Решения домашнего задания 4

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

9 марта 2015 г.

В этом дополнительном материале мы приводим решения задач домашнего задания четвёртой недели. Будут подробно разобраны по одному варианту из каждой задачи.

В задаче 1 нужно найти ранг матрицы. По определению из лекции, ранг матрицы — это число ненулевых строк матрицы после применения метода Гаусса. Реализуем этот план. Найдём ранг следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & -11 & -14 \\ 0 & -33 & -42 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 0 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ранг равен 2.

В задаче 2 нужно определить линейно зависима или независима данная система векторов. Как подробно обсуждалось в указаниях, нужно реализовать метод Гаусса для матрицы, строки которой составлены из координат данных векторов.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 7 \\ 1 & 9 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 20 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 20 \\ 0 & -15 & -31 \\ 0 & -45 & -93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 9 & 20 \\ 0 & -15 & -31 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, набор векторов $v_1 = (2, 3, 9)$, $v_2 = (5, 0, 7)$, $v_3 = (1, 9, 20)$ линейно зависим.

В задачах 3 и 4 нужно решить по несколько систем уравнений и определить типы вектор-столбцов ответов. Ниже реализован метод Гаусса для двух систем уравнений из этих задач.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \\ 2x + 4y + 9z = 1 \end{cases}$$

Соответствующая расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Уже из этого вида расширенной матрицы видно, что x, y и z последовательно восстанавливаются единственным образом. Вектор-столбец решений этой системы единственен.

$$\begin{cases} 4x - 2y - z = 1 \\ 5x - y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Соответствующая расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Из последней строки матрицы видно, что система не имеет решений, потому что равенство $0 = -1$ не выполняется ни при каких значениях x, y и z. Система уравнений неразрешима.