



# Espectro del Charmonium y Bottomonium desde una perspectiva no relativista

Pedro José Leal Mesa

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
2022



# **Espectro del Charmonium y Bottomonium desde una perspectiva no relativista**

**Pedro Jose Leal Mesa**

Tesis o trabajo de grado presentada(o) como requisito parcial para optar al título de:  
**Físico**

Directores:

Ph.D. Carlos Eduardo Sandoval Usme  
Ph.D Diego Alejandro Milanés Carreño

Línea de Investigación:  
Cromodinámica cuántica (Quarkonia)

Grupo de Investigación:  
FENYX

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias, Departamento de Física  
Bogotá, Colombia  
2022



**A mi Taita, a mis compañeros y a mis tutores por su paciencia.**

*“Caminante, son tus huellas  
el camino y nada más;  
Caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.  
Al andar se hace el camino,  
y al volver la vista atrás  
se ve la senda que nunca  
se ha de volver a pisar.  
Caminante no hay camino  
sino estelas en la mar.”*

— ***Antonio Machado***



# **Agradecimientos**

A mi Padre, que no hay palabras para expresar todo el reconocimiento y agradecimiento que poseo para con él, que siempre me ha apoyado a seguir con mis metas.

A los profesores: Diego Milanés y Carlos Sandoval que, aunque hubo dificultades al principio para realizar el proyecto, siempre estuvieron dispuestos a colaborar y acompañarme en este proceso, sin mencionar su gran paciencia.

Al profesor José Giraldo que confió en mis capacidades desde el primer semestre y por ello, hoy estoy presentando esta disertación.

A Pablo Figueroa y David Barón por su colaboración y consejos para la culminación de este trabajo.

A mis compañeros Ronald Cortés, Catalina Moreno, Brayan Castiblanco, Francisco Ortiz, Camilo Prada y Daniel Ladino que estuvieron a mi lado, me ayudaron y trabajaron conmigo durante esta etapa de mi vida.

**Con cariño  
Pedro José Leal Mesa**



## Resumen

El comportamiento de los mesones pesados ha sido un desafío a las limitaciones de la teoría QCD en este rango de energía. Por ello, se propone el uso de un potencial con gran aceptación en la comunidad científica, como es el potencial de Cornell que se deduce de las contribuciones del intercambio gluónico. Este potencial se toma dentro de la ecuación de Schrödinger, que se resuelve por límites, en el caso  $r \rightarrow \infty$  su solución depende de la función de Airy, que permite encontrar una energía estado base que se usa para una minimización  $\chi^2$  basado en los datos experimentales, con el fin de ajustar las masas de los estados S. Posteriormente se agregan las correcciones espinoriales para realizar un ajuste con diferentes estados ( $l > 0$ ). Los estados calculados se aproximan bien a los estados teóricos y experimentales.

## Abstract

The behavior of heavy mesons has been a challenge to the limitations of QCD theory in this energy range. For this reason, the use of a potential with great acceptance in the scientific community is proposed, such as the Cornell potential which is deducted from the contributions of the gluonic exchange. This potential is taken into the Schrödinger equation, which is solved by limits, in the case  $r \rightarrow \infty$  its solution depends on the Airy function, which allows finding a ground state energy that is used for a minimization  $\chi^2$  based on the experimental data, to fit the masses of the S states. Subsequently, spinorial corrections are added to perform a fit with different states ( $l > 0$ ). The calculated states approximate well to the theoretical and experimental states.



# **Lista de figuras**



# **Lista de tablas**

# Introducción

La física de partículas cambió para siempre el 11 de Noviembre de 1974, cuando en Brookhaven National Laboratory (BNL)[**BNL**] y en Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) [**SLAC**] se encontró una nueva resonancia  $J/\psi$ , fue el primer estado observado de un nuevo sistema, por entonces desconocido, se llamaría el charmonium  $c\bar{c}$ , un mesón quarkónico (la composición de un quark-antiquark pesado). Este nuevo sistema se puede entender como la analogía del positrónio con la esperanza de que fuese como el átomo de hidrógeno que ayudo a entender la física atómica, en este caso enfocado en la dinámica hadrónica. De igual manera en 1977 se descubrió el primer estado del Bottomonium[**B1977**].

La teoría física que describiría estos mesones es la QCD (Quantum Chromodynamics), pero hay dos impedimentos para una deducción analítica: 1. la libertad asintótica [**freeas**] que para energías bajas la constante de acople  $\alpha_s$  posee valores considerables. 2. el confinamiento, que implica que los quarks siempre se encuentran dentro de hadrones y no pueden verse de manera individual. Estas consideraciones hacen que no sea posible usar teoría de perturbaciones en la QCD.

Como consecuencia de esta imposibilidad de realizar una deducción netamente teórica, se propone un modelo no relativista, sugerido por las características del sistema ( $m \gg p$ ). Lo que permite presentar potenciales no-relativistas fenomenológicos[**modelcharm**] y aplicarlos como herramientas para ajustar el espectro quarkónico.

El objetivo de este trabajo de grado es construir un potencial con parámetros libres los cuales se ajustarán usando los datos provistos por el PDG con la adición de las correcciones espinoriales necesarias para realizar la debida minimización.

Este trabajo, se divide en: capítulo ??, deducción del potencial de Cornell desde primeros principios; capítulo ?? Implementación de la ecuación de Schrödinger, además de resultados para los estados S; capítulo ?? Deducción de las correcciones espinoriales con su adición por medio de teoría de perturbaciones y resultados finales.

# 1 Conceptos Básicos para Modelos de quarkonia

Este capítulo describe la cinemática con la cual se define la ecuación de Schrödinger a solucionar, la deducción del potencial de Cornell desde primeros principios y como se realiza todo este proceso desde la mecánica cuántica no relativista.

En principio, los estados ligados en una teoría de campos relativista se estudian con el formalismo de Bethe-Salpeter, pero es importante considerar las escalas características de los quarks ligados que se profundizarán, con una constante de estructura de la QCD  $\Lambda_{QCD} \approx 0,2 \text{ GeV}$ [phdthesis], el quark charm tiene una masa  $m_c \approx 1,27 \text{ GeV}$  y en el caso del quark bottom  $m_b \approx 4,18 \text{ GeV}$ [PDG]. Por lo tanto, se puede analizar estos procesos desde una teoría *no relativista* y así mismo ser tratado desde la solución de la ecuación de Schrödinger.

## 1.1. Estados espectroscópicos

Los estados espectroscópicos son los posibles estados cuánticos en los que se puede encontrar un sistema cuántico, en este caso el quarkonia, como el charmonium y el Bottomonium son fermiones de spin  $\frac{1}{2}$  los posibles valores que puede tomar su spin conjunto  $S = S_1 + S_2$  se denota como,

$$0 = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq S \leq \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = 1$$

Otro número cuántico fundamental es el momento angular orbital L que puede tomar diferentes valores siempre y cuando el sistema posea ese estado,

$$\begin{matrix} L = & 0 & 1 & 2 & \dots \\ & S & P & D & \dots \end{matrix}$$

Con estos dos números cuánticos se encuentra las relaciones para el intercambio de carga y la paridad,

$$\begin{aligned} C &= (-1)^{L+S} \\ P &= (-1)^{(L+1)} \end{aligned}$$

Conociendo los valores esperados de la carga y paridad para el estado de interés se puede expresar como,

$$J^{PC}$$

Donde J es el momento angular total. La notación que se usará en el desarrollo de este trabajo es diferente constando de los números cuánticos,

$$n^{2S+1}L_J$$

Algunos de los estados quarkónicos más representativos con su nomenclatura espectroscópica,

	$n^{2S+1}L_J$	$J^{PC}$
$\eta_c(1S)$	$1^1S_1$	$0^{-+}$
$\eta_c(2S)$	$2^1S_1$	$0^{-+}$
$J/\psi(1S)$	$1^3S_1$	$1^{--}$
$\psi(2S)$	$2^3S_1$	$1^{--}$
$\chi_{c0}(1P)$	$1^3P_0$	$0^{++}$
$\chi_{c1}(1P)$	$1^3P_1$	$1^{++}$
$\chi_{c2}(1P)$	$1^3P_2$	$2^{++}$

**Tabla 1-1:** Representación de estados del charmonium en notación  $n^{2S+1}L_J$  y  $J^{PC}$

La anterior tabla ?? demuestra los estados del charmonium, pero de igual manera existen los mismos estados para el Bottomonium, por lo que se cambia la c por b.

## 1.2. Definición de la cinemática

Teniendo presente que la ecuación de Schrödinger es

$$H\psi = E\psi$$

Para este caso, donde se encuentra un sistema de dos partículas ligadas de masas  $m_1$ ,  $m_2$  que interactúan por un potencial  $V_0$ , su hamiltoniano se define

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V_0(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Por medio de transformaciones, se puede definir el problema desde el centro de masa, quedando la ecuación de Schrödinger como

$$\left[ -\frac{\nabla^2}{m_Q} + V_0(r) \right] \psi(r) = E\psi(r) \quad (1-1)$$

Donde  $m_Q$  es la masa del quark en cuestión y  $V_0$  es un potencial genérico.

### 1.3. Límite no relativista

Con el límite no relativista la complejidad de este proceso se reduce drásticamente, teniendo presente que el límite no relativista también se puede denotar como  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{0}$ , la expresiones relativistas se simplifican, en el caso de la energía,

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \rightarrow E = m, \quad (1-2)$$

los espines de Dirac que describen fermiones de masa  $m$ , cuadri-momentum  $p$  y spin  $\sigma$ , también encuentran cambios,

$$\begin{aligned} u(p, \sigma) &= \sqrt{\left(\frac{E+m}{2m}\right)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi_\sigma, \\ v(p, \sigma) &= \sqrt{\left(\frac{E+m}{2m}\right)} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_\sigma^c, \end{aligned}$$

Pero con el límite la expresión anterior queda reducida a,

$$u(\sigma) = \begin{pmatrix} \chi_\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_\sigma^c \end{pmatrix}. \quad (1-3)$$

La normalización espinorial que se optará a usar en el presente análisis es:

$$u^\dagger(p, \sigma)u(p, \tau) = v^\dagger(p, \sigma)v(p, \tau) = \frac{E}{m} \delta_{\sigma, \tau}$$

que en el caso no relativista, se reescribe como,

$$u^\dagger(\sigma)u(\tau) = \chi_\sigma^\dagger \chi_\tau = \delta_{\sigma, \tau} \quad (1-4)$$

Por medio de las anteriores relaciones se procederá a realizar los futuros cálculos sobre las amplitudes de los procesos de interés.

### 1.4. Potencial estático en QCD

El potencial estático para la QCD se deriva de las posibles interacciones que se encuentran a nivel árbol para el proceso

$$q_i(p_1, \sigma_1)\bar{q}_j(p_2, \sigma_2) \rightarrow q_k(q_1, \tau_1)\bar{q}_l(q_2, \tau_2) \quad (1-5)$$

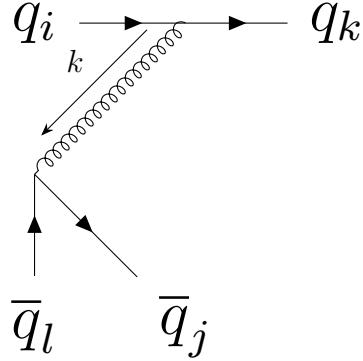
tal que , los índices denotan los grados de libertad del color. El lagrangiano que representa el acoplamiento con una fuerza  $g_s$  de un quark  $q$ , con el campo espinorial de Dirac  $q_i(x)$ , en el campo gluónico  $G_a^\mu$ [hiperfina],

$$\mathcal{L} = g_s \bar{q}_i(x) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q_j(x) G_a^\mu(x) \quad (1-6)$$

Donde  $\frac{\lambda^a}{2}$  son las matrices de Gell-Mann que poseen la relación  $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ , siendo  $T^a$  los generadores del grupo SU(3). Es importante notar como únicamente dos diagramas de Feynman contribuyen al orden más bajo en los procesos perturbativos, los cuales serán analizados en las siguientes subsecciones.

### 1.4.1. Intercambio Gluónico

El primer proceso posee un diagrama de Feynman a analizar que denota el intercambio gluónico entre un quark  $q_i(p_1, \sigma_1)$  y un anti-quark  $\bar{q}_j(p_2, \sigma_2)$  representado en



**Figura 1-1:** Intercambio Gluónico.

Usando las leyes de Feynmann descritas en ?? se puede encontrar que su contribución es:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{gluon} &= -\frac{1}{k^2} \left[ \bar{u}(q_1, \tau_1) g_s \gamma^\mu \frac{\lambda_{ki}^a}{2} u(p_1, \sigma_1) \right] \left[ \bar{v}(q_2, \tau_2) g_s \gamma^\nu \frac{\lambda_{jl}^a}{2} v(p_2, \sigma_2) \right] \\ &= -\frac{g_s^2}{k^2} \frac{\lambda_{ki}^a}{2} \frac{\lambda_{jl}^a}{2} \bar{u}(q_1, \tau_1) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) \bar{v}(q_2, \tau_2) \gamma^\nu v(p_2, \sigma_2) \end{aligned} \quad (1-7)$$

Definiendo el parámetro  $\kappa$ :

$$k^2 = (p_1 - q_1)^2 = (E_{p_1} - E_{q_1})^2 - \kappa^2 \quad (1-8)$$

Agregando las contribuciones del color para las funciones de onda de los mesones.

$$\mathcal{M}_{gluon} = -\frac{g_s^2}{\kappa^2} \frac{\lambda_{ki}^a}{2} \frac{\lambda_{jl}^a}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{kl} \bar{u}(q_1, \tau_1) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) \bar{v}(q_2, \tau_2) \gamma^\nu v(p_2, \sigma_2) \quad (1-9)$$

Donde clarificando la notación de Einstein y usando las propiedades de las matrices de Gell-mann

$$\begin{aligned}
& \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_{ki}^a}{2} \frac{\lambda_{jl}^a}{2} \quad \cdot \quad \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} \sum_{k,l=1}^3 \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{kl} \\
& = \frac{1}{12} \sum_{a=1}^8 \sum_{i,k=1}^3 \lambda_{ki}^a \lambda_{ik}^a \\
& = \frac{1}{12} \sum_{a=1}^8 \text{Tr}[(\lambda^a)^2] \\
& = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que la amplitud se puede escribir:

$$\mathcal{M}_{gluon} = -\frac{4 g_s^2}{3 k^2} \bar{u}(q_1, \tau_1) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) \bar{v}(q_2, \tau_2) \gamma^\nu v(p_2, \sigma_2)$$

Que tomando el límite no relativista ( $p \rightarrow 0$ ) se usa la normalización encontrada ?? y tomando  $\kappa$  en cambio de  $k$  ??, se obtiene la expresión

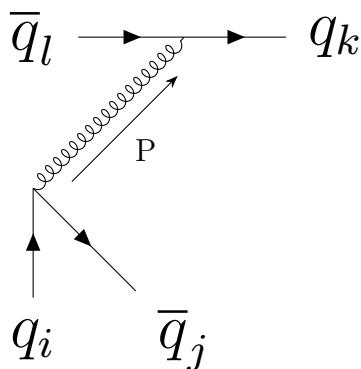
$$\mathcal{M}_{gluon} = -\frac{4 g_s^2}{3 \kappa^2} \delta_{\tau_1, \sigma_1} \delta_{\tau_2, \sigma_2}$$

(1-10)

Encontrando la contribución dada por el proceso de quark-antiquark ??

### 1.4.2. Aniquilación par

El segundo diagrama de Feynman a estudiar denota la contribución en el canal t del proceso quark-antiquark, también conocido como proceso de aniquilación par.



**Figura 1-2:** Aniquilación par quark anti-quark.

Usando las leyes de Feynman sobre el diagrama ?? se encuentra

$$\mathcal{M}_{ani} = \frac{g_s^2}{P^2} \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{kl} \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \frac{\lambda_{kl}^a}{2} \bar{u}(q_1, \tau_1) \gamma^\nu v(q_2, \tau_2) \bar{v}(q_2, \tau_2) \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1)$$

Analizando nuevamente las contribuciones del color

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{ij=1}^3 \delta_{ij} \frac{\lambda_{ij}^a}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} Tr[\lambda^a] = 0} \quad (1-11)$$

Por lo que la contribución de este diagrama se anula, dejando únicamente la amplitud para el intercambio gluónico.

### 1.4.3. Deducción del potencial de Cornell

La amplitud para el intercambio gluónico.

$$T_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6} \mathcal{M}_{gluon} = -\frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4}{3} \frac{g_s^2}{\kappa^2} \delta_{\tau_1, \sigma_1} \delta_{\tau_2, \sigma_2} \quad (1-12)$$

Conociendo la amplitud de Scattering, es necesario tomar la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} V_{Col}(x) &= (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \kappa e^{-i\kappa \cdot x} T_{fi}(\kappa) \\ &= -\frac{4}{3} \frac{g_s^2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \kappa e^{-i\kappa \cdot x} \frac{1}{\kappa^2} \end{aligned} \quad (1-13)$$

Sea el Ansatz

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \kappa e^{-i\kappa \cdot x} \frac{1}{\kappa^2} = \frac{A}{r}$$

Tomando Laplaciano a ambas partes, por la sección izquierda

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \kappa e^{-i\kappa \cdot x} \frac{1}{\kappa^2} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \kappa e^{-i\kappa \cdot x} = -\delta^3(x)$$

En la sección derecha

$$\nabla^2 \frac{A}{r} = -4\pi A \delta^3(x)$$

Por lo tanto, el factor A debe ser proporcional a

$$A = \frac{1}{4\pi} \quad (1-14)$$

Concluyendo que el potencial en su parte perturbativa toma la forma:

$$\boxed{V_{Col}(r) = -\frac{4}{3} \frac{g_s^2}{4\pi r} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}} \quad (1-15)$$

Donde  $\alpha_s$  es la constante de interacción fuerte. Este potencial tipo Coulomb contribuye a distancias cortas, para considerar grandes distancias donde el confinamiento es clave se supone,

$$V_{conf}(r) = \sigma r^n \quad n > 0.$$

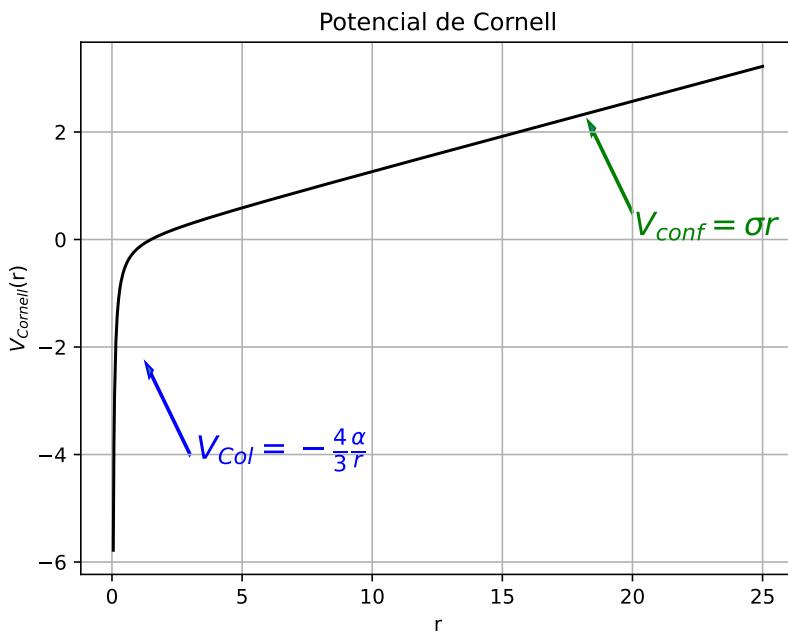
Teniendo presente el espectro mesónico se deduce que  $n \approx 1$ , por lo tanto

$$V_{conf}(r) = \sigma r, \quad (1-16)$$

Finalmente se encuentra el potencial de Cornell [cornell],

$$V_{Cornell}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \sigma r \quad (1-17)$$

El potencial depende directamente de los parámetros  $\alpha_s$  y  $\sigma$ , que determinan el espectro quarkónico, mostrando un comportamiento como se observa en la figura??



**Figura 1-3:** Potencial de Cornell

La anterior gráfica describe los términos más importantes dependiendo los valores de  $r$ , para  $r$  pequeños el potencial tipo Coulomb es dominante, mientras que para  $r$  grandes lo es el potencial lineal de confinamiento.

# 2 Ecuación de Schrödinger

Con el potencial de Cornell definido en el anterior capítulo, se puede definir adecuadamente la ecuación de Schrödinger a solucionar, tal que, en este capítulo se solucionará por límites la formulación del problema, encontrando expresiones para la energía y función de onda con  $l = 0$ .

## 2.1. Solución de la ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger reemplazando el potencial genérico  $V_0$  ?? con el potencial de Cornell, se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\left[ -\frac{\nabla^2}{m_Q} + V_{\text{Cornell}} \right] \psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi) \quad (2-1)$$

En coordenadas esféricas se puede reescribir como,

$$-\frac{1}{m_Q} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + V_{\text{Cornell}} \psi = E\psi$$

Como es un potencial central, se pueden separar las contribuciones radiales de las angulares, siendo posible usar separación de variables

$$\psi(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$$

La solución de la parte angular es conocida, pero para la ecuación radial se usa la sustitución  $u = rR$ , donde  $u$  se llama la función radial reducida, encontrando la misma forma de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{1}{m_Q} \frac{d^2 u}{dr^2} + u \left[ V_{\text{Cornell}} + \frac{l(l+1)}{m_Q r^2} \right] = uE \quad (2-2)$$

La cual igualando a 0,

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + u \left[ E + \frac{4\alpha_s}{3r} - \sigma r - \frac{l(l+1)}{m_Q r^2} \right] m_Q = 0 \quad (2-3)$$

Esta última expresión ??, permite denotar la dependencia de cada término con respecto a la variable  $r$ .

### 2.1.1. $r \rightarrow 0$

Suponiendo que  $r$  es muy pequeño se observa que los términos que más contribuyen son la parte de Coulomb del potencial y el factor con  $l$ , encontrando la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dr^2} - u \frac{l(l+1)}{m_Q r^2} m_Q = 0 \quad (2-4)$$

Esta formulación posee una solución conocida,

$$u(r \rightarrow 0) = r^{l+1} \quad (2-5)$$

### 2.1.2. $r \rightarrow \infty$

Por otra parte, tomando  $r$  muy grandes, los términos más significativos son la parte lineal del potencial y la energía.

$$\frac{d^2u}{dr^2} = u[\sigma r - E]m_Q \quad (2-6)$$

Esta ecuación diferencial se puede reducir tomando la sustitución  $w = \frac{(\sigma r - E)m_Q}{(m_Q\sigma)^{2/3}}$ ,

$$\frac{d^2u}{dw^2} = uw$$

Teniendo presente la definición de la función de Airy  $Ai(x)$  es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy \quad y = A \cdot Ai(x) + B \cdot Bi(x)$$

Esta ecuación posee dos soluciones linealmente independientes, de las cuales  $Ai(x)$  es solución para  $y \rightarrow 0$  y  $x \rightarrow \infty$ , por lo que solo se tomará en cuenta esta solución. Entonces,

$$u(r \rightarrow \infty) \propto Ai\left(\frac{(\sigma r - E)m_Q}{(m_Q\sigma)^{2/3}}\right) \quad (2-7)$$

Esta deducción se aplica únicamente cuando  $l = 0$ , por medio de la anterior expresión se cuantizar la energía del sistema.

### 2.1.3. Energía

Despejando la energía de la solución asintótica a infinito de la función de onda ??, se obtiene que es [base],

$$E = - \left( \frac{\sigma^2}{m_Q} \right)^{\frac{1}{3}} a_n \quad (l = 0) \quad (2-8)$$

Donde  $a_n$  es el  $n$ -ésimo cero de la función de Airy ( $Ai(a_n) = 0$ ). Es importante notar como esta energía es correcta cuando ( $l = 0$ ), por lo que no se pueden describir estados con momento angular orbital superiores.

### 2.1.4. Función de onda

Teniendo presente las soluciones ?? y ??, se encuentra una función de onda,

$$u_{nl} = r^{l+1} Ai(a_n + r(m_Q \sigma)^{\frac{1}{3}}) \quad (2-9)$$

Para el caso  $l = 0$ , la contribución dada por ?? ( $r^{l+1}$ ) no es predominante, siendo la función de Airy la que determina principalmente la función de onda, por lo que se puede expresar,

$$u_{nl} = Ai(a_n + r(m_Q \sigma)^{\frac{1}{3}}) \quad (l = 0)$$

## 2.2. Minimización de $\chi^2$ para estados S

Tomando la definición de la energía descrita anteriormente se define la masa como,

$$M = 2m_Q + E = 2m_Q - \left( \frac{\sigma^2}{m_Q} \right)^{\frac{1}{3}} a_n \quad (2-10)$$

Se define la función  $\chi^2$ , tal que,

$$\chi^2 = \sum_i^n \left( \frac{(M_{exp}^i - M_{teo}^i)^2}{\Delta M^i} \right) \quad (2-11)$$

Donde  $M_{exp}^i$  es el valor experimental del estado espectroscópico i,  $\Delta M^i$  la incertidumbre experimental del estado i y  $M_{teo}^i$  en este caso es el valor del estado con la masa encontrada parametrizada para el estado i ?. Como la masa del estado depende únicamente de la masa del quark  $m_q$  y el número cuántico n, serán estos los parámetros que se minimizarán, dado que  $\alpha_s$  no se toma en cuenta en ninguna de las soluciones asintóticas y por tanto, no se encuentra una contribución directa a la energía.

### 2.2.1. Charmonium

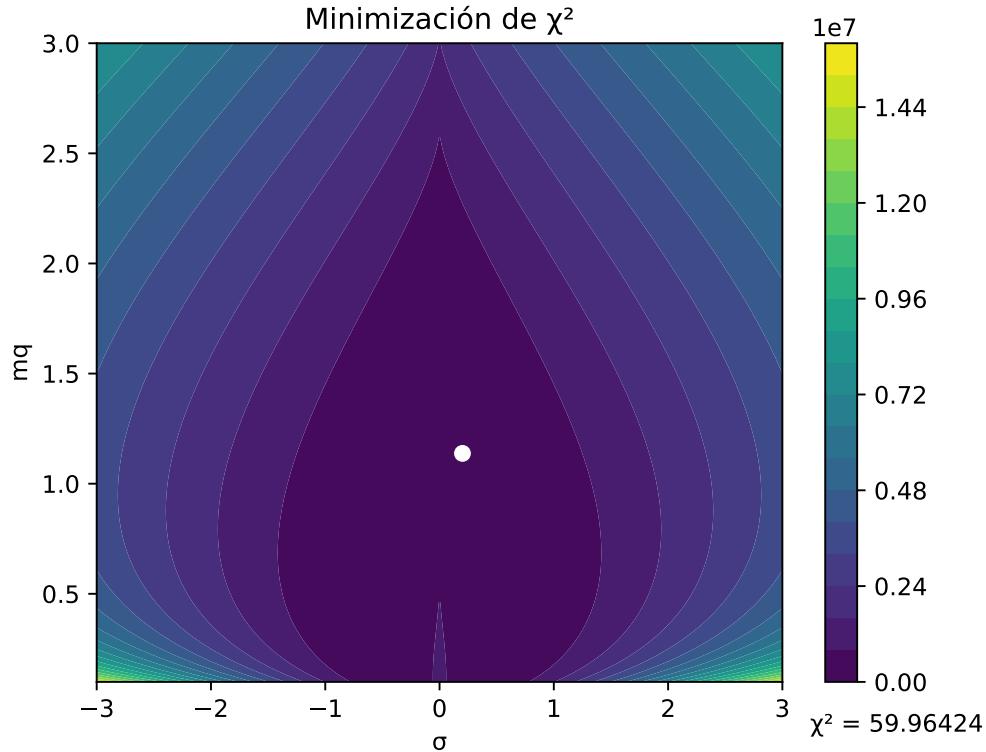
Se tomaron los valores experimentales de los estados 1S, 2S del PDG [PDG], para los estados 3S y 4S se tomaron los datos de [data].

	Este trabajo[Gev]	Promedio[Gev]	BSE-CIA[BSE-CIA] [Gev]	Expt [PDG] [Gev]	Pot. Model[Pot][Gev]	Lattice QCD [lattice][Gev]	[data] [Gev]
$M_{\eta_c}(1s)$	3.04±0.16	3.0404±0.0002	2.9509	2.9839±0.0004	2.980	3.292	2.981
$M_{\eta_c}(2s)$	3.62±0.28	3.6618±0.0006	3.7352	3.6375±0.0011	3.600	4.240	3.635
$M_{\eta_c}(3s)$	4.1±0.4	4.0140±0.0007	4.4486		4.060		3.989
$M_{\eta_c}(4s)$	4.5±0.5	4.4110±0.0005	5.1048		4.554		4.401

**Tabla 2-1:** Resultados de la masa del charmonium para los estados S comparados con diferentes valores teóricos y experimentales.

Los resultados presentados en la tabla ?? fueron obtenidos realizando la minimización mostrada en la figura ??, donde el mínimo de  $\chi^2 = 7,3343$  valor que es mucho mayor a uno, esto

es explicable por la baja incertidumbre que poseen los valores experimentales, por lo tanto, para asegurar el cálculo de las incertidumbres se reescalan las mismas por la raíz cuadrada de este mínimo.



**Figura 2-1:** Minimización del  $\chi^2$  del Charmonium para el estado S.

y encontrando unos valores de los parámetros

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= 0,201(62) \text{ GeV}^2 \text{ fm}^{-1} \\ m_c &= 1,138(11) \text{ GeV} \end{aligned}} \quad (2-12)$$

La masa del quark charm es bastante cercano al valor dado por el PDG[PDG] 1,27(2) GeV. Existen diferentes formas de calcular la constante de acople  $\alpha_s$ , entre ellas está la libertad asintótica en 'naive dimensional regularization'[Maltoni] a NLO,

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)} \left[ 1 - \frac{\beta_1 \ln\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)\right]}{\beta_0^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)} \right] \quad (2-13)$$

Donde,

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3}n_f$$

Con  $n_f = 5$  el número de colores en el estado singlete. Por medio de la expresión ?? se puede encontrar  $\alpha_s$  dependiendo de la masa del quark, para el charmonium,

$$\boxed{\alpha_s(m_c) = 0,4011(23)} \quad (2-14)$$

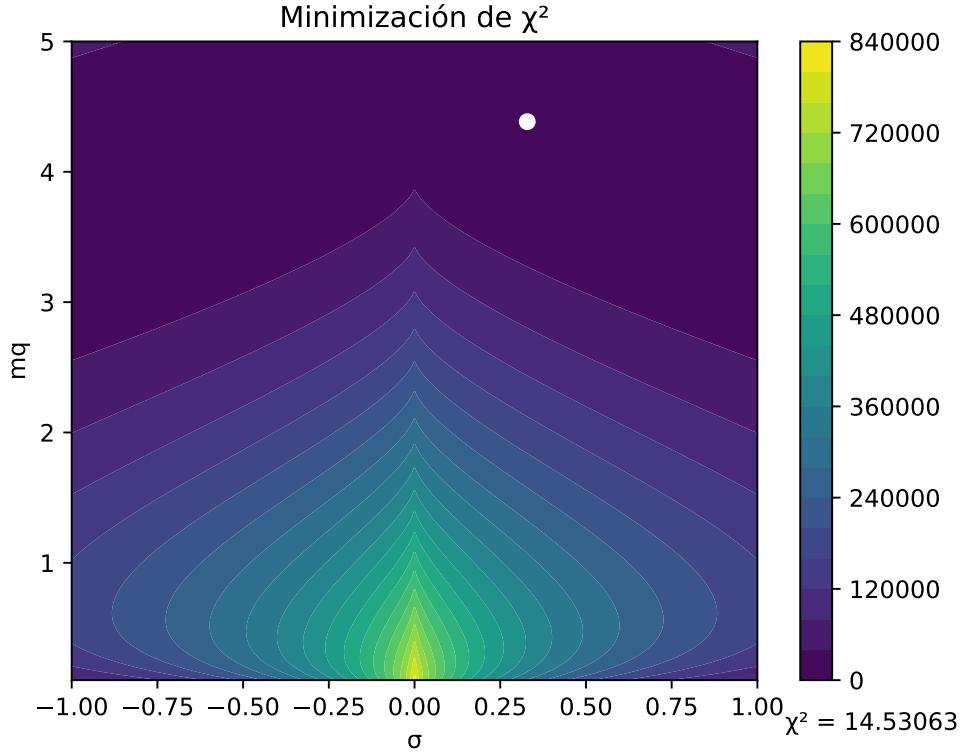
## 2.2.2. Bottomonium

De igual manera los primeros estados fueron tomados los datos del Particle data group [PDG] y los estados 3S y 4S de [data],

	Este trabajo[GeV]	Promedio[GeV]	BSE-CIA[BSE-CIA][GeV]	Expt [PDG] [GeV]	Pot. Model[Pot] [GeV]	Lattice QCD [lattice][GeV]	[data] [GeV]
$M_{\eta_b}(1s)$	$9.450 \pm 0.030$	$9.4295 \pm 0.0010$	9.0005	$9.3987 \pm 0.002$	9.390	7.377	9.398
$M_{\eta_b}(2s)$	$9.96 \pm 0.04$	$10.0111 \pm 0.0020$	9.7215	$9.999 \pm 0.004$	9.947	8.202	9.990
$M_{\eta_b}(3s)$	$10.38 \pm 0.06$	$10.3421 \pm 0.0006$	10.4201		10.291		10.329
$M_{\eta_b}(4s)$	$10.74 \pm 0.07$	$10.576 \pm 0.006$	11.0968				10.573

**Tabla 2-2:** Resultados de las masa del Bottomonium para los estados S comparados con diferentes valores teóricos y experimentales.

Por medio de la minimización mostrada en la figura ?? se encontraron los valores de ??, donde se refleja que el mínimo de la función es de  $\chi^2 = 7,21393$ , este valor es usado como se explicó anteriormente para el cálculo de incertidumbres.



**Figura 2-2:** Minimización del  $\chi^2$  del Bottomonium para el estado S.

y encontrando unos valores de los parámetros

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma &= 0,329(16) \text{ GeV}^2 \text{ fm}^{-1} \\ m_b &= 4,385(11) \text{ GeV} \end{aligned}} \quad (2-15)$$

La masa del quark bottom dado por PDG se encuentra dentro de la incertidumbre 4,18(4) GeV [PDG]. Análogamente, usando la libertad asintótica para determinar la constante de interacción de la QCD para la masa del Bottom, se obtiene,

$$\boxed{\alpha_s(m_b) = 0,22611(17)} \quad (2-16)$$

Que al compararse con el valor encontrado con el Charm, se encuentra el comportamiento esperado, donde a mayor masa del quark menor será  $\alpha_s$  para que se cumpla la libertad asintótica.

# 3 Correcciones espinoriales

En este último capítulo se presentarán las correcciones hiperfinas a este proceso, agregando la contribución spin-spin por medio de teoría de perturbaciones y minimizando nuevamente la función de la energía con respecto a los parámetros  $\alpha$ ,  $\sigma$  y  $Q$  en los estados S, donde el intervalo de la energía base es coherente. Finalmente, se realiza el mismo proceso para las correcciones Spin-orbita y Tensorial siendo una aproximación para estados  $l > 0$  y encontrando los mismos parámetros anteriormente mencionados.

## 3.1. Correcciones hiperfinas

Las correcciones a usar deducidas en el Anexo ?? son:

$$\begin{aligned} V_{SS}^{Vectorial}(r) &= \frac{8\alpha_s}{9m_Q^2 r^2} (S_1 \cdot S_2) \delta(r) \\ V_{LS}(r)^{Vectorial} &= \frac{2\alpha_s}{m_Q^2 r^3} (L \cdot S) \\ V_{LS}(r)^{Escalar} &= -\frac{\sigma}{2m_Q^2 r} (L \cdot S) \\ V_T(r)^{Vectorial} &= \frac{\alpha_s}{3m_Q^2 r^2} S_{12} \end{aligned} \quad (3-1)$$

Con  $S = S_1 + S_2$ , L es el operador momentum angular y  $S_{12}$  es el operador para la contribución tensorial. Los valores esperados de los operadores presentados, son

$$\begin{aligned} \langle S_1 \cdot S_2 \rangle &= \frac{1}{2}s(s+1) - \frac{3}{4} \\ \langle L \cdot S \rangle &= \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \\ \langle S_{12} \rangle &= \frac{2[2\langle S^2 \rangle \langle L^2 \rangle - 3\langle L \cdot S \rangle - 6\langle L \cdot S \rangle^2]}{(2l+3)(2l+1)} \end{aligned}$$

Donde  $j = l + s$ , J es el operador angular total, s y l son los correspondientes números cuánticos del estado espectroscópico  $Q\bar{Q}$ .

## 3.2. Teoría de perturbaciones

Las correcciones definidas se agregan a la energía base por medio de la teoría de perturbaciones [libro],

$$E_n^1 = \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \quad (3-2)$$

Donde  $H'$  es el potencial correctivo,  $\psi_n^0$  es la función de onda ??, que se usará para  $l > 0$ , encontrando de manera genérica la integral,

$$\int_0^\infty z^m [A_i(a + zb)]^2 dz \quad (3-3)$$

Tomando  $l = 1$ , la potencia  $m$  tomará los siguientes valores,

$$V_{SS}^{\text{Vectorial}} \quad 2l = m \quad m = 2$$

$$V_{LS}^{\text{Vectorial}} = V_T^{\text{Vectorial}} \quad 2l - 1 = m \quad m = 1$$

$$V_{LS}^{\text{Escalar}} \quad 2l + 1 = m \quad m = 3$$

En el caso de  $l = 0$ , la única corrección que se puede realizar es del spin-spin, por lo que usando ?? se obtendría  $m = -2$ , pero la solución de la integral está definida para  $\text{Re}(m) > -1$ , por lo que se toma la expresión para  $l = 1$  y se obtendría  $m = 0$ .

Esta integral se obtiene paso a paso en el apéndice ??, pero sus resultados son:

$$\int_0^\infty z^n [Ai(a + zb)]^2 dz = \sum_{k=0}^n \frac{W_3[a, b, n] k! (n-k)!}{n! a^{n-k} b^k} - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty z^k [Ai(a + zb)]^2 dz \quad (3-4)$$

En el caso de la corrección spin-spin ?? se toma la delta de Dirac como la gaussiana  $\delta(r) = \left(\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-Q^3 r^2} [\delta]$ , permitiendo encontrar su integral usando series de Taylor y tomando ?? como  $W_4(m + 2m', a, b)$ ,

$$\int_0^\infty z^m [Ai(a + zb)]^2 \left(\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-Q^3 z^2} dz = \sum_{m'=0}^5 \left(\frac{Q^{3(1+m')}}{\pi^{\frac{3}{2}} m'!}\right) W_4(m + 2m', a, b) \quad (3-5)$$

Los valores numéricos encontrados se encuentran en el apéndice ??.

### 3.3. Ajuste con las correcciones Spin-Spin

Agregando las contribuciones dadas por la corrección spin-spin se puede diferenciar los estados  $\eta_c(1^1S_1)$  donde su momento angular orbital es  $l = 0$  con un spin  $S = 0$  y estados S con spin  $S = 1$   $j/\psi(1^3S_1)$ . Asumiendo los valores de las masas según el PDG [PDG], se realiza el ajuste para encontrar los parámetros  $\alpha$  constante de acople y coeficiente del término  $\frac{1}{r}$  en el potencial,  $\sigma$  coeficiente del término lineal del potencial y Q parámetro de la gaussiana usada para expresar la delta de Dirac. La masa a minimizar es

$$M^1 = M + E_{\text{spin-spin}}^1. \quad (3-6)$$

### 3.3.1. Charmonium

Para el Charm se asigna la masa  $1,27(2)$  GeV, con esta se encuentra el ajuste

	Este trabajo [GeV]	Expt [PDG] [GeV]	Lattice QCD [lattice][GeV]	[data] [GeV]
$M_{\eta_c}(1s)$	$3.17 \pm 0.13$	$2.9839 \pm 0.0004$	$3.2924(9)$	$2.981$
$M_{\eta_c}(2s)$	$3.39 \pm 0.18$	$3.6375 \pm 0.0011$	$4.24(6)$	$3.635$
$M_{\eta_c}(3s)$	$3.59 \pm 0.22$			$3.989$
$M_{\eta_c}(4s)$	$3.77 \pm 0.26$			$4.401$
$M_{j/\psi}(1s)$	$3.17 \pm 0.13$	$3.096900 \pm 0.006$	$3.4452(16)$	$3.096$
$M_{\psi}(2s)$	$3.39 \pm 0.18$	$3.68610 \pm 0.06$	$4.35(7)$	$3.685$
$M_{\psi}(3s)$	$3.59 \pm 0.22$	$4.039 \pm 0.001$		$4.039$
$M_{\psi}(4s)$	$3.77 \pm 0.26$	$4.421 \pm 0.0004$		$4.427$

**Tabla 3-1:** Resultados de las masa del Charmonium para los estados S con diferenciación de spin.

Los valores encontrados en la tabla ?? poseen diferencias entre los estados con y sin spin de ordenes  $1 \times 10^{-8}$  [GeV] que con sus respectivas incertidumbres no es notorio. Los valores de masa fueron dados usando los siguientes parámetros encontrados por medio de una minimización  $\chi^2 = 4337,4$

$$\begin{aligned} \sigma &= 0,068(22) \text{ GeV fm}^{-1} \\ \alpha_s &= 0,4987(8) \\ Q &= 0,010(6) \end{aligned} \quad (3-7)$$

### 3.3.2. Bottomonium

De igual manera el bottom posee una masa  $m_b = 4,18(4)$  GeV, usando esta masa se pueden encontrar los siguientes valores

	Este trabajo [GeV]	Expt [PDG] [GeV]	Lattice QCD [lattice][GeV]	[data] [GeV]
$M_{\eta_b}(1s)$	$9.54 \pm 0.04$	$9.3987 \pm 0.0020$	$7.3776(8)$	$9.398$
$M_{\eta_b}(2s)$	$9.96 \pm 0.05$	$9.999 \pm 0.004$	$8.202(5)$	$9.990$
$M_{\eta_b}(3s)$	$10.32 \pm 0.07$			$10.329$
$M_{\eta_b}(4s)$	$10.66 \pm 0.08$			$10.573$
$M_{\Upsilon}(1s)$	$9.54 \pm 0.04$	$9.46030 \pm 0.00026$	$7.4100(9)$	$9.460$
$M_{\Upsilon}(2s)$	$9.96 \pm 0.05$	$10.02326 \pm 0.00031$	$8.209(5)$	$10.023$
$M_{\Upsilon}(3s)$	$10.32 \pm 0.07$	$10.3552 \pm 0.0005$		$10.355$
$M_{\Upsilon}(4s)$	$10.66 \pm 0.08$	$10.5794 \pm 0.0012$		$10.586$

**Tabla 3-2:** Resultados de las masa del Bottomonium para los estados S con diferenciación de spin.

Los valores encontrados en la tabla ?? poseen diferencias entre los estados con y sin spin de ordenes  $1 \times 10^{-7}$  que con sus respectivas incertidumbres no es notorio. Los valores de masa

fueron dados usando los siguientes parámetros encontrados por medio de una minimización  $\chi^2 = 54,1$

$\sigma$	$= 0,31(2) \text{ GeV fm}^{-1}$
$\alpha_s$	$= 0,140(5)$
$Q$	$= 0,10(2)$

(3-8)

### 3.4. Ajuste para estados $l > 0$

Se agregan los estados  $\chi_{c0}(1^3P_0)$ ,  $\chi_{c1}(1^3P_1)$  y  $\chi_{c2}(1^3P_2)$ . En este caso  $M$  encuentra dependencia de los tres parámetros y se realiza el ajuste de todos los tres al tiempo, encontrando una nueva masa:

$$M^1 = M + E_{\text{spin-spin}}^1 + E_{\text{spin-orbita}}^1 + E_{\text{tensorial}}^1 \quad (3-9)$$

Cabe aclarar que se encuentran dos condiciones muy importantes a tener en cuenta, a la hora de tomar estados  $l > 0$ :

1. Cualquier estado que sea  $l > 0$ , pero  $S = 0$ , poseerá la misma función que el estado  $\eta_c$  que le corresponda según su número cuántico  $n$ .
2. Al expandir forzosamente este modelo a  $l > 0$  se está realizando una segunda aproximación, suponiendo una aproximación fuerte, **la energía base que no depende de  $l$ , supondremos que en primera aproximación puede describir estados mayores a  $l$**  y posteriormente agregando esta contribución  $l$  por medio de teoría de perturbaciones.

#### 3.4.1. Charmonium

Para la definición de la función  $\chi^2$  se utilizaron los datos descritos en el capítulo ??, los valores de los estados  $1P$  fueron tomados del PDG [PDG], obteniendo los resultados,

	Este trabajo [GeV]	Expt [PDG][GeV]	Lattice QCD [lattice] [GeV]	[data][GeV]
$M_{\eta_c}(1s)$	$4.21 \pm 0.35$	$2.9839 \pm 0.0004$	$3.2924(9)$	2981
$M_{\eta_c}(2s)$	$4.3 \pm 1.8$	$3.6375 \pm 0.0011$	$4.24(6)$	3.635
$M_{J/\psi}(1s)$	$4.22 \pm 0.34$	$3.096900 \pm 0.000006$	$3.4452(16)$	3.096
$M_{\psi}(2s)$	$4.97 \pm 0.14$	$3.68610 \pm 0.00006$	$4.35(7)$	3.685
$M_{\chi_{c0}}(1P)$	$2.7 \pm 1.1$	$3.41471 \pm 0.0003$	$4.079(12)$	3.413
$M_{\chi_{c1}}(1P)$	$3.2 \pm 1.2$	$3.51067 \pm 0.00005$	$4.052(89)$	3.511
$M_{\chi_{c2}}(1P)$	$5.2 \pm 0.7$	$3.55617 \pm 0.00007$	$4.272(15)$	3.555

**Tabla 3-3:** Resultados de las masas del Charmonium para los estados  $\eta_c(1S)$ ,  $\eta_c(2S)$ ,  $\eta_c(3S)$ ,  $\eta_c(4S)$ ,  $\chi_{c0}$ ,  $\chi_{c1}$  y  $\chi_{c2}$  comparados con diferentes valores teóricos y experimentales.

Normalizando la incertidumbre encontrada por la raíz del valor del  $\chi^2 = 275040,1$  en su mínimo, se encontraron los estados descritos en la tabla ??.

La minimización, permite encontrar los parámetros,

$\sigma$	$= 0,29(1) \text{ GeV fm}^{-1}$
$\alpha_s$	$= 0,457(11)$
$Q$	$= 0,468(24)$

(3-10)

### 3.4.2. Bottomonium

Tomando los datos para los estados P de [PDG] y la masa  $4,18(4) \text{ GeV}$ [PDG], se realiza nuevamente un ajuste, tal que,

	Este trabajo [GeV]	Expt [PDG] [GeV]	Lattice QCD [lattice][GeV]	[data] [GeV]
$M_{\eta_b}(1s)$	$9.76 \pm 0.04$	$9.3987 \pm 0.002$	$7.3776(8)$	$9.398$
$M_{\eta_b}(2s)$	$9.80 \pm 0.09$	$9.999 \pm 0.004$	$8.202(5)$	$9.990$
$M_{\Upsilon}(1s)$	$9.76 \pm 0.04$	$9.46030 \pm 0.00026$	$7.4100(9)$	$9.460$
$M_{\Upsilon}(2s)$	$9.81 \pm 0.05$	$10.02326 \pm 0.00031$	$8.209(5)$	$10.023$
$M_{\chi_{b0}}(1P)$	$7.8 \pm 2.1$	$9.85944 \pm 0.0005$	$8.220(8)$	$9.859$
$M_{\chi_{b1}}(1P)$	$8.7 \pm 1.1$	$9.89278 \pm 0.0004$	$8.243(8)$	$9.892$
$M_{\chi_{b2}}(1P)$	$10.8 \pm 1.0$	$9.91221 \pm 0.0004$	$8.274(9)$	$9.912$

**Tabla 3-4:** Resultados de las masas del Bottomonium con las mismas características que con el Charmonium ??.

la anterior minimización da como resultado los parámetros,

$\sigma$	$= 0,0163(68) \text{ GeV fm}^{-1}$
$\alpha_s$	$= 0,197(1)$
$Q$	$= 0,188(3)$

(3-11)

## 3.5. Conclusión

El modelo utilizado posee grandes limitaciones, observando que solo puede ser aplicable satisfactoriamente en estados con  $l = 0$  (S). También se observa como al introducir las correcciones Spin-Spin no se encuentra una variación apreciable de la masa encontrada para los estados  $1^1S_1$  y  $1^3S_1$  sino correcciones de ordenes  $1 \times 10^{-7}$  con los parámetros hallados por medio de la minimización, esto puede ser explicable ya que en la deducción de la integral también se realizan ciertas aproximaciones como la serie de Taylor hasta un  $n = 5$  y el binomio de Newton.

### 3.6. **Futuras contribuciones**

Para mejorar los resultados presentados en este trabajo, es necesario resolver la ecuación de Schrödinger, tal que permita cuantizar la energía para diferentes niveles de  $l$ , este proceso puede ser logrado usando un polinomio que describa el comportamiento entre las soluciones asintóticas encontrando de esta manera una dependencia de la energía en función del momentum angular orbital.

La integración realizada para la teoría de perturbaciones carece de rigor matemático, lo que al realizar análisis más profundos sobre esta se pueden encontrar nuevas condiciones o términos correctivos. Por lo que se observa un nuevo camino usando integración numérica, reemplazando los parámetros encontrados en cada caso y usando la expresión normalizada de teoría de perturbaciones

$$E_{nl}^1 = \frac{\langle \psi_{nl} | H^1 | \psi_{nl} \rangle}{\langle \psi_{nl} | \psi_{nl} \rangle}$$

se puede llegar a un resultado sin hacer uso de las expresiones aproximadas de la integral, esperando mejorar los datos.

# A Reglas de Feynman para la QCD

En el presente apéndice se presentan las reglas de Feynman más importantes para el análisis de interacciones de la QCD para un quark y antiquark[[libroqcd](#)].

Quark Entrante		$u(p)$
Quark Saliente		$\bar{u}(p)$
Anti-Quark Entrante		$v(p)$
Anti-Quark Saliente		$\bar{v}(p)$
Propagador gluónico		$-i \frac{g_{\mu\nu}\delta^{a,b}}{q^2}$
Vértice gluon-quark		$-i \frac{g_s}{2} \lambda_{ij}^a \gamma^\mu$

**Tabla A-1:** Reglas de Feynman para procesos base de QCD.

Tal que, la contribución del color se encuentra en los índices de las matrices de Gell-Mann, por ejemplo [[dutch](#)]:

$$c_i^\dagger \lambda^a c_j = \langle i | \lambda | j \rangle$$

Para calcular estos índices en un nivel árbol, es preciso recordar

$$\frac{1}{4} \sum_a \lambda_{ij}^a \lambda_{kl}^a = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{6} \delta_{ij} \delta_{kl} \equiv f(i j k l)$$

Donde,

$$f(ijkl) = \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{si } i = j \text{ y } k = l \\ \frac{1}{2} & \text{si } i = l \text{ y } j = k \\ \frac{1}{3} & \text{si } i = j = k = l \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} . \quad (\text{A-1})$$

## B Deducción de las correcciones Espinoriales

Los cálculos presentados en este apéndice fueron aprendidos y realizados siguientes el paper de lucha(1995) [hiperfina].

Retomando los diagramas de Feynman de intercambio gluónico ?? y la aniquilación ?? presentados en el capítulo ?? se puede ampliar las contribuciones si se toma en cuenta un nuevo proceso, la interacción de fermion y anti-fermion[hiperfina],

$$\mathcal{F}(p_1, \sigma_1)\bar{\mathcal{F}}(p_2, \sigma_2) \rightarrow \mathcal{F}(q_1, \tau_1)\bar{\mathcal{F}}(q_2, \tau_2) \quad (\text{B-1})$$

transformando la expresión ??,

$$u(p, \sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi_\sigma,$$

$$v(p, \sigma) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_\sigma^c,$$

Este proceso permite encontrar nuevas contribuciones, pero por el momento solo se ha analizado la parte vectorial, para analizar las otras estructuras de Lorentz es necesario generalizar la amplitud encontrada en ??, definiendo dos espinores bilineales de Dirac,

$$\bar{u}(q_1, \tau_1)\Gamma_1 u(p_1, \sigma_1)$$

$$\bar{v}(p_2, \sigma_2)\Gamma_2 v(q_2, \tau_2)$$

Tal que,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  están definidas por medio de matrices de Dirac. Un kernel de interacción  $\mathcal{K}$  que depende de los momentos,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(p_1, p_2, q_1, q_2)$$

Por lo anterior, se puede generalizar la amplitud,

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(q_1, \tau_1)\Gamma_1 u(p_1, \sigma_1)\bar{v}(p_2, \sigma_2)\Gamma_2 v(q_2, \tau_2)\mathcal{K} \quad (\text{B-2})$$

Reemplazando  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  con las diferentes estructuras de Lorentz y realizando todo el proceso analítico se encuentra,

Estructura de Lorentz	$\Gamma_E \otimes \Gamma_E$	Potencial estático
Escalar	$1 \otimes 1$	$V_s(r)$
Pseudo-escalar	$\gamma_5 \otimes \gamma^5$	0
vectorial	$\gamma_\mu \otimes \gamma^\mu$	$V_v(r)$
vectorial axial	$\gamma_\mu \gamma_5 \otimes \gamma^\mu \gamma^5$	$4S_1 S_2 V_A(r)$
Tensor	$\frac{1}{2} \sigma_{\mu,\nu} \otimes \sigma^{\mu,\nu}$	$4S_1 S_2 V_T(r)$

**Tabla B-1:** Diferentes contribuciones del potencial desde las estructuras de Lorentz de una interacción genérica fermion-antifermion [**hiperfina**].

Donde,

$$\sigma_{\mu,\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

y el operador,

$$\gamma^5 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tal que,  $V_s(r)$  es el potencial escalar encontrado de la transformada de Fourier para el caso escalar, análogamente los demás. Los únicos potenciales puros se dan en las estructuras vectorial y escalar,

## B.1. Estructura Vectorial

Tomando la estructura vectorial se observa,

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} &= \bar{u}(q_1) \gamma_\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma^\mu v(q_2) \mathcal{K}_v \\
 &= \bar{u}(q_1) u(p_1) \bar{v}(p_2) v(q_2) - \bar{u}(q_1) \gamma_0 \gamma u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_0 \gamma v(q_2) \\
 &= \left[ \chi^\dagger \left( 1, \frac{\sigma \cdot q_1}{2m} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma \cdot p_1}{2m} \end{pmatrix} \chi \chi^{c\dagger} \left( \frac{\sigma \cdot p_2}{2m}, 1 \right) \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot q_2}{2m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi^c \right] \\
 &\quad - \left[ \chi^\dagger \left( 1, \frac{\sigma \cdot q_1}{2m} \right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma \cdot p_1}{2m} \end{pmatrix} \chi \chi^{c\dagger} \left( \frac{\sigma \cdot p_2}{2m}, 1 \right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot p_1}{2m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi^c \right]
 \end{aligned} \tag{B-3}$$

Realizando las operaciones matriciales y usando la normalización para caso no relativista,

$$\begin{aligned}
 &= \left[ 1 + \frac{1}{16m^2} (\chi^\dagger(\sigma \cdot q_1)(\sigma \cdot p_1) \chi \chi^{c\dagger}(\sigma \cdot p_2)(\sigma \cdot q_2) \chi^c) + \frac{1}{4m^2} \chi^{c\dagger}(\sigma \cdot p_2)(\sigma \cdot q_2) \chi^c + \frac{1}{4m^2} \chi^\dagger(\sigma \cdot q_1)(\sigma \cdot p_1) \chi \chi^{c\dagger}(\sigma \cdot p_2)(\sigma \cdot q_2) \chi^c \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4m^2} [\chi^\dagger \sigma(\sigma \cdot p_1) \chi \chi^{c\dagger}(\sigma \cdot p_2) \sigma \chi^c + \chi^\dagger \sigma(\sigma \cdot p_1) \chi \chi^{c\dagger} \sigma(\sigma \cdot q_2) \chi^c + \chi^\dagger(\sigma \cdot q_1) \sigma \chi \chi^{c\dagger}(\sigma \cdot p_2) \sigma \chi^c \right. \\
 &\quad \left. + \chi^\dagger(\sigma \cdot q_1) \sigma \chi \chi^{c\dagger} \sigma(\sigma \cdot q_2) \chi^c]
 \end{aligned} \tag{B-4}$$

Despreciando los términos poco contributivos y reescribiendo,

$$= 1 + \frac{1}{4m^2} [\chi^{c\dagger}(\sigma \cdot q_2)(\sigma \cdot p_2)\chi^c + \chi^\dagger(\sigma \cdot q_1)(\sigma \cdot p_1)\chi + [\chi^\dagger((\sigma \cdot q_1)\sigma + \sigma(\sigma \cdot p_1))\chi] \\ [\chi^{c\dagger}(\sigma(\sigma \cdot p_2) + (\sigma \cdot q_2))\chi^c]] \quad (\text{B-5})$$

Teniendo presente,

$$\begin{aligned} \chi^{c\dagger}(\sigma \cdot q_2)(\sigma \cdot p_2)\chi^c &= \chi^{c\dagger}P_iK_ji\epsilon_{ijk}\sigma_k\chi^c = i\epsilon_{ijk}P_iK_j\sigma_{1k} \\ \chi^\dagger(\sigma \cdot q_1)(\sigma \cdot p_1)\chi &= \chi^\dagger P_iK_ji\epsilon_{ijk}\sigma_k\chi = i\epsilon_{ijk}P_iK_j\epsilon_{ijk}\sigma_{2k} \\ \chi^\dagger((\sigma \cdot q_1)\sigma + \sigma(\sigma \cdot p_1))\chi &= \chi^\dagger[2(P_j - K_j) + i\epsilon_{ijk}K_j\sigma_{1k}]\chi \\ \chi^{c\dagger}(\sigma(\sigma \cdot p_2) + (\sigma \cdot q_2))\chi^c &= \chi^{c\dagger}[2(P_j - K_j) + i\epsilon_{ijk}K_j\sigma_{2k}]\chi^c \end{aligned}$$

Lo que permite escribir

$$\mathcal{M} = [1 + \frac{1}{4m^2}(3i\epsilon_{ijk}(\sigma_{1k} + \sigma_{2k}) - (\sigma_1 \cdot \sigma_2)\mathbf{k}^2 + (\sigma_1 \cdot \mathbf{k})(\sigma_2 \cdot \mathbf{k}))]\mathcal{K}_v \quad (\text{B-6})$$

Tomando la transformada de Fourier para las diferentes dependencias de  $\mathbf{k}$ ,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3kk_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathcal{K}_v = -i\frac{x_j}{r}V'_v(r) \quad \text{orbita-spin}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k\mathbf{k}^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathcal{K}_v = \Delta V_v(r) \quad \text{spin-spin}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3kk_ik_je^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathcal{K}_v &= \nabla_i\nabla_jV_v(r) \\ &= \left(\frac{x_ix_j}{r^2} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \left[V''_v(r) - \frac{1}{r}V'_v(r)\right] + \frac{1}{3}\delta_{ij}\Delta V_v(r) \quad \text{Tensorial} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el término Spin-Orbita

$$H_{LS}^{Vectorial} = \frac{3}{2m^2r}(\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{S} V'_v(r) = \frac{3}{2m^2r}\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} V'_v(r)$$

En el caso de la contribución Spin-Spin

$$H_{SS}^{Vectorial} = \frac{2}{3m^2}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \Delta V_v(r)$$

Finalmente el término tensorial,

$$\begin{aligned} H_T^{Vectorial} &= \frac{1}{m^2} \left[ \frac{(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x})}{r^2} - \frac{1}{3}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \right] \left[ \frac{1}{r}V'_v(r) - V''_v(r) \right] \\ &= \frac{1}{12m^2}S_{12} \left[ \frac{1}{r}V'_v(r) - V''_v(r) \right] \end{aligned}$$

Conociendo que

$$V_v(r) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{K}_v = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left( -\frac{4g_s^2}{3\mathbf{k}^2} \right) \quad (\text{B-7})$$

Se encuentra que las correcciones vectoriales son,

$$\begin{aligned} V_{SS}^{Vectorial}(r) &= \frac{8\alpha_s}{9m_Q^2 r^2} (S_1 \cdot S_2) \delta(r) \\ V_{LS}^{Vectorial}(r) &= \frac{2\alpha_s}{m_Q^2 r^3} (L \cdot S) \\ V_T^{Vectorial}(r) &= \frac{\alpha_s}{3m_Q^2 r^2} S_{12} \end{aligned} \quad (\text{B-8})$$

## B.2. Estructura Escalar

De igual manera que anteriormente se toma la estructura,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(q_1)u(p_1)\bar{v}(p_2)v(q_2)\mathcal{K}_s \\ &= \bar{u}(q_1)\gamma_0 u(p_1)\bar{v}(p_2)\gamma_0 v(q_2) \\ &= -\left(1 - \frac{1}{4m^2} [\chi^\dagger(\sigma \cdot q_1)(\sigma \cdot p_1)\chi + \chi^{c\dagger}(\sigma \cdot p_2)(\sigma \cdot q_2)\chi^c]\right) \mathcal{K}_s \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

Usando las abreviaciones ubicando el sistema en su centro de masa y dejando de lado las contribuciones dependientes de spin que fueron usadas en el cálculo vectorial,

$$\mathcal{M} = -\left[1 - \frac{1}{4m^2} i\epsilon_{ijk}p_i k_j (\sigma_{1k} + \sigma_{1k})\right] \mathcal{K}_s \quad (\text{B-10})$$

Realizando análogamente la transformada de Fourier para spin-orbita

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{K}_s = i\frac{x_j}{r} V'_s(r)$$

Encontrando que la contribución escalar posee la forma,

$$H_{LS}^{Escalar} = -\frac{1}{2m^2 r} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} V'_s(r) \quad (\text{B-11})$$

Aunque se conoce la forma de  $V_s$ , no se puede encontrar el valor exacto, dado que no se conoce el valor de  $\mathcal{K}_s$ , tal que,

$$V_s(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{K}_s \quad (\text{B-12})$$

Pero como corresponde a la forma funcional encontrada en [base], se toma

$$V_{LS}(r)^{Escalar} = -\frac{\sigma}{2m_Q^2 r} (L \cdot S) \quad (\text{B-13})$$

# C Integración de la función de Airy

Para agregar las contribuciones de las correcciones es necesario integrar la función de onda al cuadrado se toma la forma genérica de la función para las correcciones spin-orbita y spin-spin,

$$\int_0^\infty r^m [Ai(a_n + r(m_Q\sigma)^{\frac{1}{3}})]^2 dr$$

Por facilidad de cálculo se tomará  $a = a_n$  y  $b = (m_Q\sigma)^{\frac{1}{3}}$ . Se toma de base la integral conocida y descrita en [**integral**],

$$\int_0^\infty r^m [Ai(r)]^2 dr = J_m(2) = \frac{(\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}} \Gamma(m+1)}{4\sqrt{3\pi} \Gamma(\frac{m}{3} + \frac{7}{6})} = W_1(m) \quad (\text{C-1})$$

Tomando la sustitución

$$\begin{aligned} r &= a + zb & r \rightarrow \infty & z \rightarrow \infty \\ dr &= bdz & r \rightarrow 0 & z \rightarrow \frac{-a}{b} \end{aligned}$$

Por lo que se reescribe como,

$$\begin{aligned} b \int_{\frac{-a}{b}}^\infty (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz &= W_1 \\ b \left( \int_{\frac{-a}{b}}^\infty (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz - \int_{\frac{-a}{b}}^0 (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz \right) &= W_1 - b \int_{\frac{-a}{b}}^0 (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz \\ b \int_0^\infty (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz &= W_1 - b \int_{\frac{-a}{b}}^0 (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz \end{aligned}$$

Entonces, se realiza la integral desconocida mediante el programa **Mathematica** encontrando.

$$b \int_{\frac{-a}{b}}^0 (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz = \frac{2^{-\frac{2m}{3} - \frac{7}{3}} 3^{\frac{2(m-1)}{3}} G_{2,4}^{3,1} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^{2/3} a, \frac{1}{3} \middle| \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{m+2}{3}, \frac{m+3}{3}, 0 \right)}{\pi^{3/2}} = W_2(m, a) \quad (\text{C-2})$$

Integración que se cumple con la condición  $\text{Re}(m) > -1$ . G es la función de Meijer G, la cual es la generalización de gran cantidad de funciones especiales. Sustituyendo los resultados:

$$\int_0^\infty (a + zb)^m [Ai(a + zb)]^2 dz = \frac{W_1(m) - W_2(m, a)}{b} = W_3(m, a, b) \quad (\text{C-3})$$

Usando el binomio de Newton

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \int_0^\infty a^{m-k} z^k b^k [Ai(a + zb)]^2 dz = W_3(m, a, b)$$

$$\sum_{k=0}^m \int_0^\infty z^k [Ai(a + zb)]^2 dz = \sum_{k=0}^m \frac{W_3(m, a, b) k! (m - k)!}{m! a^{m-k} b^k}$$

$$\int_0^\infty z^m [Ai(a + zb)]^2 dz = \sum_{k=0}^m \frac{W_3(m, a, b) k! (m - k)!}{m! a^{m-k} b^k} - \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\infty z^k [Ai(a + zb)]^2 dz \quad (\text{C-4})$$

## C.1. Integración con gaussiana

Como la corrección spin-spin depende de una delta de Dirac, esta se puede reemplazar como  $\delta(r) = (\frac{Q}{\sqrt{\pi}})^3 e^{-Q^3 r^2} [\text{delta}]$ , para calcular esta contribución es necesario realizar la integral,

$$\int_0^\infty z^m [Ai(a + zb)]^2 \left(\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-Q^3 z^2} dz \quad (\text{C-5})$$

la gaussiana se puede sustituir por la expansión en serie de Taylor de la exponencial, obteniendo,

$$= \left(\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^\infty z^m [Ai(a + zb)]^2 \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-Q^3 z^2)^{m'}}{m'!} dz$$

$$= \sum_{m'=0}^{\infty} \left(\frac{Q^{3(1+m')}}{\pi^{\frac{3}{2}} m'!}\right) \int_0^\infty z^{m+2m'} [Ai(a + zb)]^2 dz$$

Sea el resultado ?? igual a  $W_4(m, a, b)$ , por lo anterior,

$$= \sum_{m'=0}^{\infty} \left(\frac{Q^{3(1+m')}}{\pi^{\frac{3}{2}} m'!}\right) W_4(m + 2m', a, b) \approx \sum_{m'=0}^5 \left(\frac{Q^{3(1+m')}}{\pi^{\frac{3}{2}} m'!}\right) W_4(m + 2m', a, b) \quad (\text{C-6})$$

# D Evaluación numérica de las correcciones

En el presente anexo se demuestran las formas de las contribuciones spinoriales dependiendo únicamente de los parámetros  $m_Q, \sigma, \alpha$  y  $Q$ , esta último apareciendo en las correcciones Spin-Spin,

## D.1. Estados S

En los estados S solo se puede encontrar la corrección Spin-Spin, para los estados  $n^1S_1(\eta(nS))$

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{1^1S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}}(4,86 \times 10^{-22}\alpha Q^3(1,21 \times 10^{20}mq^{10}\sigma^{10} + 6,15 \times 10^{15}mq^8Q^3\sigma^8 \\
& (-22322,7mq^2\sigma^2 + 10745,6mq\sigma + 21535,2) - 5,78217 \times 10^{13}mq^6Q^6\sigma^6 \\
& (1,64 \times 10^6mq^4\sigma^4 - 1,10301 \times 10^6mq^3\sigma^3 + 1,28017 \times 10^6mq^2\sigma^2 - 1,20737 \times 10^6mq\sigma \\
& - 2,38805 \times 10^6) + 1,30371 \times 10^9mq^4Q^9\sigma^4(-2,67681 \times 10^{10}mq^6\sigma^6 + 1,7811 \times 10^{10}mq^5\sigma^5 \\
& - 2,12754 \times 10^{10}mq^4\sigma^4 + 2,59831 \times 10^{10}mq^3\sigma^3 - 3,86115 \times 10^{10}mq^2\sigma^2 + 4,5408 \times 10^{10}mq\sigma \\
& + 9,46711 \times 10^{10}) + 26996,6mq^2Q^{12}\sigma^2(-3,37784 \times 10^{14}mq^8\sigma^8 + 2,2086 \times 10^{14}mq^7\sigma^7 \\
& - 2,6238 \times 10^{14}mq^6\sigma^6 + 3,23414 \times 10^{14}mq^5\sigma^5 - 4,9628 \times 10^{14}mq^4\sigma^4 + 7,2159 \times 10^{14}mq^3\sigma^3 \\
& - 1,22789 \times 10^{15}mq^2\sigma^2 + 1,58202 \times 10^{15}mq\sigma + 3,59258 \times 10^{15}) \\
& + Q^{15}(-1,86673 \times 10^{18}mq^{10}\sigma^{10} + 1,20543 \times 10^{18}mq^9\sigma^9 - 1,42551 \times 10^{18}mq^8\sigma^8 \\
& + 1,75671 \times 10^{18}mq^7\sigma^7 - 2,69936 \times 10^{18}mq^6\sigma^6 + 3,954 \times 10^{18}mq^5\sigma^5 - 6,89901 \times 10^{18}mq^4\sigma^4 \\
& + 1,07175 \times 10^{19}mq^3\sigma^3 - 2,04905 \times 10^{19}mq^2\sigma^2 + 2,60098 \times 10^{19}mq\sigma + 7,03226 \times 10^{19})) \\
& ) \tag{D-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{2^1S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}}(1,82185 \times 10^{-24}\alpha Q^3(4,2386 \times 10^{22}mq^{10}\sigma^{10} + 5,36656 \times 10^{17}mq^8Q^3\sigma^8 \\
& (-89512,5mq^2\sigma^2 + 75337.mq\sigma + 263977.) - 2,88787 \times 10^{15}mq^6Q^6\sigma^6 \\
& (1,14872 \times 10^7mq^4\sigma^4 - 1,35812 \times 10^7mq^3\sigma^3 + 2,7973 \times 10^7mq^2\sigma^2 - 5,53639 \times 10^7mq\sigma \\
& - 2,14383 \times 10^8) + 1,21828 \times 10^{10}mq^4Q^9\sigma^4(-1,03781 \times 10^{12}mq^6\sigma^6 + 1,20967 \times 10^{12}mq^5\sigma^5 \\
& - 2,58479 \times 10^{12}mq^4\sigma^4 + 6,64088 \times 10^{12}mq^3\sigma^3 - 1,88944 \times 10^{13}mq^2\sigma^2 + 4,74264 \times 10^{13}mq\sigma \\
& + 1,83196 \times 10^{14}) + 82525,9mq^2Q^{12}\sigma^2(-4,13939 \times 10^{16}mq^8\sigma^8 + 4,68053 \times 10^{16}mq^7\sigma^7 \\
& - 9,89769 \times 10^{16}mq^6\sigma^6 + 2,56099 \times 10^{17}mq^5\sigma^5 - 7,56813 \times 10^{17}mq^4\sigma^4 \\
& + 2,34627 \times 10^{18}mq^3\sigma^3 - 7,39225 \times 10^{18}mq^2\sigma^2 + 2,04527 \times 10^{19}mq\sigma + 7,8157 \times 10^{19}) + Q^{15} \\
& (-7,18381 \times 10^{20}mq^{10}\sigma^{10} + 7,90922 \times 10^{20}mq^9\sigma^9 - 1,65545 \times 10^{21}mq^8\sigma^8 + 4,27191 \times 10^{21}mq^7\sigma^7 \\
& - 1,26385 \times 10^{22}mq^6\sigma^6 + 3,94727 \times 10^{22}mq^5\sigma^5 - 1,28036 \times 10^{23}mq^4\sigma^4 + 4,21972 \times 10^{23}mq^3\sigma^3 \\
& - 1,39031 \times 10^{24}mq^2\sigma^2 + 4,06881 \times 10^{24}mq\sigma + 1,54586 \times 10^{25})) \quad (D-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{3^1S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}}(9,03103 \times 10^{-26}\alpha Q^3(9,92393 \times 10^{23}mq^{10}\sigma^{10} + 5,93632 \times 10^{18}mq^8Q^3\sigma^8 \\
& (-189463.mq^2\sigma^2 + 215341.mq\sigma + 1,01897 \times 10^6) - 2,36549 \times 10^{16}mq^6Q^6\sigma^6 \\
& (3,28318 \times 10^7mq^4\sigma^4 - 5,24566 \times 10^7mq^3\sigma^3 + 1,46201 \times 10^8mq^2\sigma^2 - 3,99484 \times 10^8mq\sigma \\
& - 2,11336 \times 10^9) + 4,05188 \times 10^{10}mq^4Q^9\sigma^4(-7,3342 \times 10^{12}mq^6\sigma^6 + 1,15509 \times 10^{13}mq^5\sigma^5 \\
& - 3,34333 \times 10^{13}mq^4\sigma^4 + 1,18499 \times 10^{14}mq^3\sigma^3 - 4,59266 \times 10^{14}mq^2\sigma^2 + 1,58005 \times 10^{15}mq\sigma \\
& + 8,44379 \times 10^{15}) + 150503.mq^2Q^{12}\sigma^2(-5,36115 \times 10^{17}mq^8\sigma^8 + 8,17677 \times 10^{17}mq^7\sigma^7 \\
& - 2,34056 \times 10^{18}mq^6\sigma^6 + 8,35122 \times 10^{18}mq^5\sigma^5 - 3,3655 \times 10^{19}mq^4\sigma^4 + 1,4348 \times 10^{20}mq^3\sigma^3 \\
& - 6,22461 \times 10^{20}mq^2\sigma^2 + 2,38049 \times 10^{21}mq\sigma + 1,27221 \times 10^{22}) + Q^{15}(-1,70714 \times 10^{22}mq^{10}\sigma^{10} \\
& + 2,52745 \times 10^{22}mq^9\sigma^9 - 7,15156 \times 10^{22}mq^8\sigma^8 + 2,54342 \times 10^{23}mq^7\sigma^7 - 1,02616 \times 10^{24}mq^6\sigma^6 \\
& + 4,40896 \times 10^{24}mq^5\sigma^5 - 1,97186 \times 10^{25}mq^4\sigma^4 + 9,0234 \times 10^{25}mq^3\sigma^3 - 4,13553 \times 10^{26}mq^2\sigma^2 \\
& + 1,68349 \times 10^{27}mq\sigma + 8,97715 \times 10^{27})) \quad (D-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{4^1S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}} (1,14545 \times 10^{-26} \alpha Q^3 (8,67165 \times 10^{24} mq^{10} \sigma^{10} + 3,09689 \times 10^{19} mq^8 Q^3 \sigma^8 \\
& (-317347 mq^2 \sigma^2 + 443417 mq\sigma + 2,57943 \times 10^6) - 1,00381 \times 10^{17} mq^6 Q^6 \sigma^6 \\
& (6,76034 \times 10^7 mq^4 \sigma^4 - 1,32814 \times 10^8 mq^3 \sigma^3 + 4,5535 \times 10^8 mq^2 \sigma^2 - 1,54008 \times 10^9 mq\sigma \\
& - 1,00512 \times 10^{10}) + 9,25467 \times 10^{10} mq^4 Q^9 \sigma^4 (-2,80919 \times 10^{13} mq^6 \sigma^6 + 5,44003 \times 10^{13} mq^5 \sigma^5 \\
& - 1,93757 \times 10^{14} mq^4 \sigma^4 + 8,49813 \times 10^{14} mq^3 \sigma^3 - 4,05957 \times 10^{15} mq^2 \sigma^2 + 1,72438 \times 10^{16} mq\sigma \\
& + 1,14194 \times 10^{17}) + 227456 mq^2 Q^{12} \sigma^2 (-3,10828 \times 10^{18} mq^8 \sigma^8 + 5,8259 \times 10^{18} mq^7 \sigma^7 \\
& - 2,05163 \times 10^{19} mq^6 \sigma^6 + 9,05727 \times 10^{19} mq^5 \sigma^5 - 4,50048 \times 10^{20} mq^4 \sigma^4 + 2,3716 \times 10^{21} mq^3 \sigma^3 \\
& - 1,27291 \times 10^{22} mq^2 \sigma^2 + 6,02666 \times 10^{22} mq\sigma + 4,00396 \times 10^{23}) + Q^{15} \\
& (-1,49881 \times 10^{23} mq^{10} \sigma^{10} + 2,72426 \times 10^{23} mq^9 \sigma^9 - 9,47937 \times 10^{23} mq^8 \sigma^8 \\
& + 4,17045 \times 10^{24} mq^7 \sigma^7 - 2,07465 \times 10^{25} mq^6 \sigma^6 + 1,10195 \times 10^{26} mq^5 \sigma^5 \\
& - 6,09984 \times 10^{26} mq^4 \sigma^4 + 3,46079 \times 10^{27} mq^3 \sigma^3 - 1,9683 \times 10^{28} mq^2 \sigma^2 + 9,94295 \times 10^{28} mq\sigma \\
& + 6,60584 \times 10^{29})) \tag{D-4}
\end{aligned}$$

Con estados con contribución de spin  $S = 1$ ,  $n^3S_1(\psi(nS))$ ,

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{1^3S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}} (1,62107 \times 10^{-22} \alpha Q^3 (1,21048 \times 10^{20} mq^{10} \sigma^{10} + 6,14565 \times 10^{15} mq^8 Q^3 \sigma^8 \\
& (-22322,7 mq^2 \sigma^2 + 10745,6 mq\sigma + 21535,2) - 5,78217 \times 10^{13} mq^6 Q^6 \sigma^6 \\
& (1,63952 \times 10^6 mq^4 \sigma^4 - 1,10301 \times 10^6 mq^3 \sigma^3 + 1,28017 \times 10^6 mq^2 \sigma^2 - 1,20737 \times 10^6 mq\sigma \\
& - 2,38805 \times 10^6) + 1,30371 \times 10^9 mq^4 Q^9 \sigma^4 (-2,67681 \times 10^{10} mq^6 \sigma^6 + 1,7811 \times 10^{10} mq^5 \sigma^5 \\
& - 2,12754 \times 10^{10} mq^4 \sigma^4 + 2,59831 \times 10^{10} mq^3 \sigma^3 - 3,86115 \times 10^{10} mq^2 \sigma^2 + 4,5408 \times 10^{10} mq\sigma \\
& + 9,46711 \times 10^{10}) + 26996,6 mq^2 Q^{12} \sigma^2 (-3,37784 \times 10^{14} mq^8 \sigma^8 + 2,2086 \times 10^{14} mq^7 \sigma^7 \\
& - 2,6238 \times 10^{14} mq^6 \sigma^6 + 3,23414 \times 10^{14} mq^5 \sigma^5 - 4,9628 \times 10^{14} mq^4 \sigma^4 + 7,2159 \times 10^{14} mq^3 \sigma^3 \\
& - 1,22789 \times 10^{15} mq^2 \sigma^2 + 1,58202 \times 10^{15} mq\sigma + 3,59258 \times 10^{15}) + Q^{15} \\
& (-1,86673 \times 10^{18} mq^{10} \sigma^{10} + 1,20543 \times 10^{18} mq^9 \sigma^9 - 1,42551 \times 10^{18} mq^8 \sigma^8 \\
& + 1,75671 \times 10^{18} mq^7 \sigma^7 - 2,69936 \times 10^{18} mq^6 \sigma^6 + 3,954 \times 10^{18} mq^5 \sigma^5 \\
& - 6,89901 \times 10^{18} mq^4 \sigma^4 + 1,07175 \times 10^{19} mq^3 \sigma^3 - 2,04905 \times 10^{19} mq^2 \sigma^2 \\
& + 2,60098 \times 10^{19} mq\sigma + 7,03226 \times 10^{19})) \tag{D-5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{2^3S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}}(6,07284 \times 10^{-25}\alpha Q^3(4,2386 \times 10^{22}mq^{10}\sigma^{10} + 5,36656 \times 10^{17}mq^8Q^3\sigma^8 \\
& (-89512,5mq^2\sigma^2 + 75337.mq\sigma + 263977.) - 2,88787 \times 10^{15}mq^6Q^6\sigma^6 \\
& (1,14872 \times 10^7mq^4\sigma^4 - 1,35812 \times 10^7mq^3\sigma^3 + 2,7973 \times 10^7mq^2\sigma^2 - 5,53639 \times 10^7mq\sigma \\
& - 2,14383 \times 10^8) + 1,21828 \times 10^{10}mq^4Q^9\sigma^4(-1,03781 \times 10^{12}mq^6\sigma^6 + 1,20967 \times 10^{12}mq^5\sigma^5 \\
& - 2,58479 \times 10^{12}mq^4\sigma^4 + 6,64088 \times 10^{12}mq^3\sigma^3 - 1,88944 \times 10^{13}mq^2\sigma^2 + 4,74264 \times 10^{13}mq\sigma \\
& + 1,83196 \times 10^{14}) + 82525,9mq^2Q^{12}\sigma^2(-4,13939 \times 10^{16}mq^8\sigma^8 + 4,68053 \times 10^{16}mq^7\sigma^7 \\
& - 9,89769 \times 10^{16}mq^6\sigma^6 + 2,56099 \times 10^{17}mq^5\sigma^5 - 7,56813 \times 10^{17}mq^4\sigma^4 + 2,34627 \times 10^{18}mq^3\sigma^3 \\
& - 7,39225 \times 10^{18}mq^2\sigma^2 + 2,04527 \times 10^{19}mq\sigma + 7,8157 \times 10^{19}) + Q^{15} \\
& (-7,18381 \times 10^{20}mq^{10}\sigma^{10} + 7,90922 \times 10^{20}mq^9\sigma^9 - 1,65545 \times 10^{21}mq^8\sigma^8 \\
& + 4,27191 \times 10^{21}mq^7\sigma^7 - 1,26385 \times 10^{22}mq^6\sigma^6 + 3,94727 \times 10^{22}mq^5\sigma^5 \\
& - 1,28036 \times 10^{23}mq^4\sigma^4 + 4,21972 \times 10^{23}mq^3\sigma^3 - 1,39031 \times 10^{24}mq^2\sigma^2 \\
& + 4,06881 \times 10^{24}mq\sigma + 1,54586 \times 10^{25})) \tag{D-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{3^3S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}}(3,01034 \times 10^{-26}\alpha Q^3(9,92393 \times 10^{23}mq^{10}\sigma^{10} + 5,93632 \times 10^{18}mq^8Q^3\sigma^8 \\
& (-189463.mq^2\sigma^2 + 215341.mq\sigma + 1,01897 \times 10^6) - 2,36549 \times 10^{16}mq^6Q^6\sigma^6 \\
& (3,28318 \times 10^7mq^4\sigma^4 - 5,24566 \times 10^7mq^3\sigma^3 + 1,46201 \times 10^8mq^2\sigma^2 - 3,99484 \times 10^8mq\sigma \\
& - 2,11336 \times 10^9) + 4,05188 \times 10^{10}mq^4Q^9\sigma^4(-7,3342 \times 10^{12}mq^6\sigma^6 + 1,15509 \times 10^{13}mq^5\sigma^5 \\
& - 3,34333 \times 10^{13}mq^4\sigma^4 + 1,18499 \times 10^{14}mq^3\sigma^3 - 4,59266 \times 10^{14}mq^2\sigma^2 + 1,58005 \times 10^{15}mq\sigma \\
& + 8,44379 \times 10^{15}) + 150503.mq^2Q^{12}\sigma^2(-5,36115 \times 10^{17}mq^8\sigma^8 + 8,17677 \times 10^{17}mq^7\sigma^7 \\
& - 2,34056 \times 10^{18}mq^6\sigma^6 + 8,35122 \times 10^{18}mq^5\sigma^5 - 3,3655 \times 10^{19}mq^4\sigma^4 + 1,4348 \times 10^{20}mq^3\sigma^3 \\
& - 6,22461 \times 10^{20}mq^2\sigma^2 + 2,38049 \times 10^{21}mq\sigma + 1,27221 \times 10^{22}) + Q^{15} \\
& (-1,70714 \times 10^{22}mq^{10}\sigma^{10} + 2,52745 \times 10^{22}mq^9\sigma^9 - 7,15156 \times 10^{22}mq^8\sigma^8 \\
& + 2,54342 \times 10^{23}mq^7\sigma^7 - 1,02616 \times 10^{24}mq^6\sigma^6 + 4,40896 \times 10^{24}mq^5\sigma^5 \\
& - 1,97186 \times 10^{25}mq^4\sigma^4 + 9,0234 \times 10^{25}mq^3\sigma^3 - 4,13553 \times 10^{26}mq^2\sigma^2 \\
& + 1,68349 \times 10^{27}mq\sigma + 8,97715 \times 10^{27})) \tag{D-7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\text{spin-spin}}^{4^3S_1} = & -\frac{1}{mq^{10}\sigma^8(mq\sigma)^{7/3}} (3,81817 \times 10^{-27} \alpha Q^3 (8,67165 \times 10^{24} mq^{10} \sigma^{10} + 3,09689 \times 10^{19} mq^8 Q^3 \sigma^8 \\
& (-317347. mq^2 \sigma^2 + 443417. mq\sigma + 2,57943 \times 10^6) - 1,00381 \times 10^{17} mq^6 Q^6 \sigma^6 \\
& (6,76034 \times 10^7 mq^4 \sigma^4 - 1,32814 \times 10^8 mq^3 \sigma^3 + 4,5535 \times 10^8 mq^2 \sigma^2 - 1,54008 \times 10^9 mq\sigma \\
& - 1,00512 \times 10^{10}) + 9,25467 \times 10^{10} mq^4 Q^9 \sigma^4 (-2,80919 \times 10^{13} mq^6 \sigma^6 + 5,44003 \times 10^{13} mq^5 \sigma^5 \\
& - 1,93757 \times 10^{14} mq^4 \sigma^4 + 8,49813 \times 10^{14} mq^3 \sigma^3 - 4,05957 \times 10^{15} mq^2 \sigma^2 + 1,72438 \times 10^{16} mq\sigma \\
& + 1,14194 \times 10^{17}) + 227456. mq^2 Q^{12} \sigma^2 (-3,10828 \times 10^{18} mq^8 \sigma^8 + 5,8259 \times 10^{18} mq^7 \sigma^7 \\
& - 2,05163 \times 10^{19} mq^6 \sigma^6 + 9,05727 \times 10^{19} mq^5 \sigma^5 - 4,50048 \times 10^{20} mq^4 \sigma^4 + 2,3716 \times 10^{21} mq^3 \sigma^3 \\
& - 1,27291 \times 10^{22} mq^2 \sigma^2 + 6,02666 \times 10^{22} mq\sigma + 4,00396 \times 10^{23}) + Q^{15} \\
& (-1,49881 \times 10^{23} mq^{10} \sigma^{10} + 2,72426 \times 10^{23} mq^9 \sigma^9 - 9,47937 \times 10^{23} mq^8 \sigma^8 \\
& + 4,17045 \times 10^{24} mq^7 \sigma^7 - 2,07465 \times 10^{25} mq^6 \sigma^6 + 1,10195 \times 10^{26} mq^5 \sigma^5 \\
& - 6,09984 \times 10^{26} mq^4 \sigma^4 + 3,46079 \times 10^{27} mq^3 \sigma^3 - 1,9683 \times 10^{28} mq^2 \sigma^2 \\
& + 9,94295 \times 10^{28} mq\sigma + 6,60584 \times 10^{29})) \quad (D-8)
\end{aligned}$$

### D.1.1. Estados P

Para los estados P se encuentran todas las correcciones, pero se comienza con la corrección spin-spin correspondiente a  $1^3P_j$ , donde  $S = 1$ .

$$\begin{aligned}
 E_{\text{spin-spin}}^{1^3P_j} = & -\frac{1}{mq^2(mq\sigma)^{7/3}}(3,9437 \times 10^{-17}\alpha Q^3(\frac{1,27806 \times 10^{15}Q^{15}}{mq^{10}\sigma^{10}} + \frac{2,96485 \times 10^{14}Q^{15}}{mq^9\sigma^9} + \\
 & \frac{2520.(2,33288 \times 10^9Q^3 + 0,0139006(3,53612 \times 10^{13} - 7,5186 \times 10^{12}Q^3)}{mq^8\sigma^8} + \\
 & \frac{2520(-1,63997 \times 10^{10}(Q^3 - 5.))Q^{12}}{mq^8\sigma^8} - \frac{19,7155(-6,71166 \times 10^{12}Q^3 - 2,71143 \times 10^{13})Q^{12}}{mq^7\sigma^7} \\
 & + \frac{1,87383(-4,62438 \times 10^{13}Q^6 - 2,24746 \times 10^{14}Q^3 + 8,51026 \times 10^{14})Q^9}{mq^6\sigma^6} \\
 & - \frac{3,00536(-1,47879 \times 10^{13}Q^6 - 7,32933 \times 10^{13}Q^3 - 2,33659 \times 10^{14})Q^9}{mq^5\sigma^5} \\
 & + \frac{0,183626(-1,5495 \times 10^{14}Q^9 - 7,72184 \times 10^{14}Q^6 - 2,96818 \times 10^{15}Q^3 + 8,28867 \times 10^{15})Q^6}{mq^4\sigma^4} \\
 & - \frac{0,0261787(-6,22116 \times 10^{14}Q^9 - 3,10425 \times 10^{15}Q^6 - 1,22351 \times 10^{16}Q^3 - 2,7886 \times 10^{16})Q^6}{mq^3\sigma^3} \\
 & + \frac{0,01344(-8,27078 \times 10^{14}Q^{12} - 4,12919 \times 10^{15}Q^9 - 1,63956 \times 10^{16}Q^6 - 4,62012 \times 10^{16}Q^3)Q^3}{mq^2\sigma^2} \\
 & + \frac{0,0134359Q^3(8,44885 \times 10^{16})}{mq^2\sigma^2} + 210.mq^2(-3,70178 \times 10^{10}Q^{15} - 1,82697 \times 10^{11}Q^{12} \\
 & - 7,1398 \times 10^{11}Q^9 - 2,04927 \times 10^{12}Q^6 - 3,71123 \times 10^{12}Q^3 - 2,68531 \times 10^{12})\sigma^2 - \\
 & 0,0100563(-7,19265 \times 10^{14}Q^{12} - 3,59028 \times 10^{15}Q^9 - 1,42753 \times 10^{16}Q^6 - 4,15389 \times 10^{16}Q^3)Q^3 \\
 & mq\sigma \\
 & + \frac{0,0100563(-5,70718 \times 10^{16})}{mq\sigma} - 0,0183954mq(-2,70702 \times 10^{14}Q^{15} - 1,34679 \times 10^{15}Q^{12} \\
 & - 5,32934 \times 10^{15}Q^9 - 1,55661 \times 10^{16}Q^6 - 2,85029 \times 10^{16}Q^3 - 1,47566 \times 10^{16})\sigma \\
 & + 70.(-8,39004 \times 10^{10}Q^{15} - 4,18545 \times 10^{11}Q^{12} - 1,6638 \times 10^{12}Q^9 - 4,88633 \times 10^{12}Q^6 \\
 & - 8,69341 \times 10^{12}Q^3 + 7,77171 \times 10^{12})) \end{aligned} \tag{D-9}$$

La combinación de la corrección Tensorial y Spin-Orbita según estado,

$$E_{T, \text{S-P}}^{1^3P_0} = \frac{mq^3\sigma^2(1,45688\alpha - 0,700179\sigma) + mq^2\sigma(1,70317\alpha + 0,456281\sigma) - 0,439639mq\sigma - 0,6871}{mq^3(mq\sigma)^{7/3}} \tag{D-10}$$

$$E_{T, \text{S-P}}^{1^3P_1} = \frac{mq^3\sigma^2(0,582752\alpha - 0,350089\sigma) + mq^2\sigma(0,681268\alpha + 0,228141\sigma) - 0,21982mq\sigma - 0,34355}{mq^3(mq\sigma)^{7/3}} \tag{D-11}$$

$$E_{T, \text{S-P}}^{1^3P_2} = \frac{mq^3\sigma^2(0,350089\sigma - 0,641027\alpha) + mq^2\sigma(-0,749395\alpha - 0,228141\sigma) + 0,21982mq\sigma + 0,34355}{mq^3(mq\sigma)^{7/3}} \quad (\text{D-12})$$