, and Shafer 2005.

2.5 Robustez ante la No-Intercambiabilidad: Aproximación de Barber

Uno de los desafíos críticos en el análisis de series temporales es que el supuesto de intercambiabilidad rara vez se sostiene. Fenómenos como la autocorrelación, la heterocedasticidad y la deriva de parámetros (drift) invalidan la asunción de que el pasado y el futuro son estadísticamente idénticos. Barber et al. Barber et al. 2023 proponen una extensión fundamental para estos escenarios.

2.5.1 El Gap de Cobertura y Variación Total

Barber et al. formalizan la degradación de la validez conformal mediante el uso de la *Distancia de Variación Total* (d_{TV}). Si la distribución de los datos cambia en el tiempo, existe una brecha de cobertura (*coverage gap*). El teorema principal de Barber establece que la pérdida de cobertura está acotada por la suma de las distancias entre la distribución de los datos de entrenamiento y la distribución del dato de prueba:

$$\text{Error de Cobertura} \leq \epsilon + \sum_{i=1}^n w_i d_{TV}(Z_i, Z_{n+1}) \quad (2-22)$$

2.5.2 Cuantiles Pesados y Decaimiento Temporal

Para contrarrestar este efecto en series de tiempo, Barber et al. introducen los *Weighted Conformal Predictors*. En lugar de asignar un peso uniforme de $1/n$ a cada residuo histórico, se asignan pesos w_i que reflejan la relevancia del dato. En series no estacionarias, los datos más recientes son mejores predictores del futuro.

Se define comúnmente un decaimiento geométrico para los pesos:

$$w_i = \rho^{n-i}, \quad \rho \in (0, 1) \quad (2-23)$$

donde un ρ cercano a 1 asume una estabilidad lenta, mientras que un ρ menor reacciona rápidamente a cambios estructurales. El p-valor pesado se calcula como una suma pon-

derada de funciones indicadoras:

$$p^y = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i \mathbb{1}_{\alpha_i \geq \alpha_n} + w_n}{\sum_{j=1}^n w_j} \quad (2-24)$$

Este enfoque permite que la predicción conformal sea “adaptativa”, manteniendo la cobertura cercana al nivel nominal incluso cuando la serie temporal experimenta cambios súbitos en su media o varianza Barber et al. 2023.

2.6 Sistemas de Predicción Conformal (CPS): De Intervalos a Densidades

El Capítulo 7 de la obra de Vovk Vovk, Gammerman, and Shafer 2005 marca la transición de la predicción de conjuntos a la predicción de distribuciones completas. Un *Sistema de Predicción Conformal* (CPS) no entrega un rango, sino una *Distribución Predictiva Aleatorizada* (RPD), denotada como $\Pi_n(y, \tau)$, que representa la probabilidad de que la verdadera etiqueta sea menor o igual a y .

2.6.1 Formalización de la RPD y el Suavizado (τ)

Para asegurar que la distribución resultante sea continua y cumpla con las propiedades de una FDA (Función de Distribución Acumulada), se introduce una variable de suavizado $\tau \sim U(0, 1)$. La función Π se define como:

$$\Pi_n(y, \tau) := \frac{|\{i : \alpha_i < \alpha_n^y\}| + \tau |\{i : \alpha_i = \alpha_n^y\}|}{n} \quad (2-25)$$

Es vital notar que aquí α_i son puntajes de *conformidad* (no de no-conformidad). Un ejemplo común en regresión es $\alpha_i = y_i - \hat{y}_i$. El uso de la variable τ garantiza la *calibración fuerte en probabilidad*: los valores de la RPD evaluados en la verdadera etiqueta son independientes y uniformes en $[0, 1]$, permitiendo una cuantificación exacta de la incertidumbre en cualquier punto de la distribución Vovk, Nouretdinov, et al. 2017.

2.6.2 La Máquina de Predicción de Mínimos Cuadrados (LSPM)

La *Least Squares Prediction Machine* (LSPM) es la aplicación primordial de los CPS al ámbito de la regresión. La LSPM utiliza la estructura de la regresión lineal para optimizar la eficiencia de la distribución predictiva.

Variantes de la LSPM

Vovk distingue tres formas de calcular los residuos dentro de una LSPM:

1. **LSPM Ordinaria:** Los puntajes son simplemente los residuos de entrenamiento. Sin embargo, este enfoque tiende a ser demasiado optimista (sobreajuste), ya que el modelo ya ha “visto” los datos de entrenamiento.
2. **LSPM Eliminada (Deleted):** Utiliza un esquema de validación cruzada interna (*leave-one-out*). Para cada dato i , se entrena un modelo omitiendo ese dato específico, asegurando que el residuo sea una medida honesta de la capacidad de generalización.
3. **LSPM Estudiantizada:** Es la variante más robusta y matemáticamente rigurosa. Ajusta cada residuo por su apalancamiento (*leverage*), h_i , proveniente de la diagonal de la matriz *hat*:

$$\alpha_i := \frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma\sqrt{1 - h_i}} \quad (2-26)$$

2.7 Sistemas de Predicción Conformal de Mondrian (MCPS)

A pesar de las sólidas garantías de validez marginal que ofrecen los Sistemas de Predicción Conformal (CPS) descritos en la sección 2.6, estos presentan una limitación teórica y práctica fundamental: la garantía de error es un promedio sobre todo el espacio de datos. Esto implica que el sistema puede ser extremadamente preciso en ciertas regiones del espacio de características y, simultáneamente, cometer errores sistemáticos en otras, siempre que el error global no supere el nivel ϵ . Los *Sistemas de Predicción Conformal de Mondrian* (MCPS, por sus siglas en inglés) introducen el concepto de *validez condicional por categorías*, permitiendo que la calibración se mantenga exacta dentro de subconjuntos

específicos de los datos Vovk, Gammerman, and Shafer 2022.

2.7.1 Origen y Motivación: Validez Marginal vs. Condicional

El apelativo “Mondrian” deriva del estilo geométrico del pintor neerlandés Piet Mondrian, cuya estética se fundamenta en la compartmentación del lienzo en rectángulos de colores puros delimitados por una cuadrícula, tal como se ilustra en la Figura 2-2. Bajo esta analogía, un sistema de predicción conformal Mondriano partitiona el espacio de ejemplos \mathcal{Z} en categorías mutuamente excluyentes o taxonomías. Este enfoque permite que las garantías de cobertura sean válidas no solo de forma agregada, sino específicamente dentro de cada subgrupo definido, abordando así el problema de la validez condicional.

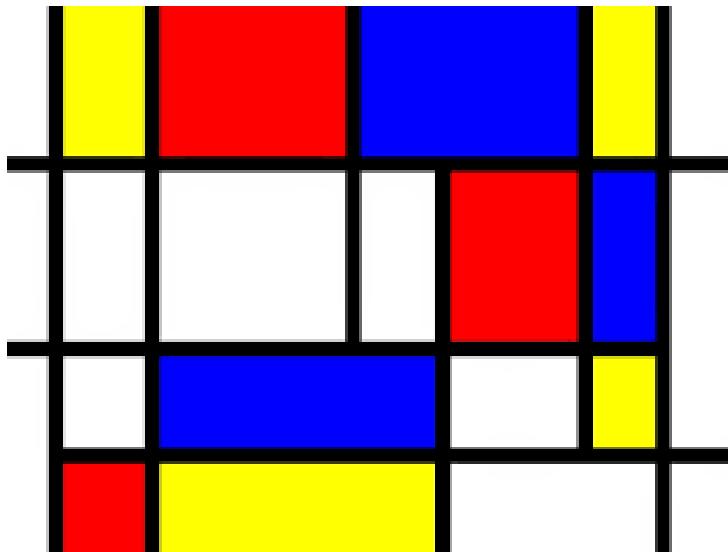


Figure 2-2: Estética de Mondrian como analogía de la partición del espacio \mathcal{Z} .

La necesidad de este enfoque surge cuando existen grupos de datos con dificultades predictivas heterogéneas. Por ejemplo, en una serie temporal de demanda eléctrica, predecir el consumo en un día festivo es intrínsecamente más difícil que en un día laboral. Un CPS global podría subestimar masivamente la incertidumbre en los días festivos, compensándola con una sobreestimación en los días laborales. El enfoque de Mondrian garantiza que la probabilidad de error sea exactamente ϵ tanto para los días laborales como para los festivos, de forma independiente Vovk, Nouretdinov, et al. 2017.

2.7.2 La Taxonomía de Mondrian (κ)

La base matemática de un MCPS es la *taxonomía*. Una taxonomía es una función medible $\kappa : \mathbb{N} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \rightarrow K$, donde K es un conjunto numerable de categorías. Para cada par de ejemplo (x_i, y_i) y su posición en la secuencia i , la taxonomía asigna una categoría κ_i .

Existen tres tipos principales de taxonomías aplicables a series temporales:

1. **Taxonomías de Objetos:** Dependen solo de las características x_i (ej. agrupar por niveles de volatilidad observada).
2. **Taxonomías de Etiquetas:** Dependen de la respuesta y_i . Esto da lugar a los *Label-Conditional Conformal Predictors*, vitales cuando el impacto de un error depende de la magnitud del valor (ej. errores en valores extremos son más costosos).
3. **Taxonomías Temporales:** Dependen del índice i . Este es el puente con el trabajo de Barber et al. Barber et al. 2023, donde la categoría de Mondrian puede ser una “ventana deslizante” de los datos más recientes para adaptarse a la no-intercambiabilidad.

2.7.3 Integración del Algoritmo MCPS

La integración de la lógica de Mondrian en un Sistema de Predicción Conformal se realiza modificando el cálculo del p-valor o de la RPD (Distribución Predictiva Aleatorizada). En lugar de comparar el puntaje del nuevo ejemplo α_n con todos los puntajes históricos, solo se compara con aquellos que pertenecen a su misma categoría.

Sea $\sigma = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ el conjunto de entrenamiento y $z_n = (x_n, y)$ el ejemplo de prueba con etiqueta hipotética y . El proceso para generar la RPD de Mondrian Π_M es el siguiente:

1. Se identifica la categoría del nuevo ejemplo: $k = \kappa(n, (x_n, y))$.
2. Se filtran los índices de los ejemplos de entrenamiento que pertenecen a dicha categoría:

$$S_k = \{i \in \{1, \dots, n-1\} : \kappa(i, z_i) = k\} \quad (2-27)$$

3. Se calculan los puntajes de conformidad α_i solo para $i \in S_k \cup \{n\}$.

4. La RPD de Mondrian se define como:

$$\Pi_M(y, \tau) := \frac{|\{i \in S_k : \alpha_i < \alpha_n^y\}| + \tau |\{i \in S_k \cup \{n\} : \alpha_i = \alpha_n^y\}|}{|S_k| + 1} \quad (2-28)$$

El denominador $|S_k| + 1$ es clave: representa el tamaño de la “muestra local”. Si una categoría tiene pocos ejemplos, la distribución predictiva será naturalmente más dispersa (reflejando mayor incertidumbre), mientras que categorías ricas en datos producirán densidades más nítidas Vovk, Gammerman, and Shafer 2022.

2.8 Análisis de la Consistencia Universal de Vovk

Para consolidar el marco teórico de esta investigación, es imperativo discutir el sustento matemático que garantiza que los Sistemas de Predicción Conformal (CPS) no solo son válidos en muestras finitas, sino también óptimos a medida que el volumen de datos aumenta. Este respaldo proviene de la demostración de la *consistencia universal* de Vovk (Vovk 2019), formalizada en el Teorema 31 de su obra reciente.

2.8.1 Definición de Consistencia Universal

En el contexto de los CPS, la validez (propiedad R2) asegura que el sistema está calibrado independientemente de la distribución de los datos. Sin embargo, la validez por sí sola no garantiza que la distribución predictiva Π_n sea una buena aproximación a la verdadera distribución condicional de las etiquetas $P(y|x)$.

Vovk define un sistema predictivo como *universalmente consistente* si, para cualquier medida de probabilidad P (bajo el modelo IID) y para cualquier función continua acotada f , se cumple que:

$$\int f d\Pi_n - \mathbb{E}_P(f|x_{n+1}) \rightarrow 0 \quad \text{en probabilidad cuando } n \rightarrow \infty \quad (2-29)$$

Esta propiedad implica que, asintóticamente, el CPS “encuentra” la verdadera distribución de probabilidad generadora de los datos, eliminando la incertidumbre epistémica conforme el tamaño de la muestra n tiende al infinito Vovk 2019.

2.8.2 Mecanismo de la Demostración: El Enfoque de Histograma

La prueba de Vovk sobre la existencia de un CPS universal se apoya en la construcción de un *Histogram Conformal Predictive System*. El argumento se divide en dos pilares fundamentales que vinculan la teoría de martingalas con la ley de los grandes números:

1. **Teorema de Convergencia de Martingalas de Lévy:** Vovk utiliza particiones anidadas del espacio de objetos X (celdas de histograma que se encogen conforme n crece). Según el teorema de Lévy, la esperanza condicional de la función sobre una celda que se reduce tiende al valor puntual de la esperanza condicional en el objeto de prueba x_{n+1} Vovk 2019.
2. **Ley de los Grandes Números (LGN):** Mientras las celdas se encogen para ganar resolución, el número de ejemplos dentro de cada celda debe tender a infinito ($nh_n \rightarrow \infty$, donde h_n es el ancho de la celda). Esto permite que la frecuencia empírica de las etiquetas dentro de la categoría de Mondrian converja a la esperanza real en esa región del espacio Vovk 2019.

2.8.3 La Distancia de Lévy y la Convergencia Débil

Un punto crítico de la demostración es el uso de la noción de Belyaev sobre secuencias de distribuciones que se aproximan débilmente. Vovk demuestra que bajo un CPS universal, la *Distancia de Lévy* entre la distribución predictiva conformal y la verdadera distribución condicional converge a cero en probabilidad Vovk 2019.

Este resultado es el que otorga rigor a la aplicación de CPS en problemas de alta criticidad, como el pronóstico de carga eléctrica o la gestión de riesgos financieros. Indica que el analista no tiene que elegir entre un modelo “seguro” (conformal) y un modelo “preciso” (bayesiando/paramétrico); el CPS universal ofrece ambas ventajas simultáneamente:

- **A corto plazo:** Garantiza cobertura exacta mediante calibración fuerte.
- **A largo plazo:** Garantiza convergencia a la distribución real de los datos sin requerir asunciones paramétricas.

2.8.4 Implicaciones para el LSPM y la Eficiencia

Aunque el modelo de mínimos cuadrados (LSPM) estudiado en la sección 2.6 es eficiente bajo ruido gaussiano, Vovk advierte que no es universalmente consistente si la relación real entre X y Y no es lineal Vovk, Gammerman, and Shafer 2005. Por ello, el desarrollo de CPS basados en kernels o en métodos de vecinos cercanos (como se discute en el capítulo 4 de su obra) es lo que permite alcanzar la consistencia universal en espacios de características complejos. Esta conclusión justifica el uso de arquitecturas no lineales conformizadas en la presente tesis, ya que heredan la solidez de la prueba de consistencia de Vovk.

2.9 Hacia la Consistencia Universal en Series de Tiempo Ergódicas

Si bien el trabajo de Vovk (Vovk 2019) establece una base sólida para la consistencia universal bajo el modelo IID, las aplicaciones en entornos reales, como las series de tiempo, exigen una transición hacia modelos que capturen la dependencia temporal. Inspirado en el formalismo de Vovk, el presente marco teórico propone las bases para un Sistema de Predicción Conformal (CPS) adaptado a procesos estocásticos donde la suposición de intercambiabilidad no se cumple.

2.9.1 Redefinición del Objetivo de Consistencia

En el contexto de series de tiempo, el objetivo de un CPS universalmente consistente es que la distribución predictiva generada, $Q_n(y)$, converja débilmente en probabilidad a la verdadera distribución condicional $F_{Y|X}(\cdot|X_{n+1})$. A diferencia del caso IID, aquí la “consistencia” implica que el sistema debe ser capaz de aprender la dinámica local y la estructura de dependencia del proceso a medida que la serie evoluciona.

Se plantea que, bajo este régimen, el sistema no solo debe ser asintóticamente válido, sino también *eficiente*, adaptándose a la heterocedasticidad (volatilidad cambiante) intrínseca de los datos secuenciales.

2.9.2 Supuestos Fundamentales del Marco Propuesto

Para transitar de la teoría de Vovk a procesos dependientes, se han identificado los siguientes supuestos como pilares necesarios para el desarrollo de una prueba de consistencia futura:

1. **Estacionariedad y Ergodicidad:** Se asume que el proceso $\{Z_t\}$ es estrictamente estacionario y ergódico. Esto garantiza que los promedios temporales observados en la ventana de datos converjan a los promedios del ensamble, permitiendo que el sistema “aprenda” de la historia pasada.
2. **Condición de α -mixing (Mezcla Fuerte):** Para manejar la dependencia, se requiere que el proceso sea α -mixing con coeficientes que decaigan algebraicamente ($\alpha(k) \leq Ck^{-\beta}, \beta > 2$). Este supuesto es crucial para aplicar teoremas límite central y asegurar que las observaciones lejanas en el tiempo sean casi independientes.
3. **Regularidad de Lipschitz:** A diferencia del enfoque de histograma de celdas discretas, aquí se asume que tanto la función de regresión $\mu(x)$ como la distribución de los residuos $G(s|x)$ son Lipschitz continuas respecto al espacio de covariables. Esto asegura que puntos cercanos en el tiempo y espacio tengan comportamientos predictivos similares.

2.9.3 Mecanismo Propuesto: Transductor Conformal por Kernel

En lugar del enfoque de histogramas anidados de Vovk, este marco propone una arquitectura adaptativa basada en dos componentes:

- **Ventana Temporal Móvil (L_n):** Un mecanismo de truncamiento que selecciona las últimas L_n observaciones. Para alcanzar la consistencia, el tamaño de esta ventana debe crecer con n pero a un ritmo controlado ($L_n \rightarrow \infty$).
- **Suavizado Espacial por Kernel (K, h_n):** En lugar de asignar pesos uniformes a la celda (como en Mondrian), se propone el uso de pesos de relevancia espacial $w_i = K(\frac{d(X_i, X_{n+1})}{h_n})$. Esto permite que el sistema pondere los residuos pasados no solo por su cercanía temporal, sino por su similitud en el espacio de características.

2.9.4 Discusión y Perspectivas Futuras

Esta formulación plantea que la convergencia de la integral $\int f dQ_n$ hacia la esperanza condicional real depende del balance entre el sesgo del kernel y la varianza inducida por la dependencia de los datos. Mientras que Vovk utiliza el Teorema de Lévy para martingalas, el análisis en series de tiempo requiere el uso de técnicas de *análisis de sesgo-varianza para estimadores no paramétricos en procesos mixing*.

Es importante notar que este planteamiento se presenta como una *hoja de ruta teórica*. La validación de que este transductor conformal ergódico alcanza la consistencia universal bajo cualquier proceso mixing representaría una extensión significativa del trabajo original de Vovk, unificando la robustez de la predicción conformal con la flexibilidad de la estimación no paramétrica para datos secuenciales de alta complejidad.

3 Metodología de Simulación

3.1 Introducción

En este capítulo se describe el diseño experimental utilizado para evaluar el desempeño de los métodos de pronóstico probabilístico bajo diferentes condiciones de generación de datos. El objetivo central de la simulación es comparar la capacidad de los modelos para capturar la incertidumbre en entornos con distintas propiedades estadísticas.

Siguiendo la lógica de validación cruzada para series de tiempo (Hyndman and Athanassopoulos 2021), cada serie generada se divide en un conjunto de entrenamiento (90% de los datos) y un conjunto de prueba o *back-testing* (10% restante). Este diseño permite evaluar no solo la precisión puntual, sino también la validez y nitidez de los intervalos de predicción generados en horizontes de tiempo fuera de la muestra.

3.2 Diseño de la Simulación

Para garantizar una evaluación exhaustiva, se han definido tres escenarios que representan los desafíos más comunes en el análisis de series temporales.

3.2.1 Definición de Escenarios

Los escenarios seleccionados son:

1. **Escenario I (Lineal Estacionario):** Basado en modelos ARMA, sirve como línea base para evaluar el desempeño en condiciones ideales de estabilidad.
2. **Escenario II (Lineal No Estacionario):** Basado en modelos ARIMA, introduce raíces unitarias para observar el comportamiento de los modelos ante tendencias

estocásticas.

3. **Escenario III (No Lineal Estacionario):** Basado en modelos SETAR, introduce cambios de régimen para evaluar la adaptabilidad ante comportamientos asimétricos.

3.2.2 Justificación de la Selección

La elección de estos tres escenarios permite aislar el efecto de la no-estacionalidad y la no-linealidad por separado. No se incluye un escenario **no lineal no estacionario** debido a la complejidad inherente en la identificación de estabilidad para este tipo de procesos. Como señalan Chen and Semmler (2023), la estabilidad en modelos con cambios de régimen ya es un desafío teórico considerable; combinarlo con no estacionalidad (raíces unitarias) suele derivar en procesos explosivos donde la inferencia estadística y la comparación de intervalos pierden robustez, dificultando la interpretación de las métricas de evaluación.

3.2.3 Variables y Dimensiones

Para cada escenario, se generan 500 series independientes de longitud $T = 200$. En cada serie se consideran:

- La variable dependiente Y_t .
- Un término de error $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, variando σ^2 para evaluar sensibilidad al ruido.
- Para modelos SETAR, una variable de umbral retardada Y_{t-d} .

3.3 Procesos Generadores de Datos (DGP)

3.3.1 Modelos ARMA (Escenario I)

Un proceso ARMA(p, q) se define mediante la ecuación:

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} \quad (3-1)$$

donde ϕ son los parámetros autoregresivos y θ los de media móvil (Hyndman and Athanasopoulos 2021).

Estacionariedad: Para que el proceso sea estacionario, las raíces del polinomio característico $\Phi(L) = 1 - \phi_1L - \cdots - \phi_pL^p$ deben caer fuera del círculo unitario. En nuestras simulaciones, se han seleccionado parámetros que garantizan esta condición, siguiendo los rangos propuestos por Arrieta Prieto (2017).

Modelo	Parámetros AR (ϕ)	Parámetros MA (θ)	σ^2
AR(1)	0.8	-	{0.5, 1.0}
MA(1)	-	0.6	{0.5, 1.0}
ARMA(1,1)	0.7	0.4	{1.0}

Table 3-1: Parámetros seleccionados para el Escenario I (ARMA).

3.3.2 Modelos ARIMA (Escenario II)

Para el escenario no estacionario, se utiliza un proceso ARIMA(p, d, q), donde la serie se diferencia d veces para alcanzar la estacionalidad:

$$\phi(L)(1 - L)^d Y_t = c + \theta(L)\epsilon_t \quad (3-2)$$

En este trabajo se utiliza $d = 1$, lo que implica que el proceso original contiene una raíz unitaria y su varianza crece linealmente con el tiempo, desafiando a los modelos de pronóstico que asumen estabilidad (Hyndman and Athanasopoulos 2021).

3.3.3 Modelos SETAR (Escenario III)

El modelo *Self-Exciting Threshold Autoregressive* (SETAR) permite modelar no linealidad mediante regímenes definidos por un valor umbral γ . Siguiendo a Chen and Semmler (2023), un SETAR con dos regímenes se expresa como:

$$Y_t = \begin{cases} c_1 + \sum_{i=1}^p \phi_{i,1} Y_{t-i} + \epsilon_t & \text{si } Y_{t-d} \leq \gamma \\ c_2 + \sum_{i=1}^p \phi_{i,2} Y_{t-i} + \epsilon_t & \text{si } Y_{t-d} > \gamma \end{cases} \quad (3-3)$$

Estabilidad: A diferencia de los modelos lineales, la estacionariedad en SETAR no solo

depende de que cada régimen sea localmente estable. Chen and Semmler (2023) demuestran que la estabilidad global depende del *Radio Espectral Conjunto* (Joint Spectral Radius) de las matrices de los regímenes. Para la simulación, se han configurado parámetros que aseguran que el sistema no sea explosivo a largo plazo (ver Tabla 3-2).

Elemento	Régimen 1 ($Y_{t-1} \leq 0$)	Régimen 2 ($Y_{t-1} > 0$)
Constante (c)	0.5	-0.2
Coeficiente AR (ϕ_1)	0.7	-0.5
Umbral (γ)		0
Retraso (d)		1

Table 3-2: Configuración del modelo SETAR (Escenario III).

Estos procesos generadores permitirán contrastar si las métricas de evaluación presentadas en el Capítulo 2 son sensibles a la estructura subyacente de los datos.

Bibliografía

- Arrieta Prieto, Mario Enrique (2017). “Evaluation of the Sieve Bootstrap’s performance in comparison with the classic approach for forecasting purposes in time series analysis”. In: *XXVII Simposio Internacional de Estadística / 5th International Workshop on Applied Statistics*. Poster Presentation. Medellín, Colombia.
- Barber, Rina Foygel et al. (2023). *Conformal Prediction Beyond Exchangeability*. arXiv preprint arXiv:2202.13415v5. Version 5. Accessed on January 5, 2026. arXiv: [2202.13415 \[stat.ME\]](https://arxiv.org/abs/2202.13415).
- Chen, Pu and Willi Semmler (Nov. 2023). “Stability in Threshold VAR Models”. In: *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. DOI: [10.1515/snnde-2022-0099](https://doi.org/10.1515/snnde-2022-0099).
- Coroneo, Laura and Fabrizio Iacone (2020). “Comparing Predictive Accuracy in Small Samples Using Fixed-Smoothing Asymptotics”. In: *Journal of Applied Econometrics* 35.3, pp. 391–409. DOI: [10.1002/jae.2756](https://doi.org/10.1002/jae.2756).
- Diebold, Francis X. and Roberto S. Mariano (1995). “Comparing Predictive Accuracy”. In: *Journal of Business & Economic Statistics* 13.3, pp. 253–263. DOI: [10.1080/07350015.1995.10524599](https://doi.org/10.1080/07350015.1995.10524599).
- Giacomini, Raffaella and Halbert White (2006). “Tests of Conditional Predictive Ability”. In: *Econometrica* 74.6, pp. 1545–1578. DOI: [10.1111/j.1468-0262.2006.00718.x](https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2006.00718.x).
- Gneiting, Tilmann, Fadoua Balabdaoui, and Adrian E. Raftery (2007). “Probabilistic Forecasts, Calibration and Sharpness”. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 69.2, pp. 243–268. DOI: [10.1111/j.1467-9868.2007.00587.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2007.00587.x).
- Gneiting, Tilmann and Matthias Katzfuss (2014). “Probabilistic Forecasting”. In: *Annual Review of Statistics and Its Application* 1, pp. 125–151. DOI: [10.1146/annurev-statistics-062713-085831](https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-062713-085831).
- Gneiting, Tilmann and Adrian E. Raftery (2007). “Strictly Proper Scoring Rules, Prediction, and Estimation”. In: *Journal of the American Statistical Association* 102.477, pp. 359–378. DOI: [10.1198/016214506000001437](https://doi.org/10.1198/016214506000001437).

- Harvey, David, Stephen Leybourne, and Paul Newbold (1997). “Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors”. In: *International Journal of Forecasting* 13.2, pp. 281–291. DOI: [10.1016/S0169-2070\(96\)00719-4](https://doi.org/10.1016/S0169-2070(96)00719-4).
- Hyndman, Rob J and George Athanasopoulos (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd. Melbourne, Australia: OTexts. URL: <https://otexts.com/fpp3/>.
- Lahiri, S. N. (2003). *Resampling Methods for Dependent Data*. Springer Series in Statistics. New York: Springer. ISBN: 978-1-4419-1848-2. DOI: [10.1007/978-1-4757-3803-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3803-2).
- Salinas, David et al. (2020). “DeepAR: Probabilistic Forecasting with Autoregressive Recurrent Networks”. In: *International Journal of Forecasting* 36.3, pp. 1181–1191. DOI: [10.1016/j.ijforecast.2019.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2019.07.001). arXiv: [1704.04110](https://arxiv.org/abs/1704.04110).
- Thorarinsdottir, Thordis L. and Nina Schuhéen (2017). “Verification: Assessment of Calibration and Accuracy”. In: *Norwegian Computing Center SAMBA/17/17*.
- Vovk, Vladimir (2019). “Universally consistent conformal predictive distributions”. In: *Proceedings of the Eighth Workshop on Conformal and Probabilistic Prediction and Applications (COPA 2019)*. Vol. 105. Proceedings of Machine Learning Research. PMLR, pp. 105–122. URL: <http://proceedings.mlr.press/v105/vovk19a.html>.
- Vovk, Vladimir, Alexander Gammerman, and Glenn Shafer (2005). *Algorithmic Learning in a Random World*. New York: Springer. DOI: [10.1007/b138548](https://doi.org/10.1007/b138548).
- (2022). *Algorithmic Learning in a Random World*. Second. Cham, Switzerland: Springer. ISBN: 978-3-031-06648-1. DOI: [10.1007/978-3-031-06649-8](https://doi.org/10.1007/978-3-031-06649-8).
- Vovk, Vladimir, Ilia Nouretdinov, et al. (2017). *Conformal predictive distributions with kernels*. Working paper 20. Working Paper 20. Accessed on January 5, 2026. On-line compression modelling project (new series). URL: <http://alrw.net/articles/CPDK.pdf>.
- West, Kenneth D. (1996). “Asymptotic Inference about Predictive Ability”. In: *Econometrica* 64.5, pp. 1067–1084. DOI: [10.2307/2171956](https://doi.org/10.2307/2171956).