Дополнительный материал
Жорданова нормальная форма

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

23 марта 2015 г.

На восьмой неделе нашего курса мы в общих чертах обсуждали жорданову нормальную форму. В этом материале мы разберем алгоритм, позволяющий строить жорданов базис и приводить матрицу к жорданову виду.

Пусть у нас есть матрица линейного оператора в каком-то базисе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Начнем с того, что найдем ее собственные значения. Так как мы работаем с линейным пространством над полем комплексных чисел, то характеристический многочлен матрицы имеет ровно n корней с учетом кратностей: $f(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$, где λ_i различны и $m_1 + \ldots + m_k = n$.

Число m_i будем называть *алгебраической кратностью* собственного значения. Максимальное количество s_i линейно независимых векторов, соответствующих собственному значению λ_i, будем называть его *геометрической кратностью*.

Случай $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = 1$ соответствует той удачной ситуации, когда мы можем найти собственный базис у матрицы, и она в нем примет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Однако, числа m_i легко могут быть больше единицы. Например, характеристический многочлен единичной матрицы $n \times n$ равен $(1-\lambda)^n$. Числа s_i тоже могут быть больше единицы, например, в единичной матрице собственному значению 1 соответствует целых n линейно независимых собственных векторов — в самом деле, любой вектор будет собственным для единичной матрицы.

Наша цель состоит в том, чтобы построить базис, в котором матрица примет жорданов вид. В этот базис, несомненно, войдут все собственные вектора. Уверенно это утверждать нам позволяет следующая лемма:

Лемма. Собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство: Пусть $v_1, \dots, v_n$ — собственные векторы оператора A, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Пусть они линейно зависимы, то есть, для некоторых чисел $a_1, \dots, a_n$: $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Нам будет удобно взять только те слагаемые, где $a_i \neq 0$: $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0$ (перенумеруем $a_i v_i$, если нужно). Применим оператор $A - \lambda_k E$ к обеим частям: $(A - \lambda_k E) \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i (A - \lambda_k E) v_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i (A v_i - \lambda_k v_i) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i (\lambda_i v_i - \lambda_k v_i) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} a_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0$.

Мы видим, что слагаемых стало меньше, а все коэффициенты остались ненулевыми. Продолжим эту процедуру, применив оператор $A - \lambda_{k-1} E$, затем $A - \lambda_{k-2} E$, и так далее. В конце мы получим только одно слагаемое с ненулевым коэффициентом — вектор v_1, а значит, $v_1 = 0$. Противоречие. $\square$

Отлично, добавили собственные вектора в базис (учитывая, что они могут иметь геометрическую кратность большую единицы). Какие еще вектора нам нужны? Какие вектора дадут единицы над главной диагональю каждой жордановой клетки? Чтобы ответить на этот вопрос, дадим следующее определение:

Определение. *Присоединенным* вектором, отвечающим собственному значению λ, называется такой вектор v, что для некоторого $r : (A - \lambda E)^{r-1} v \neq 0, (A - \lambda E)^r v = 0$. Число r называется высотой присоединенного вектора.

Смысл у присоединенных векторов следующий: вот мы пытаемся смотреть на собственные вектора, а давайте еще посмотрим на вектора, которые в собственные при действии оператора $(A - \lambda E)$ переходят? Собственный вектор является ядром такого оператора, а присоединенный вектор переходит в собственный после последовательного применения оператора несколько раз, то есть, является ядром какой-то степени $(A - \lambda E)$. Из собственных и присоединенных векторов и состоит жорданов базис!

Действительно, пусть h — присоединенный вектор высоты 2 (высоту 1 имеют собственные вектора). В таком случае, $(A - \lambda E) h = v$, где v — собственный, а значит, $Ah = v + \lambda h$. Тогда, записывая матрицу линейного оператора в базисе, который начинается с векторов v и h, мы получим первым столбцом $(\lambda, 0, \dots)^T$, а вторым столбцом $(1, \lambda, 0, \dots)^T$. Вот и появилась первая единица над диагональю. Дальше рассмотрим присоединенные вектора высоты 3, 4, …

Пришла пора разобраться с происходящим на конкретных примерах!

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен: $\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2$. Алгебраическая кратность равна двум.

Найдем собственный вектор, подставив $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как ранг получившейся матрицы равен 1, то его ядро одномерно, поэтому, с точностью до пропорциональности, собственный вектор один, например $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Геометрическая кратность равна единице. Итак, у нас один собственный вектор, поэтому будем искать присоединенные. В данном случае нам нужен один присоединенный вектор. Возведем $(A - 2E)$ в квадрат:

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получилась нулевая матрица, ее ядро двумерно. Значит, мы можем найти присоединенный вектор высоты 2 — то есть тот, который лежит в ядре $(A - 2E)^2$, но не является собственным. Возьмем, например, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда векторы $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ образуют жорданов базис. Составим матрицу перехода и найдем жорданову нормальную форму матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$. Алгебраическая кратность равна трем.

Найдем собственный вектор, подставив $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ранг получившейся матрицы равен 2, следовательно, ядро одномерно, поэтому у нас есть только один собственный вектор. С точностью до пропорциональности, это вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (найдите с помощью метода Гаусса!). Геометрическая кратность равна единице. Теперь нам нужно найти еще два присоединенных вектора. Возведем $(A - E)$ в квадрат:

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы $(A - E)^2$ равен 1, ее ядро двумерно. Значит, мы можем найти присоединенный вектор v_2 высоты 2 — то есть тот, который лежит в ядре $(A - 2E)^2$, но не является собственным. v_2 будет линейно независим с v_1 и $(A-E)v_2 = v_1$. Однако, нам нужен еще один присоединенный вектор, высоты три. Заметим, что $(A-E)^3$ — нулевая матрица (проверьте!), поэтому ее ядро трехмерно. Нам нужно взять присоединенный вектор высоты 3, то есть из ядра $(A-E)^3$, но не из ядра $(A-E)^2$. Заметим, что базис ядра оператора $(A-E)^2$ состоит из двух векторов, например, $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6\\0\\1\end{pmatrix}$. Поэтому, в качестве присоединенного вектора высоты 3 мы можем взять вектор $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Тогда $v_2 = (A-E)v_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $v_1 = (A-E)v_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$. Составим матрицу перехода и найдем жорданову нормальную форму матрицы:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\0 & -1 & 1\\1 & 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\-2 & -6 & 13\\-1 & -4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\1 & -2 & 0\\1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\5 & -7 & 3\\6 & -9 & 4\end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен: $\det\begin{pmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\5 & -7-\lambda & 3\\6 & -9 & 4-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)$. Рассмотрим собственное значение $\lambda_1 = 0$ алгебраической кратности 2. Матрица

$$A - \lambda_1 E = A = \begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\5 & -7 & 3\\6 & -9 & 4\end{pmatrix}$$

имеет ранг 2 (проверьте!), поэтому ядро оператора $A - \lambda_1 E$ одномерно, то есть геометрическая кратность λ_1 равна 1, и нам нужен будет один присоединенный вектор.

$$(A - \lambda_1 E)^2 = A^2 = \begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\3 & -3 & 1\\3 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Ядро $(A-\lambda_1 E)^2$ имеет размерность 2. Вектор $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ — присоединенный высоты 2, тогда вектор $(A-\lambda_1 E)v_2 = v_1 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ является собственным с собственным значением λ_1.

Осталось разобраться с собственным значением $\lambda_2 = 1$:

$$A - \lambda_2 E = A - E = \begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\5 & -8 & 3\\6 & -9 & 3\end{pmatrix}$$

Ядро $A - \lambda_2 E$ одномерно. Значит, собственное значение $\lambda_2 = 1$ имеет геометрическую кратность 1 и, например, вектор $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным для этого значения.

Итак, векторы v_1, v_2, v_3 образуют жорданов базис для матрицы A. Составим матрицу перехода и найдем жорданову форму матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

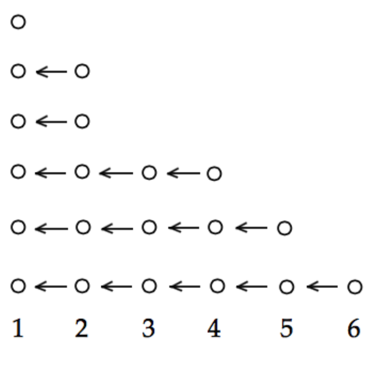
Написанного выше вполне достаточно, чтобы научиться приводить к ЖНФ матрицы 2×2 или 3×3. Далее желающие могут прочитать про общий случай и немного о применениях ЖНФ.

Теперь мы можем сформулировать алгоритм:

Алгоритм приведения матрицы оператора к ЖНФ.

1. Найти все собственные значения матрицы
2. Возводить в степень матрицу $A - \lambda_i E$, до тех пор, пока размерность его ядра не перестанет увеличиваться (пусть эта степень равна k)
3. Выбрать в $Ker(A - \lambda_i E)^k$ максимальный набор линейно независимых векторов, не лежащих в $Ker(A - \lambda_i E)^{k-1}$ (присоединенных векторов высоты k)
4. Добавить этот набор в жорданов базис и найти образ набора при операторе $A - \lambda_i E$; дополнить его до максимального набора линейно независимых векторов в $Ker(A - \lambda_i E)^{k-1}$, не лежащих в $Ker(A - \lambda_i E)^{k-2}$
5. Добавить вектора из дополненного набора в жорданов базис и повторять эту операцию до тех пор, пока мы не дойдем до векторов высоты 1
6. Если векторов в жордановом базисе меньше размера матрицы, то добавить недостающие собственные вектора
7. Составить матрицу перехода и найти ЖНФ

Проиллюстрировать данный алгоритм можно следующим образом:



На этом рисунке, например, столбцу 5 соответствуют присоединенные вектора высоты 5. Первый столбец — собственные вектора. Кроме того, что $Ker(A - \lambda_i E)^6 = Ker(A - \lambda_i E)^7$.

По алгоритму мы сначала находим вектор, стоящий в 6 столбце, берем его образ (переход по стрелочке), дополняем до максимального набора в столбце 5. Затем, мы берем образы векторов из столбца 5 и так далее. Все вектора на рисунке составляют жордановы клетку для собственного значения λ_i. Их будет всего 6 штук, следующих размеров: 1, 2, 2, 4, 5, 6.

Применения жордановой нормальной формы. Жорданова нормальная форма, например, используется для вычисления различных функций от матриц. В частности, с помощью приведения матрицы к ЖНФ удобно возводить матрицы в степень.
Пусть A — некоторая матрица, хотим найти A^n. Приведем ее к ЖНФ: $A = C^{-1}BC$, где B — жорданова матрица. Заметим, что в выражении

$$A^n = (C^{-1}BC)^n = C^{-1}BCC^{-1}BC \dots C^{-1}BC$$

все произведения CC^{-1} сократятся и останется только $C^{-1}B^nC$. Осталось заметить, что возводить в степень жорданову матрицу не так сложно. Жордановы клетки в матрице перемножаются независимо друг от друга, а формула для n-ной степени одной жордановой клетки размера k имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{n-k+2}\lambda^{n-k+2} & \binom{n}{n-k+1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{n-k+3}\lambda^{n-k+3} & \binom{n}{n-k+2}\lambda^{n-k+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \cdots & \binom{n}{n-k+4}\lambda^{n-k+4} & \binom{n}{n-k+3}\lambda^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, читается как "эн факториал").
Формулу можно понимать так: на диагонали стоят элементы λ^n, над диагональю λ^{n-1} с коэффициентом, на следующем ряду λ^{n-2} с коэффициентом, и так далее. При возведении в степень диагональные ряды заполняются по очереди, пока не дойдут до правого верхнего угла. Эту формулу можно доказать по индукции, пользуясь комбинаторным тождеством: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Пример. Найдем десятую степень матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Как мы выяснили ранее, ее жорданова нормальная форма имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Десятая степень этой матрицы равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 45 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итого,

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 45 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 & 375 & -780 \\ 25 & 66 & -140 \\ 35 & 95 & -199 \end{pmatrix}$$

В заключении отметим, что мы НЕ доказали, что жорданова нормальная форма существует (что присоединенных векторов найдется необходимое количество, что они линейно независимы...), мы всего лишь рассказали об алгоритме, который к ней приводит. Для практических целей этого достаточно.