Линейное пространство

ЛЕКЦИЯ 1

Векторы в трёхмерном пространстве

Векторы можно складывать по правилу параллелограмма

Вектор можно умножить на число

Умножение на 1 не изменяет вектор $1 \cdot l = l$, числа можно умножать как мы привыкли: $a(bv) = (ab)v$.

Сложение векторов v_1 и v_2 по правилу параллелограмма и умножение на число a связаны правилами дистрибутивности:

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2 \qquad (a_1 + a_2)v = a_1 v + a_2 v$$

Линейное (векторное) пространство

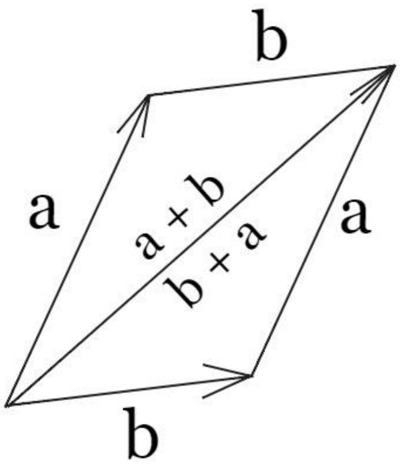
Хотим формально определить пространство, обладающее теми же свойствами, что и трёхмерное векторное пространство, но «забыть» о его геометрической структуре

Что значит, что векторы можно складывать? Выделим основные свойства сложения и потребуем, чтобы сложение в линейном пространстве удовлетворяло этим свойствам

Потребуем, чтобы свойства умножения вектора на число и свойства дистрибутивности выполнялись в линейном пространстве

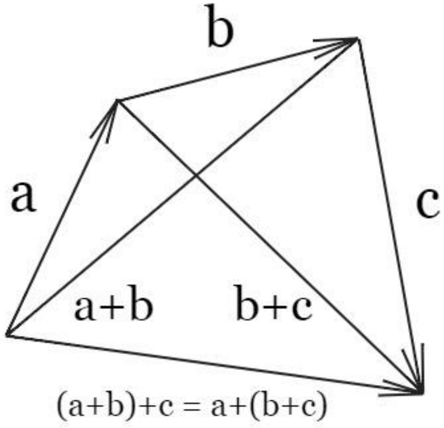
Сложение векторов коммутативно

$$a + b = b + a$$



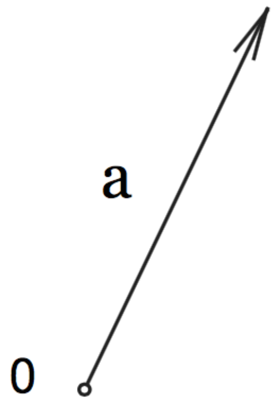
Сложение векторов ассоциативно

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$



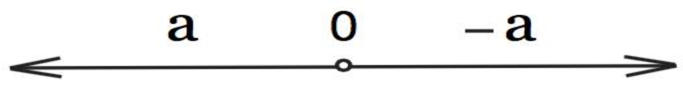
Существует нулевой вектор

$$a + 0 = 0 + a = a$$



У каждого вектора существует обратный

$$a + (-a) = 0$$



Группа по сложению

Множества, обладающие всеми перечисленными свойствами, математики называют *группой по сложению* или *абелевой группой*

Коммутативность $a + b = b + a$

Ассоциативность $(a + b) + c = a + (b + c)$

Существование нейтрального элемента $a + 0 = 0 + a = a$

Существование обратного элемента $a + (-a) = 0$

Примеры групп по сложению

Векторы в трёхмерном или двумерном пространстве

Целые числа

Примеры групп по сложению

Множество всех функций, определённых на множестве S

$f(x) + (-f)(x) = 0$ (0 – это тоже функция, определённая на множестве S и равная на нём нулю тождественно)

$f(x) + 0 = f(x)$

Множество всех функций, обращающихся в ноль в данной точке

Примеры не групп

Множество натуральных чисел

Множество многочленов третьей степени

$$(3x^3 - 6x^2 + 2x - 4) + (-3x^3 + 4x^2 - 2x + 3) = -2x^2 - 1$$

Множество нечётных чисел

$$3 + 5 = 8$$

Множество функций, не равных нулю ни в какой точке отрезка $[0; 2]$

$$f(x) = x + 2 \quad g(x) = -1 - 2x \qquad f(x) + g(x) = 1 - x$$

Линейное пространство. Умножение вектора на число

Итак, линейное пространство является группой по сложению

Что можно сказать про умножение на число?

1. Каждый вектор из линейного пространства L можно умножить на любое число; получится снова вектор линейного пространства L
2. Умножение на 1 не меняет вектор: $1l = l$, где $l \in L$

Линейное пространство. Умножение вектора на число

3. Умножение ассоциативно: $a(bl) = (ab)l$, где a и b числа, l – вектор

4. Умножение векторов на число и сложение векторов связаны законами дистрибутивности:

$a(l_1 + l_2) = al_1 + al_2$ $\qquad$ $(a + b)l = al + bl$, где a и b числа, l, l_1, l_2 – векторы

Умножение на число. На какое?

Обычно мы говорим об умножении на действительное число

Позже нам понадобятся комплексные числа – числа, где есть квадратный корень из (-1), любое квадратное уравнение решается, а синус бывает больше 1. Мы посвятим комплексным числам отдельное занятие. До этого мы умножаем векторы на действительные числа, говоря математически – рассматриваем линейные пространства над полем действительных чисел.

Ограничивает ли нас умножение на число?

Множество функций с целочисленными значениями является группой по сложению, но не является линейным пространством

Множество векторов с целыми координатами является группой по сложению, но не является линейным пространством:
$0.01\ (1; 2; 3) = (0.01; 0.02; 0.03)$. Мы умножили вектор $(1; 2; 3)$ с целочисленными координатами на число 0.01 и получили вектор с нецелочисленными координатами.

Определение линейного пространства

Линейное пространство – это множество векторов, являющееся группой по сложению и такое, что операция умножения вектора на число обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности, и умножение на единицу не меняет вектор.

Примеры линейных пространств

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$

Двумерное или трёхмерное векторное пространство

Множество функций, определённых на некотором множестве S

Множество многочленов степени не выше 3

Множество функций, обращающихся в ноль в точке x_0

Множество функций, удовлетворяющих соотношению $f'(x) = 3f(x)$

Простые свойства линейных пространств

$0l = 0$, где l – любой вектор

$$0l + 0l = (0+0)l = 0l$$
$$0l + 0l + (-0l) = 0l + (-0l)$$
$$0l = 0$$

$a0 = 0$, где a –любое число

$$a0 + a0 = a(0+0) = a0$$
$$a0 + a0 + (-a0) = a0 + (-a0)$$
$$a0 = 0$$

Замечание. Мы обозначаем число $\mathbf{0}$ и нулевой элемент линейного пространства одним и тем же символом $\mathbf{0}$. Это немного непривычно, но удобно.

Простые свойства линейных пространств

$(-1)l = -l$, где l – любой вектор

$l + (-1)l = 1l + (-1)l = \big(1 + (-1)\big)l = 0l = 0$, т.е. $(-1)l = -l$

Если $al = 0$, где a – число, l – вектор, то либо $a = 0$, либо $l = 0$

Если $a = 0$, то утверждение верно. Пусть $a \neq 0$.

$0 = \frac{1}{a}0 = \frac{1}{a}(al) = \left(\frac{1}{a}a\right)l = 1l = l$

Подпространство

Пусть L – линейное пространство, $M \subset L$ – его подмножество, само являющееся линейным пространством. Мы будем говорить, что M – линейное подпространство или подпространство пространства L.

Для того, чтобы подмножество линейного пространства являлось линейным подпространством, необходимо и достаточно чтобы операции сложения и умножения на число не выводили за пределы этого подмножества.

Примеры подпространств

Множество многочленов степени не выше 3 является подпространством пространства всех многочленов

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) =$$
$$= (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Может быть, коэффициенты a_3 и b_3 сократятся, но многочлен останется многочленом степени не выше 3

$$\lambda(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = \lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0$$

Примеры подпространств

Множество функций, обращающихся в ноль в точке x_0, является подпространством пространства всех функций.

Действительно, если $f(x_0) = 0$ и $\mathrm{g}(x_0) = 0$, то $f(x_0) + \mathrm{g}(x_0) = 0$, $\lambda f(x_0) = 0$

Множество функций, удовлетворяющих соотношению $f'(x) = 3f(x)$, является подпространством пространства всех функций.

Действительно, если $f'(x) = 3f(x)$ и $g'(x) = 3g(x)$, то

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 3f(x) + 3g(x) = 3(f + g)(x)$