Решения домашнего задания 6

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

23 марта 2015 г.

Здесь и далее разбираем один из трех предлагавшихся вариантов для каждой задачи.

Задача 1.

Матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *домножили слева на некоторую матрицу* X*, так что получилась матрица* $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$*, то есть* $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$*. Найдите матрицу* X*.*

Заметим, что если в первоначальной матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ к первой строке прибавить вторую, то получится матрица $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Значит, как объясняли на лекции, нам нужно взять такую матрицу X, которая является единичной матрицей, у которой тоже к первой строчке прибавили вторую, то есть $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Проверим ответ вычислением:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача 2.

Дана матрица $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*. Найдите строку или столбец с наибольшим количеством нулей и разложите определитель матрицы по ней/нему. В ответ запишите по порядку сначала определители соответствующих матриц* 2×2*, а затем определитель всей матрицы.*

Ясно, что больше всего нулей в первой строке. Разложим определитель по ней:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0) - 3 \cdot (1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1) + 0 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 0 \cdot (-2) - 3 \cdot (-5) + 0 \cdot (-2) = 15$$

Итого, определитель всей матрицы равен 15, а определители матриц 2×2 равны $-2, -5, -2$, соответственно. Отметим, что, разумеется, для того, чтобы найти определитель всей матрицы, не требуется считать определители матриц 2×2, которые умножаются на ноль.

Задача 3.

Выберите из следующих матриц ту, которая является обратной к $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$*:*

$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 12 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

В этой задаче проще всего умножать данную матрицу на каждую из предложенных, пока не получится единичная. Однако, мы можем найти обратную матрицу по алгоритму из лекции: первые три определителя матриц 2×2 мы уже нашли. Оставшиеся находятся аналогично, выпишем их для второй и третьей строки: $-3, 0, -3, 12, 0, -3$. Теперь составим из этих чисел матрицу, не забывая о знаках (он равен $(-1)^{i+j}$, если матрица 2×2 получилась вычеркиванием элемента из i-той строчки, j-той столбца):

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Теперь транспонируем полученную матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 12 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Осталось поделить на определитель:

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 12 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица совпала с первой из предложенных.

Задача 4.

Решите в комплексных числах уравнение $x^2 - 8x + 20 = 0$.

Найдем дискриминант этого уравнения:

$$D = 8^2 - 4 \cdot 20 = 64 - 80 = -16$$

Тогда корнями из дискриминанта будут являться $-4i$ и $4i$. Найдем корни:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{8 + (-4i)}{2} = 4 - 2i \\ x = \dfrac{8 + 4i}{2} = 4 + 2i \end{array}\right.$$