



Pronóstico Probabilístico Basado en Predicción Conformal para Series Temporales: Comparación con Bootstrapping y DeepAR

Pedro José Leal Mesa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá D.C., Colombia
2026

Pronóstico Probabilístico Basado en Predicción Conformal para Series Temporales: Comparación con Bootstrapping y DeepAR

Pedro José Leal Mesa

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Ciencias - Estadística

Director:
Ph.D. Mario E. Arrieta-Prieto

Línea de Investigación:
Análisis de Series de Tiempo y Predicción Conformal

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística
Bogotá D.C., Colombia
2026

Dedicatoria

A mi papá Antonio Leal, a mis compañeros y a mi director por su guía y apoyo constante en este proceso de formación.

“Essentially, all models are wrong, but some are useful.”

— George E. P. Box

Agradecimientos

Al Ph.D. Mario E. Arrieta-Prieto, director de esta tesis, por su invaluable orientación y paciencia. Quiero agradecerle especialmente por haberme incentivado a salir de mi zona de confort y presentar los resultados preliminares de este trabajo en el escenario internacional.

Un agradecimiento profundo y especial por la oportunidad de participar en el **45th International Symposium on Forecasting** en China. Esta experiencia marcó un hito en mi carrera profesional y fue posible gracias a un esfuerzo colectivo que jamás olvidaré: a la Universidad Nacional de Colombia por brindarme los fondos institucionales, y muy especialmente a mis compañeros, amigos, conocidos y familiares, quienes con un cariño inmenso organizaron y participaron en una rifa para completar el dinero necesario para este viaje. Su solidaridad fue el motor que me llevó al otro lado del mundo.

A mis compañeros de la Maestría en Estadística, con quienes compartí este camino académico, por las discusiones técnicas y el apoyo moral en los momentos de mayor reto.

A mi padre, Antonio Leal, por ser mi apoyo incondicional y por creer en este proyecto desde el primer día. Todo este esfuerzo es también suyo.

Con gratitud,
Pedro José Leal Mesa

Contents

Agradecimientos	v
1 Introducción y Objetivos	1
1.1 Introducción	1
1.2 Planteamiento del problema	2
1.3 Justificación	3
1.4 Objetivos	4
1.4.1 Objetivo General	4
1.4.2 Objetivos Específicos	4
1.5 Estructura de la tesis	5
2 Sistemas de Predicción Conformal	6
2.1 Pronóstico Probabilístico	6
2.1.1 Definición y Objetivos	6
2.1.2 Ventajas del Pronóstico Probabilístico	8
2.2 Métricas para Evaluación de Pronósticos Probabilísticos	9
2.2.1 Reglas de Puntuación Propias	9
2.2.2 Continuous Ranked Probability Score (CRPS)	10
2.2.3 Expected Continuous Ranked Probability Score (ECRPS)	11
2.3 Test de Diebold-Mariano para Comparación de Precisión Predictiva	12
2.3.1 Formulación del Test	12
2.3.2 Distribución Asintótica y Estimación de la Varianza	13
2.3.3 Modificaciones para Muestras Pequeñas	14
2.3.4 Enfoque de Asintótica de Suavizado Fijo	15
2.3.5 Consideraciones sobre la Generación de Pronósticos	16
2.4 Predicción Conformal por Intervalos: El Enfoque IIE	17
2.4.1 El Concepto de No-Conformidad	17
2.4.2 Protocolo de Construcción de Intervalos	18

<i>Contents</i>	vii
2.5 Robustez ante la No-Intercambiabilidad: Aproximación de Barber	19
2.5.1 El Gap de Cobertura y Variación Total	19
2.5.2 Cuantiles Pesados y Decaimiento Temporal	19
2.6 Sistemas de Predicción Conformal (CPS): De Intervalos a Densidades	20
2.6.1 Formalización de la RPD y el Suavizado (τ)	20
2.6.2 La Máquina de Predicción de Mínimos Cuadrados (LSPM)	21
2.7 Sistemas de Predicción Conformal de Mondrian (MCPS)	21
2.7.1 Origen y Motivación: Validez Marginal vs. Condicional	22
2.7.2 La Taxonomía de Mondrian (κ)	23
2.7.3 Integración del Algoritmo MCPS	23
2.8 Análisis de la Consistencia Universal de Vovk	24
2.8.1 Definición de Consistencia Universal	24
2.8.2 Mecanismo de la Demostración: El Enfoque de Histograma	25
2.8.3 La Distancia de Lévy y la Convergencia Débil	25
2.8.4 Implicaciones para el LSPM y la Eficiencia	26
2.9 Hacia la Consistencia Universal en Series de Tiempo Ergódicas	26
2.9.1 Redefinición del Objetivo de Consistencia	26
2.9.2 Supuestos Fundamentales del Marco Propuesto	27
2.9.3 Mecanismo Propuesto: Transductor Conformal por Kernel	27
2.9.4 Discusión y Perspectivas Futuras	28
3 Simulación	29
3.1 Introducción	29
3.2 Diseño de la Simulación	30
3.2.1 Selección de Escenarios de Evaluación	30
3.2.2 Estructura del Diseño Factorial	32
3.2.3 Protocolo de Simulación y Partición de Datos	33
3.3 Procesos Generadores de Datos	35
3.3.1 Procesos ARMA: Escenario Lineal Estacionario	35
3.3.2 Procesos ARIMA: Escenario Lineal No Estacionario	38
3.3.3 Procesos SETAR: Escenario No Lineal Estacionario	40
3.4 Modelos predictivos	44
3.4.1 Circular Block Bootstrap (CBB)	44
3.4.2 Sieve Bootstrap (SB)	47
3.4.3 Least Squares Prediction Machine (LSPM)	51

3.4.4	Least Squares Prediction Machine with Weighted Residuals (LSPMW)	55
3.4.5	Mondrian Conformal Predictive System (MCPS)	60
3.4.6	Adaptive Volatility Mondrian Conformal Predictive System (AV-MCPS)	65
3.4.7	DeepAR: Probabilistic Forecasting with Autoregressive Recurrent Networks	72
3.4.8	Autoregressive Exponentially-weighted Polynomial Distribution (AREPD)	78
3.4.9	Ensemble Conformalized Quantile Regression (EnCQR-LSTM) . . .	84
3.5	Simulaciones Complementarias	90
3.5.1	Simulación 1: Impacto de la Diferenciación en ARIMA ($d = 1$) . . .	91
3.5.2	Simulación 2: Límites de Integración y Persistencia (Multi-D) . . .	92
3.5.3	Simulación 3: Efectos del Tamaño Muestral Absoluto	93
3.5.4	Simulación 4: Proporciones de Calibración con Tamaño Fijo	94
3.5.5	Simulación 5: Predicción Multi-paso (Horizonte h)	95
3.5.6	Resumen de Evaluaciones Complementarias	98
Bibliografía		100

List of Figures

2-1	Tipos de predicciones y su relación con la incertidumbre.	7
2-2	Estética de Mondrian como analogía de la partición del espacio \mathcal{Z}	22

List of Tables

3-1	Configuraciones paramétricas para procesos ARMA.	37
3-2	Configuraciones paramétricas para procesos ARIMA.	40
3-3	Configuraciones paramétricas para procesos SETAR.	44
3-4	Comparativa: Teoría vs. Implementación del CBB	46
3-5	Comparativa: Teoría vs. Implementación del Sieve Bootstrap	50
3-6	Comparativa: Teoría vs. Implementación del LSPM	54
3-7	Comparativa: Teoría vs. Implementación del LSPMW	58
3-8	Comparación entre MCPS Teórico y su Implementación para Series Temporales	64
3-9	Comparación entre MCPS Estándar y AV-MCPS	70
3-10	Comparación entre DeepAR Original y DeepAR Adaptado	76
3-11	Comparación Conceptual de AREPD con Métodos Relacionados	80
3-12	Comparación entre AREPD Teórico y AREPD Implementado	82
3-13	Comparación entre teoría y práctica en EnCQR-LSTM	88
3-14	Combinaciones de tamaños muestrales evaluadas	94
3-15	Proporciones de calibración evaluadas (N=240 fijo)	94
3-16	Resumen de la carga experimental de simulaciones complementarias	98

1 Introducción y Objetivos

En este primer capítulo se describe el contexto general de la investigación, enfocándose en la importancia de la cuantificación de la incertidumbre en el análisis de series temporales. Se presenta el planteamiento del problema, los retos actuales de la predicción probabilística y la justificación académica de este trabajo. Finalmente, se definen los objetivos general y específicos que guiarán el desarrollo de la tesis y se presenta la estructura general del documento.

1.1 Introducción

La predicción es una tarea fundamental en diversas disciplinas, siendo de particular interés en el análisis de series de tiempo. Tradicionalmente, la literatura y la práctica se han centrado en estimaciones puntuales, como la media o el valor esperado de una variable futura. Sin embargo, este enfoque omite información crucial sobre la incertidumbre asociada a la predicción. Problemas clásicos, como la optimización de inventarios o la gestión de riesgos financieros, ilustran la necesidad de ir más allá de la media y considerar la distribución completa de los posibles resultados futuros para una toma de decisiones óptima.

La predicción probabilística aborda esta necesidad proporcionando no solo un valor central, sino una distribución de probabilidad o un conjunto de cuantiles sobre los valores futuros. En este contexto, surge la teoría de la *Predicción Conformal* (Conformal Prediction - CP) (Vovk, Gammerman, and Shafer 2005) como un marco robusto para la construcción de regiones de predicción con garantías de cobertura válidas. Sin embargo, es importante destacar que la CP fue desarrollada originalmente para datos idéntica e independientemente distribuidos (i.i.d.), es decir, observaciones sin ningún tipo de correlación temporal. Además, en su concepción inicial, la CP se enfoca principalmente en la construcción de intervalos de predicción en lugar de distribuciones predictivas completas. A diferencia de otros métodos, la CP posee validez exacta bajo los supuestos de inter-

cambiabilidad y es aplicable a diversos modelos predictivos, lo que la convierte en una alternativa metodológica prometedora para extender hacia el pronóstico probabilístico en series temporales.

La relevancia comparativa de los métodos que se analizarán en este trabajo radica en sus características distintivas: mientras que la CP ofrece garantías teóricas de cobertura bajo supuestos mínimos en escenarios i.i.d., los métodos de remuestreo como el *Bootstrapping* (Lahiri 2003) proporcionan flexibilidad no paramétrica para capturar la estructura de dependencia temporal, y los modelos de aprendizaje profundo como *DeepAR* (Salinas et al. 2020) destacan por su capacidad de modelar dependencias temporales complejas en múltiples series simultáneamente. Esta diversidad metodológica permite una evaluación integral de las fortalezas y limitaciones de cada enfoque.

La aplicación de CP a series de tiempo presenta desafíos críticos, ya que la dependencia temporal y los desplazamientos distribucionales suelen invalidar el supuesto de intercambiabilidad. Además, la transición de CP desde la generación de intervalos hacia distribuciones predictivas completas sigue siendo un área poco explorada. Este trabajo propone adaptar y extender estos métodos para manejar la no-intercambiabilidad y permitir la predicción distribucional, contrastando su desempeño con técnicas establecidas. Con ello, se busca cerrar una brecha relevante en la literatura: la falta de una evaluación sistemática de CP aplicada a series temporales para la obtención de distribuciones predictivas integrales.

1.2 Planteamiento del problema

La predicción en series de tiempo enfrenta retos fundamentales que motivan esta investigación. En primer lugar, la naturaleza secuencial de los datos introduce dependencia temporal que viola el supuesto de independencia fundamental en muchos métodos estadísticos estándar, incluyendo la predicción conformal en su formulación original. Esta dependencia temporal implica que las observaciones consecutivas están correlacionadas, lo que afecta tanto la validez de las garantías teóricas como la eficiencia de los métodos de cuantificación de incertidumbre. En segundo lugar, las características de los datos pueden cambiar con el tiempo a través de tendencias, estacionalidad o cambios estructurales, manifestando no estacionariedad que complica el modelado a largo plazo y desafía los supuestos de intercambiabilidad requeridos por métodos como la predicción conformal. Finalmente,

generar pronósticos probabilísticos que sean simultáneamente precisos (bien calibrados) e informativos (eficientes o nítidos) representa una tarea compleja, especialmente cuando se busca construir distribuciones predictivas completas en lugar de simples intervalos de predicción.

Los métodos actuales presentan limitaciones que este estudio busca contrastar. Por un lado, los modelos clásicos de tipo autorregresivo dependen fuertemente de supuestos sobre la estructura del proceso y la distribución del ruido (usualmente Gaussiano). Por otro lado, técnicas de remuestreo como el *Bootstrapping* (Lahiri 2003), aunque flexibles para capturar dependencia temporal, pueden tener dificultades cerca de límites de no estacionariedad. Finalmente, modelos modernos de aprendizaje profundo como *DeepAR* (Salinas et al. 2020) ofrecen un alto poder predictivo y la capacidad de generar distribuciones predictivas completas, pero a menudo operan como “cajas negras” y carecen de las garantías teóricas formales de cobertura que ofrece el enfoque conformal bajo condiciones de intercambiabilidad.

El problema central de este trabajo se resume en la siguiente pregunta: **¿Cómo adaptar y evaluar un modelo de predicción probabilística basado en la teoría conformal para series de tiempo que considere la dependencia temporal y permita la construcción de distribuciones predictivas completas, y cuál es su desempeño comparativo frente a métodos de referencia como Bootstrapping y DeepAR?**

1.3 Justificación

La cuantificación precisa de la incertidumbre es esencial para la toma de decisiones informada en áreas como la economía, meteorología y planificación de recursos. Adaptar la Predicción Conformal al dominio temporal representa un avance metodológico importante, ya que ofrece garantías de cobertura en muestra finita y una aplicabilidad general (libre de distribución) que originalmente fueron desarrolladas para el caso i.i.d.

A pesar de los desarrollos recientes en predicción conformal, existe un vacío notable en la literatura respecto a su aplicación sistemática en series temporales con características de no intercambiabilidad. La brecha metodológica que este trabajo busca cerrar es doble: por un lado, la mayoría de los trabajos en CP se han centrado en la construcción de intervalos de predicción bajo supuestos de intercambiabilidad, relegando el desarrollo de métodos para predicción distribucional completa en contextos temporales. Por otro lado, la

comparación rigurosa de CP adaptada mediante ponderación temporal frente a métodos establecidos y de vanguardia utilizando métricas probabilísticas apropiadas ha sido esencialmente explorada. En particular, la evaluación mediante el promedio del *Continuous Ranked Probability Score* (ECRPS) y pruebas de significancia estadística como el test de Diebold-Mariano permitirán establecer comparaciones robustas entre las predicciones de los métodos.

La comparación sistemática con métodos estándar (Bootstrapping), estado del arte (*DeepAR*) y otros métodos proporcionará una perspectiva clara sobre las fortalezas y debilidades del enfoque conformal en escenarios reales y simulados, facilitando la selección informada de métodos de pronóstico probabilístico en aplicaciones prácticas.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Formular un modelo fundamentado en la teoría conformal para realizar predicciones probabilísticas en el contexto de series de tiempo, evaluando su desempeño mediante una comparación con modelos establecidos como Bootstrapping y DeepAR.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar un modelo de predicción probabilística que integre la teoría de predicción conformal con técnicas de modelado de series temporales.
- Diseñar un entorno de simulación para evaluar el comportamiento del modelo propuesto en diversos escenarios de series temporales, incorporando estructuras temporales y condiciones de ruido variadas.
- Comparar el desempeño del modelo propuesto con modelos de referencia como DeepAR y Bootstrapping en cada escenario simulado, utilizando métricas enfocadas en predicciones probabilísticas.
- Implementar la metodología en un caso de estudio con datos reales, cuantificando su desempeño y relevancia práctica para aplicaciones de pronóstico.

1.5 Estructura de la tesis

El presente documento se organiza de la siguiente manera:

Capítulo 2: Predicción Conformal. Se presenta una introducción al pronóstico probabilístico, se explican las principales métricas para evaluar el desempeño de los modelos (incluyendo CRPS, calibración y nitidez), se desarrollan los fundamentos de los sistemas de predicción conformal, y se incluye una discusión sobre la extensión de la demostración de consistencia universal en escenarios estacionarios y ergódicos.

Capítulo 3: Metodología de Simulación. Se detalla el diseño del entorno de simulación, incluyendo la definición de los procesos generadores de datos, la formulación de los modelos predictivos, los cambios necesarios para su aplicación en este trabajo, y las extensiones de las simulaciones para diferentes escenarios.

Capítulo 4: Resultados de Simulación. Se exponen y analizan los hallazgos derivados del marco experimental descrito en el capítulo anterior. El análisis incluye la comparación del desempeño mediante la métrica ECRPS, el examen del comportamiento de modelos específicos ante diversos escenarios y la validación de los resultados a través de pruebas de significancia estadística empleando el test de Diebold-Mariano.

Capítulo 5: Aplicaciones a Datos Reales. Se implementan los métodos desarrollados en casos de estudio con datos reales, se presentan los resultados obtenidos y se discute su relevancia práctica.

Capítulo 6: Conclusiones. Se sintetizan los hallazgos principales del trabajo, se discuten las limitaciones del estudio, y se proponen direcciones para investigación futura.

2 Sistemas de Predicción Conformal

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de esta investigación. Se inicia con una introducción al pronóstico probabilístico y su importancia en el análisis de series temporales, seguido de una discusión detallada sobre las métricas utilizadas para evaluar el desempeño predictivo. Posteriormente, se desarrollan los conceptos fundamentales de la predicción conformal y sus adaptaciones para series de tiempo.

2.1 Pronóstico Probabilístico

El pronóstico probabilístico representa un cambio de paradigma fundamental en la predicción estadística, pasando de estimaciones puntuales a distribuciones de probabilidad completas sobre cantidades futuras de interés (Gneiting and Katzfuss 2014). A diferencia de las predicciones puntuales tradicionales, que proporcionan únicamente un valor esperado o una estimación central, el pronóstico probabilístico cuantifica la incertidumbre asociada a la predicción mediante la especificación de una distribución predictiva completa (Gneiting, Balabdaoui, and Raftery 2007).

2.1.1 Definición y Objetivos

Formalmente, sea Y_{t+h} una variable aleatoria que representa el valor de una serie temporal en el tiempo $t + h$, donde $h > 0$ denota el horizonte de predicción. Un pronóstico probabilístico es una distribución de probabilidad $F_{t+h|t}$ que caracteriza la incertidumbre sobre Y_{t+h} dado el conjunto de información disponible hasta el tiempo t , denotado por \mathcal{F}_t (Gneiting and Katzfuss 2014).

Gneiting y Raftery explican que el objetivo fundamental del pronóstico probabilístico es maximizar la nitidez de las distribuciones predictivas sujeto a calibración. Estos dos

conceptos son fundamentales para entender la calidad de un pronóstico probabilístico (Gneiting and Raftery 2007; Gneiting, Balabdaoui, and Raftery 2007):

- **Calibración:** Se refiere a la consistencia estadística entre las distribuciones predictivas y las observaciones. Una predicción está calibrada si las realizaciones son estadísticamente indistinguibles de muestras aleatorias de las distribuciones predictivas (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).
- **Nitidez:** Se refiere a la concentración de las distribuciones predictivas y es una propiedad exclusiva de los pronósticos. Cuanto más concentradas sean las distribuciones predictivas, mejor, siempre que se mantenga la calibración (Gneiting and Raftery 2007).

La Figura 2-1 ilustra la diferencia entre una predicción puntual, un intervalo de predicción y una distribución predictiva completa.

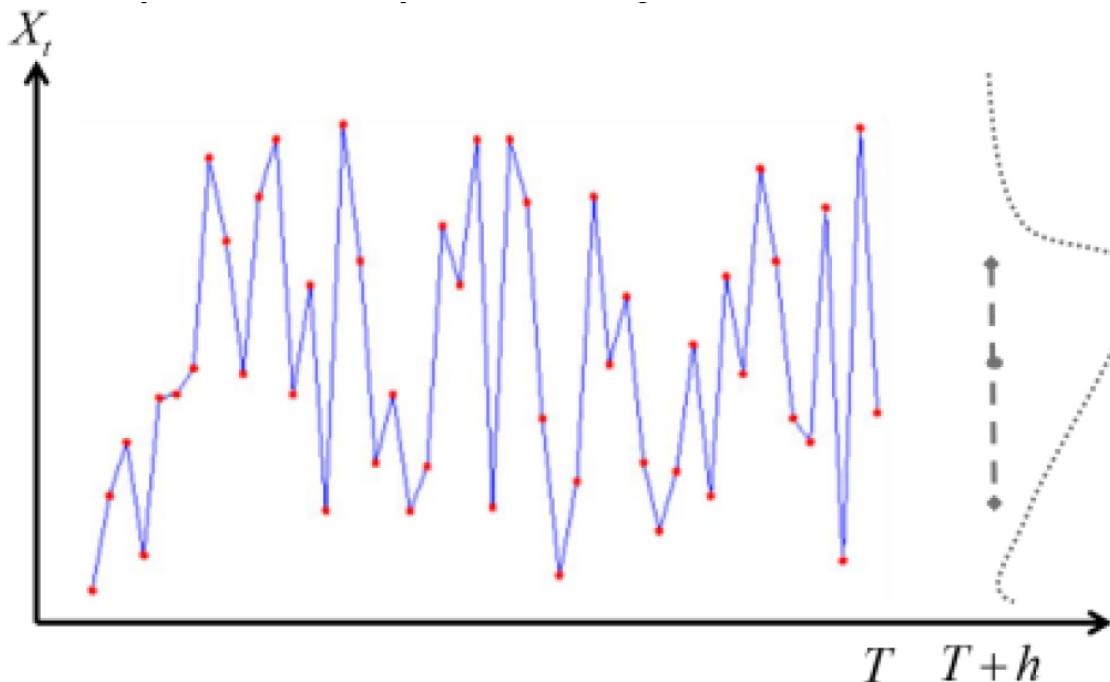


Figure 2-1: Tipos de predicciones y su relación con la incertidumbre.

2.1.2 Ventajas del Pronóstico Probabilístico

El pronóstico probabilístico ofrece múltiples ventajas sobre las predicciones puntuales tradicionales que justifican su adopción creciente en diversas aplicaciones (Gneiting and Katzfuss 2014):

1. **Cuantificación Completa de Incertidumbre:** A diferencia de las predicciones puntuales, que proporcionan únicamente un valor esperado, el pronóstico probabilístico caracteriza la incertidumbre de manera exhaustiva mediante distribuciones de probabilidad. Esto permite a los tomadores de decisiones evaluar tanto la magnitud esperada de un evento como la variabilidad asociada, facilitando una comprensión más profunda de los riesgos y oportunidades (Gneiting and Raftery 2007).
2. **Soporte para Decisiones Óptimas:** En contextos donde las decisiones deben tomarse bajo incertidumbre, como la gestión de inventarios, la planificación de recursos energéticos, o la asignación de capital, las distribuciones predictivas completas son esenciales. Permiten la optimización de funciones de utilidad esperada y la implementación de estrategias que consideren explícitamente el trade-off entre riesgo y recompensa (Gneiting and Katzfuss 2014).
3. **Evaluación de Eventos Extremos:** Las predicciones puntuales son inherente mente limitadas para caracterizar eventos raros o de cola. El pronóstico probabilístico, en cambio, permite estimar probabilidades de ocurrencia de eventos extremos, información crucial para la gestión de riesgos financieros y la planificación de infraestructura (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).
4. **Flexibilidad en la Comunicación de Incertidumbre:** Las distribuciones predictivas permiten múltiples formas de comunicación adaptadas a diferentes audiencias: intervalos de predicción, probabilidades de excedencia de umbrales críticos o visualizaciones completas mediante fan charts (Gneiting and Katzfuss 2014).

Estas ventajas han motivado la transición hacia pronósticos probabilísticos en campos tan diversos como meteorología, finanzas, energía, epidemiología y gestión de cadenas de suministro (Gneiting and Katzfuss 2014; Salinas et al. 2020).

2.2 Métricas para Evaluación de Pronósticos Probabilísticos

La evaluación rigurosa del desempeño predictivo es fundamental para comparar metodologías de pronóstico y guiar mejoras en los modelos. En el contexto de pronósticos probabilísticos, las métricas de evaluación deben considerar tanto la calibración como la nitidez de las distribuciones predictivas (Gneiting, Balabdaoui, and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

2.2.1 Reglas de Puntuación Propias

Una *regla de puntuación* (scoring rule) es una función $S : \mathcal{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que asigna una penalización numérica $S(F, y)$ a cada par formado por una distribución predictiva F y una observación realizada y (Gneiting and Raftery 2007). En nuestra notación, valores más bajos de la puntuación indican mejor desempeño predictivo.

Propriety y Strict Propriety

La *propriety* es una característica fundamental que debe satisfacer toda métrica de evaluación de pronósticos probabilísticos para garantizar que incentive predicciones honestas y bien calibradas (Gneiting and Raftery 2007).

Definición (Regla de Puntuación Proper): Una regla de puntuación S es *proper* relativa a una clase \mathcal{F} de distribuciones de probabilidad si

$$\mathbb{E}_G[S(G, Y)] \leq \mathbb{E}_G[S(F, Y)] \quad (2-1)$$

para todas las distribuciones $F, G \in \mathcal{F}$, donde $Y \sim G$ (Gneiting and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

Definición (Regla de Puntuación Strictly Proper): La regla de puntuación S es *strictly proper* si la desigualdad en (2-1) se cumple con igualdad únicamente cuando $F = G$ (Gneiting and Raftery 2007).

La importancia de la *propriety* radica en que establece un principio de alineación de incentivos: si un pronosticador desea minimizar su puntuación esperada, su mejor estrategia es

reportar sinceramente su verdadera distribución predictiva (Gneiting and Raftery 2007).

2.2.2 Continuous Ranked Probability Score (CRPS)

El *Continuous Ranked Probability Score* (CRPS) es una de las reglas de puntuación estrictamente propias más utilizadas para evaluar pronósticos probabilísticos de variables continuas (Gneiting and Katzfuss 2014). Su popularidad se debe a su sólida fundamentación teórica y su capacidad para evaluar simultáneamente calibración y nitidez (Gneiting and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

Definiciones y Representaciones

El CRPS admite varias representaciones matemáticas equivalentes, cada una con sus propias ventajas conceptuales y computacionales.

Representación integral: La definición original del CRPS está dada por (Gneiting and Raftery 2007):

$$\text{CRPS}(F, y) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(x) - \mathbb{1}\{y \leq x\})^2 dx \quad (2-2)$$

donde F es la función de distribución acumulada (FDA) de la distribución predictiva y y es la observación realizada. Esta representación muestra que el CRPS mide el área entre la FDA predictiva y la FDA de la observación (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

Representación basada en esperanzas: Una forma alternativa, más conveniente para cálculos, está dada por (Gneiting and Raftery 2007):

$$\text{CRPS}(F, y) = \mathbb{E}_F |X - y| - \frac{1}{2} \mathbb{E}_F |X - X'| \quad (2-3)$$

donde X y X' son variables aleatorias independientes con distribución F . Esta representación revela una interpretación intuitiva del CRPS: el primer término mide la distancia esperada entre la predicción y la observación, mientras que el segundo término penaliza la dispersión de la distribución predictiva.

Propiedades del CRPS

El CRPS posee varias propiedades deseables que explican su amplia adopción en la literatura (Gneiting and Raftery 2007; Thorarinsdottir and Schuhen 2017):

1. **Strictly proper:** El CRPS es *strictly proper* relativo a la clase de todas las distribuciones de probabilidad en \mathbb{R} con primer momento finito (Gneiting and Raftery 2007).
2. **Unidades consistentes:** El CRPS se expresa en las mismas unidades que la variable pronosticada (Gneiting and Katzfuss 2014).
3. **Reducción al error absoluto:** Cuando F es una distribución degenerada (predicción puntual), el CRPS se reduce al error absoluto $|x - y|$, permitiendo un marco de evaluación unificado (Gneiting and Raftery 2007).
4. **Sensibilidad dual:** El CRPS evalúa simultáneamente la calibración y la nitidez (Thorarinsdottir and Schuhen 2017).

2.2.3 Expected Continuous Ranked Probability Score (ECRPS)

El desempeño predictivo global de una secuencia de n pares pronóstico-observación se cuantifica mediante el *Expected Continuous Ranked Probability Score* (ECRPS), definido como la media aritmética de los CRPS individuales:

$$\text{ECRPS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{CRPS}(F_i, y_i) \quad (2-4)$$

El ECRPS hereda todas las propiedades deseables del CRPS y proporciona un resumen numérico único del desempeño predictivo sobre todo el conjunto de evaluación. En particular, la comparación mediante ECRPS permite establecer comparaciones robustas entre diferentes métodos de pronóstico probabilístico.

2.3 Test de Diebold-Mariano para Comparación de Precisión Predictiva

La evaluación comparativa de distintas metodologías de pronóstico requiere herramientas estadísticas rigurosas que permitan determinar si las diferencias observadas en el desempeño predictivo son estadísticamente significativas o simplemente producto del azar. El test de Diebold-Mariano (Diebold and Mariano 1995) constituye uno de los procedimientos más ampliamente utilizados para este propósito, ofreciendo un marco general y flexible para contrastar la hipótesis nula de igual precisión predictiva entre dos métodos de pronóstico competidores.

2.3.1 Formulación del Test

Sean $\hat{y}_{t+h}^{(1)}$ y $\hat{y}_{t+h}^{(2)}$ dos pronósticos h pasos adelante para una variable y_{t+h} , producidos por dos metodologías diferentes. Los errores de pronóstico correspondientes son:

$$e_{t+h}^{(i)} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (2-5)$$

El test de Diebold-Mariano se basa en una función de pérdida $L(\cdot)$ que cuantifica el costo asociado con cada error de pronóstico. Para un horizonte temporal de evaluación que abarca n observaciones, se define el diferencial de pérdida en el tiempo t como:

$$d_t = L(e_t^{(1)}) - L(e_t^{(2)}), \quad t = 1, \dots, n \quad (2-6)$$

Tradicionalmente, el test de Diebold-Mariano se ha aplicado utilizando la pérdida cuadrática para evaluar estimaciones puntuales. Sin embargo, este marco es suficientemente general para acomodar cualquier función de pérdida (Diebold and Mariano 1995). En el presente trabajo, se utilizará principalmente el CRPS o el ECRPS, según corresponda como métrica de pérdida fundamental. Esto permite extender la comparación de Diebold-Mariano.

La hipótesis nula de igual precisión predictiva se formula como:

$$H_0 : \mathbb{E}[d_t] = 0 \quad (2-7)$$

Esta hipótesis establece que la pérdida esperada es idéntica para ambos métodos de pronóstico. El estadístico de prueba se construye a partir de la media muestral del diferencial de pérdida:

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n d_t \quad (2-8)$$

2.3.2 Distribución Asintótica y Estimación de la Varianza

Bajo condiciones de regularidad que incluyen la estacionariedad débil y la existencia de momentos de orden finito, Diebold y Mariano demuestran que:

$$\sqrt{n} \bar{d} \xrightarrow{d} N(0, 2\pi f_d(0)) \quad (2-9)$$

donde $f_d(0)$ denota la densidad espectral de la serie d_t evaluada en frecuencia cero, la cual equivale a la varianza de largo plazo:

$$\sigma^2 = \text{Var}(\sqrt{n} \bar{d}) = \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \quad (2-10)$$

siendo $\gamma_k = \text{Cov}(d_t, d_{t-k})$ la autocovarianza de orden k .

Un aspecto fundamental del test de Diebold-Mariano es que permite explícitamente la presencia de autocorrelación en el diferencial de pérdida d_t . Esta característica es especialmente relevante en el contexto de pronósticos a múltiples pasos adelante ($h > 1$), donde los errores de pronóstico exhiben típicamente estructura de autocorrelación hasta el orden $(h - 1)$ (Diebold and Mariano 1995). Esta estructura surge porque pronósticos óptimos h pasos adelante generan errores que siguen un proceso de media móvil MA($h - 1$).

En la práctica, la varianza de largo plazo σ^2 debe ser estimada. Diebold y Mariano proponen utilizar un estimador basado en autocovarianzas ponderadas por kernel:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^M k \left(\frac{k}{M} \right) \hat{\gamma}_k \quad (2-11)$$

donde $\hat{\gamma}_k = n^{-1} \sum_{t=k+1}^n (d_t - \bar{d})(d_{t-k} - \bar{d})$ son las autocovarianzas muestrales, $k(\cdot)$ es una función kernel (por ejemplo, kernel de Bartlett o Parzen), y M es el parámetro de ancho de banda o truncamiento que controla el número de autocovarianzas incluidas en la

estimación.

Para el caso específico donde se conoce que el diferencial de pérdida sigue un proceso MA($h - 1$), Diebold y Mariano sugieren simplificar el estimador utilizando $M = h - 1$ con kernel rectangular:

$$\hat{\sigma}_{DM}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{k=1}^{h-1} \hat{\gamma}_k \quad (2-12)$$

El estadístico de prueba resultante es:

$$DM = \frac{\sqrt{n} \bar{d}}{\hat{\sigma}} \quad (2-13)$$

Bajo la hipótesis nula, este estadístico converge en distribución a una normal estándar: $DM \xrightarrow{d} N(0, 1)$. Para un test bilateral al nivel de significancia α , se rechaza H_0 si $|DM| > z_{\alpha/2}$, donde $z_{\alpha/2}$ denota el cuantil $(1 - \alpha/2)$ de la distribución normal estándar.

2.3.3 Modificaciones para Muestras Pequeñas

A pesar de la solidez teórica del test de Diebold-Mariano bajo asintótica estándar, diversos estudios han documentado distorsiones de tamaño en muestras finitas, particularmente cuando el número de observaciones de pronóstico es limitado. Harvey et al. (Harvey, Leybourne, and Newbold 1997) demostraron mediante simulaciones Monte Carlo que el test original tiende a sobrerrechazar la hipótesis nula (es decir, presenta un tamaño empírico superior al nominal), especialmente para horizontes de pronóstico largos y muestras pequeñas.

Para abordar estas limitaciones, Harvey et al. proponen una corrección del estadístico que mejora sustancialmente el desempeño en muestras finitas. La modificación se fundamenta en el uso de un estimador aproximadamente insesgado de la varianza de \bar{d} . Partiendo de la expresión exacta:

$$\text{Var}(\bar{d}) = n^{-1} \left[\gamma_0 + 2n^{-1} \sum_{k=1}^{h-1} (n - k) \gamma_k \right] \quad (2-14)$$

y calculando el valor esperado del estimador empleado en (2-12), se obtiene que:

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}_{DM}^2] \approx \left[\frac{n + 1 - 2h + n^{-1}h(h - 1)}{n} \right] \text{Var}(\bar{d}) \quad (2-15)$$

Esta relación sugiere el estadístico modificado:

$$DM^* = \left[\frac{n + 1 - 2h + n^{-1}h(h - 1)}{n} \right]^{1/2} DM \quad (2-16)$$

Adicionalmente, Harvey et al. recomiendan comparar DM^* con valores críticos de la distribución t de Student con $(n - 1)$ grados de libertad, en lugar de la distribución normal estándar. Esta segunda modificación reconoce implícitamente la incertidumbre adicional asociada con la estimación de la varianza en muestras finitas.

Los resultados de simulación reportados por Harvey et al. (Harvey, Leybourne, and Newbold 1997) indican que el test modificado presenta un tamaño empírico considerablemente más cercano al nominal, especialmente para $n \leq 50$ y horizontes de pronóstico $h \geq 2$. Aunque el test modificado exhibe una ligera pérdida de potencia en comparación con el test original cuando ambos están correctamente calibrados, esta reducción es marginal y ampliamente compensada por la ganancia en confiabilidad inferencial.

2.3.4 Enfoque de Asintótica de Suavizado Fijo

Una alternativa más reciente para abordar las distorsiones de tamaño del test de Diebold-Mariano en muestras pequeñas es el enfoque de *asintótica de suavizado fijo* (fixed-smoothing asymptotics), desarrollado por Coroneo e Iacone (Coroneo and Iacone 2020). Este marco teórico reconoce que en aplicaciones prácticas de evaluación de pronósticos, el tamaño muestral n es frecuentemente limitado, haciendo que la aproximación asintótica estándar (que requiere $M/n \rightarrow 0$) sea inadecuada.

La idea fundamental es mantener constante la razón entre el parámetro de ancho de banda y el tamaño muestral conforme n aumenta. Formalmente, bajo la *asintótica fixed-b*, se asume que $M/n \rightarrow b$ para algún $b \in (0, 1]$ fijo. Bajo este régimen asintótico alternativo, el estimador de varianza (2-11) ya no es consistente para σ^2 . Sin embargo, Kiefer y Vogelsang (2005) demostraron que el estadístico resultante converge a una distribución no estándar que depende de b y del kernel empleado.

Para el kernel de Bartlett, la distribución límite puede caracterizarse explícitamente, y sus cuantiles pueden aproximarse mediante fórmulas polinomiales. Específicamente, para un

test bilateral al 5% de significancia, el valor crítico $c_\alpha(b)$ satisface:

$$c_\alpha(b) \approx \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \alpha_3 b^3 \quad (2-17)$$

donde los coeficientes $\{\alpha_i\}$ han sido tabulados por Kiefer y Vogelsang.

Coroneo e Iacone (Coroneo and Iacone 2020) extienden este marco al contexto específico de evaluación de pronósticos, demostrando mediante simulaciones Monte Carlo que los tests basados en asintótica de suavizado fijo exhiben un tamaño empírico notablemente más preciso que el test de Diebold-Mariano estándar, incluso para muestras tan pequeñas como $n = 40$. Los autores proponen utilizar anchos de banda $M = \lfloor n^{1/2} \rfloor$ para el estimador con kernel de Bartlett, encontrando que esta elección ofrece un equilibrio favorable entre tamaño y potencia del test.

Una segunda variante dentro del paradigma de suavizado fijo es la *asintótica fixed-m*, que emplea un estimador de varianza basado en el periodograma suavizado con kernel de Daniell:

$$\hat{\sigma}_{DAN}^2 = \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^m I(\lambda_j) \quad (2-18)$$

donde $I(\lambda_j)$ denota el periodograma de d_t evaluado en la frecuencia de Fourier $\lambda_j = 2\pi j/n$, y m es un parámetro de truncamiento mantenido fijo conforme $n \rightarrow \infty$. Bajo condiciones de regularidad, el estadístico resultante converge a una distribución t con $2m$ grados de libertad (Coroneo and Iacone 2020).

2.3.5 Consideraciones sobre la Generación de Pronósticos

Un aspecto metodológico crucial del test de Diebold-Mariano es su tratamiento de los pronósticos como objetos dados o primitivos, sin considerar explícitamente el proceso de estimación de los modelos subyacentes. Esta perspectiva contrasta con marcos alternativos, como el de West (1996) y Clark y McCracken (2001), que desarrollan teoría asintótica específica para pronósticos derivados de modelos paramétricos estimados.

Cuando los pronósticos provienen de modelos con parámetros estimados, la incertidumbre asociada con la estimación puede afectar la distribución del estadístico de prueba. West (West 1996) demostró que, bajo ciertas condiciones, esta incertidumbre de estimación es asintóticamente despreciable si el tamaño de la muestra de entrenamiento R crece mucho

más rápido que el tamaño de la muestra de evaluación P (específicamente, si $P/R \rightarrow 0$).

Alternativamente, Giacomini y White (Giacomini and White 2006) proponen un marco donde la incertidumbre de estimación no desaparece asintóticamente (fijando $R < \infty$). Bajo este régimen, el test de Diebold-Mariano permanece válido, pero ahora evalúa el desempeño relativo de *métodos de pronóstico* (incluyendo el procedimiento de estimación) en lugar de *modelos de pronóstico* poblacionales. Este marco es particularmente apropiado cuando el objetivo es comparar estrategias de pronóstico que podrían implementarse en práctica, reconociendo que los modelos deben ser reestimados periódicamente con ventanas de datos finitas.

Para los propósitos de esta investigación, adoptamos la perspectiva de Giacomini y White, interpretando el test de Diebold-Mariano como una herramienta para evaluar el desempeño predictivo de métodos completos de pronóstico, incluyendo tanto la especificación del modelo como el procedimiento de estimación y actualización de parámetros.

2.4 Predicción Conformal por Intervalos: El Enfoque IIE

La predicción conformal clásica, introducida por Vovk et al. Vovk, Gammerman, and Shafer 2005, se fundamenta en la capacidad de generar conjuntos de predicción Γ^ϵ que garantizan una cobertura de confianza exacta para cualquier nivel de significancia $\epsilon \in (0, 1)$. A diferencia de los métodos estadísticos tradicionales que dependen de la asintótica (grandes muestras), la predicción conformal es válida para muestras finitas, siempre que se cumpla el supuesto de intercambiabilidad de los datos.

2.4.1 El Concepto de No-Conformidad

El núcleo de esta metodología es la *medida de no-conformidad* (NCM, por sus siglas en inglés). Una NCM es una función $A(B, z)$ que cuantifica el grado de “extrañeza” de un ejemplo z en relación con un multiconjunto (o *bag*) de ejemplos B . En el contexto de regresión, donde $z = (x, y)$, la medida de no-conformidad más común es el error absoluto de predicción, definido como:

$$\alpha_i = |y_i - \hat{y}_i| \quad (2-19)$$

donde \hat{y}_i es la estimación producida por un algoritmo de aprendizaje subyacente (denominado *underlying algorithm*). Es importante subrayar que la predicción conformal es agnóstica al modelo: puede envolver desde una regresión lineal simple hasta redes neuronales profundas, transformando sus predicciones puntuales en intervalos con validez estadística.

2.4.2 Protocolo de Construcción de Intervalos

Para construir un intervalo de predicción para un nuevo objeto x_n basado en un conjunto de entrenamiento z_1, \dots, z_{n-1} , el método IIE (Inducida por Errores) sigue un proceso de prueba de hipótesis inversa. Para cada valor potencial $y \in \mathbb{R}$:

1. **Aumentación del Conjunto:** Se asume hipotéticamente que la verdadera etiqueta de x_n es y , formando el conjunto aumentado $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n$, donde $z_n = (x_n, y)$.
2. **Cálculo de Puntajes:** Se calculan los puntajes de no-conformidad $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ para todos los elementos, incluyendo el ejemplo hipotético.
3. **Derivación del p-valor:** Se calcula la proporción de ejemplos que son “al menos tan extraños” como el nuevo ejemplo z_n :

$$p(y) = \frac{|\{i = 1, \dots, n : \alpha_i \geq \alpha_n\}|}{n} \quad (2-20)$$

4. **Inversión de la Región de Aceptación:** El intervalo de predicción $\Gamma^{1-\epsilon}$ se define como el conjunto de todos los valores y que no pueden ser rechazados al nivel de significancia ϵ :

$$\Gamma^\epsilon(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}, x_n) = \{y \in \mathbb{R} : p(y) > \epsilon\} \quad (2-21)$$

Este procedimiento garantiza que $P(y_n \notin \Gamma^\epsilon) \leq \epsilon$. Si los puntajes α_i tienen una distribución continua (sin empates), la probabilidad de error es exactamente ϵ Vovk, Gammerman, and Shafer 2005.

2.5 Robustez ante la No-Intercambiabilidad: Aproximación de Barber

Uno de los desafíos críticos en el análisis de series temporales es que el supuesto de intercambiabilidad rara vez se sostiene. Fenómenos como la autocorrelación, la heterocedasticidad y la deriva de parámetros (drift) invalidan la asunción de que el pasado y el futuro son estadísticamente idénticos. Barber et al. Barber et al. 2023 proponen una extensión fundamental para estos escenarios.

2.5.1 El Gap de Cobertura y Variación Total

Barber et al. formalizan la degradación de la validez conformal mediante el uso de la *Distancia de Variación Total* (d_{TV}). Si la distribución de los datos cambia en el tiempo, existe una brecha de cobertura (*coverage gap*). El teorema principal de Barber establece que la pérdida de cobertura está acotada por la suma de las distancias entre la distribución de los datos de entrenamiento y la distribución del dato de prueba:

$$\text{Error de Cobertura} \leq \epsilon + \sum_{i=1}^n w_i d_{TV}(Z_i, Z_{n+1}) \quad (2-22)$$

2.5.2 Cuantiles Pesados y Decaimiento Temporal

Para contrarrestar este efecto en series de tiempo, Barber et al. introducen los *Weighted Conformal Predictors*. En lugar de asignar un peso uniforme de $1/n$ a cada residuo histórico, se asignan pesos w_i que reflejan la relevancia del dato. En series no estacionarias, los datos más recientes son mejores predictores del futuro.

Se define comúnmente un decaimiento geométrico para los pesos:

$$w_i = \rho^{n-i}, \quad \rho \in (0, 1) \quad (2-23)$$

donde un ρ cercano a 1 asume una estabilidad lenta, mientras que un ρ menor reacciona rápidamente a cambios estructurales. El p-valor pesado se calcula como una suma pon-

derada de funciones indicadoras:

$$p^y = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i \mathbb{1}_{\alpha_i \geq \alpha_n} + w_n}{\sum_{j=1}^n w_j} \quad (2-24)$$

Este enfoque permite que la predicción conformal sea “adaptativa”, manteniendo la cobertura cercana al nivel nominal incluso cuando la serie temporal experimenta cambios súbitos en su media o varianza Barber et al. 2023.

2.6 Sistemas de Predicción Conformal (CPS): De Intervalos a Densidades

El Capítulo 7 de la obra de Vovk Vovk, Gammerman, and Shafer 2005 marca la transición de la predicción de conjuntos a la predicción de distribuciones completas. Un *Sistema de Predicción Conformal* (CPS) no entrega un rango, sino una *Distribución Predictiva Aleatorizada* (RPD), denotada como $\Pi_n(y, \tau)$, que representa la probabilidad de que la verdadera etiqueta sea menor o igual a y .

2.6.1 Formalización de la RPD y el Suavizado (τ)

Para asegurar que la distribución resultante sea continua y cumpla con las propiedades de una FDA (Función de Distribución Acumulada), se introduce una variable de suavizado $\tau \sim U(0, 1)$. La función Π se define como:

$$\Pi_n(y, \tau) := \frac{|\{i : \alpha_i < \alpha_n^y\}| + \tau |\{i : \alpha_i = \alpha_n^y\}|}{n} \quad (2-25)$$

Es vital notar que aquí α_i son puntajes de *conformidad* (no de no-conformidad). Un ejemplo común en regresión es $\alpha_i = y_i - \hat{y}_i$. El uso de la variable τ garantiza la *calibración fuerte en probabilidad*: los valores de la RPD evaluados en la verdadera etiqueta son independientes y uniformes en $[0, 1]$, permitiendo una cuantificación exacta de la incertidumbre en cualquier punto de la distribución Vovk, Nouretdinov, et al. 2017.

2.6.2 La Máquina de Predicción de Mínimos Cuadrados (LSPM)

La *Least Squares Prediction Machine* (LSPM) es la aplicación primordial de los CPS al ámbito de la regresión. La LSPM utiliza la estructura de la regresión lineal para optimizar la eficiencia de la distribución predictiva.

Variantes de la LSPM

Vovk distingue tres formas de calcular los residuos dentro de una LSPM:

1. **LSPM Ordinaria:** Los puntajes son simplemente los residuos de entrenamiento. Sin embargo, este enfoque tiende a ser demasiado optimista (sobreajuste), ya que el modelo ya ha “visto” los datos de entrenamiento.
2. **LSPM Eliminada (Deleted):** Utiliza un esquema de validación cruzada interna (*leave-one-out*). Para cada dato i , se entrena un modelo omitiendo ese dato específico, asegurando que el residuo sea una medida honesta de la capacidad de generalización.
3. **LSPM Estudiantizada:** Es la variante más robusta y matemáticamente rigurosa. Ajusta cada residuo por su apalancamiento (*leverage*), h_i , proveniente de la diagonal de la matriz *hat*:

$$\alpha_i := \frac{y_i - \hat{y}_i}{\sigma\sqrt{1 - h_i}} \quad (2-26)$$

2.7 Sistemas de Predicción Conformal de Mondrian (MCPS)

A pesar de las sólidas garantías de validez marginal que ofrecen los Sistemas de Predicción Conformal (CPS) descritos en la sección 2.6, estos presentan una limitación teórica y práctica fundamental: la garantía de error es un promedio sobre todo el espacio de datos. Esto implica que el sistema puede ser extremadamente preciso en ciertas regiones del espacio de características y, simultáneamente, cometer errores sistemáticos en otras, siempre que el error global no supere el nivel ϵ . Los *Sistemas de Predicción Conformal de Mondrian* (MCPS, por sus siglas en inglés) introducen el concepto de *validez condicional por categorías*, permitiendo que la calibración se mantenga exacta dentro de subconjuntos

específicos de los datos Vovk, Gammerman, and Shafer 2022.

2.7.1 Origen y Motivación: Validez Marginal vs. Condicional

El apelativo “Mondrian” deriva del estilo geométrico del pintor neerlandés Piet Mondrian, cuya estética se fundamenta en la compartmentación del lienzo en rectángulos de colores puros delimitados por una cuadrícula, tal como se ilustra en la Figura 2-2. Bajo esta analogía, un sistema de predicción conformal Mondriano partitiona el espacio de ejemplos \mathcal{Z} en categorías mutuamente excluyentes o taxonomías. Este enfoque permite que las garantías de cobertura sean válidas no solo de forma agregada, sino específicamente dentro de cada subgrupo definido, abordando así el problema de la validez condicional.

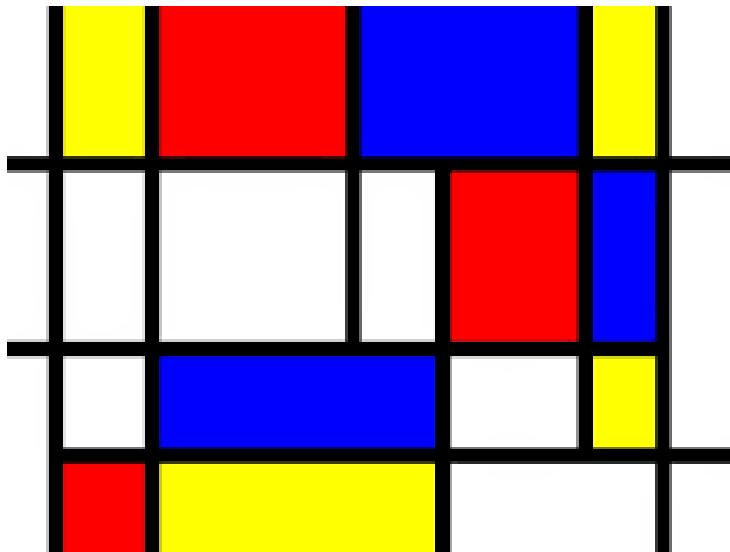


Figure 2-2: Estética de Mondrian como analogía de la partición del espacio \mathcal{Z} .

La necesidad de este enfoque surge cuando existen grupos de datos con dificultades predictivas heterogéneas. Por ejemplo, en una serie temporal de demanda eléctrica, predecir el consumo en un día festivo es intrínsecamente más difícil que en un día laboral. Un CPS global podría subestimar masivamente la incertidumbre en los días festivos, compensándola con una sobreestimación en los días laborales. El enfoque de Mondrian garantiza que la probabilidad de error sea exactamente ϵ tanto para los días laborales como para los festivos, de forma independiente Vovk, Nouretdinov, et al. 2017.

2.7.2 La Taxonomía de Mondrian (κ)

La base matemática de un MCPS es la *taxonomía*. Una taxonomía es una función medible $\kappa : \mathbb{N} \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \rightarrow K$, donde K es un conjunto numerable de categorías. Para cada par de ejemplo (x_i, y_i) y su posición en la secuencia i , la taxonomía asigna una categoría κ_i .

Existen tres tipos principales de taxonomías aplicables a series temporales:

1. **Taxonomías de Objetos:** Dependen solo de las características x_i (ej. agrupar por niveles de volatilidad observada).
2. **Taxonomías de Etiquetas:** Dependen de la respuesta y_i . Esto da lugar a los *Label-Conditional Conformal Predictors*, vitales cuando el impacto de un error depende de la magnitud del valor (ej. errores en valores extremos son más costosos).
3. **Taxonomías Temporales:** Dependen del índice i . Este es el puente con el trabajo de Barber et al. Barber et al. 2023, donde la categoría de Mondrian puede ser una “ventana deslizante” de los datos más recientes para adaptarse a la no-intercambiabilidad.

2.7.3 Integración del Algoritmo MCPS

La integración de la lógica de Mondrian en un Sistema de Predicción Conformal se realiza modificando el cálculo del p-valor o de la RPD (Distribución Predictiva Aleatorizada). En lugar de comparar el puntaje del nuevo ejemplo α_n con todos los puntajes históricos, solo se compara con aquellos que pertenecen a su misma categoría.

Sea $\sigma = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ el conjunto de entrenamiento y $z_n = (x_n, y)$ el ejemplo de prueba con etiqueta hipotética y . El proceso para generar la RPD de Mondrian Π_M es el siguiente:

1. Se identifica la categoría del nuevo ejemplo: $k = \kappa(n, (x_n, y))$.
2. Se filtran los índices de los ejemplos de entrenamiento que pertenecen a dicha categoría:

$$S_k = \{i \in \{1, \dots, n-1\} : \kappa(i, z_i) = k\} \quad (2-27)$$

3. Se calculan los puntajes de conformidad α_i solo para $i \in S_k \cup \{n\}$.

4. La RPD de Mondrian se define como:

$$\Pi_M(y, \tau) := \frac{|\{i \in S_k : \alpha_i < \alpha_n^y\}| + \tau |\{i \in S_k \cup \{n\} : \alpha_i = \alpha_n^y\}|}{|S_k| + 1} \quad (2-28)$$

El denominador $|S_k| + 1$ es clave: representa el tamaño de la “muestra local”. Si una categoría tiene pocos ejemplos, la distribución predictiva será naturalmente más dispersa (reflejando mayor incertidumbre), mientras que categorías ricas en datos producirán densidades más nítidas Vovk, Gammerman, and Shafer 2022.

2.8 Análisis de la Consistencia Universal de Vovk

Para consolidar el marco teórico de esta investigación, es imperativo discutir el sustento matemático que garantiza que los Sistemas de Predicción Conformal (CPS) no solo son válidos en muestras finitas, sino también óptimos a medida que el volumen de datos aumenta. Este respaldo proviene de la demostración de la *consistencia universal* de Vovk (Vovk 2019), formalizada en el Teorema 31 de su obra reciente.

2.8.1 Definición de Consistencia Universal

En el contexto de los CPS, la validez (propiedad R2) asegura que el sistema está calibrado independientemente de la distribución de los datos. Sin embargo, la validez por sí sola no garantiza que la distribución predictiva Π_n sea una buena aproximación a la verdadera distribución condicional de las etiquetas $P(y|x)$.

Vovk define un sistema predictivo como *universalmente consistente* si, para cualquier medida de probabilidad P (bajo el modelo IID) y para cualquier función continua acotada f , se cumple que:

$$\int f d\Pi_n - \mathbb{E}_P(f|x_{n+1}) \rightarrow 0 \quad \text{en probabilidad cuando } n \rightarrow \infty \quad (2-29)$$

Esta propiedad implica que, asintóticamente, el CPS “encuentra” la verdadera distribución de probabilidad generadora de los datos, eliminando la incertidumbre epistémica conforme el tamaño de la muestra n tiende al infinito Vovk 2019.

2.8.2 Mecanismo de la Demostración: El Enfoque de Histograma

La prueba de Vovk sobre la existencia de un CPS universal se apoya en la construcción de un *Histogram Conformal Predictive System*. El argumento se divide en dos pilares fundamentales que vinculan la teoría de martingalas con la ley de los grandes números:

1. **Teorema de Convergencia de Martingalas de Lévy:** Vovk utiliza particiones anidadas del espacio de objetos X (celdas de histograma que se encogen conforme n crece). Según el teorema de Lévy, la esperanza condicional de la función sobre una celda que se reduce tiende al valor puntual de la esperanza condicional en el objeto de prueba x_{n+1} Vovk 2019.
2. **Ley de los Grandes Números (LGN):** Mientras las celdas se encogen para ganar resolución, el número de ejemplos dentro de cada celda debe tender a infinito ($nh_n \rightarrow \infty$, donde h_n es el ancho de la celda). Esto permite que la frecuencia empírica de las etiquetas dentro de la categoría de Mondrian converja a la esperanza real en esa región del espacio Vovk 2019.

2.8.3 La Distancia de Lévy y la Convergencia Débil

Un punto crítico de la demostración es el uso de la noción de Belyaev sobre secuencias de distribuciones que se aproximan débilmente. Vovk demuestra que bajo un CPS universal, la *Distancia de Lévy* entre la distribución predictiva conformal y la verdadera distribución condicional converge a cero en probabilidad Vovk 2019.

Este resultado es el que otorga rigor a la aplicación de CPS en problemas de alta criticidad, como el pronóstico de carga eléctrica o la gestión de riesgos financieros. Indica que el analista no tiene que elegir entre un modelo “seguro” (conformal) y un modelo “preciso” (bayesiando/paramétrico); el CPS universal ofrece ambas ventajas simultáneamente:

- **A corto plazo:** Garantiza cobertura exacta mediante calibración fuerte.
- **A largo plazo:** Garantiza convergencia a la distribución real de los datos sin requerir asunciones paramétricas.

2.8.4 Implicaciones para el LSPM y la Eficiencia

Aunque el modelo de mínimos cuadrados (LSPM) estudiado en la sección 2.6 es eficiente bajo ruido gaussiano, Vovk advierte que no es universalmente consistente si la relación real entre X y Y no es lineal Vovk, Gammerman, and Shafer 2005. Por ello, el desarrollo de CPS basados en kernels o en métodos de vecinos cercanos (como se discute en el capítulo 4 de su obra) es lo que permite alcanzar la consistencia universal en espacios de características complejos. Esta conclusión justifica el uso de arquitecturas no lineales conformizadas en la presente tesis, ya que heredan la solidez de la prueba de consistencia de Vovk.

2.9 Hacia la Consistencia Universal en Series de Tiempo Ergódicas

Si bien el trabajo de Vovk (Vovk 2019) establece una base sólida para la consistencia universal bajo el modelo IID, las aplicaciones en entornos reales, como las series de tiempo, exigen una transición hacia modelos que capturen la dependencia temporal. Inspirado en el formalismo de Vovk, el presente marco teórico propone las bases para un Sistema de Predicción Conformal (CPS) adaptado a procesos estocásticos donde la suposición de intercambiabilidad no se cumple.

2.9.1 Redefinición del Objetivo de Consistencia

En el contexto de series de tiempo, el objetivo de un CPS universalmente consistente es que la distribución predictiva generada, $Q_n(y)$, converja débilmente en probabilidad a la verdadera distribución condicional $F_{Y|X}(\cdot|X_{n+1})$. A diferencia del caso IID, aquí la “consistencia” implica que el sistema debe ser capaz de aprender la dinámica local y la estructura de dependencia del proceso a medida que la serie evoluciona.

Se plantea que, bajo este régimen, el sistema no solo debe ser asintóticamente válido, sino también *eficiente*, adaptándose a la heterocedasticidad (volatilidad cambiante) intrínseca de los datos secuenciales.

2.9.2 Supuestos Fundamentales del Marco Propuesto

Para transitar de la teoría de Vovk a procesos dependientes, se han identificado los siguientes supuestos como pilares necesarios para el desarrollo de una prueba de consistencia futura:

1. **Estacionariedad y Ergodicidad:** Se asume que el proceso $\{Z_t\}$ es estrictamente estacionario y ergódico. Esto garantiza que los promedios temporales observados en la ventana de datos converjan a los promedios del ensamble, permitiendo que el sistema “aprenda” de la historia pasada.
2. **Condición de α -mixing (Mezcla Fuerte):** Para manejar la dependencia, se requiere que el proceso sea α -mixing con coeficientes que decaigan algebraicamente ($\alpha(k) \leq Ck^{-\beta}, \beta > 2$). Este supuesto es crucial para aplicar teoremas límite central y asegurar que las observaciones lejanas en el tiempo sean casi independientes.
3. **Regularidad de Lipschitz:** A diferencia del enfoque de histograma de celdas discretas, aquí se asume que tanto la función de regresión $\mu(x)$ como la distribución de los residuos $G(s|x)$ son Lipschitz continuas respecto al espacio de covariables. Esto asegura que puntos cercanos en el tiempo y espacio tengan comportamientos predictivos similares.

2.9.3 Mecanismo Propuesto: Transductor Conformal por Kernel

En lugar del enfoque de histogramas anidados de Vovk, este marco propone una arquitectura adaptativa basada en dos componentes:

- **Ventana Temporal Móvil (L_n):** Un mecanismo de truncamiento que selecciona las últimas L_n observaciones. Para alcanzar la consistencia, el tamaño de esta ventana debe crecer con n pero a un ritmo controlado ($L_n \rightarrow \infty$).
- **Suavizado Espacial por Kernel (K, h_n):** En lugar de asignar pesos uniformes a la celda (como en Mondrian), se propone el uso de pesos de relevancia espacial $w_i = K(\frac{d(X_i, X_{n+1})}{h_n})$. Esto permite que el sistema pondere los residuos pasados no solo por su cercanía temporal, sino por su similitud en el espacio de características.

2.9.4 Discusión y Perspectivas Futuras

Esta formulación plantea que la convergencia de la integral $\int f dQ_n$ hacia la esperanza condicional real depende del balance entre el sesgo del kernel y la varianza inducida por la dependencia de los datos. Mientras que Vovk utiliza el Teorema de Lévy para martingalas, el análisis en series de tiempo requiere el uso de técnicas de *análisis de sesgo-varianza para estimadores no paramétricos en procesos mixing*.

Es importante notar que este planteamiento se presenta como una *hoja de ruta teórica*. La validación de que este transductor conformal ergódico alcanza la consistencia universal bajo cualquier proceso mixing representaría una extensión significativa del trabajo original de Vovk, unificando la robustez de la predicción conformal con la flexibilidad de la estimación no paramétrica para datos secuenciales de alta complejidad.

3 Simulación

Este capítulo describe el diseño experimental desarrollado para evaluar el desempeño de los métodos de pronóstico probabilístico en series temporales. Se presenta la justificación de los escenarios de evaluación, la metodología de simulación empleada y las características específicas de los procesos generadores de datos utilizados.

3.1 Introducción

La evaluación rigurosa de metodologías de pronóstico probabilístico requiere un marco experimental controlado que permita comparar el desempeño de diferentes técnicas bajo condiciones conocidas. A diferencia de los estudios con datos reales, donde la distribución verdadera es desconocida y la evaluación se limita a métricas indirectas, los estudios de simulación ofrecen la ventaja fundamental de conocer exactamente el proceso generador de datos (DGP, por sus siglas en inglés) (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021).

Este conocimiento del DGP permite evaluar directamente la calidad de las distribuciones predictivas mediante su comparación con la verdadera distribución teórica. En particular, el uso del ECRPS (Expected Continuous Ranked Probability Score) como métrica principal de evaluación se justifica porque permite cuantificar simultáneamente la calibración y la nitidez de los pronósticos probabilísticos, comparando las muestras generadas por cada método con muestras de la distribución teórica verdadera (Gneiting and Katzfuss 2014).

El diseño experimental desarrollado considera tres dimensiones fundamentales de variación: (1) la estructura temporal del proceso (estacionariedad y linealidad), (2) la distribución del término de error, y (3) la magnitud de la varianza del ruido. Esta combinación genera un espacio de escenarios suficientemente amplio para evaluar la robustez y adaptabilidad de los métodos bajo diferentes condiciones operativas.

3.2 Diseño de la Simulación

3.2.1 Selección de Escenarios de Evaluación

El presente estudio considera tres escenarios fundamentales que caracterizan diferentes clases de comportamiento en series temporales. La selección de estos escenarios se fundamenta en la clasificación teórica de procesos estocásticos y en consideraciones de relevancia práctica.

Escenario 1: Lineal Estacionario (ARMA)

El primer escenario considera procesos autorregresivos de media móvil (ARMA), que representan la clase fundamental de modelos lineales estacionarios. Un proceso ARMA(p, q) se caracteriza por su capacidad de capturar tanto la persistencia temporal (componente AR) como la dependencia de shocks pasados (componente MA), manteniendo propiedades estadísticas constantes en el tiempo (Arrieta Prieto 2017).

La estacionariedad de estos procesos garantiza que la media, varianza y estructura de autocorrelación permanezcan invariantes bajo traslaciones temporales, lo que facilita la modelación y el pronóstico (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021). Este escenario permite evaluar el desempeño de los métodos en condiciones ideales, donde los supuestos fundamentales de muchas técnicas estadísticas se cumplen.

Escenario 2: Lineal No Estacionario (ARIMA)

El segundo escenario aborda procesos autorregresivos integrados de media móvil (ARIMA), que extienden la clase ARMA para series con tendencias estocásticas. La presencia de raíces unitarias en el polinomio autorregresivo genera comportamientos de paseo aleatorio que son comunes en series económicas y financieras (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021).

La no estacionariedad introduce desafíos adicionales para el pronóstico probabilístico, ya que la incertidumbre crece sin límite conforme aumenta el horizonte de predicción. Este escenario permite evaluar la capacidad de los métodos para adaptarse a estructuras no estacionarias mediante diferenciación o técnicas adaptativas.

Escenario 3: No Lineal Estacionario (SETAR)

El tercer escenario considera modelos autorregresivos de umbral auto-excitados (SETAR), que permiten cambios estructurales endógenos en la dinámica del proceso. Estos modelos capturan no linealidades mediante el cambio de régimen determinado por valores pasados de la propia serie (P. Chen and Semmler [2023](#)).

La estacionariedad global de un proceso SETAR requiere condiciones específicas sobre los parámetros autorregresivos en cada régimen y la frecuencia de transición entre regímenes. Estas condiciones se discuten en detalle en la Sección [3.3.3](#). Este escenario es particularmente relevante para evaluar la capacidad de los métodos conformales de capturar dinámicas asimétricas y dependientes del estado del sistema.

Ausencia del Escenario No Lineal No Estacionario

La combinación de no linealidad y no estacionariedad, aunque teóricamente posible, presenta desafíos metodológicos sustanciales que la excluyen del alcance de este estudio. Los modelos que combinan ambas características (por ejemplo, SETAR con raíces unitarias condicionales o modelos de cambio de régimen con deriva) requieren condiciones de estabilidad extremadamente restrictivas y su caracterización teórica es un área de investigación activa (P. Chen and Semmler [2023](#)).

Más fundamentalmente, la validez teórica de muchos métodos de predicción conformal, incluyendo aquellos basados en el enfoque de Barber et al. ([Barber et al. 2023](#)), asume que el proceso subyacente es al menos localmente estacionario o que las desviaciones de la estacionariedad son graduales y pueden ser capturadas mediante esquemas de ponderación adaptativos. La presencia simultánea de cambios estructurales abruptos (no linealidad) y tendencias estocásticas persistentes (no estacionariedad) violaría estos supuestos fundamentales, invalidando las garantías teóricas de cobertura.

Por estas razones, el presente estudio se enfoca en los tres escenarios anteriores, que permiten una evaluación rigurosa y teóricamente fundamentada del desempeño de los métodos.

3.2.2 Estructura del Diseño Factorial

El diseño experimental implementa un esquema factorial completo que combina sistemáticamente tres dimensiones de variación para cada uno de los tres escenarios considerados. Esta estructura genera un total de 420 configuraciones únicas de simulación, distribuidas equitativamente entre los escenarios.

Dimensión 1: Configuraciones Paramétricas del Proceso

Para cada clase de modelo (ARMA, ARIMA, SETAR), se consideran 7 configuraciones paramétricas distintas que representan diferentes grados de complejidad y características dinámicas. Las especificaciones detalladas de estas configuraciones se presentan en la Sección 3.3. Esta diversidad paramétrica permite evaluar la sensibilidad de los métodos a diferentes estructuras de dependencia temporal.

Dimensión 2: Distribuciones del Término de Error

Se consideran cinco familias de distribuciones para el término de innovación ε_t , seleccionadas para representar diferentes características de forma, simetría y comportamiento en las colas:

1. **Normal:** $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Representa el caso base con colas ligeras y simetría perfecta.
2. **T-Student:** $\varepsilon_t \sim \sigma \cdot \frac{t_{18}}{\sqrt{18/16}}$, donde t_{18} denota una distribución t de Student con 18 grados de libertad. Esta parametrización garantiza varianza unitaria y genera colas más pesadas que la normal, capturando eventos extremos más frecuentes.
3. **Exponencial:** $\varepsilon_t \sim \sigma(Y - 1)$, donde $Y \sim \text{Exp}(1)$. Produce asimetría positiva y es relevante para series que modelan variables intrínsecamente positivas o con shocks unidireccionales.
4. **Uniforme:** $\varepsilon_t \sim U(-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma)$. Genera soporte acotado y ausencia de colas, representando un caso extremo de curtosis negativa.
5. **Mixtura de Normales:** $\varepsilon_t \sim 0.75 \cdot N(-\sigma/4, \sigma^2/16) + 0.25 \cdot N(3\sigma/4, \sigma^2/16)$. Produce bimodalidad y permite evaluar el desempeño bajo distribuciones predictivas complejas con múltiples modas.

Esta selección permite evaluar la robustez de los métodos ante desviaciones del supuesto de normalidad que frecuentemente se asume en la literatura de pronóstico (Arrieta Prieto 2017).

Dimensión 3: Niveles de Varianza del Error

Se consideran cuatro niveles de varianza $\sigma^2 \in \{0.2, 0.5, 1.0, 3.0\}$ que representan diferentes razones señal-ruido. El nivel base $\sigma^2 = 1.0$ corresponde a la parametrización estándar, mientras que $\sigma^2 = 0.2$ representa un escenario de alta predictibilidad y $\sigma^2 = 3.0$ captura situaciones de alta volatilidad donde la incertidumbre inherente domina la dinámica del sistema.

Combinatoria Total

La combinación factorial de estas tres dimensiones genera:

$$N_{\text{config}} = 7 \text{ modelos} \times 5 \text{ distribuciones} \times 4 \text{ varianzas} = 140 \text{ configuraciones por escenario} \quad (3-1)$$

Con tres escenarios (ARMA, ARIMA, SETAR), el espacio experimental completo comprende:

$$N_{\text{total}} = 140 \times 3 = 420 \text{ configuraciones únicas} \quad (3-2)$$

Adicionalmente, considerando que cada configuración se evalúa en un horizonte de predicción de 12 pasos usando ventana rodante para que se realice predicción a un paso adelante, el número total de combinaciones configuración-horizonte es de $420 \times 12 = 5040$.

3.2.3 Protocolo de Simulación y Partición de Datos

Para cada una de las 420 configuraciones, se implementa el siguiente protocolo de simulación:

- 1. Generación de la Serie:** Se simulan $n_{\text{total}} = 302$ observaciones del proceso especificado, precedidas por un período de burn-in de 50 observaciones que se descartan para eliminar el efecto de las condiciones iniciales. Esto resulta en una serie efectiva

de longitud $n = 252$.

2. Partición Tripartita: La serie se divide en tres conjuntos disjuntos:

- **Conjunto de Entrenamiento:** $n_{\text{train}} = 200$ observaciones iniciales utilizadas para la estimación inicial de parámetros y el ajuste de hiperparámetros.
- **Conjunto de Calibración:** $n_{\text{cal}} = 40$ observaciones subsecuentes utilizadas para la calibración de intervalos de predicción y la construcción de distribuciones conformales.
- **Conjunto de Prueba:** $n_{\text{test}} = 12$ observaciones finales utilizadas para la evaluación del desempeño predictivo.

3. Esquema de Ventana Rodante: La evaluación se realiza mediante una ventana rodante (rolling window) donde:

- Para el primer paso de predicción, se utilizan las primeras 200 observaciones para entrenamiento y las siguientes 40 para calibración.
- Para cada paso $h = 1, \dots, 12$, la ventana de entrenamiento se extiende para incluir las observaciones anteriores, manteniendo fijo el conjunto de calibración de tamaño 40 inmediatamente anterior al punto de predicción.
- Este esquema emula una situación operativa donde el analista actualiza periódicamente los modelos conforme nueva información se hace disponible.

4. Generación de Distribuciones Predictivas: Para cada método y cada paso de predicción h , se generan muestras de la distribución predictiva. Estas muestras se comparan con muestras de la distribución teórica verdadera del proceso (conocida por construcción del DGP) mediante el cálculo del ECRPS para ese paso específico.

Este protocolo garantiza que la evaluación sea tanto rigurosa (mediante la comparación con la distribución verdadera) como realista (mediante el esquema de ventana rodante que refleja la práctica operativa).

3.3 Procesos Generadores de Datos

Esta sección describe formalmente los modelos utilizados como procesos generadores de datos en cada escenario, junto con las configuraciones paramétricas específicas consideradas. Para cada clase de modelo, se presentan las ecuaciones fundamentales, las condiciones de estacionariedad (cuando corresponda) y las parametrizaciones concretas evaluadas.

3.3.1 Procesos ARMA: Escenario Lineal Estacionario

Definición y Representación

Un proceso autorregresivo de media móvil de órdenes p y q , denotado ARMA(p, q), se define mediante la ecuación en diferencias estocástica:

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (3-3)$$

donde c es un término constante, $\{\phi_i\}_{i=1}^p$ son los coeficientes autorregresivos, $\{\theta_j\}_{j=1}^q$ son los coeficientes de media móvil, y $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso de ruido blanco con media cero y varianza σ^2 .

Utilizando el operador de rezagos L definido por $L^k Y_t = Y_{t-k}$, el proceso puede expresarse en forma compacta:

$$\Phi(L)Y_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t \quad (3-4)$$

donde $\Phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i$ es el polinomio autorregresivo y $\Theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j$ es el polinomio de media móvil.

Condiciones de Estacionariedad e Invertibilidad

La estacionariedad y la invertibilidad de un proceso ARMA están determinadas por las raíces de sus polinomios característicos (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021):

- **Estacionariedad:** El proceso es estacionario en covarianza si y solo si todas las raíces del polinomio autorregresivo $\Phi(z) = 0$ se encuentran estrictamente fuera del

círculo unitario complejo. Equivalentemente, las raíces del polinomio $\Phi(L)$ deben satisfacer $|z_i| > 1$ para todo i .

- **Invertibilidad:** El proceso es invertible si y solo si todas las raíces del polinomio de media móvil $\Theta(z) = 0$ se encuentran estrictamente fuera del círculo unitario complejo.

Estas condiciones garantizan que el proceso admite representaciones de Wold ($\text{MA}(\infty)$) y autorregresiva ($\text{AR}(\infty)$) convergentes, lo que es fundamental para la teoría de pronóstico (Arrieta Prieto 2017).

Distribución Predictiva Verdadera

Para un proceso ARMA estacionario e invertible, la distribución del siguiente valor Y_{n+1} condicionada a la historia observada $\mathcal{F}_n = \{Y_1, \dots, Y_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ tiene una forma analítica explícita. Dado que el modelo es lineal, la distribución condicional está completamente caracterizada por su media y varianza condicionales.

La media condicional se obtiene de la ecuación estructural del modelo:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{n+1-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{n+1-j} \quad (3-5)$$

donde todos los términos del lado derecho son conocidos. La varianza condicional es constante e igual a la varianza del ruido:

$$\text{Var}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \sigma^2 \quad (3-6)$$

Por lo tanto, si el ruido ε_t sigue una distribución F con media cero y varianza σ^2 , la distribución predictiva verdadera es:

$$Y_{n+1} | \mathcal{F}_n \sim F(\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n], \sigma^2) \quad (3-7)$$

Esta distribución puede evaluarse numéricamente generando una muestra grande de errores

futuros $\varepsilon_{n+1}^{(b)} \sim F(0, \sigma^2)$ y calculando:

$$Y_{n+1}^{(b)} = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{n+1-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{n+1-j} + \varepsilon_{n+1}^{(b)}, \quad b = 1, \dots, B \quad (3-8)$$

donde B es un número suficientemente grande (en esta investigación, $B = 1000$). Esta muestra empírica aproxima la distribución predictiva verdadera y sirve como referencia para el cálculo del ECRPS.

Configuraciones Paramétricas Evaluadas

La Tabla 3-1 presenta las siete configuraciones ARMA consideradas en este estudio. La selección incluye modelos puramente autorregresivos [AR(1), AR(2)], puramente de media móvil [MA(1), MA(2)], y mixtos [ARMA(1,1), ARMA(2,2), ARMA(2,1)], con diferentes grados de persistencia temporal y complejidad estructural.

Nombre	p	q	ϕ	θ
AR(1)	1	0	[0.9]	[]
AR(2)	2	0	[0.5, -0.3]	[]
MA(1)	0	1	[]	[0.7]
MA(2)	0	2	[]	[0.4, 0.2]
ARMA(1,1)	1	1	[0.6]	[0.3]
ARMA(2,2)	2	2	[0.4, -0.2]	[0.5, 0.1]
ARMA(2,1)	2	1	[0.7, 0.2]	[0.5]

Table 3-1: Configuraciones paramétricas para procesos ARMA.

Todas las configuraciones fueron verificadas para satisfacer las condiciones de estacionariedad e invertibilidad mediante el cálculo numérico de las raíces de los polinomios característicos correspondientes.

3.3.2 Procesos ARIMA: Escenario Lineal No Estacionario

Definición y Operador de Diferenciación

Un proceso autorregresivo integrado de media móvil de órdenes (p, d, q) , denotado ARIMA(p, d, q), se construye aplicando el operador de diferenciación $\Delta = 1 - L$ un total de d veces a una serie Y_t y modelando la serie diferenciada resultante $W_t = \Delta^d Y_t$ mediante un proceso ARMA(p, q) estacionario:

$$\Phi(L)W_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t \quad (3-9)$$

donde $W_t = (1 - L)^d Y_t$.

Equivalentemente, en términos de la serie original:

$$\Phi(L)(1 - L)^d Y_t = c + \Theta(L)\varepsilon_t \quad (3-10)$$

El orden de integración d representa el número de raíces unitarias en el polinomio autorregresivo ampliado. En la gran mayoría de aplicaciones prácticas, $d \in \{0, 1, 2\}$, siendo $d = 1$ el caso más frecuente (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021).

Propiedades de Estacionariedad

Un proceso ARIMA(p, d, q) es no estacionario por construcción cuando $d > 0$, debido a la presencia de raíces unitarias. Sin embargo, la serie diferenciada $W_t = \Delta^d Y_t$ es estacionaria si el componente ARMA(p, q) subyacente satisface las condiciones de estacionariedad e invertibilidad descritas en la Sección 3.3.1.

Esta propiedad de *estacionariedad en diferencias* es fundamental para el pronóstico, ya que permite aplicar toda la teoría desarrollada para procesos estacionarios a la serie transformada W_t , recuperando posteriormente los pronósticos en la escala original mediante integración sucesiva (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021).

Distribución Predictiva Verdadera

Para un proceso ARIMA(p, d, q), la distribución del siguiente valor Y_{n+1} condicionada a la historia observada se obtiene mediante un procedimiento de dos etapas que explota la

estructura de diferenciación del modelo.

Primero, se predice el siguiente valor de la serie diferenciada $W_{n+1} = \Delta^d Y_{n+1}$ usando la distribución ARMA subyacente. Para el caso más común $d = 1$, la serie diferenciada es:

$$W_t = Y_t - Y_{t-1} \quad (3-11)$$

y su predicción un paso adelante, condicionada a la historia $\mathcal{F}_n = \{Y_1, \dots, Y_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, sigue la distribución ARMA:

$$W_{n+1} | \mathcal{F}_n \sim F(\mathbb{E}[W_{n+1} | \mathcal{F}_n], \sigma^2) \quad (3-12)$$

donde:

$$\mathbb{E}[W_{n+1} | \mathcal{F}_n] = c + \sum_{i=1}^p \phi_i W_{n+1-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{n+1-j} \quad (3-13)$$

Segundo, se recupera la predicción en la escala original mediante la relación de integración:

$$Y_{n+1} = Y_n + W_{n+1} \quad (3-14)$$

Por lo tanto, la distribución predictiva verdadera para Y_{n+1} es:

$$Y_{n+1} | \mathcal{F}_n \sim F(Y_n + \mathbb{E}[W_{n+1} | \mathcal{F}_n], \sigma^2) \quad (3-15)$$

Esta distribución puede evaluarse numéricamente generando muestras del incremento futuro:

$$W_{n+1}^{(b)} = c + \sum_{i=1}^p \phi_i W_{n+1-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{n+1-j} + \varepsilon_{n+1}^{(b)} \quad (3-16)$$

y aplicando la transformación:

$$Y_{n+1}^{(b)} = Y_n + W_{n+1}^{(b)}, \quad b = 1, \dots, B \quad (3-17)$$

donde $\varepsilon_{n+1}^{(b)} \sim F(0, \sigma^2)$ son errores futuros independientes. Esta muestra empírica representa la distribución predictiva verdadera que sirve como referencia para el ECRPS.

Configuraciones Paramétricas Evaluadas

La Tabla 3-2 presenta las siete configuraciones ARIMA($p, 1, q$) consideradas en este estudio. Todas las configuraciones utilizan $d = 1$, reflejando el caso más común en aplicaciones económicas y financieras. La selección incluye desde el paseo aleatorio puro [ARIMA(0,1,0)] hasta modelos con estructura autorregresiva y de media móvil en la serie diferenciada.

Nombre	p	d	q	ϕ	θ
ARIMA(0,1,0)	0	1	0	[]	[]
ARIMA(1,1,0)	1	1	0	[0.6]	[]
ARIMA(2,1,0)	2	1	0	[0.5, -0.2]	[]
ARIMA(0,1,1)	0	1	1	[]	[0.5]
ARIMA(0,1,2)	0	1	2	[]	[0.4, 0.25]
ARIMA(1,1,1)	1	1	1	[0.7]	[-0.3]
ARIMA(2,1,2)	2	1	2	[0.6, 0.2]	[0.4, -0.1]

Table 3-2: Configuraciones paramétricas para procesos ARIMA.

3.3.3 Procesos SETAR: Escenario No Lineal Estacionario

Definición y Mecanismo de Cambio de Régimen

Un modelo autorregresivo de umbral auto-excitado con dos régímenes, denotado SETAR(2; p_1, p_2), se define mediante una estructura de cambio de régimen determinado por valores pasados de la propia serie (P. Chen and Semmler 2023):

$$Y_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i^{(1)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{si } Y_{t-d} \leq r \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{p_2} \phi_i^{(2)} Y_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{si } Y_{t-d} > r \end{cases} \quad (3-18)$$

donde:

- r es el *valor umbral* (threshold value) que determina el cambio de régimen
- d es el *rezago de umbral* (threshold delay) que especifica qué valor pasado de la serie se utiliza para determinar el régimen activo

- $\phi_0^{(j)}$ y $\{\phi_i^{(j)}\}_{i=1}^{p_j}$ son los parámetros específicos del régimen j
- $\varepsilon_t^{(j)} \sim WN(0, \sigma_j^2)$ son procesos de ruido blanco que pueden tener varianzas diferentes en cada régimen

La notación SETAR($2; d, p$) denota un modelo de dos regímenes con rezago de umbral d y orden autorregresivo común p en ambos regímenes (aunque en general p_1 y p_2 pueden diferir).

Estacionariedad en Procesos SETAR

La estacionariedad de procesos SETAR es sustancialmente más compleja que en modelos lineales, ya que la dinámica cambia endógenamente según el estado del sistema. Las condiciones suficientes para la estacionariedad han sido objeto de extensa investigación (P. Chen and Semmler 2023).

Caso SETAR($2; 1, 1$): Para el caso más simple de dos regímenes con orden autorregresivo 1, Petruccelli and Woolford 1984 demostraron que el proceso es ergódico si y solo si:

$$|\phi_1^{(1)}| < 1, \quad |\phi_1^{(2)}| < 1, \quad \text{y} \quad |\phi_1^{(1)}\phi_1^{(2)}| < 1 \quad (3-19)$$

Esta condición requiere que cada régimen sea individualmente estable y que el producto de los coeficientes autorregresivos sea menor que uno en valor absoluto. Esta última condición captura el efecto de la interacción entre regímenes.

Caso General SETAR($2; p_1, p_2$): Para órdenes autorregresivos mayores, Chan and Tong 1985 proporcionaron una condición suficiente basada en el radio espectral de las matrices compañeras:

$$\max_j \sum_{i=1}^{p_j} |\phi_i^{(j)}| < 1 \quad (3-20)$$

Sin embargo, esta condición es bastante conservadora. Un criterio más general y menos restrictivo se basa en el concepto de *radio espectral conjunto* (joint spectral radius) de las matrices compañeras de ambos regímenes (P. Chen and Semmler 2023). Sea $\Phi^{(j)}$ la matriz compañera del régimen j :

$$\Phi^{(j)} = \begin{pmatrix} \phi_1^{(j)} & \phi_2^{(j)} & \cdots & \phi_{p-1}^{(j)} & \phi_p^{(j)} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

El radio espectral conjunto se define como:

$$\rho(\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max \|\Phi^{(i_1)} \dots \Phi^{(i_k)}\|^{1/k} \quad (3-22)$$

donde el máximo se toma sobre todas las secuencias posibles de k matrices.

El proceso SETAR es estacionario si $\rho(\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}\}) < 1$. Este criterio es menos restrictivo que (3-20) y permite que algunos regímenes individuales sean incluso explosivos, siempre que la dinámica global del sistema sea estabilizadora (P. Chen and Semmler 2023).

Distribución Predictiva Verdadera

La distribución del siguiente valor Y_{n+1} en un proceso SETAR condicionada a la historia observada $\mathcal{F}_n = \{Y_1, \dots, Y_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ depende críticamente del régimen que será activado en el tiempo $n + 1$. A diferencia de los modelos lineales, la predicción requiere determinar primero qué régimen gobernará la dinámica futura.

El régimen activo en el tiempo $n + 1$ se determina comparando el valor retardado Y_{n+1-d} con el umbral r :

$$\text{Régimen}_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_{n+1-d} \leq r \\ 2 & \text{si } Y_{n+1-d} > r \end{cases} \quad (3-23)$$

Dado que Y_{n+1-d} ya es conocido en el tiempo n (pues $n + 1 - d \leq n$ para $d \geq 1$), el régimen futuro es determinístico y no hay incertidumbre sobre cuál dinámica aplicar. Una vez identificado el régimen $j \in \{1, 2\}$, la media condicional se calcula mediante:

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n, \text{Régimen}_{n+1} = j] = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} \phi_i^{(j)} Y_{n+1-i} \quad (3-24)$$

donde todos los valores Y_{n+1-i} en el lado derecho son observados. La varianza condicional

es constante dentro de cada régimen:

$$\text{Var}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n, \text{Régimen}_{n+1} = j] = \sigma_j^2 \quad (3-25)$$

Por lo tanto, la distribución predictiva verdadera es:

$$Y_{n+1} | \mathcal{F}_n \sim F_j(\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n, \text{Régimen}_{n+1} = j], \sigma_j^2) \quad (3-26)$$

donde F_j es la distribución del ruido en el régimen j y el subíndice j se determina mediante (3-23).

Esta distribución puede evaluarse numéricamente generando una muestra grande de errores futuros específicos del régimen activo:

$$Y_{n+1}^{(b)} = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} \phi_i^{(j)} Y_{n+1-i} + \varepsilon_{n+1}^{(b)}, \quad b = 1, \dots, B \quad (3-27)$$

donde $\varepsilon_{n+1}^{(b)} \sim F_j(0, \sigma_j^2)$ son errores independientes del régimen determinado. A diferencia de los modelos ARMA, aquí no existe incertidumbre sobre el régimen en predicciones un paso adelante, lo que simplifica considerablemente la evaluación de la distribución predictiva verdadera.

Configuraciones Paramétricas Evaluadas

La Tabla 3-3 presenta las siete configuraciones SETAR consideradas en este estudio. Las configuraciones incluyen diferentes órdenes autorregresivos, rezagos de umbral y valores de umbral, representando una amplia gama de comportamientos no lineales.

Finalmente, es importante destacar que todas las configuraciones detalladas en la Tabla 3-3 fueron seleccionadas bajo un estricto criterio de estabilidad. Para garantizar el rigor estadístico de las comparaciones en este escenario, se realizó un análisis de estacionariedad basado en el cálculo numérico del radio espectral conjunto (ρ) para cada par de matrices compañeras. Se verificó que en la totalidad de los casos empleados en la simulación se cumple la condición $\rho < 1$, asegurando que los procesos SETAR generados son globalmente estacionarios.

Nombre	$\phi^{(1)}$	$\phi^{(2)}$	r	d
SETAR-1	[0.6]	[-0.5]	0.0	1
SETAR-2	[0.7]	[-0.7]	0.0	2
SETAR-3	[0.5, -0.2]	[-0.3, 0.1]	0.5	1
SETAR-4	[0.8, -0.15]	[-0.6, 0.2]	1.0	2
SETAR-5	[0.4, -0.1, 0.05]	[-0.3, 0.1, -0.05]	0.0	1
SETAR-6	[0.5, -0.3, 0.1]	[-0.4, 0.2, -0.05]	0.5	2
SETAR-7	[0.3, 0.1]	[-0.2, -0.1]	0.8	3

Table 3-3: Configuraciones paramétricas para procesos SETAR.

3.4 Modelos predictivos

Para evaluar la capacidad de cuantificación de la incertidumbre en diversos entornos estocásticos, esta investigación emplea un conjunto heterogéneo de nueve modelos predictivos. Esta selección abarca desde métodos de remuestreo clásicos y propuestas de predicción conformal, hasta arquitecturas de aprendizaje profundo y modelos híbridos de diseño propio. El uso de esta diversidad de enfoques permite contrastar cómo las garantías teóricas de cada familia de modelos se traducen en un rendimiento práctico bajo la métrica ECRPS, especialmente cuando se enfrentan a la ruptura de los supuestos de intercambiabilidad y linealidad.

3.4.1 Circular Block Bootstrap (CBB)

Explicación Teórica del Modelo

El método *Circular Block Bootstrap* (CBB), introducido por Politis and Romano (1992), representa una evolución metodológica del remuestreo por bloques que aborda una limitación fundamental de los esquemas no circulares como el Moving Block Bootstrap (MBB). Según Lahiri (2003), el problema radica en que las observaciones ubicadas en los extremos de la serie temporal $\{X_1, \dots, X_n\}$ aparecen con menor frecuencia en los bloques remuestreados, generando una infra-representación sistemática de los bordes y sesgo en la estimación de varianza.

Fundamento Teórico El CBB resuelve esta asimetría mediante la *circunscripción* de los datos: la serie temporal se conceptualiza como una estructura circular donde X_n es

seguido inmediatamente por X_1 , permitiendo la continuidad periódica. Formalmente, para una serie de longitud n y bloques de tamaño l , se definen exactamente n bloques posibles:

$$B_i = \{X_i, X_{i+1 \bmod n}, \dots, X_{i+l-1 \bmod n}\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3-28)$$

donde el operador módulo (\bmod) implementa la extensión circular. Esta construcción garantiza que cada observación histórica tiene probabilidad idéntica $1/n$ de ser seleccionada como punto de inicio de un bloque, eliminando el sesgo de borde.

Algoritmo de Remuestreo El procedimiento de generación de muestras bootstrap opera en dos etapas:

1. **Muestreo de puntos de inicio:** Se seleccionan B índices $\{i_1, \dots, i_B\}$ uniformemente de $\{1, \dots, n\}$, donde B es el número de réplicas bootstrap deseadas.
2. **Construcción de bloques circulares:** Cada réplica X_b^* se forma extrayendo el bloque circular iniciado en i_b :

$$X_b^* = X_{(i_b+r) \bmod n}, \quad r \in \{0, 1, \dots, l-1\} \quad (3-29)$$

Para pronóstico un paso adelante, la distribución predictiva se approxima mediante el conjunto de valores finales de cada bloque: $\{\hat{y}_{t+1}^{(1)}, \dots, \hat{y}_{t+1}^{(B)}\}$, donde $\hat{y}_{t+1}^{(b)} = X_b^*$.

Propiedades Estadísticas Lahiri (2003) establece que bajo condiciones de mixing (dependencia que decae con el tiempo), el estimador CBB de la varianza es consistente cuando $l \rightarrow \infty$ y $l/n \rightarrow 0$ conforme $n \rightarrow \infty$. La equiprobabilidad de selección garantiza distribuciones predictivas mejor calibradas en contextos de dependencia temporal, haciendo al CBB apropiado para series financieras y económicas donde la estructura de autocorrelación es relevante.

Clasificación del Modelo El CBB es un método **no paramétrico** puro: no asume ninguna forma funcional para la distribución subyacente de los datos ni estima parámetros poblacionales. La distribución predictiva emerge directamente del remuestreo empírico de la historia observada, preservando las características distribucionales y de dependencia presentes en la muestra sin imponer supuestos estructurales.

De la Teoría a la Práctica

La implementación desarrollada introduce tres adaptaciones principales respecto a la formulación teórica estándar:

Adaptación 1: Simplificación del Esquema de Remuestreo La teoría clásica del CBB (Politis and Romano 1992) genera bloques completos de longitud l que luego se concatenan para formar series bootstrap de longitud n . En contraste, la implementación para pronóstico un paso adelante simplifica el proceso: dado que solo se requiere predecir \hat{y}_{t+1} , se muestrea directamente el valor en la posición $(i_b + r) \bmod n$ donde $r = n \bmod l$ representa la posición relativa dentro del último bloque histórico. Esta simplificación reduce la complejidad computacional de $O(Bl)$ a $O(B)$ operaciones de indexación.

Adaptación 2: Selección Automática de l Mientras que la teoría requiere especificación manual del tamaño de bloque basado en análisis del proceso estocástico subyacente, la implementación incorpora la heurística automática de Politis and White (2004): $l \approx 1.5 \times n^{1/3}$, ademas de otros valores de referencia para balancear eficiencia y captura de dependencia.

Adaptación 3: Congelamiento Post-Optimización A diferencia de implementaciones estándar que podrían recalcular l en cada paso, el diseño experimental congela el hiperparámetro tras la fase de validación, este congelamiento es crítico para prevenir *data leakage*: re-optimizar en ventanas rolling introduciría información futura en la selección del modelo, violando la evaluación predictiva rigurosa.

Aspecto	Teoría Clásica	Implementación
Remuestreo	Bloques completos concatenados	Valor directo $(i + n \bmod l) \bmod n$
Longitud de bloque	Manual / dependiente del contexto	Optimización
Actualización de l	No especificada	Congelada post-optimización
Complejidad	$O(Bl)$ para serie completa	$O(B)$ para un pronóstico

Table 3-4: Comparativa: Teoría vs. Implementación del CBB

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetro Principal: `block_length (l)` Controla la cantidad de dependencia temporal preservada en las réplicas bootstrap. Su configuración óptima se determina mediante una estrategia de optimización que emplea una búsqueda en grilla. La grilla de valores candidatos para l está definida por las siguientes cuatro opciones, que representan diferentes escalas de dependencia temporal en función del tamaño de muestra n :

1. $l = 5$, para modelar estructuras de dependencia de corto plazo.
2. $l = \lfloor 1.5 \cdot n^{1/3} \rfloor$, una aproximación heurística común en métodos de *block bootstrap*.
3. $l = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, que ofrece un balance entre corto y mediano plazo.
4. $l = \lfloor n/5 \rfloor$, diseñada para capturar posibles estructuras de dependencia de largo plazo.

La selección del valor óptimo de l de entre estas cuatro opciones se realiza minimizando el **CRPS promedio** (ECRPS) sobre un conjunto de validación, conforme a la métrica detallada en la subsección 2.2.3.

Protocolo de Congelamiento Una vez identificado el valor óptimo mediante validación, este se congela y se utiliza de manera fija durante la fase de prueba. Esta lógica garantiza que no haya contaminación de información y que el modelo evaluado sea idéntico al seleccionado durante la validación.

3.4.2 Sieve Bootstrap (SB)

Explicación Teórica del Modelo

El *Sieve Bootstrap*, introducido por Bühlmann (1997) y analizado en profundidad por Lahiri (2003), representa un enfoque alternativo al remuestreo por bloques para series temporales dependientes. En lugar de preservar la dependencia mediante partición física de la serie, el método emplea una aproximación paramétrica para filtrar la estructura de autocorrelación.

Fundamento Teórico El Sieve Bootstrap se fundamenta en el teorema de Wold, que establece que cualquier proceso estocástico estacionario linealmente regular admite una representación autorregresiva de orden infinito, AR(∞). Formalmente, para una serie temporal $\{X_t\}$ estacionaria con media μ , existe una representación:

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j (X_{t-j} - \mu) + \epsilon_t \quad (3-30)$$

donde $\{\epsilon_t\}$ es un proceso de innovaciones i.i.d. con media cero y varianza σ^2 .

En la práctica, esta representación infinita se aproxima mediante un modelo autorregresivo finito AR(p) donde p crece con el tamaño muestral n :

$$X_t = \phi_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + \epsilon_t \quad (3-31)$$

Algoritmo de Remuestreo El procedimiento del Sieve Bootstrap opera en tres etapas secuenciales:

1. **Ajuste del tamiz autorregresivo:** Se estima el modelo AR(p) mediante mínimos cuadrados ordinarios sobre la serie histórica, obteniendo coeficientes $\hat{\phi} = (\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p)$.
2. **Extracción de residuos:** Se calculan los residuos del modelo ajustado:

$$\hat{\epsilon}_t = X_t - \hat{\phi}_0 - \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j X_{t-j}, \quad t = p+1, \dots, n \quad (3-32)$$

que idealmente deben comportarse como realizaciones i.i.d. Estos residuos se centran: $\tilde{\epsilon}_t = \hat{\epsilon}_t - \bar{\epsilon}$.

3. **Generación de muestras bootstrap:** Para cada réplica $b = 1, \dots, B$:

- Se remuestrean con reemplazo los residuos centrados: $\epsilon_b^* \sim \{\tilde{\epsilon}_{p+1}, \dots, \tilde{\epsilon}_n\}$
- Se genera la predicción un paso adelante:

$$\hat{X}_{n+1}^{(b)} = \hat{\phi}_0 + \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j X_{n+1-j} + \epsilon_b^* \quad (3-33)$$

La distribución predictiva empírica está dada por el conjunto $\{\hat{X}_{n+1}^{(1)}, \dots, \hat{X}_{n+1}^{(B)}\}$.

Propiedades de Consistencia Bühlmann (1997) demuestra que bajo condiciones de regularidad (estacionaridad, ergodicidad, y $p = p_n \rightarrow \infty$ con $p_n^3/n \rightarrow 0$), el Sieve Bootstrap aproxima consistentemente la distribución del estimador de interés. La clave es que el orden p debe crecer suficientemente para capturar la dependencia, pero no tan rápido como para introducir varianza excesiva por sobreparametrización.

Clasificación del Modelo El Sieve Bootstrap es un método **semiparamétrico**: utiliza una estructura paramétrica (el modelo AR) para filtrar la dependencia temporal, pero trata la distribución de los residuos de forma no paramétrica mediante bootstrap empírico. No asume una forma distribucional específica para las innovaciones, solo que sean aproximadamente i.i.d. después del filtrado AR.

De la Teoría a la Práctica

La implementación desarrollada incorpora tres adaptaciones clave para el contexto de pronóstico rolling:

Adaptación 1: Selección de Orden Basada en Validación Mientras la teoría asintótica sugiere $p \rightarrow \infty$ con n , la implementación emplea una grilla discreta de órdenes candidatos $p \in \{5, 10, 20\}$ evaluados mediante ECRPS en validación. Esta discretización responde a dos consideraciones prácticas: (i) evitar sobreparametrización en muestras finitas ($n = 200$), y (ii) reducir tiempo computacional frente a búsquedas exhaustivas.

Adaptación 2: Congelamiento de Parámetros AR La implementación introduce un mecanismo de congelamiento crítico: durante la fase de calibración, se ajusta el modelo AR(p^*) con orden óptimo p^* sobre los datos de entrenamiento+calibración combinados, almacenando permanentemente:

- Coeficientes autorregresivos: $\hat{\phi}^* = (\hat{\phi}_0^*, \dots, \hat{\phi}_{p^*}^*)$
- Residuos centrados: $\tilde{\epsilon}^* = \{\tilde{\epsilon}_{p^*+1}, \dots, \tilde{\epsilon}_{n_{\text{calib}}}\}$

En cada ventana rolling subsecuente, se reutilizan $\hat{\phi}^*$ y $\tilde{\epsilon}^*$ sin re-estimación, aplicando solo los últimos p^* valores observados para generar la predicción. Esta estrategia previene data leakage y reduce variabilidad numérica.

Adaptación 3: Predicción Secuencial Eficiente En lugar de generar series bootstrap completas de longitud n (complejidad $O(Bn)$), la implementación genera directamente predicciones un paso adelante (complejidad $O(B)$): dado el vector de historia reciente $\mathbf{X}_{n-p^*:n} = (X_{n-p^*+1}, \dots, X_n)$, cada predicción se calcula como:

$$\hat{X}_{n+1}^{(b)} = \hat{\phi}_0^* + \sum_{j=1}^{p^*} \hat{\phi}_j^* X_{n+1-j} + \epsilon_b^* \quad (3-34)$$

donde ϵ_b^* se muestrea de $\tilde{\epsilon}^*$ con reemplazo.

Aspecto	Teoría Clásica	Implementación
Orden AR	$p \rightarrow \infty$ con n	Grilla discreta $\{5, 10, 20\}$
Selección de p	Criterios asintóticos	Validación cruzada (ECRPS)
Parámetros $\hat{\phi}$	Re-estimados en cada muestra	Congelados post-calibración
Residuos	Recalculados dinámicamente	Pool fijo $\tilde{\epsilon}^*$
Complejidad	$O(Bn)$	$O(B)$

Table 3-5: Comparativa: Teoría vs. Implementación del Sieve Bootstrap

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetro Principal: order (p) Define la profundidad del tamiz autorregresivo, controlando cuánta memoria del proceso se captura. Durante la fase de validación se evalúan tres configuraciones sobre $n_{\text{train}} = 200$:

- $p = 5$ (dependencias de corto plazo, hasta una semana)
- $p = 10$ (memoria intermedia, aproximadamente dos semanas)
- $p = 20$ (dependencias extendidas, un mes)

Métrica de Optimización La selección del orden óptimo p^* se realiza minimizando el ECRPS (véase 2.2.3) sobre el conjunto de validación. El orden seleccionado es aquel que

produce las distribuciones predictivas más calibradas durante la fase de validación.

Protocolo de Congelamiento Una vez identificado p^* mediante validación, el método ajusta el modelo AR(p^*) sobre los datos de entrenamiento+calibración y almacena permanentemente los coeficientes $\hat{\phi}^*$ y residuos centrados $\tilde{\epsilon}^*$. Estos parámetros se reutilizan sin re-estimación en toda la fase de prueba rolling, previniendo data leakage y garantizando evaluación rigurosa.

Parámetros Operacionales

- `n_boot` (B): Número de réplicas bootstrap. Por defecto: $B = 1000$.
- `random_state`: Semilla para reproducibilidad del generador aleatorio.
- `verbose`: Control de mensajes diagnósticos durante congelamiento.

3.4.3 Least Squares Prediction Machine (LSPM)

Explicación Teórica del Modelo

El *Least Squares Prediction Machine* (LSPM), introducido por Vovk, Gammerman, and Shafer (2022), representa una evolución de la predicción conformal que trasciende la generación de intervalos de confianza para construir distribuciones predictivas completas. A diferencia de los predictores conformales estándar, el LSPM se define como un Sistema Predictivo Conformal (CPS), cuya salida es una Función de Distribución Predictiva Conformal (CPD).

Fundamento Teórico: Predicción Conformal La predicción conformal se fundamenta en el principio de intercambiabilidad: dada una secuencia de pares $(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ y un nuevo objeto x_n , se asume que para cualquier etiqueta candidata y , la secuencia aumentada $(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y)$ es intercambiable. Bajo este supuesto, se puede construir una distribución predictiva válida sin asumir una forma paramétrica específica para los errores.

El LSPM utiliza mínimos cuadrados ordinarios (OLS) como algoritmo subyacente. La versión más robusta es el **LSPM Studentizado**, que emplea los elementos diagonales de

la matriz de proyección (matriz hat) \bar{H} para normalizar los residuos. Según Vovk, Gammerman, and Shafer (2022), esta normalización garantiza que la distribución predictiva sea monótonamente creciente, incluso cuando el nuevo objeto posee alto apalancamiento (*leverage*).

Construcción de la Distribución Predictiva Para un conjunto de datos aumentado que incluye $n - 1$ ejemplos de entrenamiento $(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ y un nuevo objeto x_n con etiqueta hipotética y , se construye la matriz de diseño aumentada:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1}^T \\ 1 & x_n^T \end{pmatrix} \quad (3-35)$$

La matriz hat se define como:

$$\bar{H} = \bar{X}(\bar{X}^T \bar{X})^{-1} \bar{X}^T \quad (3-36)$$

donde $h_{i,j}$ denota el elemento en la fila i y columna j de \bar{H} .

Valores Críticos Studentizados La distribución predictiva se construye mediante valores críticos C_i que actúan como puntos de salto de una función escalonada. Para la versión studentizada, según las ecuaciones 7.15 y 7.16 de Vovk, Gammerman, and Shafer (2022):

$$C_i = \frac{A_i}{B_i}, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (3-37)$$

donde:

$$B_i = \sqrt{1 - h_{n,n}} + \frac{h_{i,n}}{\sqrt{1 - h_{i,i}}} \quad (3-38)$$

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} h_{j,n} y_j}{\sqrt{1 - h_{n,n}}} + \frac{y_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{i,j} y_j}{\sqrt{1 - h_{i,i}}} \quad (3-39)$$

El término A_i combina dos componentes: (i) la predicción OLS estándar sobre el punto nuevo, normalizada por su leverage, y (ii) el residuo studentizado del punto i en un ajuste

leave-one-out. El término B_i normaliza esta combinación considerando el leverage tanto del punto nuevo ($h_{n,n}$) como del punto histórico ($h_{i,i}$) y su covarianza ($h_{i,n}$).

Propiedades Estadísticas Vovk, Gammerman, and Shafer (2022) demuestra que bajo intercambiabilidad, la función de distribución construida mediante estos valores críticos es estadísticamente válida: para cualquier nivel de confianza α , el intervalo de predicción conformal tiene cobertura exacta $1 - \alpha$ en expectativa sobre la secuencia intercambiable. La studentización es crucial para mantener esta validez incluso cuando $h_{n,n} \rightarrow 1$ (leverage extremo del punto de prueba).

Clasificación del Modelo El LSPM es un método **no paramétrico** basado en distribución-libre (*distribution-free*). Aunque utiliza OLS como algoritmo subyacente, no asume ninguna forma distribucional para los errores ϵ_i . La validez estadística proviene únicamente del supuesto de intercambiabilidad, no de supuestos gaussianos o paramétricos sobre los residuos.

De la Teoría a la Práctica

La implementación desarrollada adapta el marco teórico de Vovk al contexto específico de pronóstico en series temporales:

Adaptación 1: Construcción Autorregresiva La teoría original asume vectores de características x_i independientes. En series temporales, se construyen objetos dinámicamente mediante retardos: dado p lags, cada observación se transforma en un vector autorregresivo:

$$x_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})^T \quad (3-40)$$

Esto convierte al LSPM en un predictor conformal autorregresivo AR(p), donde la matriz de diseño se construye dinámicamente en cada ventana rolling usando los últimos n valores disponibles.

Adaptación 2: Estabilidad Numérica Para calcular $\bar{H} = \bar{X}(\bar{X}^T \bar{X})^{-1} \bar{X}^T$, la implementación emplea la pseudoinversa de Moore-Penrose en lugar de la inversa estándar.

Esta decisión es crítica: series temporales con alta autocorrelación generan matrices $\bar{X}^T \bar{X}$ casi singulares (número de condición alto), causando inestabilidad numérica en la inversión directa. La pseudoinversa provee una solución regularizada que previene errores computacionales.

Adaptación 3: Filtrado de Singularidades La teoría requiere que $h_{i,i} < 1$ y $h_{n,n} < 1$ para que los denominadores en A_i y B_i sean no nulos. La implementación incorpora dos mecanismos de seguridad:

- Umbral de tolerancia: Se filtran observaciones con $|1 - h_{i,i}| < 10^{-10}$ o $|1 - h_{n,n}| < 10^{-10}$.
- Filtrado de divisores: Se descartan valores críticos donde $|B_i| < 10^{-10}$.

Estos filtros previenen divisiones por cero cuando un punto es tan influyente que el modelo lo ajusta sin residuo.

Aspecto	Teoría Clásica	Implementación
Vectores x_i	Características independientes	Retardos AR: $(y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$
Cálculo de \bar{H}	Inversa $(\bar{X}^T \bar{X})^{-1}$	Pseudoinversa (Moore-Penrose)
Singularidades	Supuesto $h_{i,i}, h_{n,n} < 1$	Filtrado explícito (10^{-10})
Valores críticos	Todos los $n - 1$ puntos	Solo puntos con B_i válido

Table 3-6: Comparativa: Teoría vs. Implementación del LSPM

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Parámetro Principal: `n_lags (p)` Define el orden autorregresivo del modelo, controlando cuántos retardos se usan para construir la matriz de diseño. La implementación emplea la heurística:

$$p = \max(1, \lfloor n^{1/3} \rfloor) \quad (3-41)$$

Esta regla está motivada por consideraciones teóricas de métodos de tamiz (sieve methods) en estadística no paramétrica, donde el número de parámetros p debe crecer con el tamaño muestral n pero a una tasa controlada que preserve consistencia. La tasa $n^{1/3}$ es estándar en la literatura de bootstrap para series temporales (Bühlmann 1997; Politis and White 2004), garantizando que $p \rightarrow \infty$ conforme $n \rightarrow \infty$, pero manteniendo $p^3/n \rightarrow 0$

para evitar sobreajuste. Esta misma tasa aparece en la heurística de longitud de bloque del CBB, reflejando un principio unificado: el número de parámetros debe escalar subcuadráticamente con la muestra. Para $n = 200$, resulta $p \approx 5$ lags, suficiente para capturar autocorrelaciones de corto plazo sin saturar los grados de libertad del modelo OLS subyacente.

Métrica de Optimización Dado que el LSPM es un método conformal teóricamente válido sin hiperparámetros libres (la versión studentizada es la única apropiada según Vovk, Gammerman, and Shafer (2022)), la optimización se limita a seleccionar p mediante la heurística anterior.

Protocolo de Congelamiento El método ejecuta una operación crítica: congela p basado en el tamaño del conjunto de entrenamiento+calibración. Este valor congelado p^* se almacena y se reutiliza en todas las ventanas rolling subsecuentes, garantizando que la dimensionalidad de la matriz de diseño permanezca constante y previniendo data leakage.

Parámetros Operacionales

- **version:** Fijado permanentemente como '`studentized`'. Es la única versión que garantiza validez conformal sin restricciones adicionales sobre leverage.
- **random_state:** Semilla para reproducibilidad del generador aleatorio (usado en muestreo posterior de la CPD si se requiere).
- **verbose:** Control de mensajes diagnósticos durante congelamiento.

3.4.4 Least Squares Prediction Machine with Weighted Residuals (LSPMW)

Explicación Teórica del Modelo

El *Least Squares Prediction Machine with Weighted Residuals* (LSPMW) constituye una extensión del LSPM diseñada para contextos donde el supuesto de intercambiabilidad se viola por deriva distributiva (*distribution drift*) o no estacionaridad. Esta variante

se fundamenta en los desarrollos de Barber et al. (2023) sobre predicción conformal no intercambiable.

Fundamento Teórico: Cuantiles Ponderados Barber et al. (2023) demuestran que cuando la intercambiabilidad falla, la pérdida de cobertura (*coverage gap*) de un predictor conformal puede acotarse mediante la distancia de variación total entre distribuciones. Para mitigar este problema en presencia de deriva temporal, proponen sustituir la distribución empírica uniforme por una distribución empírica ponderada.

Formalmente, dado un conjunto de valores críticos (residuos conformales) $\{C_1, \dots, C_{n-1}\}$ ordenados cronológicamente, se asignan pesos temporales no uniformes w_i que priorizan observaciones recientes. La función de distribución empírica ponderada se define como:

$$\hat{F}_n(y) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{w}_i \cdot \mathbb{1}(C_i \leq y) \quad (3-42)$$

donde $\tilde{w}_i = w_i / \sum_{j=1}^{n-1} w_j$ son los pesos normalizados.

Esquema de Decaimiento Geométrico Para deriva gradual, Barber et al. (2023) recomiendan un esquema de decaimiento geométrico:

$$w_i = \rho^{n-1-i}, \quad \rho \in (0, 1) \quad (3-43)$$

donde i indexa los residuos en orden cronológico (de más antiguo a más reciente). El hiperparámetro ρ controla la tasa de olvido:

- $\rho \rightarrow 1$: Convergencia al LSPM uniforme (memoria larga)
- $\rho \rightarrow 0$: Concentración extrema en el pasado inmediato (memoria corta)

El peso efectivo del i -ésimo residuo decrece exponencialmente conforme retrocedemos en el tiempo, otorgando a la observación más reciente ($i = n - 1$) peso $\rho^0 = 1$, y a la más antigua ($i = 1$) peso ρ^{n-2} .

Cuantiles Ponderados Para un nivel de cobertura α , el cuantil $(1 - \alpha)$ de la distribución ponderada se obtiene mediante:

$$q_{1-\alpha} = \inf \left\{ y : \sum_{i:C_i \leq y} \tilde{w}_i \geq 1 - \alpha \right\} \quad (3-44)$$

Este cuantil ponderado adapta la región de predicción conforme la distribución subyacente cambia en el tiempo.

Propiedades de Cobertura Barber et al. (2023) establecen que bajo deriva Lipschitz-continua con constante L , el error de cobertura del predictor ponderado satisface:

$$\left| \mathbb{P}(Y_{n+1} \in \hat{C}_{1-\alpha}) - (1 - \alpha) \right| \leq O \left(\frac{L}{\rho} + \frac{1}{\sqrt{n_{\text{eff}}}} \right) \quad (3-45)$$

donde $n_{\text{eff}} = (\sum_i \tilde{w}_i^2)^{-1}$ es el tamaño de muestra efectivo. Esta cota revela el trade-off: ρ pequeño reduce sesgo por deriva (L/ρ disminuye) pero aumenta varianza (n_{eff} disminuye).

Clasificación del Modelo El LSPMW es un método **no paramétrico adaptativo**. Mantiene la propiedad distribution-free del LSPM (no asume forma distribucional de errores) pero introduce un mecanismo de ponderación que adapta la distribución predictiva a cambios temporales sin modelar explícitamente la deriva.

De la Teoría a la Práctica

La implementación desarrollada traduce los cuantiles ponderados de Barber et al. (2023) a un contexto de distribuciones predictivas completas:

Adaptación 1: Expansión Ponderada de Distribuciones La teoría se enfoca en calcular cuantiles específicos. Para evaluar ECRPS (que requiere la distribución completa), la implementación genera una muestra sintética de tamaño fijo ($N = 1000$) mediante *weighted expansion*: cada valor crítico C_i se replica proporcionalmente a su peso:

$$\text{replications}_i = \lfloor \tilde{w}_i \times N \rfloor \quad (3-46)$$

Esto produce una distribución empírica discreta donde la frecuencia relativa de C_i approxima \tilde{w}_i .

Adaptación 2: Ajuste de Replicaciones Enteras Como $\tilde{w}_i \times N$ rara vez es entero exacto, se implementa un algoritmo de ajuste que garantiza $\sum_i \text{replications}_i = N$ exactamente:

1. Se redondea cada $\tilde{w}_i \times N$ al entero más cercano.
2. Si la suma excede N , se decrementa la replicación de los valores con menor peso (manteniendo mínimo 1).
3. Si la suma es menor a N , se incrementa la replicación de los valores con mayor peso.

Este ajuste minimiza la distorsión de la distribución ponderada original.

Adaptación 3: Congelamiento de Estructura Ponderada A diferencia de un esquema rolling que recalcularía pesos en cada ventana, la implementación congela tres artefactos tras la calibración:

- `_frozen_rho`: Valor óptimo ρ^* seleccionado por validación
- `_frozen_critical_values`: Vector de residuos conformales $\{C_1, \dots, C_m\}$
- `_frozen_weights`: Vector de pesos $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m\}$

En cada predicción rolling subsecuente, se reutilizan estos artefactos sin recalcular la matriz hat ni ajustar OLS, generando la distribución predictiva exclusivamente mediante expansión ponderada de los valores críticos congelados.

Aspecto	Teoría (Barber et al.)	Implementación
Salida	Cuantiles ponderados específicos	Distribución completa (1000 muestras)
Pesos	Definición abstracta w_i	Expansión por replicación entera
Actualización	Recalcular en cada predicción	Artefactos congelados post-calibración
Residuos	Conceptuales	Valores críticos LSPM studentizados
Optimización	ρ teórico o fijo	Búsqueda por validación (ECRPS)

Table 3-7: Comparativa: Teoría vs. Implementación del LSPMW

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetro Principal: `rho (ρ)` Controla la tasa de decaimiento temporal de los pesos. Durante validación se evalúan valores en el rango [0.90, 0.99]:

- $\rho = 0.90$: Adaptación rápida, memoria efectiva ≈ 10 observaciones
- $\rho = 0.95$: Balance intermedio, memoria efectiva ≈ 20 observaciones
- $\rho = 0.99$: Adaptación lenta, cercano al LSPM uniforme

El tamaño efectivo de muestra bajo decaimiento geométrico es:

$$n_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{w}_i^2} \approx \frac{1 - \rho}{1 - \rho^n} \quad (3-47)$$

Métrica de Optimización La selección de ρ^* se realiza minimizando el **ECRPS** (véase 2.2.3) sobre el conjunto de validación. Para cada candidato ρ , se genera la distribución ponderada en cada tiempo de validación y se evalúa la calibración predictiva.

Protocolo de Congelamiento El método `freeze_hyperparameters()` ejecuta:

1. Congela p^* (número de lags) heredado de la clase base LSPM.
2. Calcula valores críticos $\{C_1, \dots, C_m\}$ sobre datos de entrenamiento+calibración.
3. Computa pesos temporales usando ρ^* : $w_i = (\rho^*)^{m-1-i}$ para $i = 1, \dots, m$.
4. Normaliza pesos: $\tilde{w}_i = w_i / \sum_j w_j$.
5. Almacena artefactos en atributos internos y activa bandera `_is_frozen`.

Durante la fase de prueba rolling, el método `fit_predict()` usa exclusivamente los artefactos congelados para generar distribuciones predictivas, sin recalcular residuos ni ajustar modelos OLS.

Parámetros Operacionales

- `n_samples_target`: Tamaño de la distribución sintética. Fijado en 1000 para resolución suficiente en cálculo de ECRPS.

- **n_lags** (p): Heredado de LSPM, determina orden autorregresivo. Congelado como $p = \lfloor n^{1/3} \rfloor$.
- **random_state**: Semilla para shuffle final de la distribución expandida (rompe ordenamiento artificial).
- **verbose**: Control de mensajes diagnósticos.

3.4.5 Mondrian Conformal Predictive System (MCPS)

Explicación Teórica del Modelo

El *Mondrian Conformal Predictive System* (MCPS), formalizado por Boström, Johansson, and Löfström (2021), constituye una extensión localmente adaptativa del Sistema Predictivo Conformal estándar (SCPS). A diferencia del SCPS, que asume homogeneidad en la distribución de errores sobre todo el espacio de entrada, el MCPS reconoce que la incertidumbre predictiva varía significativamente según el régimen operativo del modelo. Este enfoque resulta especialmente relevante en aplicaciones reales donde, por ejemplo, predicciones en rangos bajos del modelo pueden exhibir patrones de error distintos a predicciones en rangos altos.

Fundamento: Particionamiento Mondrian La innovación central radica en la estrategia de **particionamiento Mondrian** (Vovk, Gammerman, and Shafer 2005), que divide el conjunto de calibración \mathcal{D}_c en subconjuntos disjuntos basándose en características compartidas de las predicciones. Sea $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ un modelo de regresión entrenado, y $B \in \mathbb{N}$ el número de bins. Se define una partición:

$$\mathcal{D}_c = \bigcup_{\kappa=1}^B \mathcal{D}_c^\kappa, \quad \mathcal{D}_c^\kappa \cap \mathcal{D}_c^{\kappa'} = \emptyset \text{ para } \kappa \neq \kappa' \quad (3-48)$$

Cada subconjunto \mathcal{D}_c^κ agrupa instancias (x_j, y_j) cuyas predicciones $h(x_j)$ pertenecen al mismo rango, construido mediante cuantiles empíricos:

$$\mathcal{D}_c^\kappa = \left\{ (x_j, y_j) \in \mathcal{D}_c : q_{\frac{\kappa-1}{B}} \leq h(x_j) < q_{\frac{\kappa}{B}} \right\} \quad (3-49)$$

donde q_p denota el cuantil p de las predicciones $\{h(x_j)\}_{j=1}^{N_c}$. Esta estrategia captura automáticamente heterogeneidad: instancias con predicciones similares comparten probablemente patrones de error similares.

Cálculo Localizado de Scores Conformes Para una instancia de prueba x con predicción $h(x)$, se determina su bin correspondiente κ^* :

$$\kappa^* = \arg \min_{\kappa} \left\{ \kappa : h(x) < q_{\frac{\kappa}{B}} \right\} \quad (3-50)$$

Los **calibration scores** se calculan únicamente sobre el subconjunto local $\mathcal{D}_c^{\kappa^*}$:

$$C_j^{\kappa^*} = h(x) + (y_j - h(x_j)), \quad \forall (x_j, y_j) \in \mathcal{D}_c^{\kappa^*} \quad (3-51)$$

Esta formulación es algebraicamente idéntica al SCPS, pero la diferencia crítica reside en que los residuos históricos provienen exclusivamente de casos con comportamiento predictivo similar. Matemáticamente, se estima la distribución condicional $P(\epsilon | h(x) \in \text{Bin}_{\kappa})$ localmente, en lugar de globalmente como en SCPS donde se asume $P(\epsilon | h(x)) = P(\epsilon)$.

Construcción de la Distribución Predictiva Según Vovk, Gammerman, and Shafer (2022), el conjunto de scores ordenados $C_{(1)}^{\kappa^*} < C_{(2)}^{\kappa^*} < \dots < C_{(N_c^{\kappa^*})}^{\kappa^*}$ define una distribución empírica que aproxima la distribución predictiva verdadera. Para cualquier función medible g :

$$\mathbb{E}[g(Y) | x \in \text{Bin}_{\kappa^*}] \approx \frac{1}{N_c^{\kappa^*}} \sum_{j=1}^{N_c^{\kappa^*}} g(C_j^{\kappa^*}) \quad (3-52)$$

con error que converge a cero cuando $N_c^{\kappa^*} \rightarrow \infty$. Esto implica que cualquier estadístico (media, varianza, cuantiles) puede calcularse directamente sobre los scores sin reconstruir una CDF completa.

Garantías de Cobertura Local Boström, Johansson, and Löfström (2021) demuestran que, bajo intercambiabilidad dentro de cada bin, se logra **cobertura condicional válida** en cada estrato. Para cualquier nivel α :

$$\mathbb{P} \left(Y \in \left[\hat{F}_\kappa^{-1}(\alpha/2 \mid x), \hat{F}_\kappa^{-1}(1 - \alpha/2 \mid x) \right] \mid x \in \text{Bin}_\kappa \right) \geq 1 - \alpha \quad (3-53)$$

Las bandas de predicción se **ajustan automáticamente**: regiones donde el modelo es confiable producen intervalos estrechos; regiones con alta variabilidad generan intervalos amplios. Si denotamos $W_\kappa(x)$ como el ancho del intervalo:

$$W_{\kappa_1}(x_1) \neq W_{\kappa_2}(x_2) \quad \text{si} \quad \text{Var}(\epsilon \mid x \in \text{Bin}_{\kappa_1}) \neq \text{Var}(\epsilon \mid x \in \text{Bin}_{\kappa_2}) \quad (3-54)$$

Esta propiedad contrasta con el SCPS, donde $W(x) \approx \text{constante}$ para todo x , resultando en sobre-cobertura en regiones de baja incertidumbre o sub-cobertura en regiones de alta incertidumbre.

Naturaleza No Paramétrica El MCPS es un modelo **no paramétrico**. No asume forma funcional específica para la distribución de errores ni para la relación entre predictores y respuesta. La distribución predictiva se construye enteramente a partir de datos empíricos mediante el conjunto de scores conformales, sin parámetros poblacionales a estimar. El único modelo subyacente es el regressor base $h(x)$ (que puede ser paramétrico o no), pero la construcción de intervalos conformales es completamente libre de distribución.

De la Teoría a la Práctica

La implementación del MCPS para series temporales autorregresivas representa una **contribución metodológica novedosa**, traduciendo el framework teórico—originalmente diseñado para datos independientes en logística (Ye, Hijazi, and Van Hentenryck 2025)—hacia contextos con dependencias temporales.

Adaptaciones Principales (1) **Construcción Dinámica de Features:** Mientras que Ye, Hijazi, and Van Hentenryck (2025) asumen features pre-existentes x_i observables (ubicación, peso, transportista), en series temporales los “objetos” se construyen dinámicamente como ventanas deslizantes de p rezagos:

$$x_t = [y_{t-p}, y_{t-p+1}, \dots, y_{t-1}] \in \mathbb{R}^p \quad (3-55)$$

Esta transformación convierte la serie univariada en una matriz autoregresiva, introduciendo dependencias inherentes entre filas. La validez se preserva bajo condiciones de *mixing débil* (Yu 1994), donde observaciones suficientemente separadas son “casi independientes”.

(2) Binning Adaptativo: En series con baja variabilidad, las predicciones pueden concentrarse en rangos estrechos. Se emplea binning tolerante a duplicados, donde el número efectivo de bins es:

$$B_{\text{efectivo}} = |\{q_{\frac{\kappa}{B}} : \kappa = 1, \dots, B - 1\}| \leq B \quad (3-56)$$

Si el binning falla completamente (predicciones idénticas), el sistema degradará a SCPS global automáticamente.

(3) Representación Discreta: En lugar de generar una CDF continua con suavizado τ (como en Crepes (Boström 2022)), se retornan directamente los scores $\{C_j^{\kappa^*}\}$. Esta representación es computacionalmente eficiente para calcular ECRPS:

(4) Fallback Jerárquico: Si el bin localizado κ^* contiene menos de 5 observaciones, se usa el conjunto completo:

$$\mathcal{D}_c^{\text{efectivo}} = \begin{cases} \mathcal{D}_c^{\kappa^*} & \text{si } N_c^{\kappa^*} \geq 5 \\ \mathcal{D}_c & \text{si } N_c^{\kappa^*} < 5 \end{cases} \quad (3-57)$$

Esta heurística, no especificada en Boström, Johansson, and Löfström (2021), previene intervalos erráticamente anchos por tamaño de muestra insuficiente.

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetros Primarios n_lags (p): Define el orden del modelo autorregresivo. Controla cuánta memoria temporal incorpora el predictor.

- Rango: $\{5, 10, 15, 20\}$

n_bins (B): Número de particiones Mondrian. Controla la adaptabilidad local versus varianza por tamaño de muestra.

- Rango: $\{5, 10, 15\}$ según Boström, Johansson, and Löfström (2021)

Aspecto	Teoría (Ye et al., 2025)	Implementación (Esta Tesis)
Dominio	Logística (órdenes independientes)	Series temporales autorregresivas
Features	Pre-existentes observables	Dinámicas (ventanas deslizantes)
Librería conformal	Crepes (Boström 2022)	Implementación directa de ecuaciones
Representación CPD	CDF continua con suavizado	Distribución empírica discreta exacta
Binning robusto	τ	Fusión automática de bins colapsados
Fallback a SCPS	Cuantiles fijos	No mencionado
Horizonte	Batch (predicciones simultáneas)	Automático si $N_c^\kappa < 5$ Secuencial (rolling forecast)

Table 3-8: Comparación entre MCPS Teórico y su Implementación para Series Temporales

- *Trade-off:* B pequeño (≤ 3) degrada a SCPS; B excesivo (≥ 20) fragmenta calibración
- *Tamaño esperado por bin:* $\mathbb{E}[N_c^\kappa] = N_c/B$

Optimización de Hiperparámetros **Estrategia de congelamiento:** El método definido entrena el modelo base XGBoost **una sola vez** sobre los datos de entrenamiento completos, calculando los artefactos necesarios:

- Predicciones de calibración $\{h(x_j)\}_{j \in \mathcal{D}_c}$
- Valores observados de calibración $\{y_j\}_{j \in \mathcal{D}_c}$
- Bordes de bins $\{q_{\kappa/B}\}_{\kappa=0}^B$

Estos artefactos se reutilizan en todas las predicciones posteriores sin reentrenamiento, garantizando eficiencia computacional en rolling forecasts.

Métrica de optimización: Los hiperparámetros ($p, B, \text{test_size}$) se optimizan minimizando el **Expected Continuous Ranked Probability Score (ECRPS)** sobre un conjunto de validación:

$$(p^*, B^*) = \arg \min_{(p, B, s)} \frac{1}{N_{\text{val}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{val}}} \text{CRPS}(\mathcal{C}_i^{\kappa^*}, y_i) \quad (3-58)$$

Esta optimización ocurre en la fase inicial; una vez congelados, los hiperparámetros permanecen fijos durante todo el horizonte de predicción.

Parámetros del Modelo Base El regressor autorregresivo $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ se implementa mediante XGBoost (T. Chen and Guestrin 2016):

- **n_estimators:** 50 (número de árboles)
- **max_depth:** 3 (previene sobreajuste, actúa como GAM)
- **learning_rate:** 0.1 (convergencia estable)
- **objective:** `reg:squarederror` (regresión por mínimos cuadrados)

Esta parametrización conservadora previene captura de ruido, crítico cuando p es grande relativo a N_{train} .

Balance Fundamental La selección conjunta define un trade-off:

$$\text{Calidad de } h(x) \propto (1 - \text{test_size}) \cdot f(p) \quad (3-59)$$

$$\text{Precisión de CPD} \propto \text{test_size} \cdot \frac{N_c}{B} \quad (3-60)$$

Para series típicas con $T \approx 1000$, la configuración ($p = 10$, $B = 10$, $\text{test_size} = 0.25$) resulta en ~ 25 scores por bin, suficiente para estimación robusta según Rob J. Hyndman and Fan (1996).

3.4.6 Adaptive Volatility Mondrian Conformal Predictive System (AV-MCPS)

Explicación Teórica del Modelo

El *Adaptive Volatility Mondrian Conformal Predictive System* (AV-MCPS) constituye una extensión metodológica del MCPS estándar desarrollada específicamente para esta investigación, representando una de las contribuciones originales más significativas de la tesis.

Mientras que el MCPS de Ye, Hijazi, and Van Hentenryck (2025) partitiona el espacio de calibración únicamente según predicciones puntuales $h(x)$, el AV-MCPS introduce una **estratificación bidimensional** que incorpora explícitamente la volatilidad local como segunda dimensión de heterogeneidad.

Motivación: Límites del Particionamiento Unidimensional El MCPS estándar asume implícitamente homogeneidad de varianza dentro de cada bin de predicción. Formalmente, si \mathcal{D}_c^κ denota el subconjunto con predicciones en $[q_{\kappa/B}, q_{(\kappa+1)/B})$:

$$\text{Var}(\epsilon_i \mid h(x_i) \in \mathcal{D}_c^\kappa) \approx \text{constante} \quad \forall i \in \mathcal{D}_c^\kappa \quad (3-61)$$

Esta suposición se viola frecuentemente en series temporales con **heterocedasticidad condicional**, donde la volatilidad de errores varía sistemáticamente: $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_t^2 \neq \text{constante}$. Dos observaciones con predicciones similares $h(x_i) \approx h(x_j)$ pueden experimentar errores de magnitudes radicalmente diferentes si provienen de regímenes de volatilidad distintos.

Particionamiento Bidimensional El AV-MCPS propone una partición conjunta basada en dos características:

1. **Predicción puntual** $h(x_i)$: Captura el nivel esperado de la variable objetivo
2. **Volatilidad local** σ_i : Mide la variabilidad reciente mediante ventana rodante de longitud w :

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{w-1} \sum_{k=i-w}^{i-1} (y_k - \bar{y}_{i,w})^2} \quad (3-62)$$

El conjunto de calibración se partitiona en una grilla bidimensional:

$$\mathcal{D}_c = \bigcup_{\kappa=1}^{B_{\text{pred}}} \bigcup_{\lambda=1}^{B_{\text{vol}}} \mathcal{D}_c^{(\kappa,\lambda)} \quad (3-63)$$

donde cada celda agrupa observaciones que satisfacen simultáneamente:

$$\mathcal{D}_c^{(\kappa,\lambda)} = \left\{ (x_i, y_i) \in \mathcal{D}_c : \begin{array}{l} q_{\text{pred}}^{\kappa-1} \leq h(x_i) < q_{\text{pred}}^\kappa \\ \text{y } q_{\text{vol}}^{\lambda-1} \leq \sigma_i < q_{\text{vol}}^\lambda \end{array} \right\} \quad (3-64)$$

Esta estratificación genera $B_{\text{pred}} \times B_{\text{vol}}$ celdas, cada una representando un régimen específico de (nivel, volatilidad).

Cálculo Localizado de Scores Para un punto de prueba x_{test} , el procedimiento es:

1. Calcular predicción $h(x_{\text{test}})$ y volatilidad local σ_{test}
2. Determinar la celda correspondiente (κ^*, λ^*) :

$$\kappa^* = \arg \min_{\kappa} \{ \kappa : h(x_{\text{test}}) < q_{\text{pred}}^{\kappa} \} \quad (3-65)$$

$$\lambda^* = \arg \min_{\lambda} \{ \lambda : \sigma_{\text{test}} < q_{\text{vol}}^{\lambda} \} \quad (3-66)$$

3. Calcular scores localizados sobre $\mathcal{D}_c^{(\kappa^*, \lambda^*)}$:

$$C_i^{(\kappa^*, \lambda^*)} = h(x_{\text{test}}) + (y_i - h(x_i)), \quad \forall (x_i, y_i) \in \mathcal{D}_c^{(\kappa^*, \lambda^*)} \quad (3-67)$$

Garantías de Cobertura Bidimensional Bajo intercambiabilidad condicional dentro de cada celda, se preservan las garantías conformales localmente:

$$\mathbb{P} \left(Y \in \hat{C}_{\alpha}(x) \mid x \in \text{Bin}_{\kappa}^{\text{pred}}, \sigma(x) \in \text{Bin}_{\lambda}^{\text{vol}} \right) \geq 1 - \alpha \quad (3-68)$$

Esta garantía es más fuerte que la del MCPS, ya que condiciona sobre una partición más fina. Al controlar simultáneamente por nivel y volatilidad, el AV-MCPS logra **adaptabilidad condicional mejorada**.

Trade-off: Resolución vs. Tamaño de Muestra El número esperado de observaciones por celda es:

$$\mathbb{E} [N_c^{(\kappa, \lambda)}] = \frac{N_c}{B_{\text{pred}} \times B_{\text{vol}}} \quad (3-69)$$

Aumentar resolución mejora localización pero reduce tamaño de muestra por celda. El AV-MCPS implementa **fallback jerárquico**:

$$\mathcal{D}_c^{\text{efectivo}} = \begin{cases} \mathcal{D}_c^{(\kappa^*, \lambda^*)} & \text{si } N_c^{(\kappa^*, \lambda^*)} \geq 5 \\ \mathcal{D}_c^{(\kappa^*, \cdot)} & \text{si } N_c^{(\kappa^*, \lambda^*)} < 5 \text{ y } N_c^{(\kappa^*, \cdot)} \geq 5 \\ \mathcal{D}_c & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3-70)$$

donde $\mathcal{D}_c^{(\kappa^*, \cdot)} = \bigcup_{\lambda=1}^{B_{\text{vol}}} \mathcal{D}_c^{(\kappa^*, \lambda)}$ representa el bin unidimensional basado solo en predicción.

Naturaleza No Paramétrica El AV-MCPS es un modelo **no paramétrico**. No asume forma funcional para la distribución de errores ni para la relación entre predictores y respuesta. La estratificación bidimensional es completamente libre de distribución, construyéndose enteramente a partir de cuantiles empíricos. La distribución predictiva se genera directamente desde scores conformales sin parámetros poblacionales.

De la Teoría a la Práctica

La implementación del AV-MCPS para series temporales traduce el marco teórico bidimensional en un sistema operativo mediante decisiones de diseño específicas.

Adaptaciones Principales (1) **Estimación Rolling de Volatilidad:** Se emplea desviación estándar rolling con ventana fija:

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{w-1} \sum_{k=t-w}^{t-1} (y_k - \bar{y}_t)^2} \quad (3-71)$$

Justificación: simplicidad computacional, robustez a shocks transitorios, e interpretabilidad directa. Para las primeras $w-1$ observaciones se aplica *backfilling*:

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{t-2} \sum_{k=1}^{t-1} (y_k - \bar{y}_{1:t-1})^2} \quad \text{para } t < w \quad (3-72)$$

(2) **Binning Adaptativo Robusto:** Las series de volatilidad exhiben distribuciones asimétricas con colas pesadas. Se emplea `pd.qcut` con `duplicates='drop'`, fusionando automáticamente bins con fronteras colapsadas:

$$B_{\text{vol}}^{\text{efectivo}} = \left| \left\{ q_{\text{vol}}^\lambda : \lambda = 1, \dots, B_{\text{vol}} - 1 \right\} \right| \leq B_{\text{vol}} \quad (3-73)$$

Si el binning falla en alguna dimensión, el sistema degradada a MCPS unidimensional o SCPS global.

(3) Representación Discreta de Scores: Consistente con LSPM y MCPS, se retornan directamente los scores sin transformación:

$$\mathcal{C}^{(\kappa^*, \lambda^*)} = \left\{ C_i^{(\kappa^*, \lambda^*)} \right\}_{i=1}^{N_c^{(\kappa^*, \lambda^*)}} \quad (3-74)$$

Esta representación empírica permite cálculo eficiente de CRPS sin reconstruir CDF continua.

(4) Protocolo de Congelamiento Bidimensional: El método `freeze_hyperparameters()` fija simultáneamente:

- Parámetros del regressor XGBoost (entrenado una sola vez)
- Bordes de bins de predicción $\{q_{\text{pred}}^\kappa\}_{\kappa=0}^{B_{\text{pred}}}$
- Bordes de bins de volatilidad $\{q_{\text{vol}}^\lambda\}_{\lambda=0}^{B_{\text{vol}}}$
- Artefactos de calibración: $\{h(x_i)\}, \{y_i\}, \{\sigma_i\}$

Durante evaluación rolling, para cada punto t se extraen rezagos, se calcula $h(x_t)$ con modelo congelado, se estima σ_t con ventana actual, y se asigna a celda usando bordes congelados. Este protocolo previene data leakage y garantiza validez estadística.

Innovación Metodológica La contribución fundamental es reconocer que **la volatilidad local predice el error independientemente del nivel**. Si $e_i = |y_i - h(x_i)|$, la hipótesis subyacente es:

$$\mathbb{E}[e_i | h(x_i), \sigma_i] \neq \mathbb{E}[e_i | h(x_i)] \quad (3-75)$$

El AV-MCPS explota esta estructura mediante estratificación bidimensional, logrando distribuciones predictivas que se adaptan simultáneamente al *nivel* y al *régimen de incertidumbre*. Esta adaptabilidad dual representa una ventaja teórica significativa, espe-

Aspecto	MCPS	AV-MCPS
Dimensiones de partición	Unidimensional (predicción)	Bidimensional (predicción + volatilidad)
Número de bins	B	$B_{\text{pred}} \times B_{\text{vol}}$
Tamaño esperado de celda	N_c/B	$N_c/(B_{\text{pred}} \times B_{\text{vol}})$
Captura de heterocedasticidad	Indirecta (via niveles)	Explícita (via volatilidad local)
Complejidad computacional	$O(\log B)$	$O(\log B_{\text{pred}} + \log B_{\text{vol}})$
Estrategia de fallback	Degradar a SCPS si $N_c^\kappa < 5$	Jerárquica: 2D → 1D → SCPS
Hiperparámetros adicionales	Ninguno	<code>volatility_window</code> , B_{vol}
Casos de uso óptimos	Heterogeneidad por nivel	Series con volatilidad cambiante

Table 3-9: Comparación entre MCPS Estándar y AV-MCPS

cialmente en series con volatilidad time-varying como procesos financieros, climáticos o epidemiológicos.

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetros Primarios `n_lags (p)`: Orden del modelo autorregresivo.

`n_pred_bins (B_{pred})`: Resolución en dimensión de predicción.

`n_vol_bins (B_{vol})`: Resolución en dimensión de volatilidad.

`volatility_window (w)`: Longitud de ventana rolling para estimación de volatilidad.

`test_size`: Proporción del conjunto de calibración.

Configuraciones Evaluadas El espacio de hiperparámetros se limita a dos configuraciones estratégicamente diseñadas:

Configuración Conservadora: ($p = 10, B_{\text{pred}} = 8, B_{\text{vol}} = 3$)

- *Filosofía*: Prioriza robustez y tamaño de muestra suficiente por celda

- *Número de celdas:* $8 \times 3 = 24$ particiones

Configuración Agresiva: ($p = 15, B_{\text{pred}} = 10, B_{\text{vol}} = 5$)

- *Filosofía:* Maximiza adaptabilidad local mediante particionamiento fino
- *Número de celdas:* $10 \times 5 = 50$ particiones

Justificación del Espacio de Búsqueda Restringido A diferencia de MCPS y LSPM, el AV-MCPS no explora grillas exhaustivas. Esta decisión se fundamenta en:

1. **Complejidad combinatoria:** Con 3 hiperparámetros interdependientes, una búsqueda exhaustiva sobre $\{10, 15, 20\} \times \{6, 8, 10\} \times \{3, 4, 5\}$ implicaría 27 evaluaciones por serie. Dado el costo computacional del rolling forecast conformal, esto resulta prohibitivo para el benchmark de 100 series
2. **Trade-off fundamental:** Existe una tensión inherente entre $B_{\text{pred}} \times B_{\text{vol}}$ (que determina localización) y N_c (fijo por serie). Las dos configuraciones representan los extremos del espectro viable: conservadora (celdas grandes, menor varianza) vs agresiva (celdas pequeñas, mayor adaptabilidad)
3. **Evidencia empírica preliminar:** Experimentos piloto sobre un subconjunto de 10 series indicaron que configuraciones intermedias (e.g., $B_{\text{pred}} = 8, B_{\text{vol}} = 4$) rara vez superaban a los extremos, sugiriendo un comportamiento bimodal del desempeño

Optimización de Hiperparámetros La selección entre ambas configuraciones se realiza minimizando **ECRPS** sobre un conjunto de validación temporal. Formalmente:

$$(p^*, B_{\text{pred}}^*, B_{\text{vol}}^*) = \arg \min_{(p, B_p, B_v) \in \mathcal{H}} \frac{1}{N_{\text{val}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{val}}} \text{CRPS}(\mathcal{C}_i^{(\kappa^*, \lambda^*)}, y_i) \quad (3-76)$$

donde $\mathcal{H} = \{(10, 8, 3), (15, 10, 5)\}$ es el conjunto de configuraciones candidatas. Una vez optimizada, la configuración seleccionada se congela mediante `freeze_hyperparameters()`, fijando simultáneamente el modelo base XGBoost, los bordes de bins bidimensionales, y los artefactos de calibración.

Parámetros del Modelo Base Idénticos a MCPS: XGBoost con 50 árboles, profundidad 3, learning rate 0.1, objetivo `reg:squarederror`. Esta parametrización conservadora es particularmente crítica en AV-MCPS, donde el conjunto de entrenamiento puede ser más pequeño debido a la fragmentación bidimensional del conjunto de calibración.

3.4.7 DeepAR: Probabilistic Forecasting with Autoregressive Recurrent Networks

Explicación Teórica del Modelo

DeepAR, introducido por Salinas et al. (2020), representa un cambio de paradigma en el pronóstico probabilístico de series temporales al trasladar el enfoque desde el modelado individual de cada serie hacia el **aprendizaje de un modelo global** a partir de múltiples series relacionadas mediante una arquitectura de red neuronal recurrente autorregresiva.

Fundamento Arquitectónico El modelo emplea redes LSTM (Long Short-Term Memory) para procesar secuencias temporales de forma autorregresiva. Para una serie temporal i con valores $z_{i,t}$, DeepAR modela la distribución condicional del futuro dado el pasado:

$$P(z_{i,t_0:T} \mid z_{i,1:t_0-1}, x_{i,1:T}) \quad (3-77)$$

donde t_0 denota el punto de inicio del horizonte de predicción, $z_{i,1:t_0-1}$ representa el rango de condicionamiento, $z_{i,t_0:T}$ los valores futuros, y $x_{i,1:T}$ son covariables conocidas.

La arquitectura factoriza esta distribución mediante el producto de verosimilitudes condicionales:

$$Q_\Theta(z_{i,t_0:T} \mid z_{i,1:t_0-1}, x_{i,1:T}) = \prod_{t=t_0}^T Q_\Theta(z_{i,t} \mid z_{i,1:t-1}, x_{i,1:T}) \quad (3-78)$$

donde cada factor está parametrizado por la salida de la red recurrente:

$$Q_\Theta(z_{i,t} \mid z_{i,1:t-1}, x_{i,1:T}) = \ell(z_{i,t} \mid \theta(h_{i,t}, \Theta)) \quad (3-79)$$

El estado oculto $h_{i,t}$ se actualiza recursivamente mediante:

$$h_{i,t} = h(h_{i,t-1}, z_{i,t-1}, x_{i,t}, \Theta) \quad (3-80)$$

donde $h(\cdot)$ es una función implementada por una red LSTM multicapa con parámetros Θ .

Naturaleza Autorregresiva En cada paso temporal t , la red consume como entrada el valor observado del paso anterior $z_{i,t-1}$ junto con las covariables $x_{i,t}$ y el estado oculto previo $h_{i,t-1}$. Durante el entrenamiento, todos los valores $z_{i,t}$ en el rango de predicción son conocidos. Durante la predicción, para $t \geq t_0$, los valores futuros se reemplazan por muestras $\tilde{z}_{i,t} \sim \ell(\cdot | \theta(h_{i,t}, \Theta))$ generadas por el propio modelo, que se retroalimentan para calcular el siguiente estado oculto mediante *muestreo ancestral*.

Modelado Probabilístico DeepAR no predice directamente valores futuros, sino los **parámetros de una distribución de probabilidad** $\theta(h_{i,t})$ sobre valores posibles. Para datos de valores reales, se emplea **verosimilitud Gaussiana**:

$$\ell_G(z | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3-81)$$

donde la media $\mu(h_{i,t})$ y desviación estándar $\sigma(h_{i,t})$ se obtienen mediante transformaciones de la salida de la red:

$$\mu(h_{i,t}) = w_\mu^T h_{i,t} + b_\mu, \quad \sigma(h_{i,t}) = \log(1 + \exp(w_\sigma^T h_{i,t} + b_\sigma)) \quad (3-82)$$

Los parámetros Θ del modelo se aprenden maximizando la log-verosimilitud:

$$\mathcal{L}(\Theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \log \ell(z_{i,t} | \theta(h_{i,t}, \Theta)) \quad (3-83)$$

Una ventaja fundamental es que el modelo es completamente observable durante el entrenamiento, no requiriendo técnicas de inferencia variacional o métodos de Monte Carlo para aproximar la función objetivo.

Manejo de Escalas Heterogéneas DeepAR introduce un mecanismo de escalamiento que normaliza las entradas y salidas autorregresivas por un factor de escala específico de

cada serie ν_i :

$$\tilde{z}_{i,t} = \frac{z_{i,t}}{\nu_i}, \quad \nu_i = 1 + \frac{1}{t_0} \sum_{t=1}^{t_0} z_{i,t} \quad (3-84)$$

Los parámetros de la verosimilitud se ajustan correspondientemente:

$$\mu_{\text{escalado}} = \nu_i \cdot \mu(h_{i,t}), \quad \sigma_{\text{escalado}} = \nu_i \cdot \sigma(h_{i,t}) \quad (3-85)$$

Generación de Pronósticos Probabilísticos La generación de pronósticos se realiza mediante muestreo ancestral, produciendo B trayectorias completas $\{\tilde{z}_{i,t_0:T}^{(b)}\}_{b=1}^B$. El conjunto de trayectorias representa una muestra empírica de la distribución predictiva conjunta, preservando las correlaciones temporales aprendidas por el modelo.

Clasificación del Modelo DeepAR es un **modelo semi-paramétrico**. La componente paramétrica reside en la arquitectura LSTM con parámetros Θ que deben estimarse, y en la elección de la familia de distribuciones de verosimilitud (Gaussiana, Binomial Negativa). La componente no paramétrica emerge del muestreo ancestral, que genera distribuciones predictivas empíricas sin asumir formas funcionales rígidas para la distribución conjunta multi-paso.

De la Teoría a la Práctica

La implementación de DeepAR para series temporales univariadas desarrollada en esta investigación traduce el marco teórico autorregresivo a un sistema predictivo concreto mediante adaptaciones específicas al contexto de este estudio.

Adaptaciones Principales (1) **Simplificación de Covariables:** A diferencia del trabajo original de Salinas et al. (2020) que asume múltiples covariables $x_{i,t}$, esta implementación **no utiliza covariables externas**. La arquitectura se reduce a su forma puramente autorregresiva:

$$h_{i,t} = h(h_{i,t-1}, z_{i,t-1}, \Theta) \quad (3-86)$$

Esta simplificación elimina la dependencia de información auxiliar, centrando la comparación en la capacidad de extraer patrones de la historia temporal intrínseca.

(2) Construcción de Ventanas: Dado que cada configuración genera una única serie de longitud $n = 252$, se emplea *windowing* deslizante para generar múltiples instancias de entrenamiento. Se construyen pares $(X^{(k)}, y^{(k)})$ mediante:

$$X^{(k)} = [y_k, \dots, y_{k+p-1}], \quad y^{(k)} = y_{k+p} \quad (3-87)$$

para $k = 1, \dots, n_{\text{train}} - p$, generando aproximadamente $n_{\text{train}} - p$ instancias de entrenamiento.

(3) Normalización Z-Score: En lugar del escalamiento por ν_i del original, se emplea normalización Z-score completa:

$$\tilde{z}_t = \frac{z_t - \mu_{\text{train}}}{\sigma_{\text{train}} + \epsilon} \quad (3-88)$$

garantizando que las entradas a la LSTM tengan media cero y varianza unitaria. Las predicciones se des-normalizan mediante la transformación inversa.

(4) Early Stopping: Se reserva el 20% final de las instancias generadas como conjunto de validación interno. El entrenamiento se detiene si la pérdida de validación no mejora durante un número de épocas de paciencia (típicamente 5), reteniendo los parámetros correspondientes a la época con menor pérdida.

(5) Protocolo de Congelamiento: Para evitar *data leakage* en la evaluación rolling window, el modelo se entrena una única vez sobre $n_{\text{train}} = 200$ observaciones. Los parámetros de normalización μ_{frozen} , σ_{frozen} y los pesos de la red Θ_{frozen} se congelan completamente. Durante la fase de evaluación rolling, para cada paso $t = 1, \dots, 12$, se normalizan los últimos p valores observados usando parámetros congelados, se calcula la predicción con Θ_{frozen} sin re-entrenamiento, y se des-normalizan las muestras predictivas. Este protocolo previene contaminación de información futura y garantiza validez estadística.

La Tabla 3-10 resume las diferencias metodológicas entre la implementación original y la adaptación desarrollada.

Aspecto	DeepAR Original	Implementación (Esta Tesis)
Contexto de aplicación	Miles de series relacionadas	Serie temporal única (windowing local)
Covariables	Múltiples features temporales	Sin covariables externas
Verosimilitud	Gaussiana y Binomial Negativa	Gaussiana únicamente
Normalización	Escalamiento por ν_i	Z-score completo
Muestreo de entrenamiento	Ponderado por velocidad	Uniforme sobre ventanas
Regularización	No especificada	Early stopping con validación interna
Protocolo de evaluación	Modelo único para todas las series	Congelamiento total para rolling forecast
Framework	MXNet	PyTorch

Table 3-10: Comparación entre DeepAR Original y DeepAR Adaptado

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetros Arquitectónicos `hidden_size (h)`: Dimensionalidad del estado oculto de cada celda LSTM. Controla la capacidad representacional del modelo.

`n_lags (p)`: Número de valores pasados utilizados como entrada autorregresiva. Similar al orden en modelos AR(p).

`num_layers (L)`: Número de capas LSTM apiladas. Valores mayores incrementan el número de parámetros: $\Theta \propto L \times h^2$.

`epochs (E)`: Número máximo de pasadas completas sobre el conjunto de entrenamiento. El early stopping típicamente detiene antes de alcanzar este máximo.

`lr (learning rate)`: Controla el tamaño del paso en la actualización de parámetros mediante el optimizador Adam (Kingma and Ba 2015).

Espacio de Búsqueda La optimización de hiperparámetros explora dos configuraciones estratégicamente diseñadas:

Configuración Ligera:

- `hidden_size=20, n_lags=10, num_layers=1, epochs=25, lr=0.01`

- *Filosofía:* Arquitectura compacta que reduce riesgo de sobreajuste
- *Parámetros totales:* Aproximadamente 2,200 parámetros

Configuración Profunda:

- `hidden_size=32, n_lags=15, num_layers=2, epochs=30, lr=0.005`
- *Filosofía:* Mayor capacidad representacional con regularización implícita vía learning rate reducido
- *Parámetros totales:* Aproximadamente 8,500 parámetros

Protocolo de Optimización La selección entre ambas configuraciones se realiza minimizando **ECRPS** (**Expected Continuous Ranked Probability Score**) sobre un conjunto de calibración temporal de 40 observaciones posteriores al entrenamiento. Formalmente:

$$(h^*, p^*, L^*) = \arg \min_{(h, p, L) \in \mathcal{H}} \frac{1}{N_{\text{cal}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{cal}}} \text{CRPS}(\hat{F}_i, y_i) \quad (3-89)$$

donde \mathcal{H} es el conjunto de configuraciones candidatas y \hat{F}_i es la distribución predictiva empírica generada por muestreo ancestral.

Congelamiento de Hiperparámetros Una vez optimizada, la configuración seleccionada se congela mediante el método `freeze_hyperparameters()`. Este método:

1. Estima los parámetros de normalización: $\mu_{\text{frozen}}, \sigma_{\text{frozen}}$
2. Entrena la red LSTM hasta convergencia (early stopping)
3. Almacena los pesos de la red: Θ_{frozen}
4. Establece el flag `_is_frozen = True`

Durante toda la evaluación rolling window posterior, el método `fit_predict` verifica este flag: si es `True`, omite completamente el entrenamiento y procede directamente a generar predicciones con el modelo existente. Este protocolo garantiza que no haya fuga de información futura y que las métricas de desempeño reflejen la capacidad predictiva genuina del modelo.

3.4.8 Autoregressive Exponentially-weighted Polynomial Distribution (AREPD)

Explicación Teórica del Modelo

El modelo *Autoregressive Exponentially-weighted Polynomial Distribution* (AREPD) representa una contribución metodológica original de esta investigación, desarrollada como una extensión híbrida que combina predicción ponderada temporalmente con expansión polinomial de características autorregresivas. A diferencia de métodos puramente conformales como LSPM que utilizan regresión lineal, AREPD introduce **transformaciones no lineales polinomiales** de las entradas autorregresivas.

Fundamento Matemático Para una serie temporal $\{Y_t\}_{t=1}^n$ con p rezagos y grado polinomial d , AREPD construye una matriz de diseño expandida $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (1+pd)}$:

$$\mathbf{X}_i = [1, Y_i, Y_i^2, \dots, Y_i^d, Y_{i+1}, Y_{i+1}^2, \dots, Y_{i+1}^d, \dots, Y_{i+p-1}] \quad (3-90)$$

para $i = 1, \dots, n-p$. Esta expansión permite capturar relaciones cuadráticas, cúbicas o de orden superior entre valores pasados y futuros sin recurrir a arquitecturas de aprendizaje profundo.

Ponderación Exponencial Temporal AREPD asigna pesos exponencialmente decrecientes a observaciones históricas:

$$w_i = \rho^{n-p-i}, \quad i = 1, \dots, n-p \quad (3-91)$$

donde $\rho \in (0, 1)$ es el parámetro de decaimiento. Los pesos se normalizan: $\tilde{w}_i = w_i / \sum_{j=1}^{n-p} w_j$. La observación más reciente recibe peso máximo, mientras que observaciones antiguas reciben pesos progresivamente menores. La vida media efectiva es:

$$\tau_{1/2} = \frac{\log(2)}{\log(1/\rho)} \quad (3-92)$$

Por ejemplo, con $\rho = 0.95$, $\tau_{1/2} \approx 13.5$ observaciones.

Estimación mediante Regresión Ridge Los coeficientes se estiman resolviendo el problema de regresión Ridge ponderada:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \left\{ \sum_{i=1}^{n-p} \tilde{w}_i (y_i - \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\beta})^2 + \lambda \|\boldsymbol{\beta}\|_2^2 \right\} \quad (3-93)$$

donde $\lambda > 0$ es el parámetro de regularización Ridge. La penalización Ridge es crítica por dos razones:

1. **Estabilidad numérica:** La expansión polinomial genera matrices casi singulares debido a alta correlación entre términos como Y_{t-1} y Y_{t-1}^2
2. **Prevención de sobreajuste:** Con $p \cdot d$ características, el modelo tiene alta capacidad expresiva que requiere regularización

La solución tiene forma cerrada:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (3-94)$$

donde $\mathbf{W} = \text{diag}(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{n-p})$ es la matriz diagonal de pesos.

Generación de Distribuciones Predictivas AREPD genera distribuciones predictivas mediante un enfoque **histórico-empírico**. Para predecir Y_{n+1} :

1. Construye vectores de características expandidos para todos los puntos históricos
2. Calcula predicciones puntuales históricas: $\hat{Y}_{\text{hist}} = \mathbf{X}_{\text{hist}} \hat{\boldsymbol{\beta}}$
3. Transforma a escala original: $\hat{Y}_{\text{hist}}^{\text{original}} = \hat{Y}_{\text{hist}} \cdot \sigma_{\text{train}} + \mu_{\text{train}}$
4. Utiliza $\{\hat{Y}_{\text{hist}}^{\text{original}}\}$ como muestra empírica de la distribución predictiva

Este enfoque difiere fundamentalmente de la predicción conformal estándar. En lugar de ajustar mediante residuos de calibración, AREPD construye una distribución empírica directamente desde predicciones históricas del modelo ajustado, asumiendo que bajo estacionariedad local, estas predicciones son representativas del futuro.

Garantías de Cobertura A diferencia de métodos conformales con garantías formales, AREPD no posee garantías teóricas de cobertura bajo intercambiabilidad. La

distribución predictiva se construye asumiendo:

$$\hat{Y}_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \stackrel{d}{\approx} \hat{Y}_s \mid \mathcal{F}_{s-1} \quad \forall t, s \in \{p+1, \dots, n\} \quad (3-95)$$

Esta suposición puede violarse en presencia de no estacionariedad fuerte, heterocedasticidad condicional, o eventos raros no observados durante el entrenamiento.

Clasificación del Modelo AREPD es un **modelo semi-paramétrico**. La componente paramétrica reside en la estructura de regresión Ridge con coeficientes $\hat{\beta}$ que deben estimarse. La componente no paramétrica emerge del uso de la distribución empírica de predicciones históricas sin asumir formas funcionales rígidas para la distribución predictiva.

Método	Espacio de características	Ponderación temporal	Distribución predictiva
LSPM	Lineal (rezagos)	Uniforme	Conformal (scores ajustados)
LSPMW	Lineal (rezagos)	Exponencial (ρ)	Conformal ponderada
AREPD	Polinomial (grado d)	Exponencial (ρ)	Histórico-empírica
DeepAR	No lineal (LSTM)	Uniforme	Muestreo ancestral

Table 3-11: Comparación Conceptual de AREPD con Métodos Relacionados

De la Teoría a la Práctica

La implementación de AREPD traduce el marco teórico en un sistema predictivo concreto mediante adaptaciones específicas para garantizar estabilidad numérica y validez estadística.

Adaptaciones Principales (1) **Normalización Z-Score Pre-Expansión:** La expansión polinomial es extremadamente sensible a la escala. Si una serie tiene valores en $[100, 200]$, los términos cuadráticos estarán en $[10^4, 4 \times 10^4]$ y los cúbicos en $[10^6, 8 \times 10^6]$, causando inestabilidad numérica. Se aplica normalización Z-score **antes** de la expansión:

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t - \mu_{\text{train}}}{\sigma_{\text{train}} + \epsilon} \quad (3-96)$$

donde $\epsilon = 10^{-8}$ previene división por cero. Esto garantiza que todos los términos estén aproximadamente en $[-3, 3]$ bajo normalidad. Las predicciones se des-normalizan:

$$Y_t^{\text{pred}} = \tilde{Y}_t^{\text{pred}} \cdot \sigma_{\text{train}} + \mu_{\text{train}} \quad (3-97)$$

(2) Uso de regresión Ridge: En lugar de implementar manualmente la solución, se utiliza Ridge de scikit-learn con `sample_weight`, proporcionando estabilidad numérica mediante SVD optimizado y manejo robusto de casos extremos. El argumento `fit_intercept=False` es crucial porque el término constante ya está incluido como primera columna de \mathbf{X} .

(3) Protocolo de Congelamiento: Siguiendo la filosofía unificada de todos los modelos, AREPD congela completamente:

- Parámetros de normalización: $\mu_{\text{frozen}}, \sigma_{\text{frozen}}$
- Coeficientes del modelo: $\hat{\beta}_{\text{frozen}}$
- Distribución predictiva base (predicciones históricas)

Durante evaluación rolling, se normalizan los últimos p valores usando parámetros congelados, se expande polinomialmente, se aplica $\hat{\beta}_{\text{frozen}}$ sin re-estimación, y se retorna la distribución histórica des-normalizada. Este protocolo garantiza ausencia de data leakage.

(4) Manejo de Casos Degenerados: Si $n < 2p$, el modelo degrada a predictor constante $\hat{Y}_{n+1} = \mu_{\text{frozen}}$. Si la matriz es numéricamente singular (número de condición $> 10^{12}$) después de regularización Ridge, se retorna el mismo fallback.

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetros Estructurales `n_lags` (p): Número de rezagos incluidos en la matriz de diseño. Con grado d , la dimensión del espacio de características es $1 + p \cdot d$. Valores mayores permiten capturar dependencias de largo plazo pero reducen el tamaño del conjunto de entrenamiento e incrementan riesgo de sobreajuste.

`poly_degree` (d): Grado máximo de la expansión polinomial.

- $d = 1$: Modelo puramente lineal (regresión autorregresiva Ridge estándar)
- $d = 2$: Incluye términos cuadráticos, captura efectos de amplificación moderados

Aspecto	AREPD Teórico	Implementación (Esta Tesis)
Normalización de datos	No especificada	Z-score completo pre-expansión
Implementación Ridge	Solución matricial directa	scikit-learn Ridge con SVD
Manejo de singularidad	Asume matriz bien condicionada	Fallback a predictor constante
Protocolo de evaluación	Re-estimación en cada paso	Congelamiento total para rolling forecast
Selección de λ	Validación cruzada sugerida	Valor fijo ($\lambda = 0.1$)
Casos degenerados	No considerados	Predictor constante como fallback
Garantías formales Framework	Ninguna (método heurístico) Matemático puro	Sin garantías teóricas NumPy + scikit-learn

Table 3-12: Comparación entre AREPD Teórico y AREPD Implementado

- $d = 3$: Incluye términos cúbicos, alta expresividad pero riesgo significativo de sobreajuste

Número de parámetros: $1 + p \cdot d$. Para $(p, d) = (5, 2)$: 11 parámetros; para $(p, d) = (10, 3)$: 31 parámetros.

rho (ρ): Parámetro de decaimiento exponencial. Vida media efectiva:

- $\rho = 0.90$: $\tau_{1/2} \approx 6.6$ observaciones (memoria corta, adaptación rápida)
- $\rho = 0.95$: $\tau_{1/2} \approx 13.5$ observaciones (balance intermedio)
- $\rho = 0.98$: $\tau_{1/2} \approx 34.3$ observaciones (memoria larga, estabilidad)

Parámetro Fijo alpha (λ): Parámetro de regularización Ridge, fijo en $\lambda = 0.1$. Controla el trade-off sesgo-varianza: valores cercanos a cero aproximan mínimos cuadrados no regularizados, valores grandes contraen coeficientes hacia cero. El valor $\lambda = 0.1$ proporciona regularización suave sin sesgo excesivo.

Espacio de Búsqueda La optimización explora tres configuraciones estratégicamente diseñadas:

Configuración 1 - Estándar:

- `n_lags=5, rho=0.95, poly_degree=2`
- *Filosofía:* Balance entre complejidad y robustez
- *Parámetros:* 11 (1 constante + 5 lineales + 5 cuadráticos)

Configuración 2 - Memoria Corta:

- `n_lags=10, rho=0.90, poly_degree=2`
- *Filosofía:* Mayor orden autorregresivo con adaptación rápida
- *Parámetros:* 21 (1 constante + 10 lineales + 10 cuadráticos)

Configuración 3 - Alta No Linealidad:

- `n_lags=5, rho=0.98, poly_degree=3`
- *Filosofía:* Máxima expresividad no lineal con memoria larga
- *Parámetros:* 16 (1 constante + 5 lineales + 5 cuadráticos + 5 cúbicos)

Protocolo de Optimización La selección entre configuraciones minimiza **ECRPS (Expected Continuous Ranked Probability Score)** sobre el conjunto de calibración de 40 observaciones:

$$(p^*, \rho^*, d^*) = \arg \min_{(p, \rho, d) \in \mathcal{H}} \frac{1}{N_{\text{cal}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{cal}}} \text{CRPS}(\hat{F}_i, y_i) \quad (3-98)$$

donde $\mathcal{H} = \{(5, 0.95, 2), (10, 0.90, 2), (5, 0.98, 3)\}$ es el conjunto de configuraciones candidatas y \hat{F}_i es la distribución predictiva empírica generada por el método histórico.

Congelamiento de Hiperparámetros Una vez optimizada, la configuración se congela mediante `freeze_hyperparameters()`:

1. Estima $\mu_{\text{frozen}}, \sigma_{\text{frozen}}$ sobre datos de entrenamiento
2. Entrena el modelo Ridge ponderado hasta convergencia
3. Almacena coeficientes: $\hat{\beta}_{\text{frozen}}$
4. Establece flag `_is_frozen = True`

Durante toda la evaluación rolling, `fit_predict` verifica este flag: si es `True`, omite entrenamiento y procede directamente a predecir con el modelo existente, garantizando validez estadística sin fuga de información futura.

3.4.9 Ensemble Conformalized Quantile Regression (EnCQR-LSTM)

Explicación Teórica del Modelo

El *Ensemble Conformalized Quantile Regression* (EnCQR-LSTM) constituye una síntesis metodológica avanzada que integra tres paradigmas complementarios del aprendizaje estadístico: regresión cuantílica (QR), predicción conformal (CP) y aprendizaje en ensamble. Esta arquitectura híbrida busca heredar simultáneamente la **adaptabilidad heterocedástica** de QR y las **garantías formales de cobertura** de CP, superando las limitaciones inherentes de cada enfoque por separado.

Motivación y Limitaciones de Métodos Puros Los métodos basados únicamente en regresión cuantílica pueden generar intervalos adaptativos cuya amplitud varía localmente con la volatilidad de los datos, pero carecen de garantías formales de cobertura. En la práctica, los intervalos de predicción generados por QR tienden a ser excesivamente confiados (demasiado estrechos), resultando en coberturas empíricas significativamente inferiores al nivel nominal ($1 - \alpha$). (Jensen, Bianchi, and Anfinsen 2022)

Por otra parte, los métodos de predicción conformal garantizan cobertura marginal válida bajo intercambiabilidad, pero construyen intervalos de amplitud constante o ligeramente variable. Para series temporales con heterocedasticidad, donde la incertidumbre fluctúa considerablemente, estos intervalos resultan excesivamente conservadores en períodos de baja volatilidad e insuficientes en períodos de alta volatilidad.

EnCQR-LSTM aborda ambas limitaciones mediante una arquitectura de ensamble que combina estimadores LSTM de regresión cuantílica con un mecanismo de conformalización posterior.

Arquitectura de Ensamble y Regresión Cuantílica El método presentado por Jensen, Bianchi, and Anfinsen 2022 construye un ensamble homogéneo de B modelos LSTM, cada uno entrenado sobre subconjuntos **disjuntos** del conjunto de entrenamiento $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^T$.

La partición se define como:

$$S_b = \{(x_i, y_i) : i \in [(b-1)T_b + 1, bT_b]\}, \quad b = 1, \dots, B \quad (3-99)$$

donde $T_b = \lfloor T/B \rfloor$. Esta fragmentación disjunta es fundamental para construir residuos fuera de muestra válidos, garantizando que cada observación está excluida de al menos un modelo del ensamble.

Cada modelo LSTM estima simultáneamente múltiples funciones cuantílicas condicionales mediante la minimización de la pérdida pinball agregada:

$$\mathcal{L}_{\text{pinball}}(\theta_b) = \frac{1}{|S_b| \cdot |\mathcal{T}|} \sum_{(x_i, y_i) \in S_b} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \rho_\tau(y_i - \hat{q}_\tau^{(b)}(x_i)) \quad (3-100)$$

donde $\mathcal{T} = \{0.01, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90, 0.95, 0.99\}$ es el conjunto de cuantiles objetivo, y $\rho_\tau(u) = \max(\tau \cdot u, (\tau - 1) \cdot u)$ es la función de pérdida pinball que penaliza asimétricamente los errores según el cuantil objetivo.

Predicción Leave-One-Out y Scores de Conformidad Una vez entrenados los B modelos, EnCQR construye predicciones leave-one-out (LOO) para cada observación de entrenamiento. Para una observación i en el subconjunto S_b , se agregan las predicciones de todos los modelos que no incluyeron esa observación:

$$\hat{q}_\tau^{(-i)}(x_i) = \frac{1}{B-1} \sum_{b': i \notin S_{b'}} \hat{q}_\tau^{(b')}(x_i) \quad (3-101)$$

Este procedimiento LOO reemplaza el requisito de intercambiabilidad por un esquema de validación cruzada que genera residuos genuinamente fuera de muestra, esencial para series temporales.

EnCQR introduce scores de conformidad **asimétricos** que cuantifican separadamente el error de cobertura en las colas inferior y superior:

$$\begin{aligned} E_i^{\text{lo}} &= \hat{q}_{\tau_{\text{lo}}}^{(-i)}(x_i) - y_i \\ E_i^{\text{hi}} &= y_i - \hat{q}_{\tau_{\text{hi}}}^{(-i)}(x_i) \end{aligned} \quad (3-102)$$

Esta formulación asimétrica permite que las distribuciones de errores para los cuantiles inferior y superior tengan formas diferentes, crucial en presencia de asimetría sistemática.

Conformalización y Distribución Predictiva Para una nueva observación x_{T+1} , el ensamble completo genera predicciones agregadas que se conformalizan mediante:

$$\hat{C}_\alpha(x_{T+1}) = [\hat{q}_{\tau_{lo}}(x_{T+1}) - \omega^{lo}, \hat{q}_{\tau_{hi}}(x_{T+1}) + \omega^{hi}] \quad (3-103)$$

donde $\omega^{lo} = Q_{1-\alpha}(\{E_i^{lo}\}_{i=1}^T)$ y $\omega^{hi} = Q_{1-\alpha}(\{E_i^{hi}\}_{i=1}^T)$ son los cuantiles $(1 - \alpha)$ empíricos de las distribuciones de scores.

Una innovación clave de la implementación es el ajuste de una distribución **Skew-Normal** paramétrica a los cuantiles conformalizados. La función de densidad es:

$$f(x; \mu, \sigma, \alpha) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\alpha \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (3-104)$$

donde $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ son la densidad y distribución acumulada Normal estándar. Los parámetros (μ, σ, α) se estiman minimizando:

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\alpha}) = \arg \min_{(\mu, \sigma, \alpha)} \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}|} (\hat{q}_{\tau_i}^{\text{conf}} - F_{\text{SN}}^{-1}(\tau_i; \mu, \sigma, \alpha))^2 \quad (3-105)$$

Este ajuste garantiza unimodalidad y permite generar $M = 1000$ muestras de la distribución predictiva completa.

Naturaleza del Modelo EnCQR-LSTM es un modelo **semi-paramétrico**. La arquitectura LSTM y la función de pérdida pinball son completamente no paramétricas respecto a la distribución de $Y|X$. Sin embargo, la fase final de ajuste Skew-Normal introduce una componente paramétrica para suavizar la distribución predictiva. No obstante, las garantías de cobertura provienen del mecanismo conformal no paramétrico, no del ajuste distribucional.

Propiedades Teóricas Bajo el supuesto de que el proceso de error es estacionario y fuertemente mezclante, EnCQR garantiza (Jensen, Bianchi, and Anfinsen 2022):

1. **Cobertura marginal válida:** $\mathbb{P}\{Y_{T+1} \in \hat{C}_\alpha(X_{T+1})\} \geq 1 - \alpha + O(1/T)$
2. **Adaptabilidad heterocedástica:** La amplitud varía localmente con x_{T+1} a través de $\hat{q}_\tau(x_{T+1})$
3. **Robustez ante especificación incorrecta:** Incluso con modelo LSTM mal especificado, la conformalización mantiene cobertura válida

De la Teoría a la Práctica

La implementación de EnCQR-LSTM para esta investigación introduce adaptaciones específicas respecto al marco teórico original, priorizando factibilidad computacional y robustez empírica.

Adaptaciones Principales (1) **Tamaño de Ensamble Reducido:** Se utiliza $B = 3$ modelos en lugar de $B \geq 5$ como sugiere la literatura. Esta reducción responde al trade-off entre diversidad del ensamble y tamaño de subconjuntos de entrenamiento. Para series de longitud $T \approx 200 - 500$, $B = 3$ genera subconjuntos de 65 – 165 observaciones, suficientes para entrenar LSTMs efectivos sin fragmentación excesiva.

(2) **Conjunto de Cuantiles Reducido:** En lugar de estimar 19+ cuantiles, se limita a $\mathcal{T} = \{0.01, 0.05, 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90, 0.95, 0.99\}$ (9 cuantiles). Esta reducción disminuye la complejidad de la capa de salida del LSTM y acelera el entrenamiento, manteniendo resolución suficiente para caracterizar la distribución predictiva.

(3) **Ajuste Skew-Normal como Suavizado:** El paper original no especifica cómo generar distribuciones continuas desde cuantiles discretos. La implementación introduce el ajuste Skew-Normal como mecanismo de suavizado, evitando interpolación lineal que puede generar distribuciones bimodales artificiales. Si la optimización falla, se emplea fallback a distribución Normal estándar.

(4) **Actualización de Scores Deshabilitada:** El mecanismo de ventana deslizante para actualizar scores conformales ($s = 24$) no se implementa en la versión evaluada. Todos los scores se calculan una sola vez durante la fase de calibración y permanecen congelados. Esta simplificación prioriza reproducibilidad y reduce complejidad computacional.

(5) **Arquitectura LSTM Simplificada:** Se emplea $L = 2$ capas LSTM con 32 unidades cada una, sin mecanismos avanzados como attention o skip connections. La regularización

se limita a dropout ($p = 0.1$) y penalización L2 implícita en Adam.

Aspecto	Teoría Original	Implementación
Tamaño de ensamble (B)	$B \geq 5$ recomendado	$B = 3$ fijo
Cuantiles estimados	19+ cuantiles para alta resolución	9 cuantiles estratégicos
Distribución predictiva	No especificada	Ajuste Skew-Normal paramétrico
Actualización de scores	Ventana deslizante cada s observaciones	Deshabilitada (scores congelados)
Arquitectura LSTM	No especificada	2 capas, 32 unidades, dropout 0.1
Protocolo de congelamiento	Scores adaptativos	Congelamiento total (modelos + scores)
Complejidad computacional	Alta (múltiples entrenamientos + updates)	Reducida (sin actualizaciones)

Table 3-13: Comparación entre teoría y práctica en EnCQR-LSTM

Optimización, Parámetros e Hiperparámetros

Hiperparámetros del Modelo **n_lags** (N_x): Longitud de ventana temporal de entrada. Define cuántos valores históricos se usan para predecir el siguiente.

units (N_u): Número de unidades (dimensión del estado oculto) en cada capa LSTM. Controla la capacidad expresiva del modelo.

epochs: Número de pasadas sobre el conjunto de entrenamiento. Se implementa early stopping con paciencia de 50 épocas para prevenir sobreajuste.

Parámetros Fijos:

- $B = 3$ (número de modelos en ensamble)
- $L = 2$ (número de capas LSTM)
- lr = 0.005 (tasa de aprendizaje Adam)
- batch_size = 16
- dropout = 0.1

- $\alpha = 0.05$ (nivel de error nominal, cobertura 95%)
- `num_samples = 1000` (muestras de distribución Skew-Normal)

Espacio de Búsqueda Restringido Dada la alta complejidad computacional de entrenar ensambles de LSTMs, el espacio de hiperparámetros se limita estratégicamente a dos configuraciones:

Configuración 1 (Conservadora): ($N_x = 10, N_u = 24, \text{epochs} = 20$)

- *Filosofía:* Prioriza eficiencia computacional y convergencia rápida
- *Tiempo de entrenamiento:* Bajo ($\sim 10\text{-}15$ min por ensamble completo)

Configuración 2 (Estándar): ($N_x = 20, N_u = 32, \text{epochs} = 25$)

- *Filosofía:* Balance entre expresividad y recursos computacionales
- *Tiempo de entrenamiento:* Medio ($\sim 20\text{-}30$ min por ensamble completo)

Optimización y Congelamiento La selección entre ambas configuraciones se realiza minimizando **ECRPS** sobre un conjunto de validación temporal separado. Formalmente:

$$(N_x^*, N_u^*, \text{epochs}^*) = \arg \min_{(N_x, N_u, e) \in \mathcal{H}} \frac{1}{N_{\text{val}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{val}}} \text{CRPS}(\mathcal{F}_i, y_i) \quad (3-106)$$

donde $\mathcal{H} = \{(10, 24, 20), (20, 32, 25)\}$ y \mathcal{F}_i es la distribución predictiva para la observación i .

Una vez optimizada la configuración, se ejecuta el protocolo de congelamiento completo mediante `freeze_hyperparameters()`, que fija permanentemente:

- Los pesos $\{\theta_b\}_{b=1}^B$ de los B modelos LSTM
- Los parámetros de normalización MinMax: (y_{\min}, y_{\max})
- Las distribuciones empíricas de scores conformales: $\{E_i^{\text{lo}}\}_{i=1}^T$ y $\{E_i^{\text{hi}}\}_{i=1}^T$

Durante la evaluación rolling window, para cada punto de prueba $t = T + 1, \dots, T + T'$, se extrae la ventana de entrada, se normalizan los datos con parámetros congelados, se generan predicciones de los B modelos congelados, se agregan mediante media aritmética,

se conformalizan usando scores congelados, se des-normalizan, y se ajusta la distribución Skew-Normal final. Este protocolo garantiza ausencia total de data leakage y evaluación justa comparable con otros métodos.

Justificación del Espacio Reducido La decisión de limitar el espacio de búsqueda a solo 2 configuraciones se fundamenta en:

1. **Costo computacional prohibitivo:** Cada configuración requiere entrenar $B = 3$ LSTMs completos. Una búsqueda exhaustiva sobre $\{10, 15, 20\} \times \{24, 32, 64\} \times \{20, 25, 30\}$ implicaría 27 entrenamientos por serie, inviable para el benchmark de 100 series.
2. **Evidencia de rendimientos decrecientes:** Experimentos piloto mostraron que configuraciones intermedias rara vez superaban los extremos, sugiriendo un comportamiento bimodal del desempeño.
3. **Priorización de diversidad metodológica:** Los recursos computacionales se asignan a evaluar múltiples arquitecturas fundamentalmente diferentes (LSPM, MCPS, AREPD, DeepAR, EnCQR) en lugar de explorar exhaustivamente el espacio de un solo método.

Esta estrategia de optimización restringida permite evaluar el potencial de EnCQR-LSTM manteniendo el estudio computacionalmente viable, reconociendo que representaciones más sofisticadas (búsqueda bayesiana, algoritmos genéticos) quedan fuera del alcance de esta investigación.

3.5 Simulaciones Complementarias

Además del diseño factorial principal descrito en la Sección 3.2, se implementaron cinco conjuntos de simulaciones complementarias diseñadas para resolver dilemas metodológicos específicos sobre el preprocesamiento, la persistencia de los datos, la arquitectura de la muestra y la propagación de la incertidumbre en horizontes lejanos. Estas simulaciones abordan preguntas fundamentales que no pueden responderse mediante el diseño principal debido a su estructura particular de ventana rodante a un paso.

3.5.1 Simulación 1: Impacto de la Diferenciación en ARIMA ($d = 1$)

Motivación

Esta simulación evalúa una pregunta metodológica fundamental: ¿los métodos conformales capturan mejor la variabilidad cuando operan sobre la serie diferenciada estacionaria (ΔY_t) o sobre los niveles integrados (Y_t)? Esta cuestión es relevante porque, aunque la diferenciación elimina la no estacionariedad y simplifica el modelado, también puede introducir pérdida de información sobre el nivel de la serie y afectar la estructura de autocorrelación (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021).

Diseño Experimental

Se utilizan las 7 configuraciones ARIMA($p, 1, q$) del diseño principal (Sección 3.3), combinadas con las 5 distribuciones de ruido y 4 niveles de varianza, generando:

$$N_{\text{config}} = 7 \text{ procesos} \times 5 \text{ distribuciones} \times 4 \text{ varianzas} = 140 \text{ configuraciones base} \quad (3-107)$$

Cada configuración se ejecuta bajo dos modalidades:

1. **SIN_DIFF**: El modelo recibe la serie integrada Y_t directamente y genera una distribución predictiva $\hat{F}_{Y_{t+1}}$ para el siguiente valor en niveles.
2. **CON_DIFF**: El modelo recibe la serie diferenciada $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. La predicción generada $\widehat{\Delta Y}_{t+1}$ se integra mediante:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + \widehat{\Delta Y}_{t+1} \quad (3-108)$$

para calcular el ECRPS en el espacio de niveles, permitiendo una comparación directa con la modalidad SIN_DIFF.

Protocolo de Evaluación

Siguiendo el esquema de la simulación principal:

- Serie simulada: $n_{\text{total}} = 252$ observaciones efectivas (200 entrenamiento + 40 calibración + 12 prueba)

- Esquema de ventana rodante con 12 pasos de predicción
- Evaluación de los 9 modelos conformales mediante ECRPS contra la distribución teórica

Esto genera:

$$N_{\text{filas}} = 140 \times 2 \text{ modalidades} \times 12 \text{ pasos} = 3,360 \text{ evaluaciones} \quad (3-109)$$

3.5.2 Simulación 2: Límites de Integración y Persistencia (Multi-D)

Motivación

Se investiga la estabilidad numérica de los métodos conformales ante órdenes de integración elevados $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$. A medida que d aumenta, la serie integrada Y_t exhibe una persistencia extrema y rangos de valores cada vez más amplios, lo que puede desestabilizar modelos que no utilizan diferenciación previa adecuada.

Diseño Experimental

A partir de las 7 configuraciones ARMA(p, q) base, se genera el proceso ARIMA(p, d, q) mediante:

$$Y_t = \sum_{j=0}^{d-1} \nabla^j W_t, \quad \text{donde } W_t \sim \text{ARMA}(p, q) \quad (3-110)$$

Con la estructura factorial completa:

$$N_{\text{config}} = 7 \text{ ARMA} \times 8 \text{ valores de } d \times 5 \text{ distribuciones} \times 4 \text{ varianzas} = 1,120 \text{ configuraciones} \quad (3-111)$$

Cada configuración se evalúa bajo las dos modalidades (SIN_DIFF y CON_DIFF) en 12 pasos:

$$N_{\text{filas}} = 1,120 \times 2 \times 12 = 26,880 \text{ evaluaciones} \quad (3-112)$$

Hipótesis

Se hipotetiza que para $d \geq 4$, el rango explosivo de Y_t desestabilizará a los modelos en modalidad SIN_DIFF, mientras que la modalidad CON_DIFF mantendrá estabilidad numérica al operar en el espacio diferenciado acotado.

3.5.3 Simulación 3: Efectos del Tamaño Muestral Absoluto

Motivación

Esta simulación caracteriza la tasa de convergencia de las distribuciones predictivas empíricas hacia la densidad teórica a medida que el volumen de datos aumenta. Permite cuantificar el trade-off entre calidad de estimación (que mejora con más datos de entrenamiento) y precisión de calibración (que mejora con más datos de calibración). A diferencia del diseño principal que mantiene fijos los tamaños $n_{\text{train}} = 200$ y $n_{\text{calib}} = 40$, aquí se explora sistemáticamente el espacio de combinaciones de tamaños absolutos.

Diseño Experimental

Se evalúan los tres tipos de procesos (ARMA, ARIMA, SETAR) con sus 7 configuraciones cada uno, bajo nueve combinaciones de tamaños muestrales resultantes del producto cartesiano de tres niveles de datos de entrenamiento y tres niveles de datos de calibración:

Esta estructura permite evaluar de forma independiente el efecto marginal de incrementar n_{train} (mejorando la estimación del modelo base) versus incrementar n_{calib} (refinando la calibración conformal), así como sus interacciones.

La estructura factorial completa genera:

$$\begin{aligned} N_{\text{config}} &= 3 \text{ tipos} \times 7 \text{ configs} \times 9 \text{ combinaciones} \\ &\quad \times 5 \text{ distribuciones} \times 4 \text{ varianzas} \\ &= 3,780 \text{ configuraciones} \end{aligned} \tag{3-113}$$

Con 12 pasos de evaluación por configuración:

$$N_{\text{filas}} = 3,780 \times 12 = 45,360 \text{ evaluaciones} \tag{3-114}$$

Combinación	n_{train}	n_{calib}	n_{total}	Ratio
Pequeña-Pequeña	100	20	120	1:5
Pequeña-Media	100	100	200	1:1
Pequeña-Grande	100	200	300	1:2
Media-Pequeña	500	20	520	1:25
Media-Media	500	100	600	5:1
Media-Grande	500	200	700	5:2
Grande-Pequeña	1,000	20	1,020	50:1
Grande-Media	1,000	100	1,100	10:1
Grande-Grande	1,000	200	1,200	5:1

Table 3-14: Combinaciones de tamaños muestrales evaluadas

3.5.4 Simulación 4: Proporciones de Calibración con Tamaño Fijo

Motivación

En escenarios de datos limitados, existe un conflicto fundamental entre usar datos para mejorar el ajuste del modelo (*training*) o para mejorar la precisión de los intervalos conformales (*calibration*). Esta simulación busca determinar si existe una “proporción áurea” que minimice el ECRPS promedio.

Diseño Experimental

Se fija un presupuesto total de $n_{\text{total}} = 240$ observaciones y se evalúan 5 particiones:

Proporción	n_{train}	n_{calib}	Ratio
10%	216	24	1:9
20%	192	48	1:4
30%	168	72	3:7
40%	144	96	2:3
50%	120	120	1:1

Table 3-15: Proporciones de calibración evaluadas (N=240 fijo)

La estructura factorial completa es:

$$\begin{aligned}
 N_{\text{config}} &= 3 \text{ tipos} \times 7 \text{ configs} \times 5 \text{ proporciones} \\
 &\quad \times 5 \text{ distribuciones} \times 4 \text{ varianzas} \\
 &= 2,100 \text{ configuraciones}
 \end{aligned} \tag{3-115}$$

Cada configuración genera 12 pasos + 1 fila promedio:

$$N_{\text{filas}} = 2,100 \times 13 = 27,300 \text{ filas totales} \tag{3-116}$$

Nota: El documento de referencia reporta 25,200 evaluaciones, lo que sugiere que no se incluyó la fila promedio en el conteo ($2,100 \times 12 = 25,200$).

3.5.5 Simulación 5: Predicción Multi-paso (Horizonte h)

Motivación

El diseño factorial principal evalúa la predicción a un paso adelante mediante un esquema de ventana rodante, donde el modelo se actualiza con cada nueva observación antes de realizar la siguiente predicción. Sin embargo, muchas aplicaciones prácticas requieren pronósticos para múltiples períodos futuros sin acceso a observaciones intermedias (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021). Esta simulación evalúa cómo se degrada la calidad de la distribución predictiva cuando el modelo debe proyectar h pasos hacia adelante de forma recursiva, alimentándose exclusivamente de sus propias predicciones anteriores.

Fundamento Metodológico: Predicción Recursiva

Existen dos estrategias principales para pronóstico multi-paso (Ben Taieb et al. 2012):

1. **Estrategia Directa:** Entrenar modelos separados para cada horizonte h , cada uno estimando directamente Y_{t+h} desde $Y_{1:t}$. Aunque conceptualmente simple, requiere entrenar H modelos independientes y no aprovecha la estructura secuencial del problema.
2. **Estrategia Recursiva (Iterativa):** Utilizar un único modelo de predicción a un

paso y aplicarlo recursivamente:

$$\hat{Y}_{t+h} = f(\hat{Y}_{t+h-1}, \hat{Y}_{t+h-2}, \dots, Y_t), \quad h = 2, 3, \dots, H \quad (3-117)$$

Esta estrategia, aunque propaga errores de predicción, es más eficiente computacionalmente y refleja mejor la práctica operativa donde no hay acceso a observaciones futuras verdaderas (Bontempi, Ben Taieb, and Le Borgne 2013).

La presente simulación implementa la estrategia recursiva, que es la más relevante para evaluar métodos conformales en horizontes extendidos. La propagación de incertidumbre en este contexto ha sido estudiada por Gneiting and Katzfuss (2014) y Stankeviciute, Alaa, and Schaar (2021), quienes demuestran que la distribución predictiva en el horizonte h debe considerar tanto la incertidumbre del modelo como la acumulación de errores de pasos previos.

Generación de Trayectorias Estocásticas

Para cada configuración y modelo, se generan $N_{\text{traj}} = 100$ trayectorias completas desde el mismo punto de origen t . Cada trayectoria m se construye mediante muestreo recursivo de las distribuciones predictivas:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{t+1}^{(m)} &\sim \hat{F}_{\text{modelo}}(\cdot | Y_{1:t}) \\ \hat{Y}_{t+2}^{(m)} &\sim \hat{F}_{\text{modelo}}(\cdot | Y_{1:t}, \hat{Y}_{t+1}^{(m)}) \\ &\vdots \\ \hat{Y}_{t+h}^{(m)} &\sim \hat{F}_{\text{modelo}}\left(\cdot | Y_{1:t}, \hat{Y}_{t+1}^{(m)}, \dots, \hat{Y}_{t+h-1}^{(m)}\right) \end{aligned} \quad (3-118)$$

donde $m = 1, \dots, 100$ indexa las trayectorias independientes. Este procedimiento genera una distribución empírica para cada horizonte h , formada por las 100 realizaciones $\{\hat{Y}_{t+h}^{(1)}, \dots, \hat{Y}_{t+h}^{(100)}\}$.

Diseño Experimental

Se evalúan únicamente 4 modelos representativos (LSPM, DeepAR, Sieve Bootstrap, MCPS) debido al alto costo computacional de generar 100 trayectorias completas por escenario. La selección incluye:

- **LSPM:** Método conformal clásico basado en cuantiles empíricos
- **DeepAR:** Método paramétrico de aprendizaje profundo que modela distribuciones completas
- **Sieve Bootstrap:** Método no paramétrico basado en remuestreo de residuos
- **MCPS:** Método conformal contemporáneo que partitiona el espacio de calibración

Para cada tipo de proceso (ARMA, ARIMA, SETAR), la estructura factorial es:

$$N_{\text{config}} = 7 \text{ configs} \times 5 \text{ distribuciones} \times 4 \text{ varianzas} = 140 \text{ configuraciones} \quad (3-119)$$

Con 3 tipos de procesos y 12 horizontes de predicción:

$$N_{\text{filas}} = 3 \times 140 \times 12 = 5,040 \text{ evaluaciones} \quad (3-120)$$

Protocolo de Evaluación

El protocolo sigue la estructura del diseño principal con las siguientes particularidades:

1. **Punto de origen fijo:** A diferencia de la ventana rodante, aquí todas las predicciones parten del mismo punto temporal $t = n_{\text{train}} + n_{\text{calib}}$.
2. **Sin actualización intermedia:** El modelo se ajusta una sola vez con los datos disponibles hasta t y no se actualiza durante la proyección de los $H = 12$ pasos.
3. **Evaluación por horizonte:** Para cada $h \in \{1, 2, \dots, 12\}$, se calcula:

$$\text{ECRPS}_h = \text{ECRPS} \left(\{\hat{Y}_{t+h}^{(1)}, \dots, \hat{Y}_{t+h}^{(100)}\}, \{Y_{t+h}^{(\text{true},1)}, \dots, Y_{t+h}^{(\text{true},1000)}\} \right) \quad (3-121)$$

4. **Análisis de degradación:** El experimento permite cuantificar la tasa de crecimiento de ECRPS_h conforme h aumenta, caracterizando la velocidad de degradación de la calidad predictiva.

Esta simulación es particularmente relevante para aplicaciones donde las decisiones deben tomarse con base en pronósticos de mediano plazo sin posibilidad de actualización frecuente del modelo, como en planeación energética, gestión de inventarios o política monetaria (Rob J Hyndman and Athanasopoulos 2021).

3.5.6 Resumen de Evaluaciones Complementarias

La Tabla 3-16 consolida el alcance total de estos experimentos. El volumen combinado de estas simulaciones complementarias es comparable al del diseño factorial principal, reflejando la importancia de estos aspectos metodológicos para una evaluación comprehensiva.

Simulación	Factor Variado		Filas
1. Diferenciación ($d = 1$)	Modalidad CON_DIFF)	(SIN_DIFF vs	3,360
2. Multi-D	Orden de integración $d \in \{1, \dots, 10\}$		26,880
3. Tamaño Muestral	Escala total		45,360*
4. Proporciones	Ratio $n_{\text{cal}}/n_{\text{train}}$ (Total 240 fijo)		25,200†
5. Multi-paso	Horizonte de predicción $h \in \{1, \dots, 12\}$		5,040‡
Total			105,840

Table 3-16: Resumen de la carga experimental de simulaciones complementarias

Protocolo Común a Todas las Simulaciones

Todas las simulaciones complementarias mantienen consistencia metodológica con el diseño principal descrito en la Sección 3.2:

- **Período de inicialización (burn-in):** 50 observaciones descartadas antes del inicio efectivo de la serie para eliminar efectos transitorios de las condiciones iniciales.
- **Métrica de evaluación:** ECRPS entre la distribución predictiva empírica del modelo y la distribución teórica verdadera del proceso generador de datos, como se define en la Sección 2.2.3.
- **Modelos evaluados:** Los 9 métodos conformales especificados en la Sección 3.4 (Block Bootstrapping, Sieve Bootstrap, LSPM, LSPMW, AREPD, MCPS, AV-MCPS, DeepAR, EnCQR-LSTM), excepto en la Simulación 5 donde por razones de eficiencia computacional se evalúan únicamente 4 modelos representativos.
- **Calibración y ajuste de hiperparámetros:** Cada modelo se optimiza siguiendo el procedimiento de dos etapas descrito en la Sección ???. Brevemente, los

hiperparámetros se seleccionan mediante validación cruzada en el conjunto de entrenamiento, y luego los parámetros conformales se calibran usando el conjunto de calibración dedicado.

- **Control de reproducibilidad:** Semillas aleatorias fijas y documentadas para cada escenario, permitiendo la replicación exacta de todos los experimentos.
- **Esquema de evaluación:** Ventana rodante (Simulaciones 1-4) o proyección desde origen fijo (Simulación 5), según la pregunta metodológica de interés.

La uniformidad en estos aspectos fundamentales garantiza que las diferencias observadas en el desempeño sean atribuibles exclusivamente a los factores experimentales bajo estudio (modalidad de diferenciación, orden de integración, tamaño muestral, proporción de calibración, u horizonte de predicción) y no a variaciones en el protocolo de evaluación.

Bibliografía

- Arrieta Prieto, Mario Enrique (2017). “Evaluation of the Sieve Bootstrap’s performance in comparison with the classic approach for forecasting purposes in time series analysis”. In: *XXVII Simposio Internacional de Estadística / 5th International Workshop on Applied Statistics*. Poster Presentation. Medellín, Colombia.
- Barber, Rina Foygel et al. (2023). *Conformal Prediction Beyond Exchangeability*. arXiv preprint arXiv:2202.13415v5. Version 5. Accessed on January 6, 2026. arXiv: [2202.13415 \[stat.ME\]](https://arxiv.org/abs/2202.13415).
- Ben Taieb, Souhaib et al. (2012). “A review and comparison of strategies for multi-step ahead time series forecasting”. In: *Expert Systems with Applications* 39.8, pp. 7067–7083.
- Bontempi, Gianluca, Souhaib Ben Taieb, and Yann-Aël Le Borgne (2013). “Machine learning strategies for time series forecasting”. In: *Business Intelligence: Second European Summer School, eBISS 2012*. Springer, pp. 62–77.
- Boström, Henrik (2022). “crepes: a Python Package for Generating Conformal Regressors and Predictive Systems”. In: *Conformal and Probabilistic Prediction with Applications*. Vol. 179. PMLR, pp. 24–41.
- Boström, Henrik, Ulf Johansson, and Tuve Löfström (2021). “Mondrian Conformal Predictive Distributions”. In: *Proceedings of Machine Learning Research* 152, pp. 24–38.
- Bühlmann, Peter (1997). “Sieve Bootstrap for Time Series”. In: *Bernoulli* 3.2, pp. 123–148. DOI: [10.2307/3318434](https://doi.org/10.2307/3318434).
- Chan, Kung-Sik and Howell Tong (1985). “Testing for threshold autoregression”. In: *The Annals of Statistics* 13.3, pp. 1121–1142.
- Chen, Pu and Willi Semmler (2023). “Stability in Threshold VAR Models”. In: *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*. DOI: [10.1515/snde-2022-0099](https://doi.org/10.1515/snde-2022-0099).
- Chen, Tianqi and Carlos Guestrin (2016). “XGBoost: A Scalable Tree Boosting System”. In: *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. ACM, pp. 785–794.

- Coroneo, Laura and Fabrizio Iacone (2020). "Comparing Predictive Accuracy in Small Samples Using Fixed-Smoothing Asymptotics". In: *Journal of Applied Econometrics* 35.3, pp. 391–409. DOI: [10.1002/jae.2756](https://doi.org/10.1002/jae.2756).
- Diebold, Francis X. and Roberto S. Mariano (1995). "Comparing Predictive Accuracy". In: *Journal of Business & Economic Statistics* 13.3, pp. 253–263. DOI: [10.1080/07350015.1995.10524599](https://doi.org/10.1080/07350015.1995.10524599).
- Giacomini, Raffaella and Halbert White (2006). "Tests of Conditional Predictive Ability". In: *Econometrica* 74.6, pp. 1545–1578. DOI: [10.1111/j.1468-0262.2006.00718.x](https://doi.org/10.1111/j.1468-0262.2006.00718.x).
- Gneiting, Tilmann, Fadoua Balabdaoui, and Adrian E. Raftery (2007). "Probabilistic Forecasts, Calibration and Sharpness". In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 69.2, pp. 243–268. DOI: [10.1111/j.1467-9868.2007.00587.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2007.00587.x).
- Gneiting, Tilmann and Matthias Katzfuss (2014). "Probabilistic Forecasting". In: *Annual Review of Statistics and Its Application* 1, pp. 125–151. DOI: [10.1146/annurev-statistics-062713-085831](https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-062713-085831).
- Gneiting, Tilmann and Adrian E. Raftery (2007). "Strictly Proper Scoring Rules, Prediction, and Estimation". In: *Journal of the American Statistical Association* 102.477, pp. 359–378. DOI: [10.1198/016214506000001437](https://doi.org/10.1198/016214506000001437).
- Harvey, David, Stephen Leybourne, and Paul Newbold (1997). "Testing the Equality of Prediction Mean Squared Errors". In: *International Journal of Forecasting* 13.2, pp. 281–291. DOI: [10.1016/S0169-2070\(96\)00719-4](https://doi.org/10.1016/S0169-2070(96)00719-4).
- Hyndman, Rob J and George Athanasopoulos (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. 3rd. Melbourne, Australia: OTexts. URL: <https://otexts.com/fpp3/>.
- Hyndman, Rob J. and Yanan Fan (1996). "Sample Quantiles in Statistical Packages". In: *The American Statistician* 50.4, pp. 361–365.
- Jensen, Vilde, Filippo Maria Bianchi, and Stian Normann Anfinsen (2022). "Ensemble Conformalized Quantile Regression for Probabilistic Time Series Forecasting". Version v2. In: *arXiv preprint arXiv:2202.08756*. Submitted to IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. arXiv: [2202.08756 \[cs.LG\]](https://arxiv.org/abs/2202.08756). URL: <https://arxiv.org/abs/2202.08756>.
- Kingma, Diederik P. and Jimmy Ba (2015). "Adam: A Method for Stochastic Optimization". In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Learning Representations (ICLR)*. Originally published as arXiv:1412.6980 [cs.LG].
- Lahiri, S. N. (2003). *Resampling Methods for Dependent Data*. Springer Series in Statistics. New York: Springer. ISBN: 978-1-4419-1848-2. DOI: [10.1007/978-1-4757-3803-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3803-2).

- Petruccelli, Joseph D and Samuel W Woolford (1984). “A consistent test for nonstationarity based on residuals”. In: *Journal of the American Statistical Association* 79.387, pp. 611–616.
- Politis, Dimitris N. and Joseph P. Romano (1992). “A circular block-resampling procedure for stationary data”. In: *Exploring the Limits of Bootstrap*. Ed. by Raoul LePage and Lynne Billard. New York: Wiley, pp. 263–270.
- Politis, Dimitris N. and Halbert White (2004). “Automatic Block-Length Selection for the Dependent Bootstrap”. In: *Journal of the American Statistical Association* 99.465, pp. 154–164. DOI: [10.1198/016214504000000214](https://doi.org/10.1198/016214504000000214).
- Salinas, David et al. (2020). “DeepAR: Probabilistic Forecasting with Autoregressive Recurrent Networks”. In: *International Journal of Forecasting* 36.3, pp. 1181–1191. DOI: [10.1016/j.ijforecast.2019.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2019.07.001). arXiv: [1704.04110](https://arxiv.org/abs/1704.04110).
- Stankeviciute, Kamile, Ahmed M Alaa, and Mihaela van der Schaar (2021). “Conformal time-series forecasting”. In: *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 34, pp. 6292–6304.
- Thorarinsdottir, Thordis L. and Nina Schuhéen (2017). “Verification: Assessment of Calibration and Accuracy”. In: *Norwegian Computing Center SAMBA/17/17*.
- Vovk, Vladimir (2019). “Universally consistent conformal predictive distributions”. In: *Proceedings of the Eighth Workshop on Conformal and Probabilistic Prediction and Applications (COPA 2019)*. Vol. 105. Proceedings of Machine Learning Research. PMLR, pp. 105–122. URL: <http://proceedings.mlr.press/v105/vovk19a.html>.
- Vovk, Vladimir, Alexander Gammerman, and Glenn Shafer (2005). *Algorithmic Learning in a Random World*. New York: Springer. DOI: [10.1007/b138548](https://doi.org/10.1007/b138548).
- (2022). *Algorithmic Learning in a Random World*. Second. Cham, Switzerland: Springer. ISBN: 978-3-031-06648-1. DOI: [10.1007/978-3-031-06649-8](https://doi.org/10.1007/978-3-031-06649-8).
- Vovk, Vladimir, Ilia Nouretdinov, et al. (2017). *Conformal predictive distributions with kernels*. Working paper 20. Working Paper 20. Accessed on January 6, 2026. On-line compression modelling project (new series). URL: <http://alrw.net/articles/CPDK.pdf>.
- West, Kenneth D. (1996). “Asymptotic Inference about Predictive Ability”. In: *Econometrica* 64.5, pp. 1067–1084. DOI: [10.2307/2171956](https://doi.org/10.2307/2171956).
- Ye, Tinghan, Amira Hijazi, and Pascal Van Hentenryck (2025). “Conformal Predictive Distributions for Order Fulfillment Time Forecasting”. In: *arXiv preprint arXiv:2505.17340*. Version 2.

Yu, Bin (1994). "Rates of Convergence for Empirical Processes of Stationary Mixing Sequences". In: *The Annals of Probability* 22.1, pp. 94–116.