中学数学实验教材

第一册

中学数学实验教材编写组编

1981年6月

第一册

有理数系

一、复习和总结了小学算术中所学的数(自然数，零及正分数)和四则运算，并进一步明确了自然数的意义，系统说明了运算中的普遍性质(通性)这就是：加法交换、结合律；乘法交换、结合律；分配律及0、1的运算特性，还引进了乘方运算和指数运算律：

乘方运算：相同因数的连乘积.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n\text{个}a}, \qquad a^1 = a$$

指数运算律及零指数的意义：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ (b \neq 0), \qquad a^m \div a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0,\ m \geq n), \qquad a^0 = 1\ (a \neq 0)$$

二、由相反意义的量，引进了意义相反的正数与负数，其特征就是“合并时，可以相消或部分相消”．特别地，$(-a) + (+a) = 0$时，$-a$与a叫做互为相反的数．$+1$与-1是相反意义的单位.因而将数的范围就扩大到有理数.

有理数包括正、负整数，0及正、负分数.

一切有理数，组成有理数集合，它包含了整数集合，而整数集合又包含了自然数集合.

任一个有理数，都可以用数轴上的一个点表示出来.

三、有理数的运算法则

对有理数的运算法则，我们都是在承认运算通性 (包括运算律、指数运算律，0与1的特性)仍然有效的前提下，合理地作了规定的.

1. 加法法则：设a, b是正有理数.

$$(+a) + (+b) = +(a+b)$$

$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$

$$(+a) + (-b) = \begin{cases} +(a-b) & (a > b) \\ -(b-a) & (a < b) \end{cases}$$

$$(+a) + 0 = 0 + (+a) = +a$$

$$(-a) + 0 = 0 + (-a) = -a$$

$$0 + 0 = 0$$

2. 减法法则：设x,y是有理数， $x-y=x+(-y)$

3. 乘法法则：设a,b是正有理数，

$$
\begin{aligned}
(+a)\cdot(+b)&=+ab\\
(-a)\cdot(+b)&=(+a)\cdot(-b)=-ab\\
(-a)\cdot(-b)&=+ab\\
(+a)\cdot 0&=(-a)\cdot 0=0\\
0\times 0&=0
\end{aligned}
$$

4. 除法法则：设x,y是有理数，$y\neq 0$.

$$x\div y=x\times\frac{1}{y}$$

5. 乘方法则：除了有效地应用指数运算律之外，有理数乘方还有以下规则：

- 正数的任何次方，仍是正数.
- 零的非零次方，仍是零.
- 负数的偶次方是正数；而负数的奇次方是负数.

四、有理数系是一个运算简便易行，通行无阻的数集．是今后讨论数量的实际问题的有力工具．有理数的性质可以概括为：

1. 运算性质(通性).

   四则运算封闭；加法、乘法的交换律、结合律和分配律成立；零、1在运算中的特性；五个指数运算律成立；$a^0=1,\ (a\neq 0)$.

2. 有理数可以比大小.

   - 当$a-b>0$时，$a>b$;
   - 当$a-b=0$时，$a=b$;
   - 当$a-b<0$时，$a<b$.

   而且，有理数的大小，正好相当于在数轴上表示这些有理数的点的右、左位置.我们称为“有理数的有序性”.

3. 有理数的稠密性：任意两个有理数之间，存在着很多有理数.

五、等式与不等式的基本性质.

一次方程式

一、这一章主要是应用数系运算通性及等式性质，解一次方程和方程组，并且能解决相应的应用问题.

二、含有未知数的等式，叫做方程. 能使方程式两边相等的未知数的值，就是方程的解.

三、含有一个未知数的方程，叫做一元方程，如果只含有一个未知数，分母不含未知数，且最高次项的指数是1的方程，叫做一元一次方程. 解一元一次方程的原理和方法是：由数的运算通性和等式性质，归纳出去分母、去括号、移项变号、合并同类项、除以未知数的系数等具体规则，应用这些具体规则，就可以把方程的解求出来.

四、含有两个未知数的一次方程，叫做二元一次方程. 二元一次方程的解是一个数值组，记作(x, y)；任一个二元一次方程的解都有无限多个.

五、两个以上的方程联合在一起，组成一个方程组. 因而，由几个含有两个未知数的一次方程所组成的方程组二网做三元一次方程组. 能够同时满足方程组中所有各个方程的未知数所取的数值组，叫做这个方程组的解.

六、解多元一次方程组的关键是消元. 具体方法有：加、减消元法和代入消元法.

这里应特别指出：加减法消元是较普遍且重要的方法，其要点就是，应用等式的性质，将两个方程中相同的某一个未知数的系数变形成为绝对值相等. 然后把方程的两边分别相加或相减，就可以消去这个未知数.

因此，可以说：解多元一次方程的过程，就是逐步消元求解的过程. 即

$$\text{多元} \xrightarrow{\text{消元}} \cdots\cdots \xrightarrow{\text{消元}} \text{三元} \xrightarrow{\text{消元}} \text{二元} \xrightarrow{\text{消元}} \text{一元}$$

七、解应用问题就是运用数学工具解决实际问题，这就要:

1. 审题：弄清题意，分析问题中涉及到的量与量之间的关系.

2. 引入未知数，并用未知数表示出有关的量.

3. 正确列出方程(或方程组). 一般来说，引入的未知数个数与所列方程的个数是相等的.

4. 准确地求出来知数的值，即所列方程(方程组)的解.

5. 检验：所列方程(方程组)的解是否符合题意．将不合理的值舍去，从而写出正确答案.

其中，分析量之间的关系是列方程的关键;列方程是解决问题的基础；解方程又是解决问题的主要手段．这都是解应用问题时，必须注意的几个重要环节.

一元二次方程

一、学习一元二次方程所必要的预备知识和概念：

1. 完全平方公式：$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$或称为二数和（或差）的平方公式．当$x, y$取正数时，这两个公式都可以用“画正方形”的方法加以验证.

2. 平方根的概念、性质及运算.

   如果$x^2 = a$, $(a \geq 0)$，那么x就是a的平方根，当 $a > 0$时，它有两个平方根，记作$x = \pm\sqrt{a}$．当$a = 0$ 时，它有一个平方根，记作 $x = \sqrt{0} = 0$. 当$a < 0$ 时，它的平方根无意义.

   正数的正平方根，叫做它的算术平方根，记作： $x = \sqrt{a}\ (a > 0)$.

   零的算术根，仍然是0.

   对于算术平方根 $x = \sqrt{a}\ (a \geq 0)$，有以下基本性质：

   (a) $(\sqrt{a})^2 = a \qquad (a \geq 0)$

   (b) $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

   算术平方根的运算法则：

   (a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$
   运用它，可以进行“因数移到根号里”和“因数移到根号外”的变形.

   (b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0)$
   运用分数的基本性质及算术平方根的基本性质，可以进行“有理化分母”的变形.

(c) 把算术平方根化简（使被开方数的每个因数的指数小于2;分母有理化）以后，相同被开方数的算术根可以运用数系运算通性进行加、减运算.

3. 求一个数的平方根，可以查平方根表，也可以直接开平方，进行计算.

4. 实数.

   无限不循环小数，称为无理数．例如：$\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, π, e, $0.01001000\cdots$，等都是无理数.

   无理数与有理数，统称为实数.

   任一个非零实数a, 都有一个相反数$-a$, 且满足 $a+(-a)=0$; 都有一个倒数$\dfrac{1}{a}$，且满足$a\cdot\dfrac{1}{a}=1$.
   实数的运算，同样具有运算通性.

二、一元二次方程的标准式是

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

它的解法有：

1. 配方法：关键是先化为二次项系数为1的形式，然后将方程“两边加上一次项系数一半的平方数”，使方程一边成为完全平方形式.

$$\begin{aligned} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}&=0\\ x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2&=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\end{aligned}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1}$$

2. 公式法——把方程化为标准式，找出各项系数 a,b,c，代入(3.4)就可以求出根.

3. 换元法——如果能把方程整理成如下形式

$$a(x+m)^2+b(x+m)+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

那么，可以设$(x+m)=y$, 原方程化为

$$ay^2+by+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

用求根公式先求出y的值，然后再代入原设：$(x+m)=y$, 进而求出原方程的根.

4. 对于$b=0$, 或$c=0$, 或$b=c=0$时的特殊一元二次方程，除以上一般解法外，还可以直接运用数系运算通性（特别是分配律）、平方根的意义等方法，求出方程的根.

三、利用一元二次方程，还可以解一些特殊的高次方程，其主要方程是换元法——设辅助未知数. 通过换元，把高次转化为低次方程，从而可以由已知解法的低次方程，逐步达到求出未知的高次方程的根. 本章我们所遇到过的有以下几种形式：

1. $ax^4+bx^2+c=0 \qquad (a\neq 0)$

   可设$x^2=y$, 原方程化为$ay^2+by+c=0$.

2. $a(mx^2+nx)^2+b(mx^2+nx)+c=0 \qquad (a\neq 0)$

   可设$mx^2+nx=y$, 原方程化为$ay^2+by+c=0$.

3. $a(mx^2+nx+p)(mx^2+nx+q)+b=0$

   可设$mx^2+nx=y$, 原方程化为$a(y+p)(y+q)+b=0$.

4. $ax^3+bx^2+cx=0 \qquad (a\neq 0)$

   用分配律：$(ax^2+bx+c)x=0$，把原方程可以化为两个低次方程求解，即： $ax^2+bx+c=0$ 或 $x=0$

四、一元二次方程根的判别式：

$$\Delta=b^2-4ac$$

这是判别任一个一元二次方程的根是否存在以及存在什么样的实数根的准绳. 即

1. 当$\Delta>0$时，$ax^2+bx+c=0$有两不等实根.

2. 当$\Delta=0$时，$ax^2+bx+c=0$有两相等实根（重根）.

3. 当$\Delta<0$时，$ax^2+bx+c=0$无实数根.

五、用一元二次方程解应用问题，其方法与主要步骤与第二章一次方程解应用题是一样的. 其要点仍是：弄清题意，分析量与量之间的关系，引入未知数，列出方程式，这是解决问题的基础；进而解方程，得到实数解（或无解）. 这是解决问题的关键；最后，还应检验所得解是否符合题意. 舍去不合理的，留下符合题意的，写出答案.

多项式的四则运算

这一章的主要内容是多项式的有关概念及其四则运算.

一、由已知数与未知数符号的方幂相乘而得到的式子叫单项式；若干个单项式的代数和，叫做多项式. 多项式又叫做整式.

多项式的次数，就是指多项式中，次数最高的某一单项式的次数；而单项式的次数，就是所含各未知数的指数和.

任一非零常数，叫做零次多项式.

数零，叫做零多项式，它的次数不定.

二、一元n次多项式$f(x)$的标准形式是：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\qquad (a_0\neq 0)$$

当$x=b$时，$f(x)$的值记作：

$$f(b)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$$

三、两个多项式$f(x)$与$g(x)$，当x取任意值时，它们的值总相等，那么这两个多项式称为恒等，记作：

$$f(x)\equiv g(x)$$

如果$f(x)\equiv g(x)$，那么，这两个多项式相应的同类项的系数都相等. 这是待定系数法的依据.

四、能够使多项式$f(x)=0$的x的值，叫做多项式 $f(x)$的根. 要求多项式$f(x)$的根，只要解方程$f(x)=0$就可以得到.

五、多项式的加、减，乘法运算的结果仍是多项式（封闭的）. 而且具有数系运算的通性.

如果用f,g表示两个多项式（一元或多元），它们分别为m次和n次（$m>n$）．那么，

- $f+g$是一个m次多项式，$f-g$也是m次多项式；而$f\cdot g$是一个$(m+n)$次多项式．

六、常用乘法公式是运算的工具，必须掌握：

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)&=a^2-b^2\\(a\pm b)^2&=a^2\pm 2ab+b^2\\(a\pm b)^3&=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\\(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)&=a^3\pm b^3\end{aligned}$$

这些公式中的a,b，可以是数、或单项式、或多项式．因此，在应用中要具体分析，灵活掌握．

七、带余除法，是一元多项式的特有运算．

- $f(x)$除以$g(x)$，就是要求出两个多项式$Q(x)$ 与$R(x)$，使它们满足关系式：

$$f(x)=Q(x)\cdot g(x)+R(x)$$

  其中，$R(x)$的次数要低于$g(x)$的次数．

- 除法的原理是：逐步寻求单项式，进行降次工作．具体方法有：类似于整数除法的长除法、分离系数法、待定系数法以及除式为一次式的综合除法．

- 两个一元多项式相除，当除式乘以一个非零常数k时，所得商式就是原商式的$\dfrac{1}{k}$，所得余式不变，这是由于：

$$\begin{aligned}f(x)&=Q(x)\cdot g(x)+R(x)\\&=\frac{1}{k}Q'(x)\cdot[k\cdot g(x)]+R'(x)\end{aligned}$$

因式分解与余式定理

这一章是第四章多项式理论的继续和深入，主要内容有：因式分解、余式定理及其推论和应用、辗转相除法及其应用．

一、在指定范围内，把一个多项式写成几个次数较低的不可约多项式之积的变形，就是多项式的因式分解.

多项式因式分解的常见方法有：

1. 提取公因式法；

2. 分组分解法；

3. 乘法公式分解法；

4. 配方法、视察法分解二次三项式；

5. 待定系数法分解二元二次多项式.

二、余式定理是：多项式$f(x)$除以$(x-a)$所得的余式是$f(a)$，即

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+f(a)$$

由此，可以得到以下推论：

1. 如果$f(a)=0$(或说a为$f(x)$的根），那么，$f(x)$ 可以被$(x-a)$整除. 反过来也正确.

2. 如果$f(a)=0, f(b)=0$(或说a, b为$f(x)$的两个不同的根），那么，$f(x)$必可以被$(x-a)(x-b)$整除，也就是$f(x)$必含有因式$(x-a)(x-b)$. 反过来说，也是正确的.

3. 一元n次多项式$f(x)$，至多只能有n个不同的根.

4. 如果：已知$f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_{n+1})$ 共$n+1$个值，那么，就可以确定一个n次多项式.

三、综合运用余式定理及其推论、综合除法及待定系数法，可以进行因式分解、求整系数多项式的有理根.

在这里，可以进一步发现，解方程与因式分解是互通的. 因为：如果$f(x)$可以分解为$(mx+n)\cdot(px+q)\cdots(rx+s)$，那么，方程$f(x)=0$就一定有有理根$-\dfrac{n}{m}, -\dfrac{q}{p}, \ldots, -\dfrac{s}{r}$.

反过来，如果方程$f(x)=0$有有理根$-\dfrac{b}{a}, -\dfrac{d}{c}, \ldots, -\dfrac{f}{e}$. 那么，多项式$f(x)$就一定含有因式：$(ax+b)(cx+d)\cdots(ex+f)$.

四、辗转相除法

利用辗转相除法，可以求出几个多项式的最高公因式和最低公倍式.

两个多项式$f(x)$与$g(x)$的最高公因式记为：$(f(x),g(x))$；最低公倍式记为：$[f(x),g(x)]$．由于它们都不计非零常数因子，因而有以下关系式：

$$kf(x)g(x)=(f(x),g(x))\cdot[f(x),g(x)]$$

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x),g(x))}\qquad (\text{非零常数}k\text{不计})$$

分式与根式

本章是在学习多项式（整式）的基础上，进一步学习了分式及其运算、根式及其运算和分式方程、根式方程．

一、多项式，分式，根式等，都是含有数字和字母并涉及加、减、乘、除、乘方、开平方六种代数运算的式子，这些式子统称为代数式．其中，凡只涉及字母的加、减、乘、乘方运算的式子，叫做多项式（整式）；凡涉及字母的除法运算且字母含在除式中的式子，叫做分式；分式与整式，又统称为有理式．

凡涉及字母或数字的开方运算的式子叫做根式，根号内含有字母的根式，又称为关于这个字母的无理式．如$\sqrt{2}$是根式，但不是无理式，$\sqrt{x}$，$\sqrt{x-1}$，$\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$等都是无理式．

关于代数式的概念，可以列表如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{多项式（即整式）}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

二、如果有多项式$f(x),g(x)$且$g(x)$的次数大于零次，那么分式$\dfrac{f(x)}{g(x)}$有以下基本性质：

$$\frac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot h(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\div h(x)}{g(x)\div h(x)}$$

其中，$h(x)$是非零多项式．

利用基本性质，可以进行分式的通分和约分．分式的四则运算和分数的四则运算是一样的．

三、表示平方根的式子，叫做二次根式．

二次根式有以下基本性质：

- $(\sqrt{a})^2=1\quad(a\geq 0)$
- $\sqrt{a^2}=|a|$

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$
- $\sqrt{a \div b} = \sqrt{a} \div \sqrt{b} \quad (a \geq 0,\ b > 0)$

利用基本性质，二次根式可以进行以下变形：

1. 因式的内移与外移，即

$$m\sqrt{a} = \sqrt{am^2} \quad (m > 0)$$
$$\sqrt{a^2 m} = a\sqrt{m} \quad (a > 0)$$

2. 化去根号内的分母或化去分母中的根号——都是有理化分母的内容，即

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \times b}{b \times b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} \qquad (b > 0)$$

或

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b} \qquad (b > 0)$$

如果一个二次根式符合条件：

1. 被开方各因数的指数小于2；
2. 根号内不含分母（即分母已经有理化）.

那么这个二次根式就叫做最简二次根式.

如果几个二次根式化为最简根式以后，根号内的式子相同，那么，这几个二次根式就叫做同类根式. 同类根式和同类项一样可以合并.

二次根式的四则运算和多项式的运算很类似. 只要注意化为最简根式和合并同类根式就行了.

四、分式方程与根式方程的解法要点是：设法转化为整式方程求解. 由于它们的特点不同，转化方法也就不同.

分式方程的特点是：分母中含有未知数. 因而，要利用分式的基本性质或等式的基本性质，两边乘以同一个整式（一般是取各分母的最低公倍式），约简后转化为一个整式方程.

根式方程的特点是：根号内含有未知数，因而，就要方程两边同次乘方（如：同平方）后，利用根式的基本性质转化为有理方程，并进而转化为整式方程.

但是，一定要注意，在解分式方程与根式方程的过程中，由于各自的转化方式都能引起未知数允许取值范围的扩大，所以都可能产生增根. 因此，无论

是解分式方程，还是解根式方程，最后的验根都是不可缺少的，验根，将起到“识别真假”“去伪存真”的作用.

五、已学过的方程有：整式方程、分式方程、根式方程，统称为代数方程.其系统可列表如下：

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}\begin{cases}\text{整式方程}\begin{cases}\text{一次方程}\\\text{二次方程}\\\text{高次方程}\end{cases}\\\text{分式方程}\end{cases}\\\text{根式方程}\end{cases}$$

代数运算的初步应用

本章的主要内容是两种常见数列的求和及待定系数法与它的应用.

一、等差数列

1. 按顺序排好的一列数中，如果从第二个数起，每一个数与它前一个数的差都相等，那么，这一列数叫做等差数列.

   设等差数列的首项为a_1, 公差为d, 项数为n, 末项为a_n及前n项和为S_n, 则有以下关系式：

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

   如果已知a_1, a_n, n, d, S_n中的任意三个，就可以利用这两个公式，求出另两个.

2. 在两个已知数a, b之间，插入n个数构成等差数列的问题，实际上就是已知首项a, 末项b及项数$n+2$, 要求出公差，进而可以求出插入的各项，还可以求出所有项的和.

二、等比数列

按顺序排好的一列数中，如果从第二个数起，每一个数与它前一个数的比都相等，那么，这一列数叫做等比数列.

设等比数列的首项为a_1, 公比为q, 项数为n, 末项为a_n, 前n项的和为S_n, 则有以下关系式：

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

公比q的取值，决定了等比数列各项的大小变化趋向：如果首项$a_1 > 0$(或<0)，那么，

- 当$q > 1$时，等比数列逐项增大（或减小）；
- 当$0 < q < 1$时，等比数列逐项减小（或增大）；
- 当$q < 0$时，等比数列各项将正、负相间，逐项在正、负值之间摆动.

三、待定系数法是一个重要的数学方法，其根据就是多项式恒等的性质．其方法的要点就是：引进未定系数，列出恒等式并进而得出含有未定系数的方程组，求出未定系数.

待定系数法应用广泛，具体作法中又有一定的技巧，除可以求商式、余式、分解因式、寻求方程的根与系数间的关系外，还应从以下应用中进一步去掌握：

- 求多项式与解方程；
- 用一个较低次的多项式的各次幂，表示另一个多项式；
- 将分式化成部分分式；
- 求形如$a \pm 2\sqrt{b}$的数的算术平方根；
- 求数列1^b, 2^b, $3^b, \ldots, n^b, \ldots$ 前n项和（b是大于1的一个自然数）.