Канонический вид квадратичной формы

ЛЕКЦИЯ 10

Квадратичная форма

Итак, мы определили для каждой симметричной билинейной формы $B(x, y)$ квадратичную форму $Q(x) = B(x, x)$. Если записать вектор x в каком-нибудь базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ как вектор столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и матрицу A билинейной формы $B(x, y)$ в том же базисе, то $Q(x) = x^T A x$

Квадратичная форма

$$(x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$(a_{12} + a_{21})x_1x_2 + \cdots + (a_{ij} + a_{ji})\, x_ix_j +$$

$$\dots$$

Квадратичная форма

Учитывая симметрию матрицы A получаем

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots$$

Выделение полного квадрата

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$$
$$= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 9x_3^2$$
$$+ 12x_2x_3) - 2x_2^2 - 4x_3^2 - 20x_2x_3 =$$
$$(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2^2 + 2x_3^2 + 10x_2x_3)$$
$$= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2$$
$$- 2\left((x_2 + 5x_3)^2 - 23x_3^2\right) =$$
$$(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2 + 5x_3)^2 + 46x_3^2$$

Выделение полного квадрата

1. Выделение полного квадрата

$$Q(x) = a_{11}(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \cdots +$$

$$+ 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} +$$

$$+ a_{nn}x_n^2 + \cdots + 2a_{ij}x_ix_j + \cdots$$

Замена координат?

Если каждое выражение в скобках сделать новой координатой, то в новых координатах квадратичная форма примет замечательный вид: будет суммой квадратов

Всегда ли получится?

Всегда, но иногда придётся поработать дополнительно

$Q(x) = 2x_1x_2$

$y_1 = x_1 + x_2$

$y_2 = x_1 - x_2$

$2x_1x_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{y}_1^2 - \mathrm{y}_2^2)$

От чего зависит ответ?

Мы могли начать с другой переменной, могли вносить множитель в переменную или не вносить:

$$4x_1^2 = (2x_1)^2$$

Есть ли что-то общее во всех ответах?

Да!

Количество положительных коэффициентов, отрицательных коэффициентов, нулевых коэффициентов будет одинаковым, каким путём к сумме квадратов не приходи.

Сигнатура квадратичной формы

Набор (A, B, C), где

A – количество положительных коэффициентов в сумме квадратов

B - количество отрицательных коэффициентов в сумме квадратов

C – количество нулевых коэффициентов в сумме квадратов

Называется сигнатурой квадратичной формы

Пример

$9x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_1x_2 + 4x_2x_3 + 12x_1x_3 =$

$= (5x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - (4x_1 + x_3)^2 =$

$= \frac{1}{9}(9x_1 + 5x_2 + 6x_3)^2 - \frac{1}{9}(4x_2 + 3x_3)^2$

Сигнатура квадратичной формы

Форма, у которой $C = B = 0$ называется положительно определённой

Пример

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 =$$
$$= (x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2$$

Сигнатура квадратичной формы

Форма, у которой $A = C = 0$ называется отрицательно определённой

Пример

$$-2x_1^2 + 4x_1x_2 - 10x_2^2 =$$
$$= -(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - 3x_2)^2$$

Как узнать сигнатуру?

Надо выделять полный квадрат?

Нет!

Есть специальный критерий, критерий Сильвестра

Критерий Сильвестра

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Критерий Сильвестра

Если все члены последовательности положительные – форма положительно определена

Пример

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = 9 > 0$$

Критерий Сильвестра

Если последовательность начинается с отрицательного члена и знакопеременна – значит, форма отрицательно определена

Пример

$-2x_1^2 + 4x_1x_2 - 10x_2^2$

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = -2 < 0,\ \Delta_2 = 16 > 0$

Критерий Сильвестра

Во всех других случаях форма не является ни положительно, ни отрицательно определённой

Нужно ли вообще приводить квадратичную форму?

Нужно!

Это одна из самых распространенных задач, обращающихся к линейной алгебре, особенно в статистике.

Достаточно выделить полный квадрат?

Обычно нет, нужно привести квадратичную форму к сумме квадратов хорошим преобразованием базиса

Каким-каким?

Обычно – ортогональным

Редкое везение!

Именно ортогональные преобразования изменяют матрицу оператора и матрицу квадратичной формы одинаково. А для оператора мы умеем искать хороший базис!

Теорема

Если матрица оператора симметрична, то у него существует ортогональный собственный базис

Если все собственные значения разные

Как привести форму к главным осям ортогональным преобразованием?

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. Собственных значений будет полный набор, собственные векторы будут ортогональны.

2. Умножить каждый вектор на число так, чтобы длина его стала равна единице.

3. Составить из собственных векторов матрицу перехода C^{-1}.

4. Учесть, что $C^{-1} = C^{T}$.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-4)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

А если есть совпадающие собственные значения?

Теорема гарантирует нам отсутствие жордановых клеток. Но собственный базис уже не будет автоматически ортогональным

Пример

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_3\sqrt{2} \\ 0 \\ v_1\sqrt{2} - 2v_3 \end{pmatrix}$$

$v_1 = v_3\sqrt{2}, v_2$ − любое

Пример

У нас большая свобода в выборе базиса – любая независимая пара векторов из собственного подпространства может входить в базис.

Но любая пара не будет ортогональной!

Процесс ортогонализации

Пусть $h_1, h_2, \dots, h_k$ - набор линейно независимых векторов в пространстве M.

Тогда существует набор векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$, такой, что e_i ортогонально e_j для всех пар не совпадающих i и j (т.е. скалярное произведение $< e_i, e_j > = 0$), и линейная оболочка векторов $e_1, \dots, e_i$ совпадает с линейной оболочкой векторов $h_1, \dots, h_i$

Процесс ортогонализации

Процесс ортогонализации не только доказывает этот факт, но и дает алгоритм построения такого набора векторов

Процесс ортогонализации

$e_1 = h_1$

Выберем вектор h_2

$e_2 = h_2 + \lambda\, e_1$

$< e_2, e_1 > =< h_2 + \lambda\, e_1, e_1 > =$

$= \lambda < e_1, e_1 > + < h_2, e_1 > = 0$

Положим $\lambda = -\frac{<h_2, e_1>}{<e_1, e_1>}$

Пример

$h_1 = (2, 0), h_2 = (1, 3)$

$e_1 = h_1 = (2, 0)$

$e_2 = h_2 - \frac{<h_2, e_1>}{<e_1, e_1>} e_1 = (1, 3) - \frac{2}{4}(2, 0) =$

$= (0, 3)$

$< e_1, e_2 > = 0$

А если векторов было больше?

Продолжим процесс

Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_i$ уже построены, то положим

$$e_{i+1} = h_{i+1} + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_i e_i$$

Каждую $\lambda_l, l = 1 \dots i$ найдём из соотношения

$$< e_{i+1}, e_l > = 0$$

Пример

$h_1 = (0, 1, 2), h_2 = (1, 1, 2), h_3 = (1, 0, 1)$

$e_1 = h_1 = (0, 1, 2)$, $e_2 = h_2 - \frac{<h_2, e_1>}{<e_1, e_1>} e_1 =$

$= (1, 0, 0)$, $e_3 = h_3 - \frac{<h_3, e_1>}{<e_1, e_1>} e_1 -$

$- \frac{<h_3, e_2>}{<e_2, e_2>} e_2 = (0, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$

$< e_1, e_2 > = < e_2, e_3 > = < e_1, e_3 > = 0$

Это всё?

Нет!

Чтобы матрица перехода для линейного оператора совпадала с матрицей перехода для квадратичной формы, нужно, чтобы скалярное произведение каждого вектора нового базиса на себя равнялось единице

Как этого добиться?

Умножением на число

Пример

$h_1 = (0, 1, 2), h_2 = (1, 0, 0), h_3 = (0, -2, 1)$

$e_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

$e_2 = (1, 0, 0)$

$e_3 = (0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \{-1, 2, 2\}$$

Для $\lambda = -1$: $(A - \lambda E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_3\sqrt{2} \\ 3v_2 \\ v_1\sqrt{2} + v_3 \end{pmatrix}$

$h_1 = \left(1, 0, -\sqrt{2}\right)$ – собственный,

$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$

Пример

Для $\lambda = 2$: $(A - \lambda E)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_3\sqrt{2} \\ 0 \\ v_1\sqrt{2} - 2v_3 \end{pmatrix}$

$h_2 = \left(\sqrt{2}, 1, 1\right)$, $h_3 = (\sqrt{2}, -3, 1)$ – собственные, $< h_2, h_3 > = 0$

$e_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$

Пример

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$