Координаты. Замена базиса

ЛЕКЦИЯ 5

Ядро линейного отображения

Ядро линейного отображения $f: L \to M$ – множество векторов пространства L, переходящих в 0 при отображении f.

Обозначается $\ker f$

$l \in \ker f \Leftrightarrow f(l) = 0$

Утверждение

Ядро $\ker f$ линейного отображения $f: L \to M$ образует линейное подпространство линейного пространства L.

Доказательство утверждения

Докажем, что, если $l_1 \in \ker f$ и $l_2 \in \ker f$, то

1. $l_1 + l_2 \in \ker f$

2. $\lambda l_1 \in \ker f$, где λ – любое число.

Доказательство утверждения

1. $l_1 \in \ker f \Leftrightarrow f(l_1) = 0$

$l_2 \in \ker f \Leftrightarrow f(l_2) = 0$

Отображение f – линейно, значит, $f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2) = 0 + 0 = 0$

Это и значит, что $l_1 + l_2 \in \ker f$

Доказательство утверждения

2. $l_1 \in \ker f \Leftrightarrow f(l_1) = 0$

Отображение f – линейно, значит,
$f(\lambda l_1) = \lambda f(l_1) = \lambda \cdot 0 = 0$

Итак, ядро линейного отображения образует линейное подпространство.

Образ линейного отображения

Образ линейного отображения $f: L \to M$ – множество векторов пространства M, в которые переходят какие-то векторы пространства L при отображении f.

Обозначается $Im\ f$

$m \in Im\ f \Leftrightarrow$ найдётся такой $l \in L$, что $f(l) = m$

Утверждение

Образ $Im\ f$ линейного отображения $f: L \to M$ образует линейное подпространство линейного пространства M.

Доказательство утверждения

Докажем, что, если $m_1 \in Im\ f$ и

$m_2 \in Im\ f$, то

1. $m_1 + m_2 \in Im\ f$

2. $\lambda m_1 \in Im\ f$, где λ – любое число.

Доказательство утверждения

1. $m_1 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow$ Найдётся $l_1 \in L$, такой, что $f(l_1) = m_1$

$m_2 \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow$ Найдётся $l_2 \in L$, такой, что $f(l_2) = m_2$

Отображение f – линейно, значит,

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2) = m_1 + m_2$$

Это и значит, что $m_1 + m_2 \in \operatorname{Im} f$

Доказательство утверждения

2. $m_1 \in Im\, f \Leftrightarrow$ Найдётся $l_1 \in L$, такой, что $f(l_1) = m_1$

$f(\lambda l_1) = \lambda f(l_1) = \lambda m_1$

Значит, $\lambda m_1 \in Im\, f$

Теорема

Пусть L – конечномерное линейное пространство, $f: L \to M$ – линейное отображение. Тогда
$\dim L = \dim \ker f + \dim Im\, f$

Доказательство теоремы

Пусть $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ – базис подпространства $\ker f$. Тогда $k = \dim \ker f$. По теореме о продолжении базиса этот набор векторов можно дополнить до базиса $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ всего пространства L.

Доказательство теоремы

Покажем, что векторы $f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$ образуют базис линейного пространства $Im\, f$.

Во-первых, любой вектор этого пространства является линейной комбинацией векторов $f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$

Доказательство теоремы

Действительно,

$m \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow$ Найдётся $l \in L$, такой, что $f(l) = m$.

Т.к. $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ – базис пространства L, то

$$l = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_k e_k + a_{k+1} e_{k+1} + \cdots + a_n e_n$$

Доказательство теоремы

Т.к. f линейно, то

$$m = f(l) = f(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_k e_k +$$

$$+a_{k+1} e_{k+1} + \cdots + a_n e_n =$$

$$f(a_1 e_1) + f(a_2 e_2) + \cdots + f(a_k e_k) +$$

$$+f(a_{k+1} e_{k+1}) + \cdots + f(a_n e_n) =$$

$$a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) + \cdots + a_k f(e_k) +$$
$$a_{k+1} f(e_{k+1}) + \cdots + a_n f(e_n)$$

Доказательство теоремы

Значит, $m = a_{k+1} f(e_{k+1}) + \cdots + a_n f(e_n)$

Что мы и хотели доказать.

Доказательство теоремы

Докажем, что такое представление единственно. Пусть это не так, и

$$m = a_{k+1}f(e_{k+1}) + \cdots + a_n f(e_n) = b_{k+1}f(e_{k+1}) + \cdots + b_n f(e_n)$$

Тогда

$$(a_{k+1} - b_{k+1})f(e_{k+1}) + \cdots + (a_n - b_n)f(e_n) = 0$$

Доказательство теоремы

Значит,

$$f\big((a_{k+1} - b_{k+1})e_{k+1}\big) + \cdots$$
$$+ f\big((a_n - b_n)e_n\big) = 0$$

Откуда по линейности

$$f\big((a_{k+1} - b_{k+1})e_{k+1} + \cdots + (a_n - b_n)e_n\big)$$
$$= 0$$

Значит, $(a_{k+1} - b_{k+1})e_{k+1} + \cdots +$
$(a_n - b_n)e_n \in \ker f$

Доказательство теоремы

Значит, $(a_{k+1} - b_{k+1})e_{k+1} + \cdots + (a_n - b_n)e_n = c_1e_1 + \cdots + c_ke_k$

- ведь $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ – базис подпространства $\ker f$.

В этом равенстве все коэффициенты могут быть равны только нулю, иначе мы получили два разных представления вектора пространства L в виде линейной комбинации базисных векторов.

Доказательство теоремы

Значит,

$a_{k+1} - b_{k+1} = 0$

…

$a_n - b_n = 0$

А это значит, что представление

$m = a_{k+1} f(e_{k+1}) + \cdots + a_n f(e_n)$

единственно

Доказательство теоремы

Итак,

$(e_1, e_2, \dots, e_k)$ – базис подпространства $\ker f \subset L$ $(e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ – базис всего пространства L

$f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$ - базис $Im\ f \subset M$

$\dim \ker f = k$

$\dim L = n$

$\dim Im\ f = n - k$

Доказательство теоремы

Из этого и следует утверждение теоремы

$$\dim L = \dim \ker f + \dim Im\, f$$

О чём говорит доказательство теоремы?

О том, что для разных целей бывает удобно рассматривать разные базисы одного и того же пространства.

Как пользоваться разными базисами?

Мы научимся искать координаты векторов в разных базисах исходя из соотношений этих базисов

Координаты

Пусть $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ базис пространства L. Тогда для любого вектора l существует единственное представление в виде

$$l = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

Набор чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ мы будем называть координатами вектора l в базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Координаты

Координаты вектора в некотором базисе часто бывает удобно записывать в виде столбца (вспомните вектор-столбец решений системы).

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

Координаты

Сами базисные векторы тоже можно записать в координатах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Переход от одного базиса к другому

Можно ли, зная координаты вектора в одном базисе, найти его координаты в другом базисе?

Нельзя, если мы ничего не знаем о том, как выражаются друг через друга векторы базисов.

Можно, если знаем.

Один базис через другой

Пусть $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ – два разных базиса пространства L.

Пусть кроме того мы знаем, что

$$h_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n$$

$$h_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n$$

…

$$h_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n$$

Координаты в одном базисе через координаты в другом

Пусть $l = b_1h_1 + b_2h_2 + \cdots + b_nh_n$, т.е. координаты вектора l в базисе $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ есть $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Другими словами, в базисе $(h_1, h_2, \dots, h_n)$

$$l = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Координаты в одном базисе через координаты в другом

Как найти координаты вектора l в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$?

Очень просто!

Координаты в одном базисе через координаты в другом

Нужно просто в выражение

$$l = b_1 h_1 + b_2 h_2 + \cdots + b_n h_n$$

Подставить выражения векторов h через векторы e

$$h_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \cdots + a_{1n} e_n$$

…

$$h_n = a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \cdots + a_{nn} e_n$$

Координаты в одном базисе через координаты в другом

Получаем

$$l = b_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n)$$

$$+b_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n) +$$

…

$$+b_n(a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n)$$

Координаты в одном базисе через координаты в другом

Теперь соберем вместе коэффициенты при каждом базисном векторе

$$l = (b_1 a_{11} + b_2 a_{21} + \cdots + b_n a_{n1})\, e_1 +$$

$$+(b_1 a_{12} + b_2 a_{22} + \cdots + b_n a_{n2})\, e_2 +$$

…

$$+(b_1 a_{1n} + b_2 a_{2n} + \cdots + b_n a_{nn} e_n)\, e_n$$

Координаты в одном базисе через координаты в другом

Просто?

Просто!

Но невозможно громоздко!

Матрица перехода

Запишем векторы h в виде векторов столбцов в базисе e

$$h_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix}, \dots, h_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица перехода

Составим из этих столбцов матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} a_{22} \dots a_{n2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} a_{2n} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Мы будем называть её матрицей перехода от базиса $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ к базису $(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Действия над матрицами

Пока от введения матрицы легче не стало. Определим произведение матрицы и вектора по правилу «строка на столбец»

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{21}b_2 + \cdots + a_{n1}b_n \\ a_{12}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{n2}b_n \\ \vdots \\ a_{1n}b_1 + a_{2n}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Мы получили в точности, что нужно было: координаты вектора l в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$

Переход от старого базиса к новому

Итак, если мы знаем координаты вектора l в одном базисе (назовём его старым) и хотим узнать координаты этого вектора в другом базисе (назовём его новым), нам нужно действовать следующим образом.

Переход от старого базиса к новому

1. Записать координаты базисных векторов старого базиса в новом базисе в виде векторов-столбцов

2. Составить из этих столбцов матрицу перехода от старого базиса к новому базису

Переход от старого базиса к новому

3. Умножить матрицу перехода на вектор-столбец координат вектора l в старом базисе по правилу «строка на столбец»

4. Полученный вектор-столбец – координаты вектора l в новом базисе

А если нужно сделать два перехода?

Пусть есть три базиса в пространстве L: $(h_1, h_2, \dots, h_n)$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

А если нужно сделать два перехода?

Мы знаем координаты $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ вектора l в базисе $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$,

$$l = b_1 h_1 + b_2 h_2 + \cdots + b_n h_n.$$

А если нужно сделать два перехода?

Мы знаем, как векторы базиса $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ выражаются через векторы базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, т.е. знаем матрицу перехода от базиса $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ к базису $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

А если нужно сделать два перехода?

Мы знаем, как векторы базиса$(e_1, e_2, \dots, e_n)$,выражаются через векторы базиса $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, т.е. знаем матрицу перехода от базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ к базису $(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots c_{nn} \end{pmatrix}$$

А если нужно сделать два перехода?

Как найти координаты $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ вектора l в базисе$(f_1, f_2, \dots, f_n)$?

А если нужно сделать два перехода?

Для этого нужно координаты векторов $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ разложить по базису $(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Мы всё знаем, чтобы узнать эти координаты!

А если нужно сделать два перехода?

В базисе $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ вектор h_1 запишется вектором столбцом $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$.

Как найти его координаты в базисе $(f_1, f_2, \dots, f_n)$?

А если нужно сделать два перехода?

Для этого нужно матрицу перехода от базиса $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ к базису $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ умножить на этот вектор столбец

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$$

А если нужно сделать два перехода?

Для того, чтобы получить всю матрицу перехода нужно умножить каждый вектор столбец с координатами векторов базиса $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ на эту матрицу.

$$\begin{pmatrix} c_{11}\, c_{21}\, \ldots c_{n1} \\ c_{12}\, c_{22}\, \ldots c_{n2} \\ \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ c_{1n} c_{2n}\, \ldots c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{21}\, \ldots a_{n1} \\ a_{12}\, a_{22}\, \ldots a_{n2} \\ \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ a_{1n} a_{2n}\, \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

А если нужно сделать два перехода?

Мы получили новую матрицу перехода и правило умножения матриц!