Дополнительный материал “Теоремы о базисе”

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

22 февраля 2015 г.

В лекциях третьей недели были сформулированы и доказаны две теоремы: о базисе линейного пространства и о продолжении базиса. В данном материале мы уточняем и проясняем детали доказательств этих теорем.

I. Теорема о базисе линейного пространства. В лекции 3.2. (Теорема о базисе линейного пространства. Размерность) доказательство теоремы сводится к тому, что однородная система из k уравнений с n неизвестными $a_1, \ldots, a_n$, где $k < n$, всегда имеет ненулевое решение. Как это доказать?

Выразим из уравнения, где присутствует первая неизвестная a_1, эту самую неизвестную (а если такого нету, то нам подойдет решение $a_1 = 1, a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$). Подставим получившееся выражение во все остальные уравнения. У нас получится $k-1$ однородное (конечно, оно останется однородным!) уравнение с $n-1$ неизвестными. Выберем следующую неизвестную и повторим ту же самую операцию для a_2, получим $k-2$ однородных уравнения с $n-2$ неизвестными. Продолжая аналогично эту операцию, мы в конце получим ровно одно уравнение с некоторым количеством неизвестных, а именно, с $n-k+1$. Действительно, меньше их быть не может, иначе на каком-то шаге мы не смогли выразить неизвестную, так как ее в принципе не содержалось в уравнениях — тогда поступим как раньше и положим ее равной единице, а остальные нулями.

Присвоим неизвестным из последнего уравнения произвольные (но не сразу все нулевые) значения, чтобы выполнялось равенство. Теперь мы можем совершить ”обратный ход” и найти все оставшиеся неизвестные из тех выражений для неизвестных, от которых мы избавились ранее! Таким образом, ненулевое решение существует.

Если Вы разобрались с пояснениями к теореме о базисе, то Вы будете приятно удивлены, узнав часть описанного выше рассуждения в лекциях следующей недели.

II. Теорема о продолжении базиса. В лекции 3.4. (Теорема о продолжении базиса. Монотонность размерности), при доказательстве теоремы предполагается, что размерность подпространства конечномерного линейного пространства конечна (см. 09:19). Строго говоря, это нужно обосновать. Сделаем это!

Во-первых, если линейное пространство L бесконечномерно, то в нем можно найти набор из любого конечного числа линейно независимых векторов. Действительно, возьмем любой ненулевой вектор v_1 из L. Его линейная оболочка не совпадает с L, иначе оно было бы одномерно. Возьмем второй вектор v_2 не из линейной оболочки v_1. Линейная оболочка векторов v_1 и v_2 не совпадает с L, иначе оно было бы двумерным. Значит, есть третий вектор не из их линейной оболочки. И так далее, пока не наберем нужное нам количество векторов.

Допустим, утверждение неверно, и $L \subset M$ — линейные пространства, такие что $\dim M = n$, но L — бесконечномерно. Возьмем набор из $n+1$ линейно независимых векторов $v_1, \ldots, v_n$ в L. Заметим сразу, что каждый из этих $n+1$ векторов является линейной комбинацией n базисных векторов пространства M!

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства M. Тогда в разложении v_1 по базису $\{e_i\}$ найдется ненулевой коэффициент. Перенумеруем векторы $\{e_i\}$ так, чтобы это был коэффициент при e_1. Отсюда мы можем выразить вектор e_1 через $v_1, e_2, \ldots, e_n$. Будем говорить, что набор $v_1, e_2, \ldots, e_n$ порождает пространство M. Теперь разложим вектор v_2 по порождающему набору $v_1, e_2, \ldots, e_n$. Среди коэффициентов найдется ненулевой перед некоторым e_j (перенумеруем вектора $\{e_2, \ldots, e_n\}$, чтобы это стал e_2), иначе вектора v_1 и v_2 были бы линейно зависимы. Значит, набор $v_1, v_2, e_3, \ldots, e_n$ порождает M. Аналогично продолжая эту операцию, получим, что $v_1, \ldots, v_n$ порождают M, значит, и вектор v_{n+1}. Значит, они линейно зависимы. Мы пришли к противоречию, то есть не бывает ситуации, когда подпространство конечномерного линейного пространства бесконечномерно.