Дополнительный материал «Метод Крамера»

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

23 февраля 2015 г.

На четвертой неделе нашего курса мы обсуждали, как решать системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса. В этом материале мы разберем другой метод, который хоть и не является более быстрым, не всегда работает, однако, представляется нам концептуальным.

Пусть у нас есть произвольная система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Давайте вычтем второе уравнение из первого так, чтобы в первом уравнении сократилась неизвестная y. Для этого второе уравнение мы домножим на $\frac{a_{12}}{a_{22}}$ (коэффициент a_{22} может оказаться нулевым, но как будет видно далее, это лишь частный случай того результата, что мы получим в итоге):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y - \dfrac{a_{12}}{a_{22}}a_{21}x - a_{12}y = b_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{22}}b_2 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}x = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{22}} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Отсюда,

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Зная x, выразим y из второго уравнения:

$$y = \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} = \frac{b_2 - \frac{a_{21}a_{22}b_1 - a_{21}a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}}{a_{22}} = \frac{a_{11}a_{22}b_2 - a_{12}a_{21}b_2 - a_{21}a_{22}b_1 + a_{21}a_{12}b_2}{a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} =$$

$$= \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Отлично! Итого, наши решения получились такими:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Что можно понять из этих формул? Смотрите, если выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ не равно нулю, то решение системы **точно есть**. Кроме того, оно **единственно**. Значит, это выражение является важной характеристикой системы, и, кстати, оно не зависит от правой части уравнений. Оно называется *определителем* матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Если же определитель оказался равным нулю, то мы попадаем в одну из знакомых нам ситуаций: либо система противоречива, и решений нет, либо решений бесконечно много. И метод Крамера нам в этом случае ничего не говорит, так как работает только в случае ненулевого определителя — приходится прибегать к методу Гаусса.

Числителям в выражениях для x и y тоже можно придать смысл. Действительно, заменим первый столбец матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ столбцом правой части системы: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Тогда числитель в выражении неизвестной x есть определитель получившейся матрицы!

Аналогично, если мы заменим второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ столбцом правой части системы: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, то определитель полученной матрицы совпадает с числителем выражения для неизвестной y.

Эта конструкция продолжается и для n линейных уравнений с n неизвестными — выражение для переменной x_i будет отношением определителя матрицы системы с замененным i-тым столбцом к определителю матрицы системы. В этом и состоит метод Крамера. Что такое определитель матрицы размера 3 на 3 и более, вы узнаете через две недели!