Системы линейных уравнений. Метод Гаусса

ЛЕКЦИЯ 4

Это же просто!

Как же мы решали такие задачи в школе?

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ 10 - y - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ 10 - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ -2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Так что мы сделали?

1. Выразили x из первого уравнения

2. Подставили выражение во второе уравнение и получили линейное уравнение от y

3. Нашли y

4. Подставили в первое уравнение и нашли x

Хороший план!

1. Выражаем первую переменную из первого уравнения, подставляем выражение в остальные уравнения

2. Все уравнения системы, кроме первого, образуют систему с меньшим количеством переменных. Поступаем с ней так же – см. п.1

Хороший план!

3. В конце концов остается одно уравнение от одной переменной, решаем его

4. Подставляем решение в предыдущее уравнение, находим новую переменную

5. Повторяем п. 4 пока не найдём все переменные.

Жалко, что нереалистичный

А что, если в первом уравнении нет некоторых переменных, например, первой? А во втором – второй?

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Жалко, что нереалистичный

А что, если уравнения «кончились» раньше, чем переменные, и в последнем уравнении осталась не одна, а несколько переменных?

$$\begin{cases} x = z + y - t \\ y = 6 - 3z + t \\ z + t = 1 \end{cases}$$

Жалко, что нереалистичный

А что, если переменные «кончились» раньше, чем уравнения, и с последней переменной осталось не одно уравнение, а несколько?

$$\begin{cases} x = 10 - y \\ y + 3 = 9 \\ 2y - 7 = 15 \end{cases}$$

Попробуем исправить!

Тогда мы получим алгоритм решения любой системы линейных уравнений

В первом уравнении нет первой переменной

Если в первом уравнении нет первой переменной, во втором – второй и т.д.

Можем считать за первую переменную какую-нибудь из тех, что есть в первом уравнении.

В первом уравнении нет первой переменной

А можем поменять уравнения местами так, чтобы первым оказалось то, где есть первая переменная. Если такого уравнения не найдётся, то и переменной в системе не было!

Пример

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

В последнем уравнении осталось несколько переменных

Эту проблему не решить перестановкой уравнений: у простейшей системы

$$x + y = 4$$

решений много. Любая пара $(x; 4 - x)$ является решением этой системы из одного уравнения

В последнем уравнении осталось несколько переменных

Можно справиться с проблемой так же: выразить все переменные через несколько «свободных», которые смогут принимать любые значения.

Пример

$$\begin{cases} x = z + y - t \\ y = 6 - 3z + t \\ z + t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + y - t \\ y = 6 - 3z + t \\ z = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = z + y - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Пример

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Любой набор чисел вида

$(4 + 2t; 3 + 4t; 1 - t; t)$, где t – любое число, будет решением исходной системы

С последней переменной осталось несколько уравнений

Эту проблему тоже не решить перестановкой уравнений или переменных. Эта проблема может даже привести к неразрешимости системы!

Пример

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ 10 - 2y = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

Что делать?

Ничего не поделаешь! Если система содержит противоречащие друг другу уравнения, она не имеет решения.

Так всегда, если уравнений слишком много?

Может случиться, что уравнений много, но они друг другу не противоречат, а вытекают друг из друга. Тогда решение может и быть.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \\ 5x + 3y = 42 \end{cases}$$

А где же метод Гаусса?

Мы его уже почти обсудили! Осталось ввести новые обозначения.

Матрица системы

Вместо системы $\begin{cases} 2x + 3y = 24 \\ 4x - y = 22 \end{cases}$

мы будем писать такую табличку

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 24 \\ 4 & -1 & 22 \end{array}\right)$$

Она называется расширенной матрицей системы уравнений

Матрица системы

Табличку $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ мы будем называть матрицей системы. Она получается из расширенной матрицы «забыванием» столбца с правыми частями уравнений.

Матрица системы

Для того, чтобы выписать матрицу системы, нужно провести некоторую работу: уравнения написать в едином порядке, свободные коэффициенты перенести в правую часть

Пример

$$\begin{cases} z - y + 4 = 2x \\ x - z = y \\ z + y + x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = -4 \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

Теперь можно составить матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Что происходит с матрицей при решении системы

Но мы же выражали одни переменные через другие! Матрица испортится!

Попробуем записать решение иначе

Вместо этого перехода

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ 10 - y - y = 2 \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ -y - y = 2 - 10 \end{cases}$$

Пробуем записать решение иначе

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ -2y = -8 \end{cases}$$

Приведя подобные члены, мы получили новую систему, проще: во втором уравнении участвует только y

А что произошло с матрицей?

$$\left(\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}10\\ 2\end{matrix}\right)$$

Вычтем из второй строки первую, поэлементно

$$\left(\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}10\\ 2\end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}10\\ -8\end{matrix}\right)$$

А что произошло с матрицей?

Мы получили матрицу упрощенной системы. Конечно, ведь мы проводили с системой и с матрицей одни и те же действия, вычитали из второй строки первую!

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ -2y = -8 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

Повезло?

Ведь x сократился случайно, если бы второе уравнение начиналось с $2x$, так бы не получилось!

Правильно, поэтому нужно вычитать первую строчку, умноженную на нужный коэффициент.

Пример

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x - y - 2(x + y) = 2 - 2 \cdot 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ -y - 2y = -18 \end{cases}$$

А что произошло с матрицей?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -18 \end{array}\right)$$

Мы снова получили матрицу системы после упрощения!

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ -y - 2y = -18 \end{cases}$$

Всё-таки повезло?

А если первое уравнение содержало не x , а, например, $2x$?

Тогда умножим все коэффициенты первого уравнения на $\frac{1}{2}$ и сведём случай к разобранному.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 1 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

А что произошло с матрицей?

То же самое! Умножаем первую строчку на $\frac{1}{2}$ и получаем первый коэффициент равный 1

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

Что же мы сделали?

«Выразим первую переменную из первого уравнения» – гласил план.

Мы поменяли местами уравнения системы так, чтобы в первом уравнении была первая переменная.

Мы поменяли местами строки матрицы так, чтобы в первой строчке первый элемент был ненулевой.

Что же мы сделали?

Мы умножили первое уравнение на какое-то число так, чтобы коэффициент при первой переменной стал равным 1.

Умножили первую строчку матрицы на какое-то число так, чтобы коэффициент при первой переменной стал равным 1.

Что же мы сделали?

Вычли из каждого уравнения системы, начиная со второго, первое уравнение, умноженное на такой коэффициент, чтобы первая переменная сократилась.

Вычли из каждой строчки матрицы, начиная со второй, первую строчку, умноженную на такой коэффициент, чтобы первый элемент строчки сократился.

Пример

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 1 \\ x - y + 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 1 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}z = 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{7}{2}z = -1 \end{cases}$$

Пример. Что произошло с матрицей?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & -1 \end{array}\right)$$

Замечание

Пришлось делать вычисления с дробями, а если бы мы поменяли порядок уравнений и первым поставили второе, вычисления бы сократились.

Как действовать дальше?

Забыть про первую переменную и первое уравнение, продолжать решать так же оставшуюся систему.

Забыть про первую строчку и первый столбец, продолжать упрощать матрицу дальше.

Пример

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 3y - 7z = -4 \\ 7y - 14z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 3y - 7z = -4 \\ y - 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ 3y - 7z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ -z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Пример

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \\ 0 & 7 & -14 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Что мы получили?

Мы нашли переменную z. Теперь её можно подставить в предыдущие уравнения, найти оставшиеся переменные.

А с матрицей?

Мы привели матрицу к верхнетреугольному виду: под диагональю матрицы стоят одни нули.

Как действовать дальше?

По плану мы должны подставить значение найденной переменной в предыдущие уравнения. Это значит, что переменная z больше не должна в них присутствовать после подстановки.

В нашем случае

$$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 3 \\ y - 2 = -1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

В нашем случае

Теперь мы нашли y и надо подставлять его значение в предыдущее уравнение.

А с матрицей как поступим?

Теперь будем вычитать последнюю строчку из предыдущих, чтобы сократился последний элемент строчки.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Что получилось с матрицей

Если забыть про последнюю строчку и последний столбец (в нём везде нули, кроме последней строчки, которую мы не трогаем), мы оказались в той же ситуации, что и одно преобразование назад, только со второй строчкой. В ней записаны всего два числа, одно «за чертой», другое – единица.

Что мы получим в конце?

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ или матрицу } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Это и есть решение системы.

Итак, в чем состоит алгоритм?

1. Поменять местами строки матрицы так, чтобы в первой строчке первый элемент был ненулевой.

2. Умножить первую строчку матрицы на какое-то число так, чтобы коэффициент при первой переменной стал равным 1.

Итак, в чём состоит алгоритм?

3. Вычесть из каждой строчки матрицы, начиная со второй, первую строчку, умноженную на такой коэффициент, чтобы первый элемент строчки сократился.

4. «Забыть» про первую строчку и первый столбец. Если в матрице остались строчки, то повторить всё, начиная с п.1 для уменьшенной матрицы.

Итак, в чём состоит алгоритм?

5. Когда матрица будет верхнетреугольной, строчек больше не останется, умножить последнюю строчку на число так, чтобы первый ее ненулевой элемент стал равен единице.

6. Вычесть из каждой строчки последнюю, умноженную на такой коэффициент, чтобы первый ненулевой элемент последней строчки «сократил» все элементы над ним.

Итак, в чём состоит алгоритм?

6. «Забыть» про последнюю строчку и последний столбец, повторить всё, начиная с пункта 5.

7. Когда строчек не останется, мы получим матрицу с единицами на диагонали и решением системы в правом столбце.

Ранг матрицы

Количество строчек, которое получится после завершение работы алгоритма, называется рангом системы или рангом матрицы

Что могло пойти не так?

Строчки матрицы до черты могли «сократиться» раньше, чем строчки расширенной матрицы. Тогда система неразрешима.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Или наоборот

Строчки для вычитания уже кончились, а в последней строке остались ненулевые элементы.

$$\left(\begin{matrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right)$$

Такая система имеет много решений, её решение неоднозначно.

Вектор решений

Решения системы линейных уравнений часто записывают столбцом, называют его вектором решений.

Вместо $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ пишем $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Вектор решений системы, имеющей много решений

Система, сводящаяся к матрице

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}\right)$$ имеет решение

$$\begin{cases} x = 5 - 2z \\ y = 4 - z \end{cases},$$

где z любое.

Вектор решений системы, имеющей много решений

В этом случае вектор решения мы запишем так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$