Указания к домашнему заданию 4

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

23 февраля 2015 г.

В этом дополнительном материале мы дадим небольшие пояснения к домашнему заданию пятой недели.

Все задачи домашнего задания в той или иной мере посвящены методу Гаусса.

В задаче 1 нужно найти ранг матрицы. По определению из лекции ранг матрицы — это число ненулевых строк матрицы, после применения метода Гаусса. Из этого нетрудно виден способ решения подобных задач.

В задаче 2 нужно определить линейно зависима или независима данная система векторов. Здесь нужно проанализировать, что будет значить применение метода Гаусса к матрице, строки которой составлены из координат векторов. Ответ заключается в том, что система линейно независима, если после применения метода Гаусса в матрице не появилось нулевых строк и линейно зависима иначе. Ниже мы дадим объяснения этого факта.

Итак, пусть даны два вектора $v_1 = (2, 3)$, $v_2 = (3, 0)$ в линейном пространстве $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть B — это матрица A после применения метода Гаусса, тогда нетрудно проверить, что

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов v_1 и v_2:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

И заметим, что при применении шага метода Гаусса для матрицы A столбец $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ изменяется соответственно, но каждый шаг получается снова линейная комбинация векторов v_1 и v_2. Или другое объяснение: можно делать метод Гаусса для расширенной матрицы, столбец правой части которой — это столбец $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Посмотрим на конечный результат метода Гаусса, в данном случае на матрицу B. Легко видеть, что если у матрицы B нет нулевых строк, то есть конечная система линейно независима, то и исходная система линейно независима. Если же у матрицы B есть нулевые строки, то положим соответствующий нулевой строке коэффициент комбинации равным любому ненулевому числу, а остальные коэффициенты нулями, и тогда получим нетривиальный набор коэффициентов, дающий нулевой вектор.

В задачах 3 и 4, как это подробно обсуждалось на лекции, нужно решить систему уравнений. Это можно сделать любым способом, в том числе и методом Гаусса.