Билинейные и квадратичные формы

ЛЕКЦИЯ 9

Билинейная форма

Функцию $B: L \times L \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ от двух векторов, линейную по каждому вектору, мы будем называть билинейной формой.

$$B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$$

$$B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$$

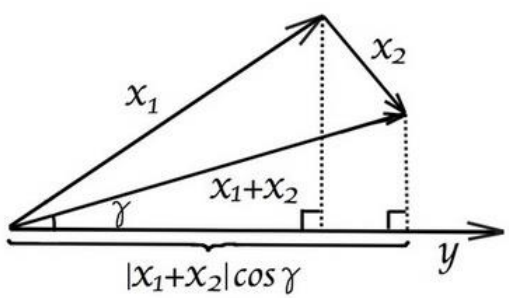
$$B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$$

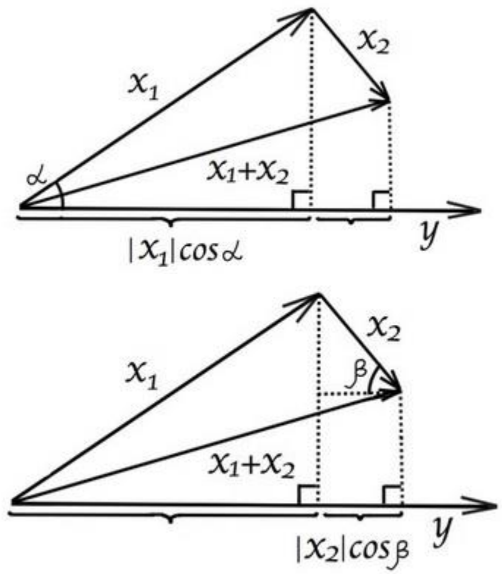
$$B(x, \lambda y) = \lambda B(x, y)$$

Пример

$$< \lambda x, y > = |\lambda x||y| \cos \varphi = \lambda < x, y >$$

$$< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y >$$





Пример

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$B(x, y) = x_1 y_2 + 3 x_2 y_2$

Пример

Определитель матрицы, составленной из двух векторов на плоскости.

Пример

$$B(f, g) = \int_a^b fg dx$$

$B(f_1 + f_2, g) = \int_a^b (f_1 + f_2) g dx =$
$\int_a^b f_1 g dx + \int_a^b f_2 g dx = B(f_1, g) + B(f_2, g)$

$B(\lambda f, g) = \int_a^b \lambda f g dx = \lambda \int_a^b f g dx =$
$\lambda B(f, g)$

Пространство билинейных форм

Билинейные формы $B: L \times L \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ сами образуют линейное пространство.

Если B_1 и B_2 - билинейные формы, то $B_1 + B_2$ и λB_1 - тоже билинейные формы.

Утверждение

Для того, чтобы задать билинейную форму, достаточно задать её значения на всевозможных парах базисных векторов.

Доказательство

Представим каждый из векторов в виде линейной комбинации базисных $e_1, \dots, e_n$

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

$$y = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

Доказательство

$B(x, y) = B(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, y) =$

$a_1 B(e_1, y) + \cdots + a_n B(e_n, y) =$

$a_1 B(e_1, b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n) + \cdots +$

$a_n B(e_n, b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n) =$

$a_1 b_1 B(e_1, e_1) + \cdots + a_1 b_n B(e_1, e_n) +$

…

$+a_n b_1 B(e_n, e_1) + \cdots + a_n b_n B(e_n, e_n)$

Итак

Зная координаты векторов в базисе и значение билинейной формы на базисных векторах, можно найти значение формы на векторах.

Опять матрица?

Матрицей билинейной формы $B(x, y)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$ называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & \dots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \dots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Как это работает?

$$B(x, y) = (a_1, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \mathrm{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Заметим, что в результате умножения получится число.

Как это работает?

Если векторы столбцы обозначить

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \psi \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \phi,$$

то запись примет вид $B(x, y) = \psi^T A \phi$.

Примеры

Скалярное произведение

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Матрица билинейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Примеры

Действительно,

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2$$

Примеры

$B(x, y) = x_1 y_2 + 3x_2 y_2$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Пример

Действительно,

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} =$$

$$(0, x_1 + 3x_2)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = x_1y_2 + 3x_2y_2$$

Замена базиса

Опять мы оказались в ситуации, когда можем вычислить значение интересующего нас объекта только в данном базисе. А если есть необходимость вычисления в другом базисе?

Задача

Пусть A – матрица билинейной формы $B(x, y)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Пусть C – матрица перехода от базиса $h_1, \dots, h_n$ к базису $e_1, \dots, e_n$.

Как выглядит матрица билинейной формы $B(x, y)$ в базисе $h_1, \dots, h_n$?

Напоминание

Чтобы найти матрицу C нужно записать по столбцам координаты векторов $h_1, \dots, h_n$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Если в базисе $h_1, \dots, h_n$ вектор l имеет координаты $l_1, \dots, l_n$, то его координаты в базисе $e_1, \dots, e_n$будут

$$C\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

Решение задачи

Итак, пусть векторы x и y имеют в базисе $h_1, \dots, h_n$ координаты $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$.

Решение задачи

Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n$ их координаты будут $C\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $C\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Решение задачи

Теперь можно воспользоваться матрицей билинейной формы в базисе $e_1, \dots, e_n$!

$$B(x,y) = \left(C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T A \left(C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$$

Решение задачи

Применяя равенство $(AB)^T = B^T A^T$

получаем $\left(C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T C^T$

Решение задачи

Итак,

$$B(x,y) = \left(C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^T A \left(C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T (C^T A C) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Решение задачи

$$B(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T (C^T A C) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$ где

$x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ - координаты векторов x и y в базисе $h_1, \ldots, h_n$. Значит, матрица $C^T A C$ - матрица билинейной формы $B(x,y)$ в базисе $h_1, \ldots, h_n$. Задача решена!

Пример

$B(x,y) = x_1 y_2 + 3x_2 y_2$

$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C^T A C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

А матрицы операторов меняются иначе…

Действительно, если A матрица линейного оператора в базисе $e_1, \ldots, e_n$ и C – матрица перехода от базиса $h_1, \ldots, h_n$ к базису $e_1, \ldots, e_n$, то в базисе $h_1, \ldots, h_n$ оператор запишется матрицей $C^{-1}AC$.

Ортогональные матрицы

Бывают ли такие матрицы, что с их помощью можно найти и матрицу оператора в новом базисе, и матрицу билинейной формы?

Бывают! Скажем, матрица E точно годится.

Ортогональные матрицы

Будем говорить, что матрица C ортогональна, если $C^{-1} = C^T$.

Если C ортогональная матрица, то для любой матрицы A выполняется равенство

$$C^{-1}AC = C^TAC$$

Примеры

Эти матрицы ортогональны

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Свойства ортогональных матриц

$C^T C = E$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{E}.$$

Несложно увидеть, что

Свойства ортогональных матриц

$$(a_{1i} \ldots a_{ni})\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Более подробно:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots a_{ni}a_{nj} = 0 \text{ при } i \neq j$$

Свойства ортогональных матриц

$$(a_{1i} \dots a_{ni}) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = 1$$

Более подробно:

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1$$

Отсюда видно, например, что все элементы матрицы по модулю не больше 1.

Симметричные билинейные формы

Будем говорить, что билинейная форма $B(x, y)$ симметрична, если $B(x, y) = B(y, x)$

Матрица билинейной формы симметрична.

Примеры

$$B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = B(y, x),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Кососимметричные билинейные формы

Будем говорить, что билинейная форма $B(x, y)$ косимметрична, если $B(x, y) = -B(y, x)$.

Матрица билинейной формы кососимметрична: $a_{ij} = -a_{ji}$.

Кососимметричные билинейные формы

Если $B(x, y)$ косимметрична, то для любого x: $B(x, x) = 0$.

В частности, на диагонали матрицы кососимметричной билинейной формы стоят нули.

Утверждение

Любая билинейная форма представима в виде суммы симметричной и кососимметричной билинейных форм.

Доказательство

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\big(B(x,y) + B(y,x)\big) +$$
$$+\frac{1}{2}(B(x,y) - B(y,x))$$

$\frac{1}{2}\big(B(x,y) + B(y,x)\big)$ - симметрична

$\frac{1}{2}(B(x,y) - B(y,x))$ - кососимметрична

Квадратичные формы

Пусть $B(x, y)$ – симметричная билинейная форма. Тогда функция от вектора $Q(x) = B(x, x)$ называется квадратичной формой, соответствующей данной билинейной.

Квадратичные формы

Квадратичная форма не является линейной функцией вектора.

Восстановление билинейной формы по квадратичной

По квадратичной форме $Q(x)$ однозначно восстанавливается симметричная билинейная форма $B(x, y)$.

Восстановление билинейной формы по квадратичной

Действительно,

$$Q(x+y)=B(x+y,x+y)=$$

$$=B(x,x)+B(x,y)+B(y,x)+B(y,y)=$$

$$=B(x,x)+2B(x,y)+B(y,y)$$

Восстановление билинейной формы по квадратичной

$Q(x-y)=B(x-y,x-y)=$

$=B(x,x)+B(x,-y)+B(-y,x)+$

$+B(-y,-y)=$

$=B(x,x)-2B(x,y)+B(y,y)$

Восстановление билинейной формы по квадратичной

Значит,

$$Q(x+y)-Q(x-y)=4B(x,y)$$

$$\frac{1}{4}(Q(x+y)-Q(x-y))=B(x,y)$$

Пример

Пусть $x = (x_1, x_2)^T, Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$, тогда

$Q(x + y) = (x_1 + y_1)^2 + 2(x_1 + y_1)(x_2 +$