Решения домашнего задания 3

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

28 февраля 2015 г.

В этом дополнительном материале мы приводим решения задач домашнего задания третьей недели. Будут подробно разобраны по одному варианту из каждой задачи.

1. Пусть F — линейное отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^4$, такое что $F((1;0;0)) = (1;1;1;1)$, $F((0;1;0)) = (1;2;3;4)$, $F((0;0;1)) = (0;1;2;a)$. При каком действительном a вектор $F((0;0;1))$ принадлежит линейной оболочке векторов $F((1;0;0))$ и $F((0;1;0))$? Если таких a не существует, запишите в ответ "нет".

Решение. Пусть $v_1 = (1;1;1;1),\ v_2 = (1;2;3;4),\ v_3 = (0;1;2;a)$. Заметим, что $v_2 - v_3 = (0;1;2;3)$, следовательно при $a = 3$ вектор v_3 является линейной комбинацией векторов v_1 и v_2, и следовательно лежит в их линейной оболочке.

Ответ. 3

2. Дано линейное пространство $\mathbb{R}^3$. Найдите размерность его линейного подпространства, если известно, что это множество всевозможных векторов, координаты которых удовлетворяют соотношениям: $x = y,\ 2x - 3y = 0$.

Решение. При решении этой задачи можно рассуждать очень по-разному. Например, можно заметить, что линейное уравнение вида $ax + by + cz + d = 0$ в трёхмерном пространстве задаёт плоскость, следовательно данные соотношения — это две плоскости. Далее нужно заметить, что они не параллельны, и следовательно пересекаются по прямой. Прямая же — это одномерное линейное пространство.

Можно рассуждать по-другому. Рассмотрим произвольный вектор $v = (a;b;c)$ из этого подпространства, тогда мы знаем, что $a = b$ и $a = \frac{3}{2}b$ (из данных условий), следовательно $a = b = 0$. Следовательно наше подпространство состоит из векторов v вида $v = (0;0;c)$. Это подпространство одномерно, базис в нём состоит, например, из вектора $e = (0;0;1)$.

Ответ. 1

3. Найдите размерность линейного пространства всевозможных многочленов от одной переменной степени не выше 3, если для любого многочлена $f(x)$ из этого пространства известно, что $f(2) = f(3) = 0$.

Решение. Многочлены $1,\ x,\ x^2$ и x^3 образуют базис пространства многочленов степени не выше 3, следовательно оно четырехмерно. Заметим, что не существует линейных многочленов (многочленов степени 1) и многочленов степени 0 (констант), удовлетворяющих условию задачи, потому что такой многочлен должен обращаться в ноль и при $x = 2$ и при $x = 3$.

Далее заметим, что если многочлен $f(x)$ лежит в искомом пространстве, то он представляется в виде $(x-2)(x-3)(ax+b)$, где a и b — произвольные числа. Следовательно, он единственным образом представляется как линейная комбинация, например, таких многочленов: $(x-2)(x-3)$ и $x(x-2)(x-3)$.

Ответ. 2

4. Пусть векторы a и b образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^2$. Известно, что $c = 2a + b,\ d = 4a$. Если векторы c и d образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$, найдите в нём координаты векторов a и b, иначе запишите в ответ "нет".

Координаты в ответ нужно записывать в виде $a = (0;0), b = (0;0)$ (латинским шрифтом, без пробелов и знаков доллара), первой ставить координату при векторе c, дроби можно записывать в одном из двух видов: p/q или $3,14$, но единообразно. Слово "нет"нужно записывать без кавычек.

Решение. Возьмём произвольную линейную комбинацию векторов c и d и посмотрим когда она обращается в ноль.

$$\lambda c + \mu d = \lambda(2a + b) + \mu 4a = (2\lambda + 4\mu)a + \lambda b.$$

Вектора a и b образуют базис, следовательно их линейная комбинация равна нулю тогда и только тогда, когда обращаются в ноль коэффициенты:

$$(2\lambda + 4\mu)a + \lambda b = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda + 4\mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Следовательно, набор $c,\ d$ — базис, потому что они линейно независимы и их столько же, сколько векторов в базисе.

Далее, чтобы найти координаты векторов a и b в базисе $c,\ d$ нужно, например, выразить a и b через c и d. Заметим, что $a = \dfrac{1}{4}d$, следовательно $b = c - 2a = c - \dfrac{1}{2}d$.

Ответ. $a = (0;1/4), b = (1, -1/2)$

5. Выберите из следующего набора многочленов набор из максимального количества линейно независимых многочленов. Достаточно выписать один из таких наборов. 1) x; 2) $2x$; 3) 3; 4) $2x-5$; 5) x^2. В ответ запишите номера многочленов через запятую по возрастанию без пробелов и круглых скобок.

Решение. Заметим, что многочлены номер 1 и 2 линейно зависимы, следовательно не могут одновременно входить в набор линейно независимых многочленов. Далее, наборы 1, 3, 4 и 2, 3, 4 тоже линейно зависимы. Отсюда видно, что в наборе не может быть 4 многочлена. 3 многочлена можно выбрать из данных большим количеством способов, например, набор 1, 4, 5 — подходит. Запишем в ответ все возможные наборы.

Ответ. 1,3,5; 1,4,5; 2,3,5; 2,4,5; 3,4,5.