Собственный базис

ЛЕКЦИЯ 7

Как записать отображение в координатах?

Пусть $f: L \to M$ — линейное отображение. Как его можно задать «формулой»?

Для этого нужно как-то задавать векторы пространств, т.е. нужны базисы в L и M.

Итак, базисы

Пусть $l_1, \dots, l_n$ - базис пространства L

Узнаем, куда отображение f переводит базисные векторы $l_1, \dots, l_n$

А как можно ответить на этот вопрос? Не пальцем же векторы показать? Для этого нужен базис пространства M.

Пусть $m_1, \dots, m_k$ — базис пространства M

Образы базисных векторов

$$f(l_1) = a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \cdots + a_{1k}m_k$$

$$f(l_2) = a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{2k}m_k$$

$$\vdots$$

$$f(l_n) = a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + \cdots + a_{nk}m_k$$

А образ любого вектора?

$l = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \cdots + x_n l_n$

$f(l) = x_1 f(l_1) + x_2 f(l_2) + \cdots + x_n f(l_n)$ – мы воспользовались линейностью отображения f. Теперь мы можем подставить $f(l_1), f(l_2), \ldots, f(l_n)$.

Образ вектора

$f(l) =$

$x_1(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \cdots + a_{1k}m_k) +$

$x_2(a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{2k}m_k) +$

$\vdots$

$x_n(a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + \cdots + a_{nk}m_k)$

Знакомое выражение!

Образ вектора

$f(l) =$

$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n)m_1 +$

$(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}\, x_n)m_2 +$

$\vdots$

$(a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \cdots + a_{nk}x_n)m_k$

Другими словами

Координаты вектора $f(l)$ в базисе $m_1, \dots, m_k$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots a_{n1}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{n2}x_n \\ \vdots \\ a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \cdots a_{nk}x_n \end{pmatrix}$$

Опять появляется матрица!

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$f(l_i) = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{ik} \end{pmatrix}$ i-тый столбец матрицы

Матрица отображения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$ - матрица, по столбцам которой записаны образы базисных векторов пространства L при действии отображения f, называется матрицей отображения f (в данных базисах)

Пример

Пусть f – линейное отображение, действующее из пространства многочленов степени не выше 3 в пространство многочленов степени не выше 2: $f(P) = P'$.

Выберем в пространстве многочленов степени не выше 3 базис $1, x, x^2, x^3$; в пространстве многочленов степени не выше 2 базис $1, x, x^2$.

Пример

Найдём координаты образов базисных векторов.

$$f(x^3) = 3x^2$$

$$f(x^2) = 2x$$

$$f(x) = 1$$

$$f(1) = 0$$

Пример

Значит, матрица перехода в этих базисах запишется:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Действительно, скажем

$$(x^3 - 2x^2 + x - 4)' = 3x^2 - 4x + 1$$

Пример

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Оператор

А если отображение было $f : L \to L$?

Такое отображение называют линейным оператором.

В записи такого отображения будет участвовать только один базис, базис пространства L

Оператор

Матрица линейного оператора – матрица, по столбцам которой записаны образы базисных векторов (их координаты в этом же базисе).

Пример

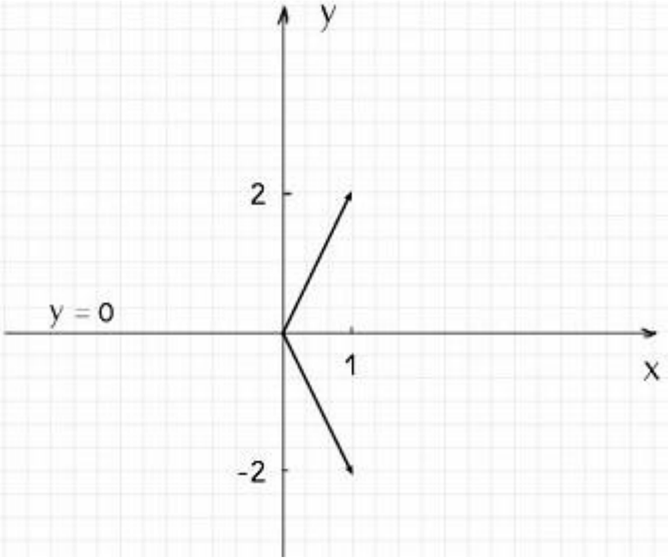
Симметрия плоскости относительно прямой $y = 0$

Это линейный оператор

Его матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ - первый базисный вектор перешёл в себя, второй отразился симметрично относительно прямой $y = 0$

Пример

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$



Пример

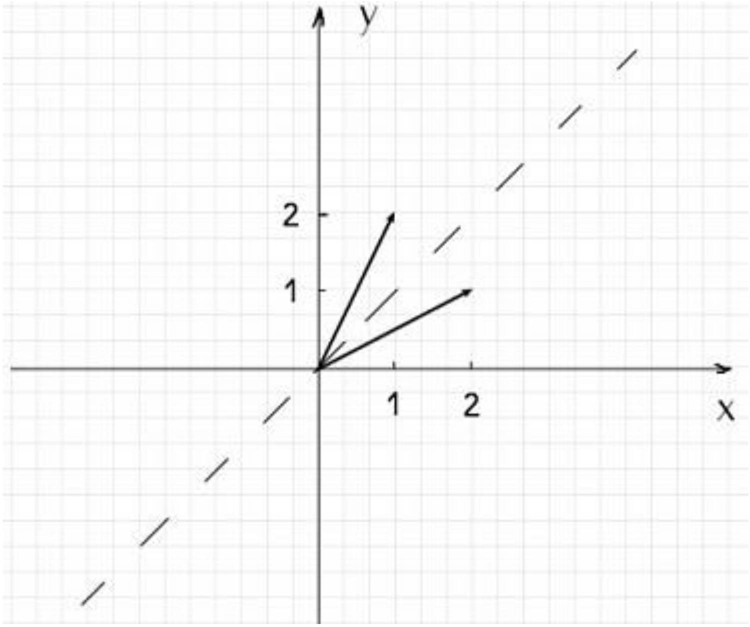
Симметрия плоскости относительно прямой $y = x$

Базисные векторы переходят друг в друга.

Его матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Пример

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

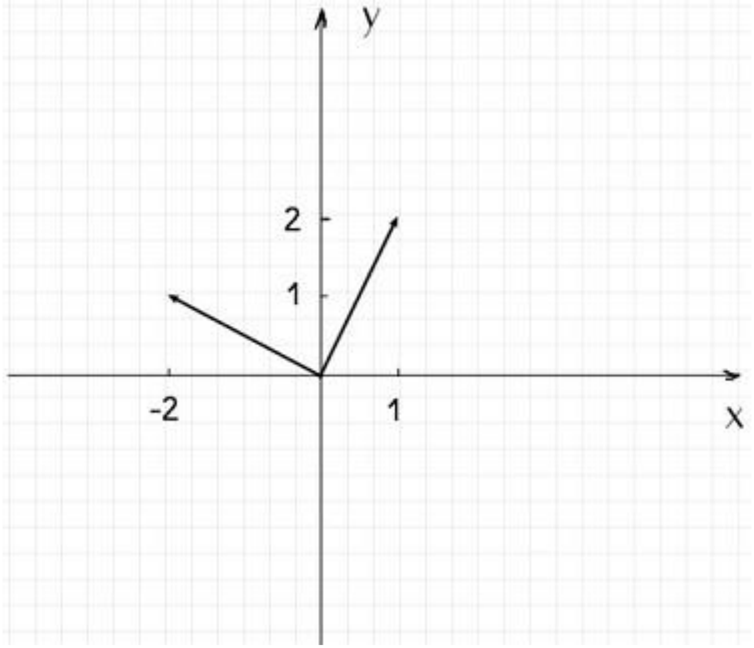


Пример

Поворот плоскости относительно точки 0 на $90°$. Первый вектор переходит во второй, второй в противоположный первому. Матрица перехода $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

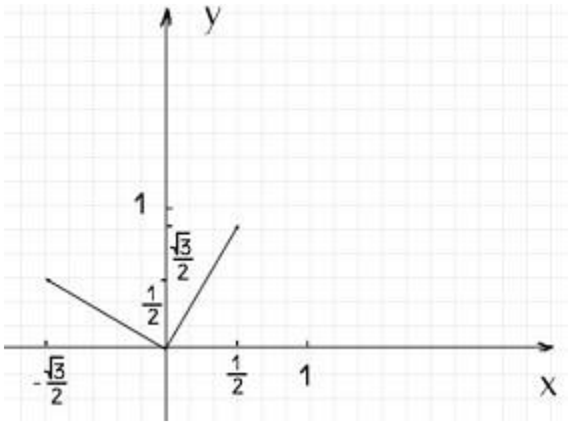
Пример

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Пример

Поворот плоскости относительно точки 0 на $60°$. Матрица перехода $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



Замена базиса

Мы умеем переходить от координат в одном базисе к координатам в другом, если знаем связь между базисами, т.е. матрицу перехода. А если мы знаем матрицу отображения в одних базисах, а хотим перейти к другим?

Замена базиса

Матрица отображения A состоит из векторов столбцов – координат образов базисных векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$ в базисе $m_1, m_2, \dots, m_k$. Если мы хотим заменить первый базис , нужно будет записать образы других векторов, если второй – в другом базисе.

Замена базиса

Итак, мы хотим записать матрицу линейного отображения в базисах $l_1{}', l_2{}', \dots, l_n{}'$ и $m_1', m_2', \dots, m_k'$. Заменим сначала базис $m_1, m_2, \dots, m_k$ на $m_1', m_2', \dots, m_k'$. Запишем координаты векторов $m_1, m_2, \dots, m_k$ в базисе $m_1', m_2', \dots, m_k'$ и составим из них матрицу перехода B от базиса $m_1, m_2, \dots, m_k$ к базису $m_1', m_2', \dots, m_k'$.

Замена базиса

Пусть x – вектор-столбец координат некоторого вектора l в базисе $l_1, \dots, l_n$. Тогда вектор Ax – вектор-столбец координат вектора $f(l)$ в базисе $m_1, m_2, \dots, m_k$. Вектор BAx - вектор-столбец координат вектора $f(l)$ в базисе $m'_1, m'_2, \dots, m'_k$.

Замена базиса

Запишем координаты векторов $l_1', l_2', \dots, l_n'$в базисе $l_1, l_2, \dots, l_n$ и составим из них матрицу перехода C от базиса $l_1', l_2', \dots, l_n'$ к базису $l_1, l_2, \dots, l_n$. Теперь, зная координаты вектора в базисе $l_1', l_2', \dots, l_n'$, мы можем найти его координаты в базисе $l_1, l_2, \dots, l_n$.

Замена базиса

Если x' – вектор-столбец координат некоторого вектора l в базисе $l'_1, l'_2, \dots, l'_n$, то
Cx' - вектор-столбец его координат в базисе $l_1, \dots, l_n$. Тогда вектор ACx'– вектор-столбец координат вектора $f(l)$ в базисе $m_1, m_2, \dots, m_k$.
Вектор $BACx'$ – вектор-столбец координат вектора $f(l)$ в базисе $m'_1, m'_2, \dots, m'_k$.

Замена базиса

Это значит, что BAC – матрица отображения f в паре базисов $l_1', l_2', \dots, l_n'$ и $m_1', m_2', \dots, m_k'$. Здесь C – матрица перехода от базиса $l_1', l_2', \dots, l_n'$ к базису $l_1, l_2, \dots, l_n$; A – матрица отображения f в базисах $l_1, l_2, \dots, l_n$ и $m_1, m_2, \dots, m_k$; B – матрица перехода от $m_1, m_2, \dots, m_k$ к $m_1', m_2', \dots, m_k'$.

Замена базиса линейного оператора

А если $f : L \to L$ – линейный оператор, как перейти к другому базису?

Тогда базисы $l_1, l_2, \dots, l_n$ и $m_1, m_2, \dots, m_k$; $l_1{}', l_2{}', \dots, l_n{}'$ и $m_1', m_2', \dots, m_k'$ – совпадают.

Замена базиса линейного оператора

Тогда C – матрица перехода от базиса $l_1{}', l_2{}', \dots, l_n{}'$ к базису $l_1, l_2, \dots, l_n$, а B – матрица перехода от базиса $l_1, l_2, \dots, l_n$ к базису $l_1', l_2', \dots, l_n'$.

Значит, $B = C^{-1}$.

Замена базиса линейного оператора

Итак, если в базисе $l_1, l_2, \dots, l_n$ линейный оператор f записывается матрицей A, C – матрица перехода от базиса $l_1', l_2', \dots, l_n'$ к базису $l_1, l_2, \dots, l_n$, то в базисе $l_1', l_2', \dots, l_n'$ матрица линейного оператора f запишется $C^{-1}AC$

Зачем это нужно?

Пусть линейный оператор, действующий в двумерном векторном пространстве, действует так: первый базисный вектор увеличивает в 5 раз, т.е. умножает на 5; второй уменьшает в 3 раза, т.е. умножает на $\frac{1}{3}$. В стандартном базисе матрица этого оператора будет $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Зачем это нужно?

Как будет выглядеть матрица оператора в базисе $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & \frac{7}{3}\\ \frac{7}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}$$

Зачем это нужно?

Будет выглядеть ужасно.

Отсюда мораль – не надо смотреть на матрицу отображения в не подходящем базисе. Надо смотреть в подходящем базисе.

Какой базис хорош?

Базис, в котором отображение лишь растягивает/сжимает базисные векторы, выглядит очень хорошим и удобным. Но всегда ли такой есть?

Ищем хороший базис

Если линейный оператор умножает какой-то вектор v на λ, то $Av = \lambda v$.

Значит, линейный оператор $(Av - \lambda v)$ переводит вектор в 0, т.е. обладает нетривиальным ядром, $\dim\ker(Av - \lambda v) \neq 0$. А из этого уже следует, что $\dim Im(Av - \lambda v) < n$, т.е. набор образов базисных векторов линейно зависим.

Ищем хороший базис

Значит, определитель матрицы, задающей этот оператор, равен нулю. Это даёт нам условие на λ!

Матрица линейного оператора $(Av - \lambda v)$ есть $(A - \lambda E)$.

Итак, мы нашли условие на λ:

$\det(A - \lambda E) = 0$

Пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ - матрица, задающая оператор в

стандартном базисе.

$\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

Пример

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \end{array}\right.$$

Пример

Итак, мы теперь знаем, что есть вектор, который при действии оператора умножается на 2 и вектор, который при действии оператора умножается на 4. Матрица оператора в этом базисе будет замечательно простой:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример

Как найти векторы этого базиса? Найдём сначала вектор, увеличивающийся в 2 раза.

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ -1 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -v_1 + 3v_2 = 0$$

Таких векторов много, но нам достаточно одного, например $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример

Найдём вектор, увеличивающийся в 4 раза.

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 3 \\ -1 & 5-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad -v_1 + v_2 = 0$$

Таких векторов много, но нам достаточно одного, например $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Собственный вектор

Вектор, образ которого при действии оператора пропорционален самому вектору, называется собственным вектором оператора.

$$f(v) = \lambda v$$

Собственное значение

Коэффициент пропорциональности λ образа вектора и вектора называется собственным значением

$$f(v) = \lambda v$$

Пример

Любой вектор из ядра оператора - собственный

Собственный базис

Базис из собственных векторов оператора – собственный базис.

В собственном базисе матрица оператора диагональна.

Собственное подпространство

Подпространство, образ которого при действии оператора лежит в самом подпространстве $f(M) \subset M$, называется собственным подпространством.

Пример

Множество собственных векторов с одном собственным значением λ – собственное подпространство.

Как искать собственный базис?

1. Найти собственные значение, решив уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$

2. Найти для каждого собственного значения собственный вектор, решив уравнение $(A - \lambda E)v = 0$

Всегда есть собственный базис?

Нет, не всегда. Например, при действии оператора «поворот плоскости на $60°$» или «поворот плоскости на $90°$» все векторы меняют направление, никакой не умножается на число.

А что в этом случае происходит с алгоритмом поиска?

Рассмотрим поворот плоскости на $90°$. Матрица оператора в стандартном базисе $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Мы знаем, что собственных векторов нет, но применим, тем не менее, алгоритм поиска.

А что в этом случае происходит с алгоритмом поиска?

1. $\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

Это уравнение не имеет корней среди действительных чисел, но имеет два комплексных корня!

А что в этом случае происходит с алгоритмом поиска?

Если бы мы рассматривали действие оператора в другом линейном пространстве, над полем комплексных чисел, алгоритм бы сработал!

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = i \\ \lambda = -i \end{array}\right.$$

А что в этом случае происходит с алгоритмом поиска?

2. Найдём собственные векторы

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iv_1 + v_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

А что в этом случае происходит с алгоритмом поиска?

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iv_1 - v_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теорема о представлении матрицы в специальном виде

Пусть A матрица $n \times n$ такова, что уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет n различных корней. Тогда найдётся матрица, такая, что матрица $C^{-1}AC$ диагональна, причём на диагонали стоят решения уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ - собственные значения матрицы A.

«Доказательство»

Найдём собственный базис для матрицы A – набор из n собственных векторов. Пусть C – матрица перехода к собственному базису, C^{-1} – матрица перехода от собственного базиса к стандартному базису.

Тогда матрица $C^{-1}AC$ – диагональна.

Как искать матрицы перехода?

C^{-1} – матрица перехода от собственного базиса к стандартному базису.

Это значит, что по столбцам в ней стоят координаты собственных векторов в стандартном базисе.

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Мы уже нашли собственные векторы

$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда

$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$