Решения домашних заданий 1 и 2

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

28 февраля 2015 г.

Домашнее задание 1.

Здесь и далее разбираем один из трех предлагавшихся вариантов для каждой задачи.

Задача 1.

При каких действительных a множество пар действительных чисел $(x; y)$ *является линейным пространством при условии* $x + y = a - 1$*?*

Множество пар действительных чисел мы рассматриваем с естественными операциями сложения и умножения на число: $(x; y)+(x_1, y_1) = (x+x_1, y+y_1), k(x; y) = (kx; ky)$. Пусть для пар $(x; y), (x_1, y_1)$: $x+y = a-1, x_1+y_1 = a-1$. Тогда для пары $(x+x_1, y+y_1)$: $x + x_1 + y + y_1 = 2a - 2$. Так как пара $(x + x_1, y + y_1)$ обязана лежать в нашем пространстве, то для нее должно быть выполнено то же самое соотношение, значит, $a - 1 = 2a - 2$, тогда $a = 1$.

Задача 2.

При каких a множество функций $f(x)$*, определённых на отрезке* $[2; 4]$ *и таких, что* $f(3) = a - 4$*, является линейным пространством?*

Рассуждение почти такое же, как и в предыдущей задаче. Если две функции имеют в точке 3 значение $a - 4$, то сумма этих функций имеет в точке 3 значение $2a - 8$. Так как сумма функций обязана лежать в нашем пространстве, то $a - 4 = 2a - 8$, откуда $a = 4$. Другой способ: так как нулевая функция (та, прибавление которой не изменяет функцию) обязана лежать в нашем пространстве, то значение в точке 3 равно нулю, откуда $a = 4$.

Задача 3.

При каких a множество векторов в трёхмерном пространстве, координаты которых заданы уравнениями $x + y + z = 0,\ 3(x + 4) - a = 0$*, является линейным подпространством в линейном пространстве всех векторов? Если таких a не существует, введите ответ "нет".*

Второе уравнение после раскрытия скобок примет вид $3x = a - 12$. Так как пространство содержит нулевой вектор, а именно $(0, 0, 0)$, то он должен удовлетворять заданным уравнениям. Для второго уравнения: $3 \cdot 0 = a - 12$, откуда $a = 12$.

Задача 4.

Отметьте все верные утверждения:
Множество многочленов степени 10 является линейным пространством
Множество функций, определённых на отрезке $[-10; 10]$ и обращающихся в 0 в точке 6, является линейным пространством
Множество функций, определённых на отрезке $[-10; 10]$ и обращающихся в 6 в точке 0, является линейным пространством

Первое утверждение неверно, так как $(-x^{10} + 1) + (x^{10} + 1) = 2$ — не многочлен десятой степени.
Второе утверждение верно, так как сумма функций, обладающих этим свойством, тоже обладает им, и аналогично для умножения функции на число.
Третье утверждение неверно, так как сумма таких функций будет иметь значение 12 в точке 0.

Задача 5.

Рассмотрим подпространство в линейном пространстве многочленов степени не выше 3, состоящее из многочленов, обращающихся в ноль в точке 3. Про элемент этого продпространства известно, что его коэффициент при x^3 равен 1, коэффициент при x^2 равен 2 и коэффициент при x равен 3. Найдите его свободный член.

Многочлен имеет вид: $x^3 + 2x^2 + 3x + a$. Подставим $x = 3$: $3^3 + 23^2 + 3 \cdot 3 + a = 0$, $54 + a = 0$. Значит, $a = -54$.

Домашнее задание 2.

Задача 1.

При каких действительных a функция из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^1$, такая что $x \mapsto a \sin x + 2x + 3a$, является линейной?

Функция $x \mapsto 2x$ — линейная, а функция $x \mapsto a(\sin x + 3)$ — линейная только при $a = 0$. Значит, их сумма будет линейной функцией только при $a = 0$.

Задача 2.

Пусть $F-$ линейная функция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^1$, такое что $F((0; 1)) = 7$, $F((1; 0)) = 3$. Найдите $F((2; 3))$.

Пользуемся линейностью: $F((2; 3)) = F((2; 0)) + F((0; 3)) = 2 \cdot F((1; 0)) + 3 \cdot F((0; 1)) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 27$

Задача 3.

Пусть $F-$ *линейное отображение из* $\mathbb{R}^2$ *в* $\mathbb{R}^3$*, такое что* $F((1;0)) = (1;0;0)$*,* $F((0;1)) = (0;1;0)$*. Найдите* $F((2;3))$*. В ответе нужно записать элемент линейного пространства в тех обозначениях, которые введены в этой задаче. Пример: (1;2;3)*

Аналогично, $F((2;3)) = 2 \cdot F((1;0)) + 3 \cdot F((0;1)) = (2;0;0) + (0;3;0) = (2;3;0)$

Задача 4.

Дана линейная функция $f : L \to \mathbb{R}^1$*,* L *— линейное пространство. Известно, что для некоторых* $a, b \in L$ *выполнено равенство* $f(a) - f(b) = 3$*. Найдите* $f(2b) - f(2a)$ *или введите "нет" (без кавычек), если недостаточно данных, чтобы вычислить значение выражения.*

По линейности, $f(2b) - f(2a) = -(f(2a) - f(2b)) = -(2f(a) - 2f(b)) = -2(f(a) - f(b)) = -6$.