ЖНФ
Теорема Фробениуса

ЛЕКЦИЯ 8

А если некоторые собственные значения совпадают?

Может быть, найдётся базис, в котором матрица диагональна

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А если некоторые собственные значения совпадают?

А может быть и нет, и в любом базисе матрица не будет диагональна, у неё нет базиса из собственных векторов.

Пример

Найдём собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

Т.е. собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

Пример

Найдём собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Итак, единственный собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Пример

В двумерном пространстве не бывает базиса из одного вектора, значит, у оператора с матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ собственного базиса нет.

Проблема

Если у оператора не все собственные значения различны, то, возможно, не существует базиса, в котором он представлен диагональной матрицей.

Ну и что?

Во многих прикладных задачах бывает нужно вычислять функции от матриц (степень, многочлен, экспоненту и др.). Для матриц общего вида это делать трудно, для матриц специального вида (особенно диагональных) – просто.

Как быть?

Для любого оператора в конечномерном пространстве существует базис, в котором матрица оператора имеет Жорданову Нормальную Форму. Есть и другие «хорошие» базисы, но использование жорданова базиса особенно распространено.

Жорданова клетка

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

называется жордановой клеткой

Примеры

Эти матрицы являются жордановыми клетками

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3)$$

Примеры

Эти матрицы не являются жордановыми клетками

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Что такое жорданова матрица?

Мы будем называть матрицу Жордановой, если её можно разбить на части (блоки) горизонтальными и вертикальными линиями, и все блоки, кроме тех, что стоят на диагонали, будут состоять из нулей, а блоки на диагонали будут жордановыми клетками.

Что такое жорданова матрица?

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c|c|cc}
\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n
\end{array}\right)$$

Пример

Жорданова матрица

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{pmatrix}
$$

Теорема о жордановой нормальной форме

Для любого линейного оператора в конечномерном пространстве над полем комплексных чисел существует базис, в котором матрица этого оператора жорданова.

Приведение матрицы к жорданову виду

Из теоремы о ЖНФ следует утверждение

Для любой квадратной матрицы A над полем комплексных чисел существует такая невражденная матрица C, что

$A = C^{-1}BC$, где B – жорданова матрица.

Как найти жорданов базис?

1. Сложная часть – найти собственные значения

2. Алгоритмическая часть – найти жорданов базис

Пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, её собственные значения совпадают и равны 2. С помощью алгоритма можно найти жорданов базис и жорданову матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. При этом:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Теорема Фробениуса-Перрона

Пусть все элементы матрицы строго положительны. Тогда

1. У неё найдётся строго положительное собственное значение

2. Координаты собственного вектора, соответствующего этому собственному значению, будут строго положительны

Дело не только в этом

Мы увидим, что умножая любой вектор с положительными координатами на данную матрицу «много раз», мы будем получать вектор, направление которого всё сильнее и сильнее приближается к направлению собственного вектора.

Почему теорема Фробениуса-Перрона верна?

Не доказательство, а рассказ о доказательстве

Сжимающее отображение

Отображение пространства, в котором есть понятие расстояния, в себя называется сжимающим, если расстояние между образами точек меньше чем расстояние между точками по крайней мере в λ раз, где $\lambda > 1$

Зачем λ?

Это более сильное условие, чем просто «расстояние становится меньше».

Пример

Гомотетия с коэффициентом меньше 1

Теорема о неподвижной точке

Пусть $f: M \to M$ – сжимающее отображение. Тогда у него есть неподвижная точка x: $f(x) = x$

Неподвижная точка может быть только одна

Если теорема о неподвижной точке верна, то такая точка может быть только одна. Иначе расстояние между образами двух неподвижных точек будет равно расстоянию между точками.

Но это же неправда!

Если у отображения f есть неподвижная точка x, то мы можем рассмотреть то же отображение f на множестве $M \setminus x$ и там неподвижной точки уже не будет!

Действительно

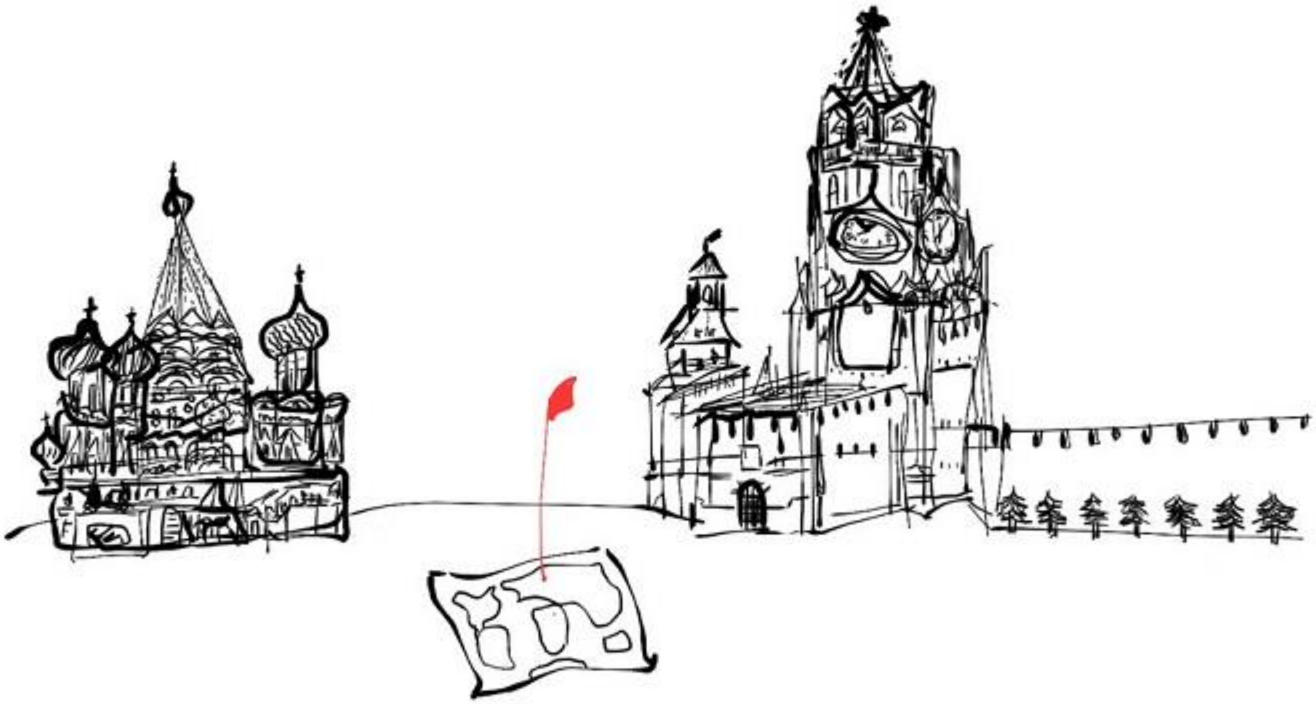
Теорема о неподвижной точке накладывает условия не только на f, но и на M – это множество должно быть «полным», не содержать «дырок».

Хорошая новость – плоскость, прямая, n-мерное евклидово пространство подходят.

Как об этом можно думать

Положим на местность карту этой местности. Тогда будет точка, оказавшаяся «на месте» - изображение которой на карте оказалось ровно на ней.

Как об этом можно думать



Почему это верно?

0. Возьмём какую-нибудь точку на местности.

1. Найдём её на карте.

2. Если эти точки совпали – ура.

3. Если эти точки не совпали, возьмём точку местности, лежащую под найденной точкой карты.

4. Вернёмся к п.1

Что получилось?

Получилась последовательность точек, расстояние между которыми становится всё меньше и меньше (меньше геометрической прогрессии со знаменателем $1/\lambda$).

Расстояние стремится к нулю, значит, точки сходятся к какой-то точке.

Что получилось?

Эта точка и будет неподвижной точкой сжимающего отображения.

При чём здесь всё это?!

Мы же начали про матрицы, а говорим про карты, расстояния, местности?

Теорема Фробениуса-Перрона в трёхмерном пространстве

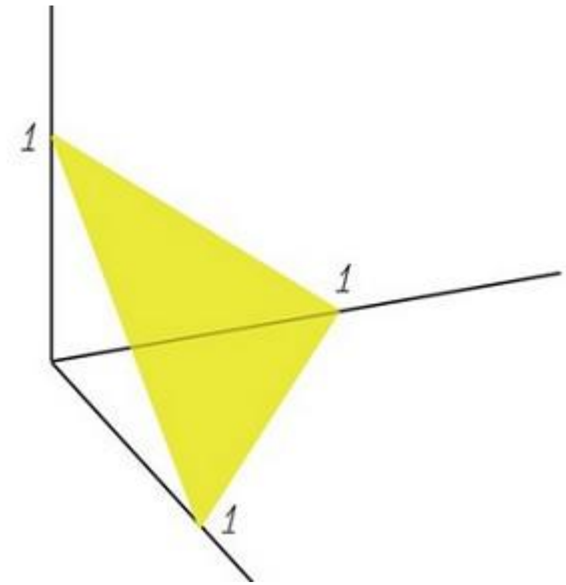
Мы сейчас построим «местность» и сжимающее отображение в ней.

«Местность»

Рассмотрим плоскость, проходящую через концы стандартных базисных векторов. Отмеченный концами этих векторов треугольник называют стандартным симплексом.

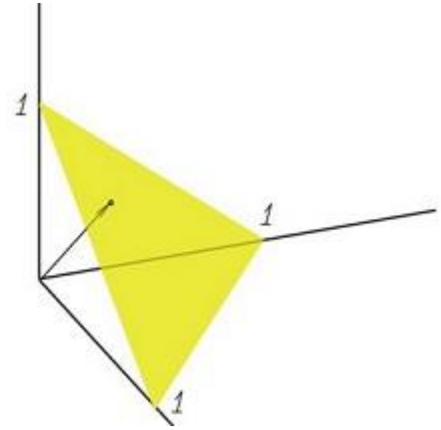
«Местность»

$x + y + z = 1$



Отображение

Рассмотрим любую точку этого треугольника. Ей соответствует «радиус-вектор» - вектор с началом в точке 0 и концом в этой точке.



Отображение

Подействуем на этот вектор матрицей A

«Конец» вектора, вообще говоря, не будет лежать на плоскости $x + y + z = 1$.

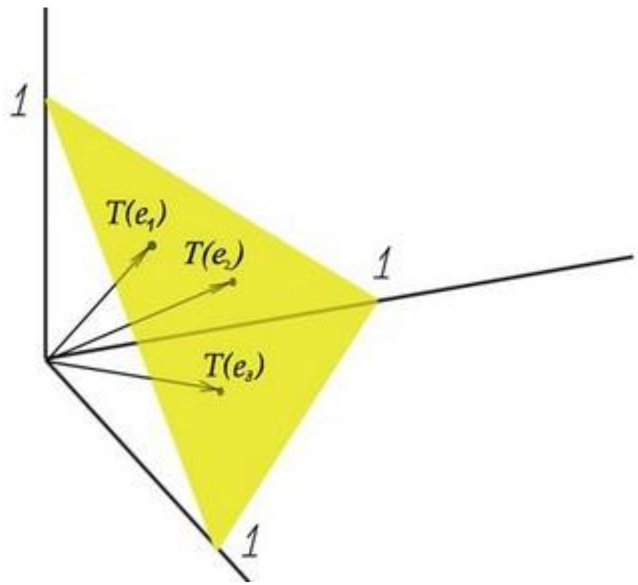
Отметим пересечение направления вектора и этой плоскости

Сжимающее?

Найдём образы базисных векторов – вершин треугольника.

У матрицы все элементы положительные, значит, образы базисных векторов попали внутрь положительного квадранта.

Сжимающее?



Сжимающее!

Образ треугольника попал внутрь треугольника!

Это доказательство?

Нет. Мы не доказали, что отображение сжимающее, думали только о матрице три на три и т.д.

Но мы обсудили план доказательства, общую картину.

Допустим, верим. И что?

Если отображение сжимающее, оно имеет неподвижную точку. При действии матрицы A некоторое направление внутри положительного квадранта переходит в себя. Это и есть собственный вектор!

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A(e_1) = (1, 2, 4)^T$$

$$A(e_2) = (2, 1, 2)^T$$

$$A(e_3) = (1, 1, 2)^T$$

$v = (2, 2, 1)^T$ - собственный

Почему эта теорема важна?

Эта теорема много говорит об «устройстве мира». Существование разного рода стационарных распределений – её следствие.

Ранжирование страниц

Алгоритмы индексирования страниц используют эту теорему. Здесь матрица содержит очень много столбцов – столько, сколько страниц индексируется. Элементы матрицы – шанс перейти с одной страницы на другую.

Ранжирование страниц

Делая много случайных переходов, мы получаем последовательность частот страниц, которая будет всё ближе и ближе к хорошему ранжированию.