Базис и размерность

ЛЕКЦИЯ 3

Базис

Базис линейного пространства – такой набор векторов, что любой вектор пространства однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов этого набора.

Примеры

Векторы $(1; 0)$ и $(0; 1)$ образуют базис двумерного векторного пространства.

$$(x; y) = x \cdot (1; 0) + y \cdot (0; 1)$$

Примеры

Векторы $(1; 1)$ и $(-1; 1)$ тоже образуют базис двумерного векторного пространства

$$(x; y) = \frac{x+y}{2} \cdot (1; 1) + \frac{x-y}{2} \cdot (1; -1)$$

Примеры

Векторы $(1; 0; 0)$ и $(0; 1; 0)$ не образуют базис трёхмерного векторного пространства: $a \cdot (1; 0; 0) + b \cdot (0; 1; 0) = (a; b; 0)$. Ни при каких a и b не получится вектор $(0; 0; 1)$

Примеры

Набор векторов $(1;0)$, $(1;1)$ и $(0;1)$ не является базисом двумерного векторного пространства, т.к.

$$(2;1) = 2 \cdot (1;0) + (0;1) = (1;0) + (1;1)$$

Представление неоднозначно.

Конечномерные пространства

Мы будем говорить, что пространство конечномерно, если оно состоит из нулевого вектора (нульмерно) или если у него есть базис из конечного количества векторов.

Остальные пространства мы будем называть бесконечномерными.

Примеры

Двумерное и трёхмерное векторные пространства конечномерны, а пространство всех функций на множестве действительных чисел – бесконечномерно.

Замечание

Будем говорить, что базис нульмерного пространства – пустое множество. Так удобнее.

Теорема

Любой базис одного конечномерного пространства содержит одинаковое количество векторов.

Замечание. Это удивительно.

Схема доказательства

Докажем, что если есть два базиса $l_1, \cdots, l_n$ и $m_1, \cdots, m_k$ линейного пространства L и $n > k$, то $l_1, \cdots, l_n$ - не базис. Противоречие докажет теорему.

Полезное утверждение

Если для набора векторов $l_1, \cdots, l_n \in L$ найдётся набор чисел $a_1, \cdots, a_n$, такой, что $a_1 l_1 + \cdots + a_n\, l_n = 0$ и хотя бы одно из чисел $a_1, \cdots, a_n$ не равно нулю, то набор векторов $l_1, \cdots, l_n$ не является базисом пространства L.

Доказательство утверждения

$0 = a_1 l_1 + \cdots + a_n l_n$

$0 = 0 \cdot l_1 + \cdots + 0 \cdot l_n$

Т.е. представление нуля не единственно. Значит, набор векторов $l_1, \cdots, l_n$ не базис.

Доказательство теоремы

Выразим нулевой вектор через векторы «большего» базиса.

$$0 = a_1 l_1 + \cdots + a_n\, l_n$$

Раскладывая каждый из векторов по базису $m_1, \cdots, m_k$ мы получим систему из k уравнений на n неизвестных. Такая система обязательно имеет ненулевое решение!

Доказательство теоремы

Мы получили линейную комбинацию векторов $l_1, \cdots, l_n$ с ненулевыми коэффициентами, дающую нулевой вектор. Значит, $l_1, \cdots, l_n$ - не базис.

Пример

Наборы векторов $\{(1;0),(0;1)\}$ и $\{(1;1),(-1;1)\}$ образуют базисы двумерного векторного пространства, и в каждом из них два вектора.

Размерность

Размерностью конечномерного пространства называется количество векторов в базисе этого пространства.

Определение корректно, т.к. количества векторов в разных базисах одного пространства совпадают.

Обозначение

Размерность n конечномерного пространства L обозначается

$$n = \dim L$$

Как представить пространство большой размерности?

Хорошая новость – этого можно не делать. Мы привыкли думать о евклидовом пространстве с длиной, углами и т.п. Линейная алгебра позволяет работать с более абстрактными вещами.

И всё-таки

Попробуем представить себя в четрырёхмерном пространстве, проследив, что происходит в более знакомых нам размерностях.

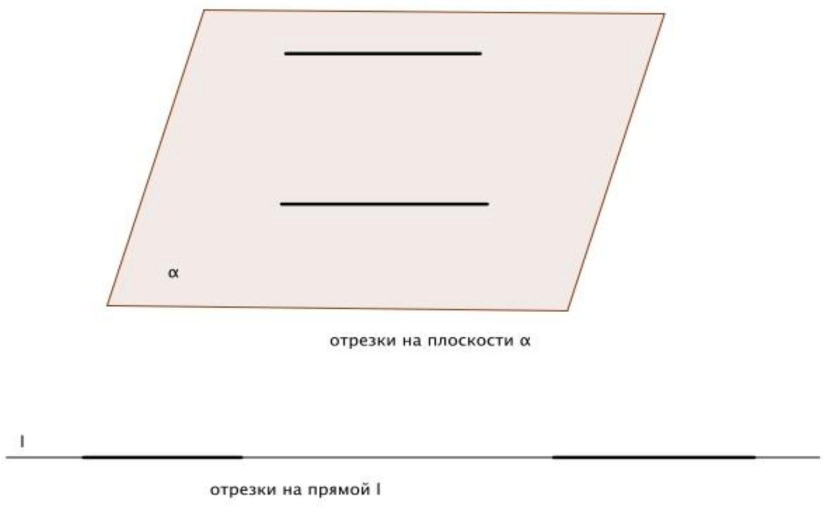
В маленьких размерностях

А что происходит с жителями одномерного пространства, прямой, когда они выходят в двумерное?

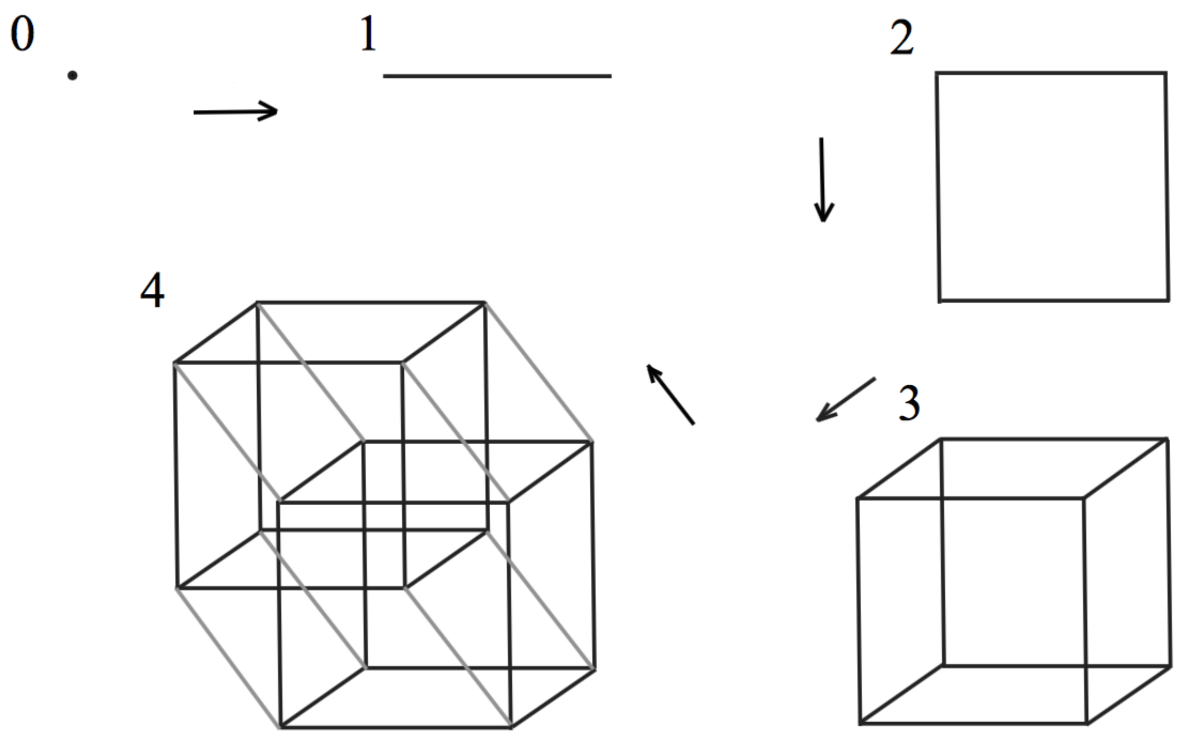
Что происходит с жителями плоскости, когда они выходят в трёхмерное пространство?

Ужасная правда

Они видят внутренности друг друга!



Четырёхмерный куб



Линейная зависимость

Мы говорим, что набор векторов линейно независим, если никакая линейная комбинация этих векторов не равна нулю, если хоть один коэффициент в ней не нулевой.

Линейная зависимость

Набор векторов линейно зависим, если существует линейная комбинация этих векторов, в которой не все коэффициенты равны нулю, а линейная комбинация равна нулю.

Примеры

Базис любого линейного пространства – набор линейно независимых векторов. Это следует из доказанной нами единственности представления нуля.

Векторы $(1; 0)$ и $(0; 1)$ - линейно независимы.

Примеры

Векторы $(1;0;1)$ и $(0;1;0)$ линейно независимы. Действительно, если

$a \cdot (1;0;1) + b \cdot (0;1;0) = (0;0;0)$, то

$(a \cdot 1 + b \cdot 0; a \cdot 0 + b \cdot 1; a \cdot 1 + b \cdot 0) =$

$(a; b; a) = (0;0;0)$

Т.е. $a = 0$ и $b = 0$

Свойства зависимых векторов

Если векторы линейно зависимы, то один из них является линейной комбинацией остальных. Действительно, пусть

$a_1 l_1 + \dots + a_n l_n = 0$ и какое-то $a_i \neq 0$. Тогда $l_i = -\left(\frac{a_1}{a_i} l_1 + \dots + \frac{a_n}{a_i} l_n\right)$ (в правой части нет слагаемого с l_i)

Свойства зависимых векторов

Если набор векторов содержит нулевой вектор, то этот набор линейно зависим.

Действительно,

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot l_1 + \cdots + 0 \cdot l_n = 0$$

Свойства зависимых векторов

Если набор векторов $e_1, \dots, e_n$ линейно независим, а набор $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ линейно зависим, то вектор e_{n+1}– линейная комбинация векторов $e_1, \dots, e_n$.

Действительно, если $a_1 e_1 + \cdots a_n e_n + a_{n+1} e_{n+1} = 0$, то $a_{n+1} \neq 0$, иначе $e_1, \dots, e_n$ были бы линейно зависимы. Значит, $e_{n+1} = -\left(\frac{a_1}{a_{n+1}} e_1 + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} e_n\right)$

Линейная оболочка

Множество линейных комбинаций множества векторов называется линейной оболочкой этих векторов.

Пример

Конечномерное пространство – линейная оболочка своего базиса

Теорема о продолжении базиса

Если набор линейно независимых векторов $l_1, \dots, l_n$ входит в больший набор векторов, $l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_k$ то набор $l_1, \dots, l_n$ можно дополнить некоторыми векторами из $l_{n+1}, \dots, l_k$ так, что новый набор векторов будет линейно независим, а линейные оболочки дополненного набора и набора $l_1, \dots, l_n, l_{n+1}, \dots, l_k$ будут совпадать.

Монотонность размерности

Пусть $L \subset M$ линейное подпространство конечномерного пространства M и

$L \neq M$. Тогда $\dim L < \dim M$.

Пусть $n = \dim L, k = \dim M$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ - базис пространства L; $h_1, \dots, h_k$ - базис пространства M. Рассмотрим набор векторов $e_1, \dots, e_n, h_1, \dots, h_k$.

Монотонность размерности

Линейная оболочка этого набора совпадает с пространством M. По предыдущему утверждению из векторов $h_1, \ldots, h_k$ можно выбрать несколько, скажем, $h_1, \ldots, h_r$, $r < k$ так, что векторы $e_1, \ldots, e_n, h_1, \ldots, h_r$ - линейно независимы, а линейная оболочка набора $e_1, \ldots, e_n, h_1, \ldots, h_r$ совпадает с линейной оболочкой $e_1, \ldots, e_n, h_1, \ldots, h_k$.

Монотонность размерности

Значит, $e_1, \dots, e_n, h_1, \dots, h_r$ - базис пространства M. Значит, $\dim L < \dim M$