Решения контрольной работы

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

9 марта 2015 г.

Здесь и далее разбираем один из двух предлагавшихся вариантов для каждой задачи.

Задача 1.

Отметьте все верные утверждения:
Множество многочленов степени не больше 5, не имеющих слагаемых (одночленов) степени 3, является линейным пространством.
Множество векторов в трёхмерном пространстве, координаты которых заданы уравнениями $x + y - 4z = 0$, $-3(y + 3) + 9 = 0$, является линейным подпространством в линейном пространстве всех векторов.
Множество троек действительных чисел $(x; y; z)$ с условием $x + y = z$ является линейным пространством.

Эта задача оказалась неверно оцененной из-за первого утверждения. Оно верное. Как и все остальные.
Действительно, во множестве есть многочлен 0, так как он имеет степень ниже 5 и не имеет слагаемых (а именно, ненулевых слагаемых!) степени 3. Кроме того, оно замкнуто относительно сложения: если два многочлена имеют степень не выше 5 и не содержат слагаемых степени 3, то и их сумма тоже. Все остальные свойства линейного пространства очевидны.

Уравнение $-3(y + 3) + 9 = 0$ равносильно $y = 0$ — плоскость в трехмерном пространстве, проходящая через ноль — значит, является линейным подпространством. Со вторым уравнением то же самое. А пересечение линейных подпространств является линейным подпространством..

Данное множество троек можно представлять как трехмерное пространство. Заданное условие высекает плоскость в нем и является линейным подпространством.

Задача 2.

Пусть F — линейное отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, такое что $F((1; 0)) = (1; 2; 4)$, $F((0; 1)) = (0; 1; -1)$. Найдите $F((2; 3)) + F((1; -2))$.

$F((2; 3)) + F((1; -2)) = F((3; 1)) = 3F((1; 0)) + F((0; 1)) = 3(1; 2; 4) + (0; 1; -1) = (3; 6; 12) + (0; 1; -1) = (3; 7; 11)$

Задача 3.

Выберите из следующего набора векторов в $\mathbb{R}^4$ набор из максимального количества линейно независимых векторов. Достаточно выписать один из таких наборов. 1) $(0;0;0;0)$*; 2)* $(1;-1;1;-1)$*; 3)* $(-1;1;-1;1)$*; 4)* $(2;0;0;1)$*; 5)* $(0;4;3;0)$.

Нулевой вектор в искомый набор точно не войдет, так как он линейно зависим с любым другим вектором. Второй и третий вектор отличаются умножением на -1, поэтому в искомый набор войдет не более, чем один из них. Заметим, что четвертый и пятый вектора линейно независимы, так как ненулевые координаты у них различные. Хорошо видно, что в линейной оболочке четвертого и пятого векторов не может лежать второй (и третий) вектор, значит, его можно добавить (или третий) и система останется линейно независимой. Значит, получаем наборы 2, 4, 5 и 3, 4, 5.

Задача 4.

Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Решим задачу старым добрым методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -13 & -2 \\ 0 & -33 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & -13 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{142}{13} \end{pmatrix}$$

Ранг 3.