Решения домашнего задания 5

И. Хованская, Б. Бычков, И. Тельпуховский

13 марта 2015 г.

Здесь и далее разбираем один из трех предлагавшихся вариантов для каждой задачи.

Задача 1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Отметьте матрицу* $A \cdot B$.

Явно перемножим матрицы по правилу «строка на столбец»:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0 & 1\cdot 3 + 0\cdot 3 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 & 0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 3 + 0\cdot 3 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 2.

Пусть a и b — базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$. Известно, что $c = a+b$, $d = a-b$. Отметьте все верные утверждения:
Координаты векторов c и d в базисе a, b равны $(1;1)$ и $(1;-1)$ соответственно.
Векторы c и d образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$.
Координаты векторов c и d в базисе a, b равны $(1;0)$ и $(1;1)$ соответственно.

Первое утверждение верно, так как координаты в скобках — это в точности коэффициенты перед a и b в выражениях для c и d.

Второе утверждение верно, так как если $\alpha c + \beta d = 0$, то $(\alpha+\beta)a + (\alpha-\beta)b = 0$, а тогда $\alpha+\beta = \alpha-\beta = 0$, откуда $\alpha = \beta = 0$. Значит, c и d линейно независимы. А два линейно независимых вектора в двумерном линейном пространстве образуют базис.

Отсюда, так как вектор выражается через базис однозначно, получаем, что третье утверждение неверно.

Задача 3.

Пусть $(1;2)$ — координаты вектора v в стандартном базисе $e_1 = (1;0)$, $e_2 = (0;1)$ линейного пространства $\mathbb{R}^2$. Пусть в этом же базисе даны вектора $h_1 = (1;1), h_2 =$

$(3;2)$. *Выберите верное утверждение:*
Координаты вектора v в базисе h_1, h_2 равны $(4;-1)$.
Векторы h_1 и h_2 не образуют базис.
Координаты вектора v в базисе h_1, h_2 равны $(2;3)$.

Действительно, $4h_1 - h_2 = 4(1;1) - (3;2) = (1;2) = v$. Второе утверждение неверно, доказывается так же, как в предыдущей задаче: пусть $\alpha h_1 + \beta h_2 = (\alpha + 3\beta, \alpha + 2\beta) = (0;0)$. Тогда $\alpha = \beta = 0$. Отсюда, так как вектор выражается через базис однозначно, получаем, что третье утверждение неверно.

Задача 4.

Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ линейный оператор, переводящий вектор с координатами $(x;y)$ в вектор с координатами $(x;0)$. Какое из следующих подпространств является ядром оператора f?
Множество векторов с координатами $(0;y)$, где y — любое действительное число.
Множество векторов с координатами $(x;0)$, где x — любое действительное число.
Вектор $(0;0)$.

Ядро, по определению, есть множество векторов, которые переходят в нулевой вектор. Какие в данном случае это будут вектора? Мы знаем, что $(x;y)$ переходит в $(x;0)$. Значит, мы хотим, чтобы x был равен нулю, ведь в $\mathbb{R}^2$ нулевым вектором является начало координат $(0;0)$. Тогда в ноль переходят вектора вида $(0;y)$, где y — любое действительное число.

Задача 5.

Пусть f — линейный оператор, переводящий многочлен степени не выше 2 в его коэффициент при x^2. Найдите размерность ядра оператора f.

На лекции было доказано, что для линейного отображения линейных пространств $\dim V = \dim Kerf + \dim Imf$. В данном случае, V — множество многочленов степени не выше 2, оно имеет размерность 3 как векторное пространство. Образом f будут все действительные числа (действительно, коэффициент при x^2 может быть любым) — одномерное линейное пространство $\mathbb{R}$. Тогда, по формуле, ядро имеет размерность 2.