

ÉCOLE CENTRALE LYON

Contrôle actif des premiers modes d'une corde de violoncelle

Stagiaire :
Julien GUINOT

Encadrant :
Henri BOUTIN
Claudia FRITZ
René CAUSSÉ

Résumé

Ce rapport vise à mettre en avant les résultats théoriques et de simulation obtenus dans le cadre du stage d'application de Julien Guinot vers l'implémentation de contrôle actif modal sur les premiers modes de vibration d'un violoncelle via la représentation d'état. Il présente également les méthodes de simulation et les résultats obtenus pour ces simulations pour une corde amortie couplée à la table d'harmonie du violoncelle excitée en *pizzicato*. Le choix d'un modèle physique pertinent pour la vibration de la corde permet l'exploitation des données bibliographiques pour obtenir une fonction de transfert théorique pour les actionneurs nécessaires pour réaliser le contrôle actif. Les simulations temporelles et modales exhibent un réalisme convaincant quant au son obtenu pour la vibration de la corde amortie, non amortie, couplée et non couplée. Tandis que la simulation par différences finies exhibe une dispersion numérique importante aux hautes fréquences, la synthèse de vibrations par un modèle de fonction de green décomposée sur les modes propres tient bien aux hautes fréquences avec une très faible erreur (moins de 1%) vis-à-vis des modes attendus. La synthèse modale se révèle être à la fois la méthode de synthèse la plus précise et la plus propice à une implémentation numérique du contrôle actif. Dans le cas particulier des cordes couplées amorties, la matrice de gains des actionneurs nécessaires au contrôle modal a pu être entièrement explicitée. Additionnellement, un modèle de couplage dans le domaine fréquentiel pour la corde amortie a été construit à partir de données bibliographiques, et tient bien vis-à-vis de mesures de mobilité de chevalet de violoncelle réalisées en laboratoire. Ces simulations et résultats théoriques ouvrent la voie à une implémentation numérique du contrôle actif modal, puis, plus tard, la mise en place expérimentale du dispositif en prenant en compte les fonctions de transfert des capteurs et actionneurs.

Abstract

This paper aims to exhibit theoretical implementation of active control of the first vibrational modes of cello strings via state representation, as well as simulation methods and simulation results for *pizzicato*-excited string vibrations coupled with the cello plate. Choosing a relevant physical model for the strings' vibration allows bibliographical exploitation to achieve theoretical results. Time-domain and modal simulation results show convincing realism of string sounds, both damped and undamped, coupled with a soundboard and uncoupled, and a theoretical transfer function for active string control was achieved. While time-domain implicit and explicit resolution exhibits spectral accuracy divergence for higher frequencies, green-function modal synthesis holds well at high frequencies with less than 1% error on the significant modes. Modal synthesis proves to be the most accurate method of string simulation as well as the most prone to implementing the active control algorithm. In the specific case of the damped coupled string, the gain matrix for the transducer controller to be physically implemented was able to be formalized entirely. Additionally, a model for coupled string vibrations in the frequency domain was built based on previous biliographical work, and proved to fit well based on lab-measured cello mobilities. These simulation and theoretical findings pave the way towards numeric simulation verification of the theoretical results and experimental implementation while taking into account sensor and transducer transfer functions.

Contents

1	Introduction	6
1.1	Contexte	6
1.1.1	Organisation des entités d'accueil	6
1.1.2	Contrôle actif de vibrations	7
1.2	Objectifs	8
2	Modélisation et simulation de la corde	10
2.1	Modèle de corde	10
2.1.1	L'équation d'onde monodimensionnelle	10
2.1.2	L'équation d'onde d'Euler-Bernoulli	12
2.1.3	Frottement	14
2.1.4	Calcul de la réponse impulsionnelle de la corde par fonction de Greene	17
2.2	Simulation en différences finies	20
2.2.1	Discrétisation des équations de la corde	20
2.2.2	Résultats obtenus pour la corde simple non amortie	24
2.2.3	Stabilité du schéma et conditions aux limites, point d'observation, excitation	25
2.2.4	Résultats obtenus pour la corde raide non amortie	28
2.2.5	Résultats obtenus pour la corde raide amortie	29
2.3	Simulation par approche modale	31
2.3.1	Résultats obtenus pour la corde raide amortie non couplée	32
3	Modélisation et simulation de la plaque et du couplage	34
3.1	Modèle de plaque	34
3.1.1	Equation du mouvement	34
3.1.2	Modes de la plaque simple	35
3.2	Modèle du couplage	36
3.2.1	Couplage de la corde avec la plaque en temps réel	36
3.2.2	Couplage de la corde à la plaque en modal	38
3.3	Simulation par différences finies	41
3.3.1	Discrétisation d'une plaque mince	41
3.3.2	Couplage avec la table	43
3.4	Simulation par approche modale	46
3.4.1	Résultats obtenus pour la corde raide amortie couplée	46
4	Contrôle	49
4.1	Boucle de contrôle	49
4.2	Espace d'état et contrôle par placement d'état	50
A	Annexe : couplage corde/table pour simulation en différences finies	57

List of Figures

1	Premiers modes propres de la corde en appui simple	11
2	Excitation triangulaire de la corde	12
3	Inharmonicité des modes pour la corde de do du violoncelle	14
4	Spectre normalisé d'un pizzicato de violoncelle réel	16
5	Inharmonicité due à la raideur ET à l'amortissement de la corde par rapport aux modes d'une corde simple	17
6	Structure de simulation pour la corde raide amortie non-couplée en modal	19
7	Structure de simulation pour la corde raide amortie non-couplée en modal, avec force non-décomposable	19
8	Grille de discréétisation en différences finies	21
10	<i>Equations de récurrence pour obtenir le déplacement des cordes simples et raides.</i> $\gamma = c \frac{\delta_t}{\delta_x}$ et $\mu = \frac{\kappa \delta_t}{\delta_x^2}$ sont des paramètres de la discréétisation, et leur influence sur la stabilité sera discutée sous-section 2.2.2	22
11	Grilles de discréétisation pour les cordes simples et raides	22
13	Grilles de discréétisation pour les cordes simples et raides	23
14	Signal temporel et spectre normalisé pour la corde simple	24
15	Mouvement de la corde de Do simple pour une position initiale pincée	25
16	Spectres et signaux temporels obtenus pour différents points d'observation	26
17	Spectres et signaux temporels obtenus pour différents points d'excitation	27
18	Spectres superposés des cordes simples et raides	28
19	Inharmonicité des modes de la corde raide simulée (rouge) et réelle (vert)	28
20	Erreur relative des harmoniques simulées par rapport aux harmoniques théoriques (%)	29
21	Simulation d'une corde raide amortie, lecture en $x = 0.95L$ et excitation pincée en $x = 0.4L$, $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 10^{-6}$	29
22	Simulation d'une corde raide amortie en $\partial_x^2 \partial_t$, lecture en $x = 0.95L$ et excitation pincée en $x = 0.4L$, $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 10^{-6}$	30
23	Fréquences des modes obtenus avec les deux modèles d'amortissement	31
24	Erreur relative obtenue pour les harmoniques des deux modèles par rapport aux fréquences théoriques Eq. (12)	31
25	Condition initiale en force pour la corde pincée	32
26	$U(x,s)$ obtenu pour la corde raide amortie non couplée	32
27	Signal temporel obtenu par convolution pour la corde raide amortie non couplée	33
28	Erreur relative sur les premiers modes obtenus par convolution pour la corde raide amortie non couplée	33
29	Modèle de la plaque mince de Kirchhoff	34
30	Premiers modes d'une plaque mince rectangulaire	36
31	Schéma du couplage corde-plaque	37
32	Schéma du couplage corde-plaque simplifié	37
33	Schéma simplifié du couplage corde-(chevalet+table)	39
34	Admittance au chevalet d'un violoncelle	40
35	Propagation de l'onde sur la plaque mince implantée en différences finies	42
36	Spectre et signal temporel obtenus pour la plaque mince	42
37	Simulation du couplage en différences finies pour une excitation gaussienne	44

38	Simulation du couplage en différences finies pour une excitation <i>Pizzicato</i>	44
39	Signaux obtenus avec une excitation pizzicato, avec une excitation <i>Pizzicato</i> en $\eta = 0.1L$, et des positions d'observation de $eta = 0.1L$ et $x = 0.9L_p, y = 0.9h_p$	45
40	Structure de simulation pour la corde raide amortie couplée en modal sans boucle retour	46
41	Structure de simulation pour la corde raide amortie couplée en modal avec boucle retour	46
42	signal et spectrogramme obtenu pour la corde couplée observée à $\eta = 0.9L$	47
43	signal et spectrogramme obtenu pour la corde couplée amortie observé à la sortie du chevalet	48
44	Structure de Contrôle pour la corde raide amortie isolée	49
45	Structure de Contrôle pour la corde raide amortie isolée plus complète	50
46	Structure de Contrôle complète pour la corde raide amortie Couplée	50

List of Tables

1	Caractéristiques de la corde de <i>Do₂</i> du violoncelle	14
2	Erreur relative spectrale pour la corde simple	24
3	Caractéristiques d'une plaque rectangulaire mince en bois. $\kappa = 6.3m/s$	41
4	Fréquences obtenues et erreur relative pour une plaque mince de coefficient de raideur $\kappa = 100$	43

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier M. Henri Boutin, Mme Claudia Fritz et M. René Caussé, pour leur encadrement au long de ce stage. En tant que tuteurs, ils m'ont beaucoup appris et ont partagé beaucoup de connaissances avec moi dans le domaine de l'acoustique musicale et de la méthodologie de recherche. Je tiens également à les remercier d'avoir su si bien m'encadrer malgré les conditions de distanciel difficiles et les nombreuses réorientations d'objectifs en l'absence de dispositif expérimental, leur patience et leurs précieux conseils.

J'aimerais également remercier les équipes de chercheurs de l'IRCAM et du LAM de Sorbonne Université pour leur accueil chaleureux, leur écoute attentive, et leurs questions pertinentes lors de la présentation finale du travail accompli. J'espère pouvoir travailler de nouveau avec ces organisations à l'avenir.

Je tiens également à remercier l'école centrale de Lyon, et en particulier le laboratoire d'acoustique et les différents professeurs de celui-ci pour les conseils divers qui m'ont permis de trouver cette offre de stage, et ainsi prendre un pas de plus dans la direction voulue pour mon projet professionnel.

1 Introduction

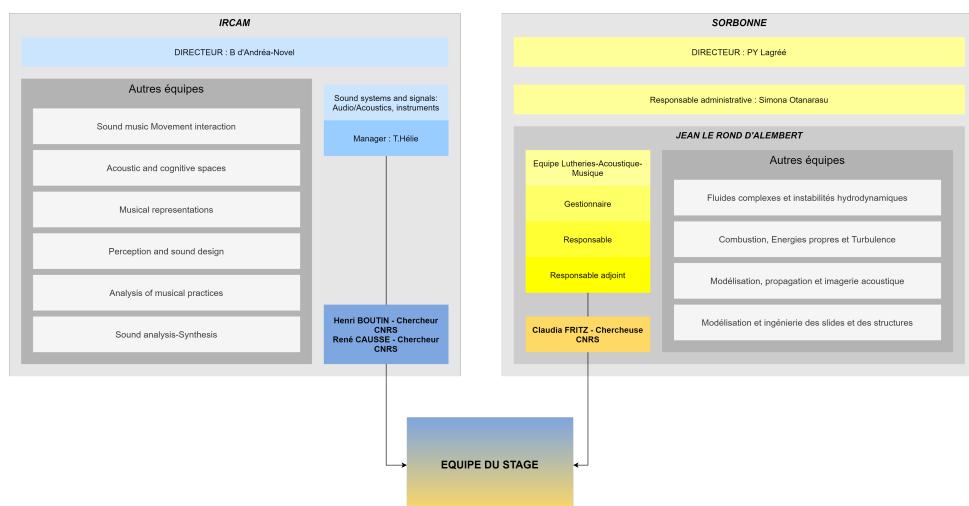
Ce rapport présente la démarche entreprise et les résultats obtenus par Julien Guinot dans le cadre de son stage d'application de 2e année à l'école centrale de Lyon à l'IRCAM et Sorbonne université, dans l'objectif d'implémenter une méthode de contrôle actif sur les premiers modes de vibration des cordes d'un violoncelle. Mon objectif pour ce stage était de découvrir un milieu qui me passionne, la musique, dans un contexte de recherche, afin de confirmer mon intérêt pour cette potentielle carrière.

Dans un premier temps, Une brève mise en contexte du projet vis-à-vis du domaine du contrôle actif acoustique sera entreprise, avec une présentation des objectifs du stage ainsi que de l'organisation de l'entreprise d'accueil. Par la suite, un modèle descriptif de la vibration de la corde sera établi et simulé après avoir construit les structures de simulation qui permettent de synthétiser la vibration de la corde, une en différences finies, l'autre en synthèse modale. Une troisième partie sera consacrée à une modélisation de la vibration de la table d'harmonie du violoncelle et du couplage, dont la considération est essentielle dans une modélisation réaliste de l'instrument. Enfin, une quatrième partie mettra en place les résultats théoriques sur le contrôle modal nécessaires pour implémenter celui-ci d'abord numériquement puis expérimentalement.

1.1 Contexte

1.1.1 Organisation des entités d'accueil

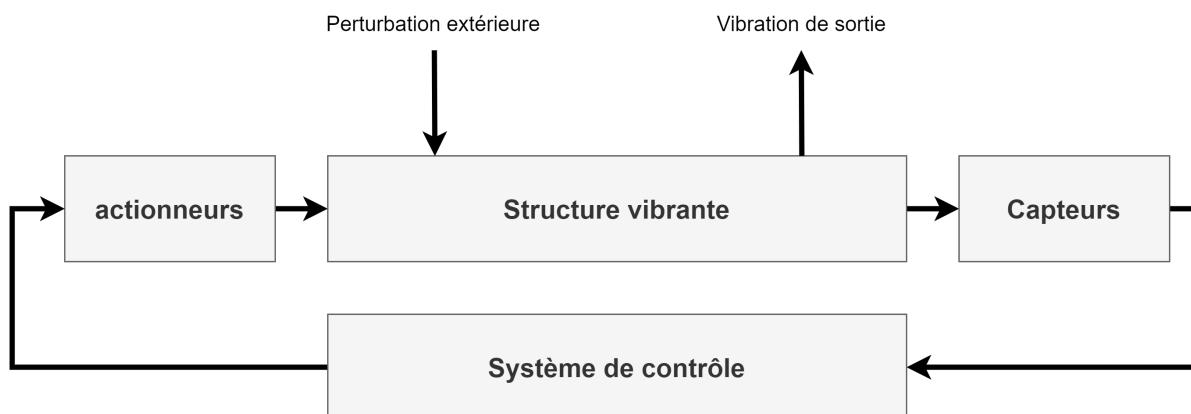
Ce stage est le stage d'application de 2e année d'école réalisé par Julien Guinot, à l'IRCAM et à l'institut Jean le Rond d'Alembert de Sorbonne Université. l'IRCAM est un centre de recherche en acoustique musicale lié organisationnellement au centre Pompidou de Paris, régi par un directeur, l'institut Jean le Rond d'Alembert est séparé en plusieurs équipes, et l'équipe d'accueil pour ce stage a été l'équipe Lutherie-Acoustique-Musique. Ci-dessous les organigrammes des deux organismes d'accueil, ainsi que l'équipe jointe constituée pour l'encadrement de ce stage:



Organigramme des deux organisations d'accueil

1.1.2 Contrôle actif de vibrations

Le sujet du stage a été présenté comme "contrôle actif des premiers modes de corde d'un violoncelle". Il rentre donc dans le domaine d'étude du contrôle actif des vibrations. L'objectif du contrôle actif de vibrations est de modifier les caractéristiques vibratoires d'une structure à l'aide d'une source secondaire. Donc, dans le cas d'une structure vibrante subissant une perturbation extérieure à l'origine de ces vibrations, des capteurs transmettent des informations sur ces vibrations à un système de contrôle, qui lui-même active des actionneurs qui vont agir sur la vibration du système pour obtenir les caractéristiques vibratoires voulues:



Principe du contrôle actif sur une structure vibrante

Ce contrôle possède, dans le cas des instruments de musique, une caractéristique particulière. En effet, la vibration produite par un instrument de musique est directement liée à la sensation ressentie par l'auditeur qui écoute cet instrument. La modification des caractéristiques vibratoires de l'instrument vers de nouvelles caractéristiques vibratoires par contrôle actif ouvre donc de nombreuses portes dans le domaine de l'interprétation et de la production musicale. Certaines études ont déjà parvenu à implémenter ou à théoriser un contrôle actif sur certains instruments:

- contrôle actif de lame de xylophone [2]
- contrôle actif de corps de Violon [2]
- contrôle actif de membrane de tambour
- contrôle actif de corps de guitare
- contrôle actif de corps de violoncelle [6]

Cette dernière étude est en réalité directement antécédante à l'objectif de ce stage. L'objectif du stage d'Arthur Givois était d'implémenter le contrôle actif sur la table d'harmonie du violoncelle (ci-dessous un dispositif expérimental mis en place pour ce contrôle):

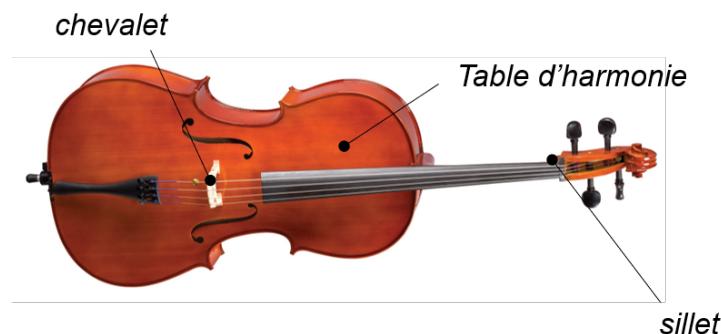


Dispositif expérimental réalisé par Arthur Givois

L'objectif de ce stage est différent: alors que le contrôle actif réalisé par Arthur Givois portait sur le corps du violoncelle, et c'était donc les vibrations de celui-ci qui étaient modifiées, on se concentre ici sur les vibrations de la corde du violoncelle. Ceci est détaillé dans les objectifs qui suivent:

1.2 Objectifs

Comme mentionné précédemment, l'objectif de ce stage est donc de contrôler les vibrations des cordes du violoncelle. Un des défis théoriques majeurs à prendre en compte résultant du fait de considérer la corde est le couplage. En effet, si on regarde le schéma du violoncelle qui suit:



Anatomie du violoncelle

Le violoncelliste agit sur la corde en la frottant avec un archet ou en la pincant avec son doigt. En retour, cette corde vibre, transmet cette vibration à la table d'harmonie par le chevalet, table d'harmonie qui rayonne et qui produit le son entendu par l'auditeur.

En revanche, la vibration de la table d'harmonie influence également celle de la corde en retour, ce qui mène à une caractéristique fréquentielle de la vibration de la corde modifiée: c'est le couplage corde-table d'harmonie. En prenant ce couplage en compte, les grands objectifs de ce stage sont:

- Construire un modèle pertinent et réaliste pour le mouvement de la corde de violoncelle ainsi que le couplage à la table d'harmonie
- Simuler le modèle précédemment établi ainsi qu'une structure de contrôle sur celui-ci
- valider expérimentalement la simulation de contrôle réalisée
- **Implémenter le contrôle modal indépendant des premiers modes de la corde de violoncelle: facteurs de qualité et fréquences propres**

Bien sûr, l'aspect expérimental du stage a été grandement perturbé par la pandémie de COVID-19, nous verrons les conséquences de cette perturbation en conclusion.

2 Modélisation et simulation de la corde

2.1 Modèle de corde

Pour cette étude, il convient d'abord de choisir un modèle de corde à la fois réaliste en termes de réalité physique afin que les simulations réalisées dans le cadre du projet soient *a priori* applicables sur un banc d'essai, mais également réaliste en termes de possibilité de contrôle, c'est à dire que la complexité théorique du modèle n'entrave pas les possibilités d'implémentation des solutions trouvées. Il s'agit donc de choisir un modèle qui dérive d'un bon compromis entre réalité physique et simplicité du formalisme.

2.1.1 L'équation d'onde monodimensionnelle

L'équation de propagation d'onde sur une corde la plus simple, l'équation de d'Alembert, décrit uniquement la propagation d'une déformation transverse le long de la corde. Elle est obtenue à partir d'un bilan mécanique sur une portion de corde, en considérant les petites déformations transverses.

Ce bilan fournit l'équation de d'Alembert pour la corde simple, sans source:

$$\partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u \quad (2.1)$$

u représente le déplacement transverse de la corde. Avec les conditions aux limites classiques [3][1][12] pour une corde en appui simple, considérée comme étant de longueur L . x décrit l'abscisse et t le temps.

$$u(0, t) = u(L, t) = \partial_x^2u(0, t) = \partial_x^2u(L, t) = 0$$

c est la célérité de propagation de l'onde sur la corde, qui est obtenue à partir de la masse linéique μ et de la tension appliquée aux extrémités de la corde T : $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Ces conditions aux limites sont sans pertes dans un premier temps. La solution est propagative, et la solution de l'équation est connue comme étant une combinaison de sinus et de cosinus:

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + B \sin(\omega t - kx)$$

où k est le nombre d'onde de l'onde de longueur d'onde λ qui se propage sur la corde.

Modes propres d'une corde en appui simple

Puisqu'on s'intéresse ici à un contrôle modal, il est important d'établir les modes propres de la corde simple. Les fréquences propres ainsi que les déformées propres de l'équation (1) sont aisément trouvables en passant dans le domaine fréquentiel et en identifiant les singularités du déplacement après expression de la base modale des déplacements de la corde en exploitant les conditions aux limites [3].

On considère une solution temporelle et spatiale oscillante, de pulsation ω et de nombre d'onde k de la forme:

$$u(x, t) = e^{i\omega t - ikx}$$

Ceci permet d'établir la relation de dispersion pour la corde simple:

$$\omega^2 = c^2 k^2$$

Puis les conditions aux limites $u(0, t) = u(L, t) = 0$ permettent d'obtenir les fréquences propres qui obéissent à la loi suivante:

$$f_n = n \frac{c}{2L} = n f_0$$

f_0 est la fréquence fondamentale de la corde. Les déformées modales sont obtenues de la même manière, en exploitant les conditions aux limites. On peut noter e_n la déformée modale d'ordre n de la corde. On a alors

$$e_n(x) = B_n \sin(n\pi \frac{x}{L}) \quad (2.2)$$

Puisque le déplacement transversal de la corde est à valeurs réelles, on peut obtenir une série infinie décrivant le mouvement de la corde, avec les contributions modales régies par les coefficients a_n et b_n :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(n\pi \frac{x}{L})$$

On obtient ainsi les modes propres de la corde en appui simple, qui permettront par la suite de réaliser un couplage simplifié avec un éventuel chevalet.

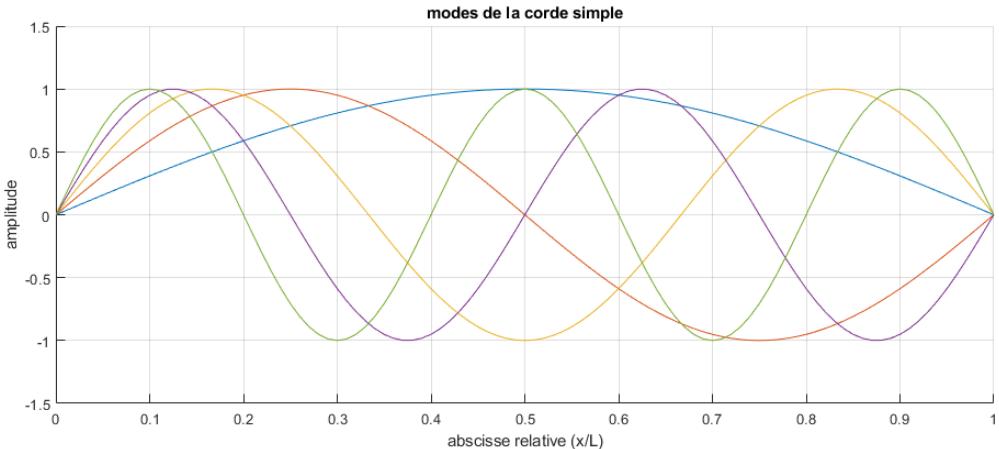


Figure 1: Premiers modes propres de la corde en appui simple

conditions initiales

Il faut, pour pouvoir résoudre l'équation (1), ainsi que les descriptions suivantes de la corde, plus complètes, des conditions initiales, à la fois pour la vitesse de la corde et sa position initiale. Dans le cadre de l'étude, on s'attache particulièrement à l'étude d'une corde de violoncelle. Celle-ci est usuellement jouée avec un archet, la corde est donc frottée. Alors, la position initiale de la corde est à l'équilibre, et sa vitesse initiale est nulle. C'est l'interaction de l'archet avec la corde qui sera modélisée et qui sera associée à un terme source dans l'équation (2.1). ces premières conditions sont simples à mettre

en place en termes de simulation. La deuxième manière dont une corde de violoncelle peut être jouée est en *pizzicato*, ce qui correspond à un mouvement de corde pincée. Ceci correspond à un lâchement de la corde à partir d'une forme qui peut être considérée comme étant triangulaire pour la simplification du modèle dans un premier temps. Les conditions initiales deviennent donc:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{u_0}{x_0}x & \text{si } x < x_0 \\ \frac{u_0}{L-x_0}(L-x) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.3)$$

si on considère que la corde est pincée à l'abscisse x_0 . cette condition initiale pour les cordes pincées est habituelle et classique. La vitesse initiale de la corde est considérée nulle.

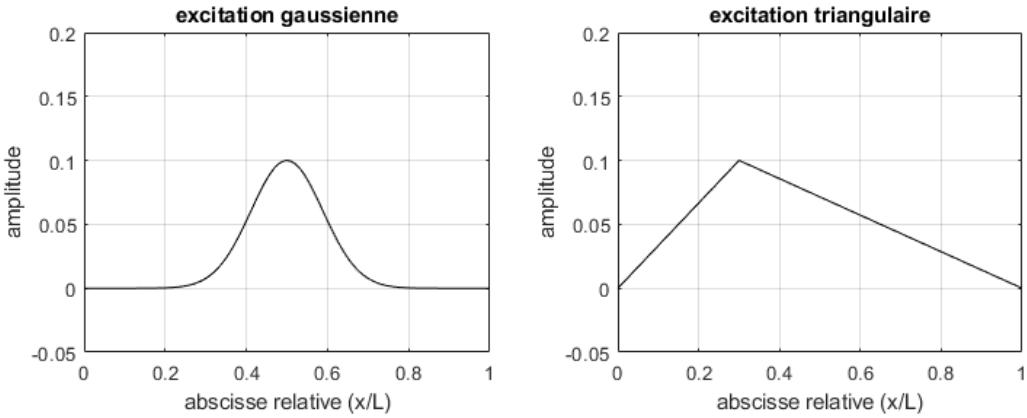


Figure 2: Excitation triangulaire de la corde

Les conditions initiales permettent de déterminer les valeurs des coefficients de la série de Fourier décrivant les modes de la corde a_n et b_n . en effet, en notant u_0 et u_{0t} les déplacements et vitesses initiaux de la corde, on peut déterminer que [1]

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^L u_0(x) \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{\omega_n} \int_0^L u_{0t} \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

2.1.2 L'équation d'onde d'Euler-Bernoulli

équation d'onde

L'équation de la corde simple établie au paragraphe précédent suppose une corde infiniment fine, et donc non sujette aux phénomènes de raideur. Dans ce paragraphe, nous établissons l'équation différentielle caractéristique d'une corde réelle raide, de diamètre non-nul, et donc soumise aux phénomènes de raideur.

L'équation suivante fait intervenir la raideur comme une influence sur la dérivée d'ordre quatrième du déplacement transversal de la corde, sans source [3], [1],[12]:

$$\mu \partial_t^2 u + EI \partial_x^4 u - T_0 \partial_x^2 u = 0 \quad (2.4)$$

où E est le module d'young du matériau. I est le moment quadratique de la corde. Pour une corde cylindrique, $I = \pi d^4/64$, d étant le diamètre de la corde.

Modes d'une corde d'Euler-Bernoulli.

La raideur entraîne une manifestation spectrale dans le son produit, un léger décalage vers les aigus des modes d'ordre élevés de la corde raide. On s'attache à présent à déterminer ces modes pour l'implémentation numérique de la simulation modale.

Pour déterminer les fréquences propres et les déformées modales d'une corde d'Euler-Bernoulli, on procède de la même manière que dans la section **2.1.1** en appliquant la transformée de fourier à l'équation d'onde, on obtient l'équation de dispersion:

$$-\omega^2\mu + EIk^4 + T_0k^2 = 0$$

Les racines réelles de l'équation en k sont, en posant $k^+ = \sqrt{r^+} = \sqrt{\frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4\omega^2}}{2EI}}$ et $k^- = \sqrt{|r^-|} \sqrt{|\frac{T_0 - \sqrt{T_0^2 + 4\omega^2}}{2EI}|}$, on a:

$$U(x) = Acosh(k^+x) + Bsinh(k^+x) + Ccos(k^-x) + Dsin(k^-x)$$

La condition aux limites $U(x = 0) = 0$ implique $A = C = 0$, et la condition aux limites en $x = L$ impliquent:

$$(r^+ - r^-) = Bsinh(\lambda^+L) = 0$$

Donc $B = 0$. Les déformées modales sont donc de la même forme que pour la corde simple, à la différence près d'une *inharmonicité* introduite sur les fréquences propres de la corde de par la raideur de celle-ci:

$$e_n = \sin(n\pi \frac{x}{L})$$

et enfin,

$$\begin{aligned} \omega_n^{EB} &= \frac{n\pi}{L} c \sqrt{1 + \frac{n^2\pi^2 EI}{T_0 L^2}} \\ f_n^{EB} &= n f_0 \sqrt{1 + n^2 B} = n f_0 \sqrt{1 + n^2 \frac{\pi^2 EI}{T_0 L^2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

f_0 étant le fondamental introduit dans la section précédente sur la corde simple. L'inharmonicité introduite par la raideur de la corde fait que les fréquences propres de la corde d'Euler-Bernoulli ne sont plus des multiples du fondamental, mais divergent avec la fréquence. L'inharmonicité de la fréquence propre de chaque mode en fonction de l'ordre du mode est représentée dans la figure ci-dessous pour une corde de *Do2* de violoncelle, dont les caractéristiques physiques sont répertoriées dans le tableau suivant:

Cette légère inharmonicité dans les premiers modes est souhaitable dans le cas de la synthèse sonore, puisque celle-ci reflète une caractéristique du son du violoncelle qui est entendue lorsqu'un violoncelle réel est joué. Il faudra donc l'implémenter dans la simulation de corde pour obtenir un modèle de corde réel.

Corde de Do_2	L (cm)	f_0 (Hz)	T_0 (N)	E (Pa)	D (m)
	69	65.5	133.4	$4,7 \cdot 10^9$	$1,7 \cdot 10^{-3}$

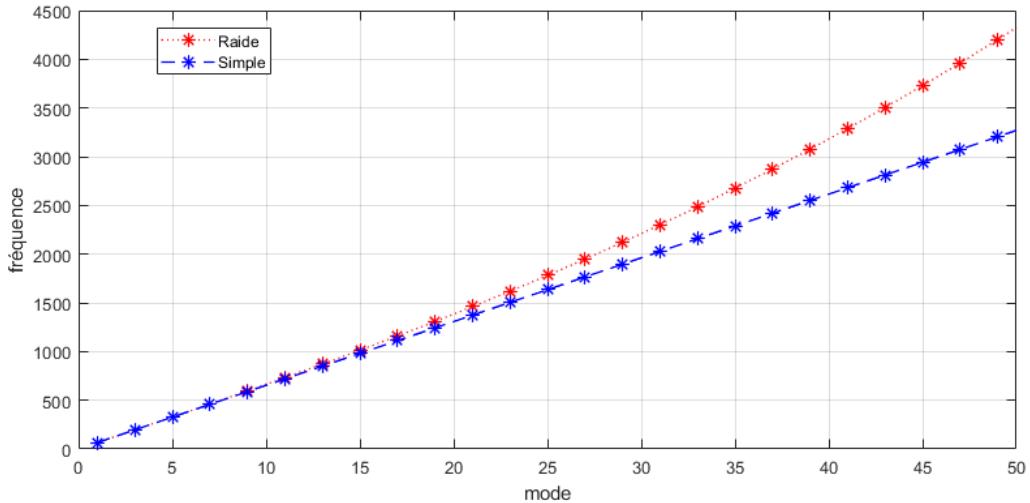
Table 1: Caractéristiques de la corde de Do_2 du violoncelle

Figure 3: Inharmonicité des modes pour la corde de do du violoncelle

2.1.3 Frottement

De toute évidence, une corde réelle n’oscille pas à l’infini. Il existe des mécanismes de pertes dans l’interaction physique de la corde avec le milieu qui l’entoure qui permettent de caractériser la décroissance de l’amplitude du mouvement au cours du temps. On peut citer certaines de ces pertes:

- Pertes par rayonnement
- Pertes par frottement avec l’air

Dans le cadre de l’étude, nous considérerons que la cause principale de pertes énergétiques de la corde est due au frottement qui a lieu entre l’air et la corde en mouvement. Nous négligerons donc toute autre forme de perte dans l’équation différentielle du mouvement de la corde.

Frottement fluide et visqueux

Les pertes par frottement avec le fluide environnant peuvent être réparties en deux catégories.

- **Les pertes par frottement fluide** qui s’opposent directement à la vitesse transversale de la corde. Elles se manifestent dans l’équation du mouvement de la corde par un terme de frottement fluide : $-2\partial_t u \sigma_0$, où σ_0 est le coefficient d’amortissement fluide.[5],[7],[9],[3], [12]
- **Les pertes par frottement visqueux** interviennent sur la dérivée seconde en espace de la vitesse. elles sont responsable de l’atténuation dépendante en fréquence

de la corde, ce que nous montrerons par la suite. Elles font intervenir un terme de frottement visqueux dans l'équation : $2\sigma_1\partial_x^2\partial_t u$ [5],[7],[9],[3]

La nouvelle équation de propagation de la corde, en prenant en compte les pertes par frottement, s'écrit :

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u - \kappa^2 \partial_x^4 u - 2\sigma_0 \partial_t u + 2\sigma_1 \partial_x^2 \partial_t u \quad (2.6)$$

ou encore

$$\mu \partial_t^2 u = T_0 \partial_x^2 u - EI \partial_x^4 u - R \partial_t u + \eta \partial_x^2 \partial_t u$$

Où $\sigma_0 = 2R/\mu, \sigma_1 = 2\eta/\mu$. On peut alors exhiber une dépendance en fréquence de la perte totale. En effet, prendre la transformée de fourier de l'équation (2.6) en considérant des solutions propagatives en temps et en espace, avec β le nombre d'onde et ω la pulsation, on obtient :

$$-\omega^2 + 2(\sigma_0 + \sigma_1 k^2)i\omega + c^2 k^2 + \kappa^2 k^4 = 0$$

en résolvant cette équation, et en considérant que pour des applications dans le domaine musical, les paramètres σ_1 et σ_0 seront petits, on obtient [1] :

$$\sigma(\omega) = -\sigma_1 \xi(\omega) - \sigma_0 = -\sigma_0 - \sigma_1 \frac{-c^2 + \sqrt{c^4 + 4\kappa^2\omega^2}}{2\kappa^2} \quad (2.7)$$

Il existe également une équation du mouvement pour laquelle la loi d'atténuation visqueuse a été établie empiriquement [4],[12], qui est précisée ci-dessous :

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u - \kappa^2 \partial_x^4 u - \sigma_0 \partial_t u + \sigma_1 \partial_t^3 u \quad (2.8)$$

Cette équation du mouvement pourra également éventuellement être prise en compte pour la suite des calculs, notamment en implémentation par différences finies, où une comparaison des sons produits avec une contribution spatiale de la viscosité sera intéressante à faire. Pour l'implémentation modale, en revanche, on utilisera l'équation (2.6) établie précédemment pour décrire le mouvement de la corde amortie.

Enregistrement d'un violoncelle réel

On a montré précédemment que l'atténuation des harmoniques de la corde est bien dépendante de la fréquence, et en l'occurrence, que les modes de fréquence plus élevées s'atténuent plus rapidement dû au frottement visqueux. Le spectrogramme suivant montre ceci, celui-ci ayant été mesuré sur la corde de Do_2 d'un violoncelle jouée à vide en pizzicato, enregistrée avec un microphone de studio dans une pièce matelassée.

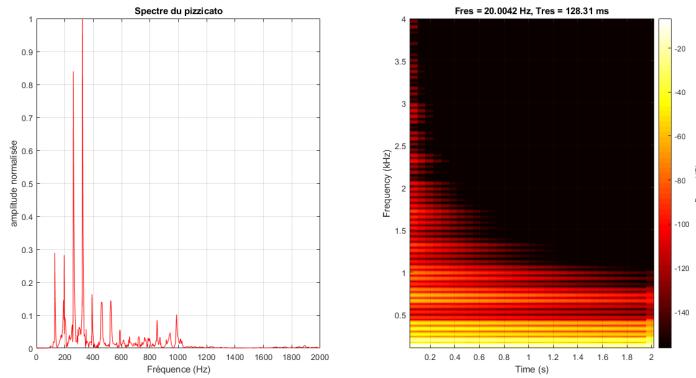


Figure 4: Spectre normalisé d'un pizzicato de violoncelle réel

Modes d'une corde avec pertes

Pour pouvoir implémenter une synthèse modale des cordes réelles, on va chercher à exprimer les modes d'une corde subissant un amortissement fluide et visqueux. Pour ce faire, on va décomposer le mouvement de la corde dans une base modale comme suit [3]:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x) u_n(t) \quad (2.9)$$

Une projection de l'équation de la corde amortie sur la base des fonctions spatiales fournit l'équation de la corde raide non amortie pour chaque vecteur de la base. Ces vecteurs ont pour valeur propre les λ_n tels que $\lambda_n = \omega_n^{EB2}$

$$\lambda_n = \omega_n^{EB2} = \frac{T_0 n^2 \pi^2}{\mu L^2} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 EI}{T_0 L^2} \right)$$

Puisque les e_n sont solutions de l'équation de la corde raide, on connaît les déformées modales de la corde, et on a par ailleurs $\partial_x^2 e_n = -\lambda_n e_n$. L'exploitation des conditions aux limites fournit des solutions sinusoïdales pures, et on peut par suite projeter sur la base temporelle:

$$\mu \partial_t^2 u_n + 2(R + \eta \lambda_n) \partial_t u_n + (T_0 + EI \lambda_n) \lambda_n u_n = 0 \quad (2.10)$$

Le discriminant de l'équation caractéristique de cette équation différentielle est, en notant $R_n = R + \lambda_n \eta$:

$$\Delta = 4R_n^2 - 4\lambda_n^2 \left(1 + \frac{EI}{\mu} \lambda_n \right)$$

Il est connu que des équations différentielles du type de l'oscillateur amorti peuvent avoir des solutions pseudo-périodiques, amorties, ou critiques. Dans le cas de la corde appliquée au violoncelle, les solutions de la corde amortie sont vraisemblablement toujours pseudo-périodiques. On a alors une solution de la forme:

$$u_n(t) = e^{-R_n t} \left(a_n \cos \left(\omega_n^E B \sqrt{1 - \frac{R_n^2}{\omega_n^E B}} t \right) + b_n \sin \left(\omega_n^E B \sqrt{1 - \frac{R_n^2}{\omega_n^E B}} t \right) \right) \quad (2.11)$$

Et on a donc par suite l'expression modale de l'évolution du déplacement transversal de la corde pour une corde amortie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi \frac{x}{L}) e^{-R_n t} \left(a_n \cos \left(\omega_n^b \sqrt{1 - \frac{R_n}{\omega_n^b}} t \right) + b_n \sin \left(\omega_n^b \sqrt{1 - \frac{R_n}{\omega_n^b}} t \right) \right) \quad (2.12)$$

où les a_n et b_n dépendent de l'excitation de la corde, comme vu précédemment en section 2.1.1. On remarque donc que la fréquence des harmoniques décroît avec l'ordre de celle-ci, mais comme le montre la figure suivante, l'effet de ce décalage pour des ordres faibles n'est pas assez notable pour avoir une influence audible sur le son de la corde par rapport au décalage occasionné par le modèle de la corde raide:

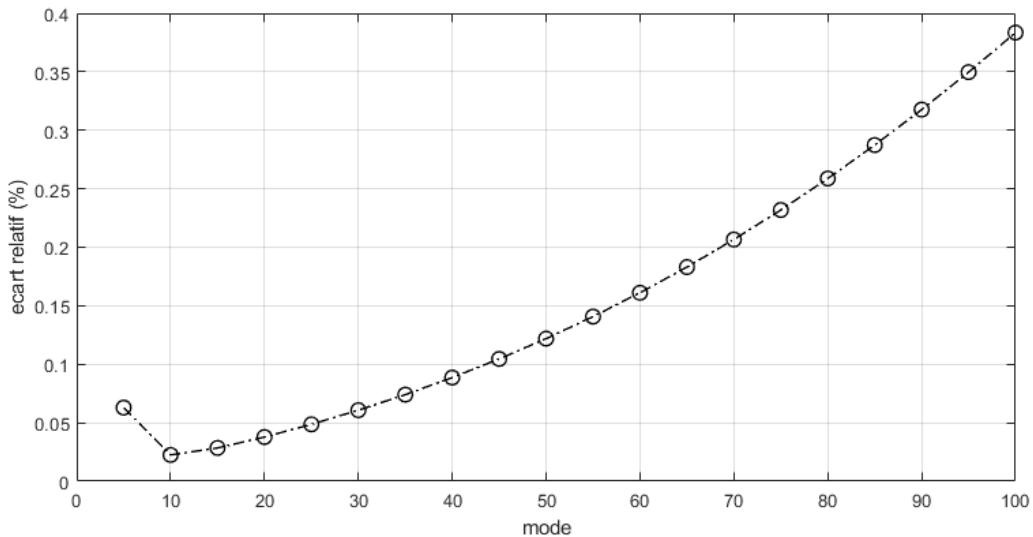


Figure 5: Inharmonicité due à la raideur ET à l'amortissement de la corde par rapport aux modes d'une corde simple

2.1.4 Calcul de la réponse impulsionale de la corde par fonction de Greene

Pour le modèle considéré, on prend une corde raide amortie, dont les fréquences propres et déformées modales sont spécifiés Eq. (2.12). On considère que cette corde est excitée par une force répartie en temps et en espace, notée $f(x, t)$. Cette force peut être assimilée à la force d'un archet sur la corde, jouée *legato*, ou à un pincement *Pizzicato*. Dans ces deux cas de figure, pour un archet localisé sur la corde et un unique pizzicato, la force $f(x, t)$ peut être mise sous la forme $\phi(x)\psi(t)$. Ce cas est traité dans [7], et l'implémentation suffirait.

Cependant, dans le cas d'un contrôle avec un actionneur agissant sur la corde, l'enveloppe en temps n'est pas la même pour tous les points de la corde, puisque l'actionneur peut continuer de jouer avec l'archet alors que le contrôle a lieu, ou la corde peut être pincée plusieurs fois. Par ailleurs, le couplage avec le chevalet pourrait être traité comme on l'a fait section 3.2, ou alors comme une force exercée par la plaque sur la corde. Ainsi, il faut une structure où la force d'entrée peut être traitée hors cadre de séparation des variables. C'est ce qui a été traité dans [11].

Considérons une excitation de l'équation de la corde en dirac en temps et en espace:

$$f(x, t) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau)$$

On appelle équation de Greene, et on note $g(x, t)$ la solution de l'équation de la corde avec pour excitation la force explicitée précédemment. On a donc

$$u(x, t) = \int_0^L \int_0^\infty g(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Dans le cas d'un problème invariant en temps, ce qui est notre cas, on simplifie l'écriture de g : $g(x; \xi, \tau) = g(x, 0, \xi, -\tau)$, et on se ramène à un problème de convolution en temps.

$$u(x, t) = \int_0^L \int_0^\infty g(x, \xi, t) f(\xi, t - \tau) d\tau d\xi = \int_0^L (g * f)(\xi) d\xi \quad (2.13)$$

Dans le domaine de laplace, cette équation devient:

$$U(x, s) = \int_0^L G(x, \xi, s) F(\xi, s) d\xi \quad (2.14)$$

On considère la base des déformées modales de la corde introduite précédemment, : $e_k(x) = \sin(\frac{k\pi x}{L})$. La solution peut être décomposée sur celle-ci dans le domaine de laplace, en introduisant le produit scalaire usuel sur les fonctions L^2 :

$$\begin{aligned} < f, g > &= \int f(x) g(x) dx \\ U(x, s) &= \sum_{k=1}^K < U(., s), e_k(.) > e_k(x) \end{aligned}$$

où K est l'entier choisi pour tronquer le nombre de modes considérés, puisqu'en simulation réelle, celui-ci ne peut évidemment pas être infini. On a par ailleurs [11]:

$$U_k(s) = G_k(s) F_k(s)$$

Dans le domaine temporel, la fonction g_k est la fonction de greene de la corde projetée sur les déformées modales:

$$g_k(t) = \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} e^{-R_k t}$$

Et on a donc:

$$u(x, t) = \sum_0^K (g_k * f_k)(t) e_k(x) \quad (2.15)$$

Dans le cas plus simple où on peut décomposer $f(x, t) = \phi(x)\psi(t)$ en temps et en espace, on a :

$$\phi(x) = \sum_0^K \phi_k e_k(x)$$

et on a l'expression de $u(x, t)$:

$$U(x, s) = \sum_0^K \phi_k \left[G_k(s) \Psi(s) \right] e_k(x) \quad (2.16)$$

Et le schéma de résolution pour une force décomposable en temps et en espace est représenté dans le schéma-bloc ci-dessous.

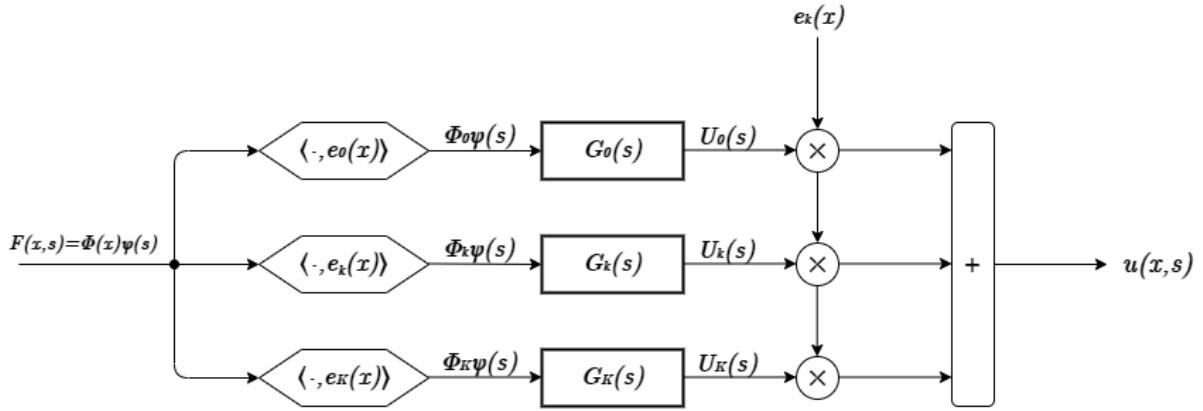


Figure 6: Structure de simulation pour la corde raide amortie non-couplée en modal

Considérons à présent le cas où la force exercée sur la corde n'est pas décomposable en temps et en espace comme précédemment. Intuitivement, il suffirait de remplacer la projection de ϕ sur les modes par la projection de f sur ceux-ci. En effet, il est montré [11] que c'est bien ce qui permet de simuler l'application d'une force non décomposable. On obtient par suite le schéma de résolution suivant, légèrement différent de celui Fig. 6.

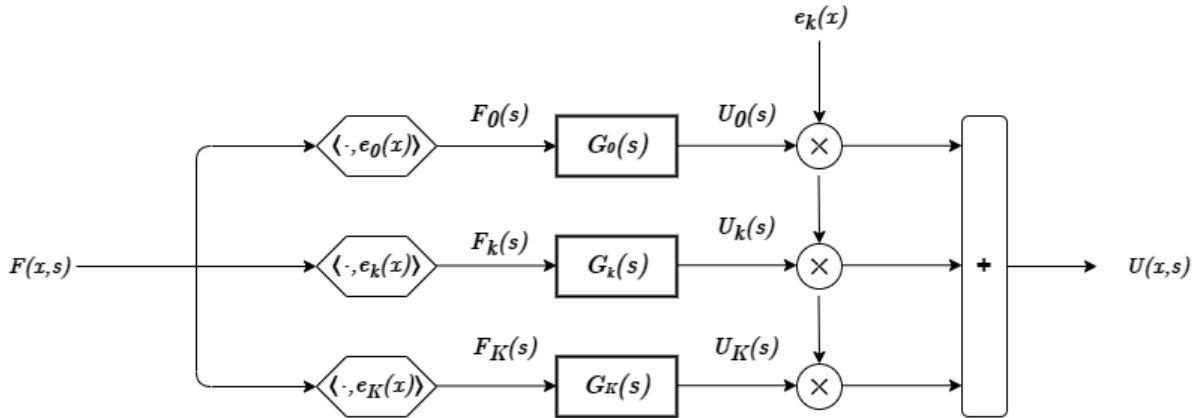


Figure 7: Structure de simulation pour la corde raide amortie non-couplée en modal, avec force non-décomposable

C'est à partir de ce schéma général que seront considérés le couplage et le contrôle. Dans la suite, les blocs "Corde" et "Plaque" feront référence au schéma ci-dessus appliqué aux différents modèles de corde ou à la plaque, dont les fréquences propres et déformées modales peuvent être trouvées Eq. (15,16). Les blocs de corde pourront être "Simple", "Raide", "Raide Amortie", "Raide amortie couplée".

2.2 Simulation en différences finies

En l'absence de possibilité d'expérience sur banc d'essai, la simulation revêt une importance capitale pour ce projet. Il s'agit dans un premier temps de simuler la corde et le couplage au chevalet, pour ensuite pouvoir implémenter les méthodes de contrôle spécifiées en **Section 4**. Deux possibilités se présentent pour la simulation de la corde:

- une modélisation de la corde par différences finies. Celle-ci simule le mouvement de la corde à partir de l'équation différentielle de la corde qui a pu être explicitée précédemment comme étant celle choisie pour le modèle.
- Une modélisation modale à partir des modes de la corde choisie comme modèle, avec un couplage au chevalet influant sur les modes de la structure corde-chevalet, qui est la structure qu'on cherche à contrôler *in fine*. On le verra par la suite, mais les méthodes de contrôle étant essentiellement modales, il paraît plus cohérent de se concentrer sur cet aspect de la simulation pour aboutir aux objectifs du projet.

On s'intéresse dans cette partie à la modélisation par différences finies du mouvement de la corde, avec un modèle de plus en plus complet au fur et à mesure des sous-sections. On verra que le modèle par éléments finis propose une modélisation véritablement physique du mouvement de la corde, puisqu'il s'appuie sur une discrétisation de l'équation différentielle qui régit le mouvement. Ainsi, plus l'équation à discréteriser est complète, plus le mouvement de la corde simulée sera réaliste. Cependant, s'ajoutent à ce réalisme des conditions de stabilité numérique qui, nous le verrons plus tard, nécessiteront peut-être un adimensionnement de l'équation différentielle de la corde pour garantir la stabilité du schéma numérique pour toute corde. [1].

2.2.1 Discrétisation des équations de la corde

Dans cette partie, on s'intéresse à l'établissement des relations de récurrence discrétisées en espace et en temps permettant d'intégrer les équations du mouvement des différents modèles de corde explicités précédemment:

- Corde simple
- Corde raide
- Corde raide amortie

Rappelons les équations du mouvement en question avant de les discréteriser: Ci-dessous les équations respectives des trois modèles précédents, comme explicitées équations (2.1), (2.4), (2.6), et (2.8)

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$$

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u - \kappa^2 \partial_x^2 u$$

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u - \kappa^2 \partial_x^4 u - \sigma_0 \partial_t u + \sigma_1 \partial_x^2 \partial_t u$$

On va discréteriser ces équations en espace et en temps afin de pouvoir les résoudre numériquement, en établissant une équation de récurrence pour calculer le mouvement de la corde à chaque point de celle-ci pour chaque itération en temps. Pour ce faire, on rappelle quelques-uns des opérateurs différentiels discrets qui vont nous permettre de discréteriser les équations du mouvement.

On discréteise le mouvement de la corde en temps avec un pas de temps δ_t , un pas d'espace δ_x . $u(x, t)$ devient donc $u(n, k)$, noté dans la suite u_l^n , où n est la coordonnée temporelle sur la grille de discréterisation, l est la coordonnée spatiale. Cette grille est représentée ci-dessous. Chaque ligne de la grille est donc une "corde" discréterisée, et la flèche rouge représente le sens de résolution temporel. La durée maximale de simulation est notée $T = N\delta_t$ et la longueur de la corde, $L = K\delta_x$.

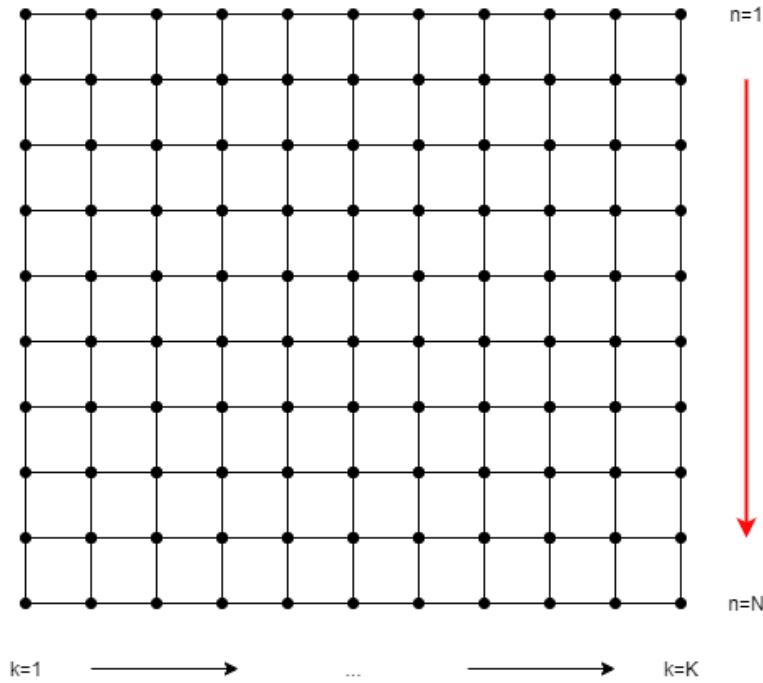


Figure 8: Grille de discréterisation en différences finies

Pour résoudre les équations du mouvement de la corde, il est nécessaire de discréteriser les opérateurs ∂_t , ∂_x , ∂_t^2 , ∂_x^2 et ∂_x^4 . Les discréterisations usuelles sont répertoriées ci-dessous:

$$\partial_t u_k^n \approx \frac{1}{\delta_t} (u_k^{n+1} - u_k^n) \quad \partial_x u \approx \frac{1}{\delta_x} (u_{k+1}^n - u_k^n)$$

$$\partial_t^2 u_k^n \approx \frac{1}{\delta_t^2} (u_k^{n+1} - 2u_k^n + u_k^{n-1}) \quad \partial_x^2 u_k^n \approx \frac{1}{\delta_x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n)$$

$$\partial_x^4 u \approx \frac{1}{\delta_x^4} (u_{k+2}^n - 4u_{k+1}^n + 6u_k^n + u_{k-2}^n - 4u_{k-1}^n)$$

$$\partial_x^2 \partial_t u \approx \frac{1}{2\delta_x^2 \delta_t} (u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1} - u_{k+1}^{n-1} - 2u_k^{n-1} + u_{k-1}^{n-1})$$

Pour les équations du mouvement des cordes simples et raides non amorties, il n'est pas nécessaire de connaître l'état de la corde dans le futur pour déduire son état présent de par l'absence de dérivée en temps. Les équations de récurrence pour obtenir l'état de la corde à l'instant n sont donc facilement obtenables [1] [12]:

$$u_k^{n+1} = 2(1 - \gamma^2)u_k^n + \gamma^2(u_{k-1}^n + u_{k+1}^n) - u_k^{n-1} \quad (2.17)$$

$$u_k^{n+1} = 2\left(1 - (1+3\mu)\gamma^2\right)u_k^n + \gamma^2(1+4\mu)(u_{k-1}^n + u_{k+1}^n) - \mu\gamma^2(u_{k+2}^n + u_{k-2}^n) - u_k^{n-1} \quad (2.18)$$

Figure 10: *Équations de récurrence pour obtenir le déplacement des cordes simples et raides.* $\gamma = c\frac{\delta t}{\delta x}$ et $\mu = \frac{\kappa\delta t}{\delta x^2}$ sont des paramètres de la discréétisation, et leur influence sur la stabilité sera discutée sous-section 2.2.2

Ces schémas de résolution impliquent une dépendance différente du mouvement de la corde en fonction de l'état de la corde aux instants n au $n - 1$. Ceux-ci peuvent être représentés sur la grille de discréétisation Figure 11. Ci-dessous la dépendance en espace aux instants précédents du mouvement de la corde discréétisée. En rouge les points dont le déplacement influe sur le point calculé (en bleu). On voit donc qu'on a besoin d'une condition initiale ainsi que de deux conditions aux limites à chaque limite pour la corde raide. Ces conditions seront discutées dans la section 2.2.3

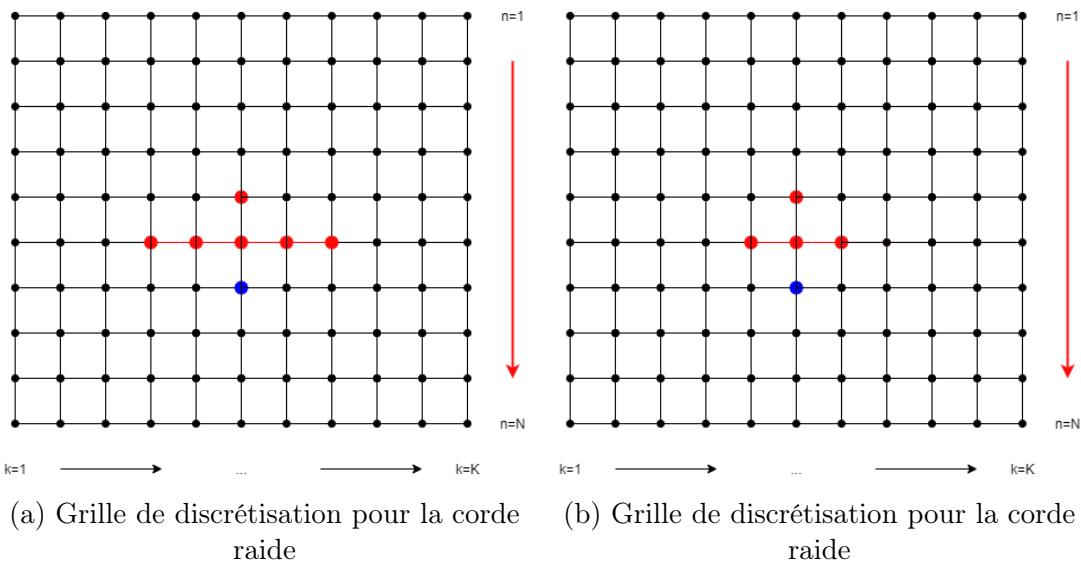


Figure 11: Grilles de discréétisation pour les cordes simples et raides

En ce qui concerne la discréétisation de l'équation (2.6), les opérateurs discrets usuels font intervenir le futur pour déterminer le présent. Physiquement, c'est impossible. On doit donc faire appel à des schémas implicites. Pour la discréétisation de (2.8), le schéma se résout encore en scalaire (2.19)[12] et explicitement en faisant l'approximation suivante : $\sigma_1 \partial_t^3 u \ll 1$. En revanche, la résolution implicite de (2.6) nécessite un calcul matriciel pour déterminer l'état de la corde (2.20)[1]. On note:

$$D = 1 + \sigma_0 \delta_t + \frac{\sigma_1}{\delta_t}$$

$$\alpha_1 = \frac{2 - 2\gamma^2 - 6\mu^2\gamma^2 + \sigma_1/\delta_t}{D} \quad \alpha_2 = \frac{\gamma^2(1 + 4\mu)}{D} \quad \alpha_3 = \frac{\sigma_1/\delta_t - \mu\gamma^2}{D}$$

$$\alpha_4 = \frac{-1 + \sigma_0 \delta_t + 2\sigma_1/\delta_t}{D} \quad \alpha_5 = -\frac{\sigma_1}{D\delta_t}$$

Et on a alors la discrétisation de (8):

$$u_k^{n+1} = \alpha_1 u_k^n + \alpha_2 (u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) + \alpha_3 (u_{k+2}^n + u_{k-2}^n) + \alpha_4 u_k^{n-1} - \alpha_5 (u_{k-1}^{n-1} + u_{k+1}^{n-1} + u_k^{n-2}) \quad (2.19)$$

Pour la discrétisation de (8), les matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont des matrices de discrétisation [1] qui ne sont pas explicitées pour des soucis de concision. u^n est le vecteur spatial de la corde à l'instant n .

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{B}\mathbf{u}^n + \mathbf{C}\mathbf{u}^{n-1} \quad (2.20)$$

Les influences des états précédents de la corde pour ces deux modèles de frottement visqueux et méthodes de résolution sont représentés figure suivante.

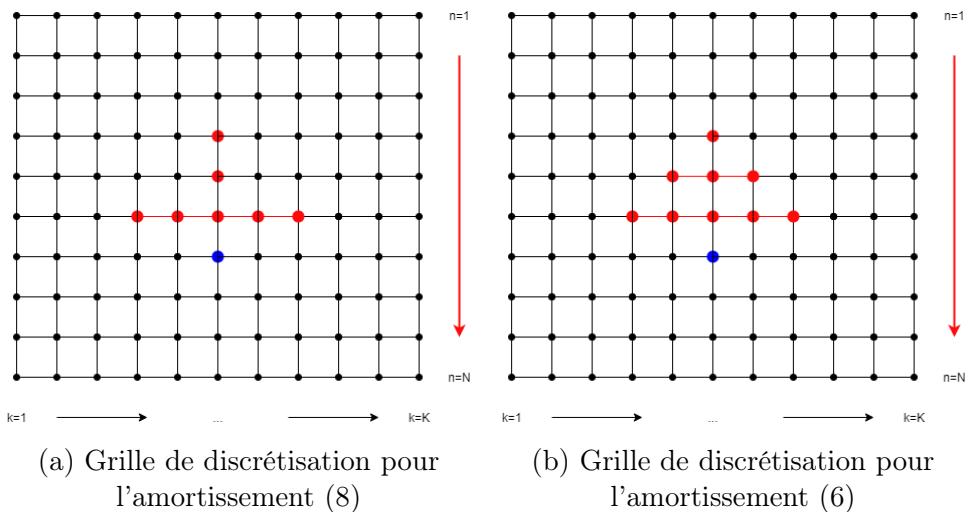


Figure 13: Grilles de discrétisation pour les cordes simples et raides

Ces relations de récurrence explicitées, il est important de regarder les résultats pour le cas le plus simple, la corde simple, puis de discuter, avant d'analyser les résultats obtenus pour les autres modèles, des conditions de stabilité des schémas ainsi que de l'influence des points d'observation, d'exctitation, et des conditions aux limites. Ceci sera fait dans la sous-section **2.2.3**

2.2.2 Résultats obtenus pour la corde simple non amortie

On simule ici une corde de Do_2 simple du violoncelle. La position de lecture du signal de sortie est prise comme étant $x = 0.9L$ pour avoir une contribution de beaucoup de modes. L'excitation prise est une excitation pincée, comme vue Figure 3, centrée en $x = 0.9L$ également. Les caractéristiques de la corde considérée, qui seront les mêmes pour toutes les simulations, sont répertoriées dans la section 2.1.2. Ci-dessous le signal temporel prélevé et le spectre du signal, ainsi que la mesure de l'erreur relative au spectre théorique pour les premiers modes dans le tableau suivant.

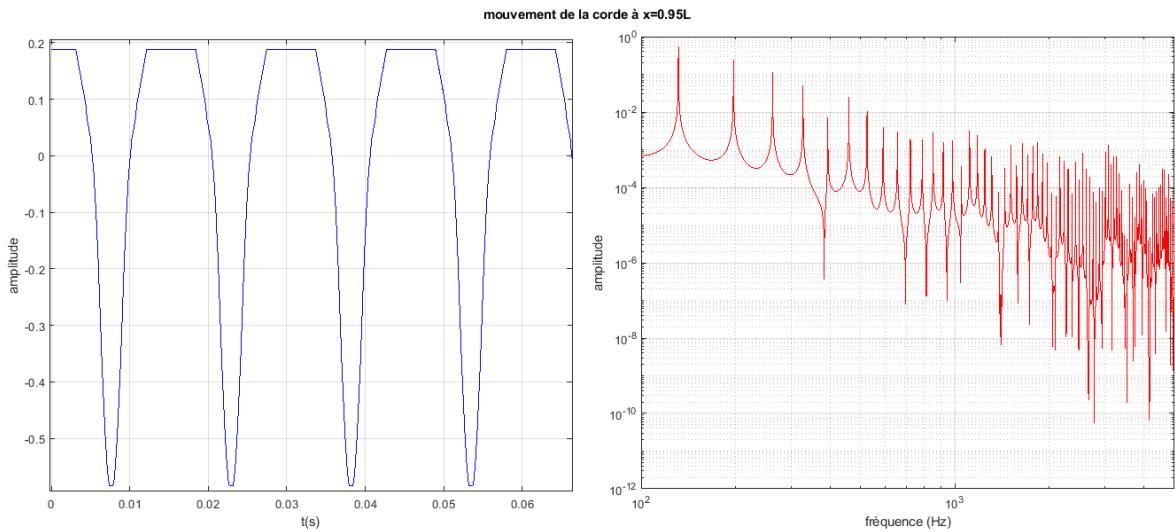


Figure 14: Signal temporel et spectre normalisé pour la corde simple

Mode	Fréquence théorique	Fréquence Simulée	Erreur relative (%)
1	65.4	65.5	0.08
2	130.8	131.5	0.54
3	196.2	197	0.41
4	261.6	262.5	0.34
5	327	328	0.31

Table 2: Erreur relative spectrale pour la corde simple

Le spectre est cohérent avec les modes théoriques d'une corde simple. Et la cohérence physique de l'animation peut être vérifiée en regardant les trois captures de la position de la corde peu après le pincement de la corde. L'erreur relative la plus élevée se situe au niveau du deuxième mode, de 0.54%. Pour cette fréquence, cette erreur représente environ 1/64e de ton, différence qui va en s'atténuant avec la fréquence. Au vu de l'inaudibilité de cette différence, on peut la négliger dans le cadre de l'étude.

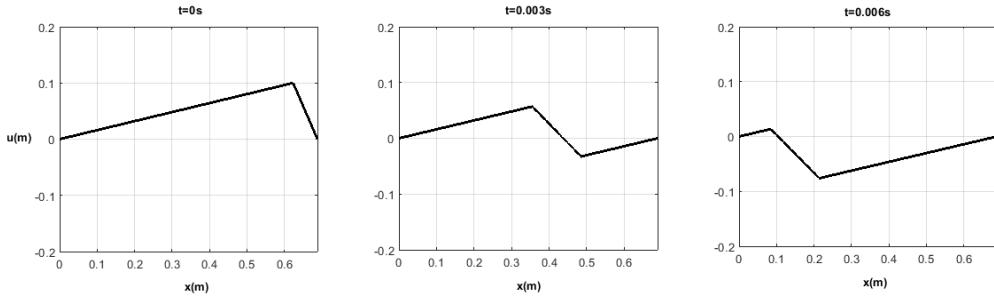


Figure 15: Mouvement de la corde de Do simple pour une position initiale pincée

Nous verrons dans la section **2.2.3** en quoi la condition initiale, la position d'observation et également les valeurs de pas d'échantillonage en espace et en temps influent sur la stabilité du schéma et la précision du spectre produit.

2.2.3 Stabilité du schéma et conditions aux limites, point d'observation, excitation

Stabilité du schéma numérique

Lors du passage en numérique, Il existe la possibilité de dispersion numérique si le pas de temps est trop petit devant le pas d'espace. Cette condition, comme on le montrera par une analyse de Von Neumann [1] de la corde, dépend du paramètre γ pour la corde simple, et du paramètre μ pour la corde raide. On peut considérer la solution propagative continue:

$$u(x, t) = e^{i\omega t} e^{i\beta x}$$

Qu'on discrétise en considérant l'échantillonnage aux positions $x = k\delta_x$ et $t = n\delta_t$:

$$u_l^n = e^{ik\beta\delta_x} e^{in\omega\delta_t} = z^n e^{i\beta kx} \quad (2.21)$$

En substituant cette solution dans l'équation (19), on obtient l'équation caractéristique :

$$z + 2(2\gamma^2(\sin^2(\beta\delta_x/2) - 1) + z^{-1}) \quad (2.22)$$

$$z_{\pm} = 1 - 2\gamma^2 \sin^2(\beta\delta_x/2) \pm \sqrt{(1 - 2\gamma^2 \sin^2(\beta\delta_x/2))^2 - 1}$$

Pour la stabilité du schéma discrétisé, on veut que $|z|$, ce qui fournit

$$\gamma^2 \sin^2(\beta\delta_x/2) \leq 1 \quad (2.23)$$

la stabilité du schéma peut donc être assurée en prenant la valeur $\gamma=1$. En pratique, connaissant la vitesse de propagation de l'onde sur la corde, la limite de δ_x ou δ_t peut être déterminée en fixant l'autre. Dans notre cas, on décide de fixer δ_t pour pouvoir mieux contrôler l'utilisation de mémoire dans matlab, et de prendre un $\gamma = 1$, le maximum de précision spectral étant atteint pour la valeur exacte de stabilité critique.

Pour la corde raide, sans refaire tous les calculs, on obtient la relation de stabilité du schéma numérique:

$$\gamma^2 + 4\mu^2 \leq 1 \quad (2.24)$$

Ce qui permet d'obtenir la relation entre δ_x et δ_t :

$$\delta_x \geq \sqrt{\frac{\gamma^2 \delta_t^2 + \sqrt{\gamma^4 \delta_t^4 + 16\kappa \delta_t^2}}{2}}$$

Comme pour la corde simple, on se placera dans le cas limite de stabilité pour le schéma de résolution de la corde raide.

Point d'observation et d'excitation de la corde

Nous avons mentionné précédemment qu'en observant la corde à $x = 0.9L$ (cf. Figure 17), on espère obtenir une contribution modale bien répartie sur le mouvement de la corde. Ceci vient simplement du fait qu'en observant la corde à un noeud du n -ième mode, on n'aura évidemment pas de contribution de ce mode. L'idéal est donc de se placer à:

- Soit un noeud d'un mode éloigné des premiers modes qu'on souhaite observer (*i.e. le 10ème mode dans le cas $x = 0.9L$*)
- Soit un endroit de la corde qui n'est ni noeud ni ventre de mode, mais ces endroits sont placés relativement près du centre de la corde, où on aura donc une contribution importante des modes impairs.

On préfèrera donc choisir un point d'observation près de l'extrémité de la corde pour obtenir une égale contribution des modes au possible. La figure suivante montre quelques signaux temporels et spectres obtenus en plaçant le "capteur" à $0.5L$, $0.33L$ et $0.2L$. Pour une corde simple, avec excitation pincée en $x = 0.9L$.

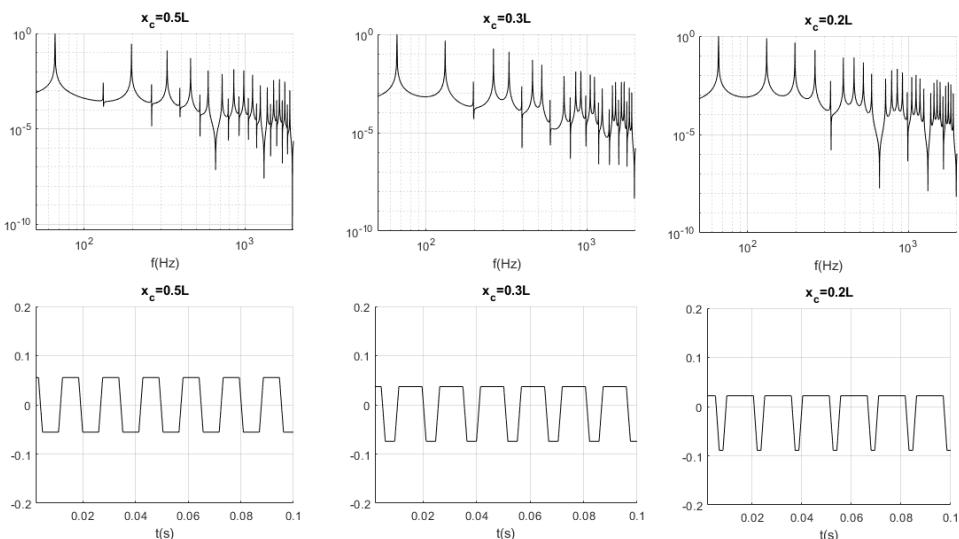


Figure 16: Spectres et signaux temporels obtenus pour différents points d'observation

Les résultats sont cohérents avec l'attente: en observant le mouvement de la corde à un noeud d'un certains nombre de modes, l'influence de ces modes disparaît sur le mouvement de la corde. Alors que l'abscisse d'observation du mouvement de la corde, l'abscisse d'excitation de celle-ci est un facteur sur lequel influe le musicien, qui n'est donc pas sous la gouverne de l'expérimentateur (qui souhaite réaliser le contrôle). Ci-dessous sont représentés les mêmes spectres obtenus, cette fois en observant toujours à $x = 0.9L$, et en excitant avec une condition initiale pincée à $x = 0.5L$, $x = 0.33L$ et $x = 0.2L$.

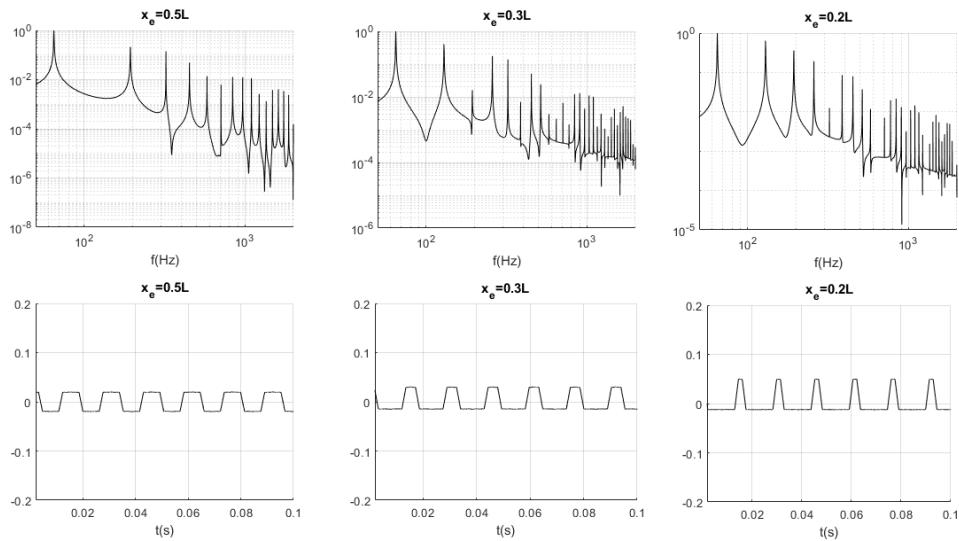


Figure 17: Spectres et signaux temporels obtenus pour différents points d'excitation

Les résultats sont cohérents. On s'attend bien sûr dans un instrument à cordes pincées que le son soit plus "nasal" (contribution des modes aigus) plus on joue proche du chevalet, et qu'il soit plus "chaleureux" (Harmoniques grave prédominantes) lorsque joué entre la touche et le chevalet.

2.2.4 Résultats obtenus pour la corde raide non amortie

Bien que les résultats obtenus pour la corde raide non amortie soient très semblables à ceux obtenus pour la corde simple en termes de son et de signal temporel pour des mêmes conditions initiales et d'observation, il est intéressant de regarder comment l'inharmonicité mentionnée section 2.1.2 qui advient naturellement dans des cordes physiques est traduite en différences finies. Ci-dessous sont superposés les spectres de la corde simple et de la corde raide simulés par différences finies, ainsi qu'une mesure de l'inharmonicité de la corde raide par rapport à l'inharmonicité attendue.

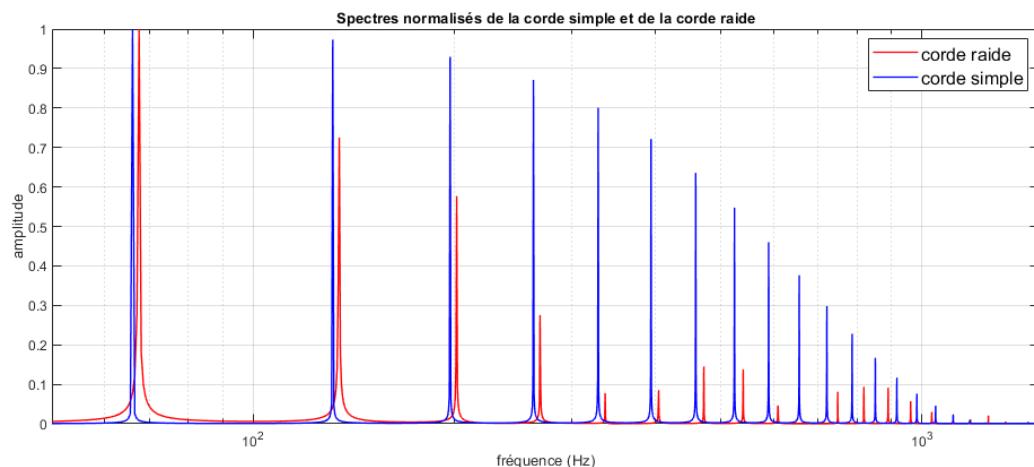


Figure 18: Spectres superposés des cordes simples et raides

On voit que le spectre de la corde raide se décale vis-à-vis du spectre de la corde simple. On peut voir la différence des harmoniques sur la figure suivante, ainsi que l'erreur relative obtenue entre les fréquences modales théoriques pour la corde raide et celles obtenues par simulation. L'erreur reste marginale, entre -3% et -1% pour les 20 premiers modes. Au-delà de ceux-ci, dans une corde réelle, on entend très peu la contribution des harmoniques aigües. On peut considérer que la différence est alors négligeable.

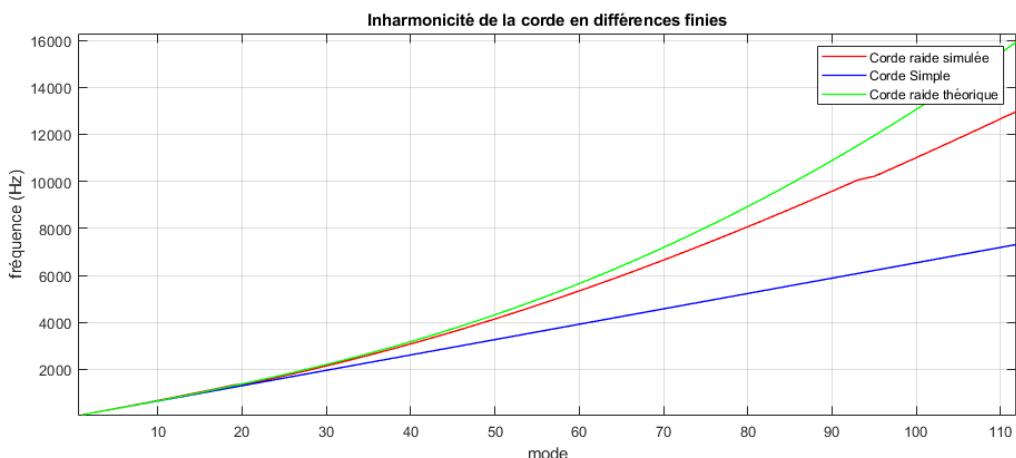


Figure 19: Inharmonicité des modes de la corde raide simulée (rouge) et réelle (vert)

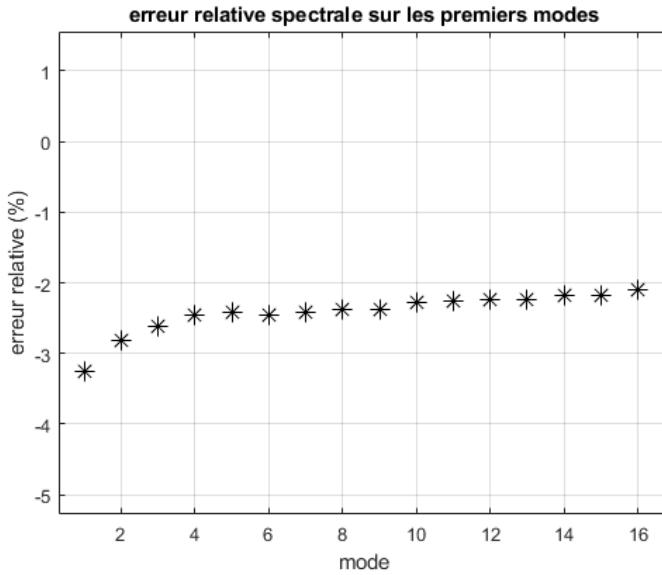


Figure 20: Erreur relative des harmoniques simulées par rapport aux harmoniques théoriques (%)

2.2.5 Résultats obtenus pour la corde raide amortie

Les équations (2.19) et (2.20) permettent de simuler la corde raide amortie avec deux modèles d'amortissement, respectivement ceux décrits équations (2.6) et (2.8). Au-delà de la vérification de la cohérence physique des résultats obtenus, une comparaison des spectres des deux modèles peut être intéressante pour déterminer quelle modèle on s'attachera à utiliser dans la suite de l'étude. Ci-dessous les résultats obtenus pour une corde pincée amortie en ∂_t^3 .

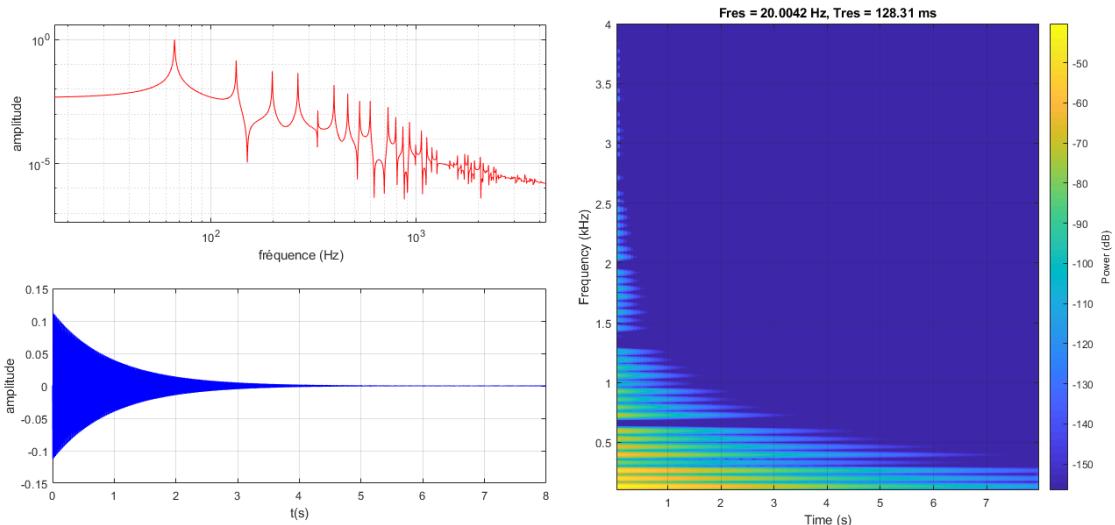


Figure 21: Simulation d'une corde raide amortie, lecture en $x = 0.95L$ et excitation pincée en $x = 0.4L$, $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 10^{-6}$

En comparant le spectrogramme obtenu à celui du violoncelle réel, à même réso-

lution temporelle et fréquentielle, on se rend compte que le résultat semble déjà cohérent : la corde est globalement atténuee indépendamment de la fréquence, et un terme d'atténuation dépendant de la fréquence vient atténuer les harmoniques aiguës plus rapidement. à l'oreille, le son est également réminiscent d'une corde de violoncelle jouée en *pizzicato*. Les coefficients σ_0 et σ_1 ont été choisis empiriquement pour que le temps d'atténuation T_{60} du signal de sortie soit proche de celui du violoncelle enregistré. Ci-dessous les mêmes résultats pour une corde atténuee en $\partial_x^2 \partial_t$:

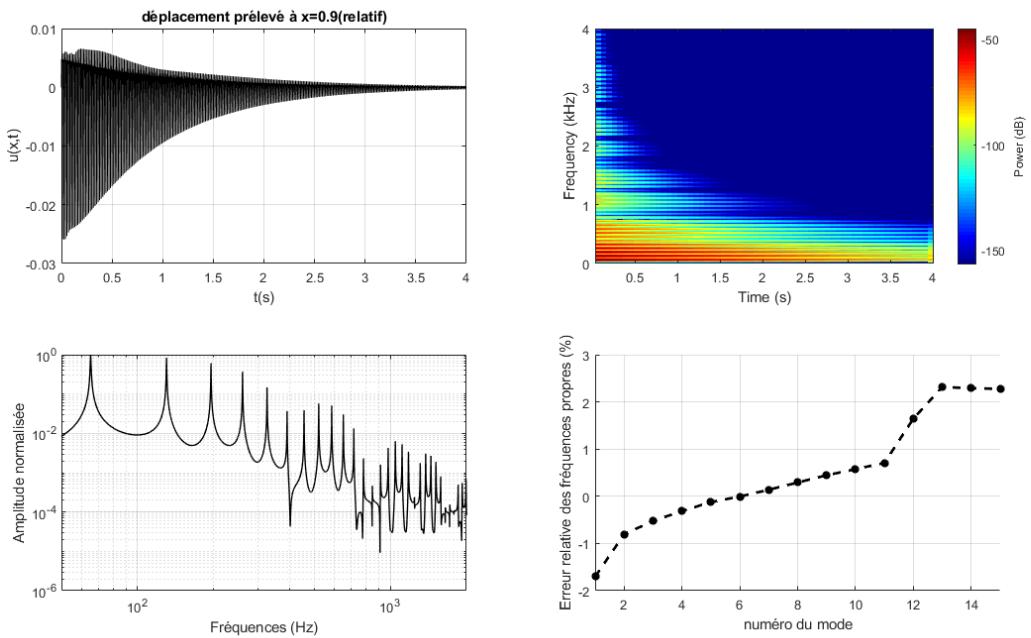


Figure 22: Simulation d'une corde raide amortie en $\partial_x^2 \partial_t$, lecture en $x = 0.95L$ et excitation pincée en $x = 0.4L$, $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 10^{-6}$

La première chose à remarquer est que le signal de sortie semble plus "organique". Alors que le signal de la figure 21 est parfaitement symétrique par rapport à l'axe de la corde, le signal de la Figure 22 possède un régime transitoire qui semble plus naturel. La comparaison des spectres des deux signaux ainsi que l'erreur relative par rapport aux modes théoriques obtenus équation (2.12) se trouve ci-dessous.

Pour les 5 premiers modes, l'erreur relative pour le modèle ∂_{txx} est très faible, mais dépasse vite celle pour le modèle ∂_{ttt} . En considérant que le nombre de modes dont le temps d'atténuation est raisonnablement audible peut être limité à une quinzaine, vingtaine de modes, Et que la marge d'erreur reste dans une tranche raisonnable (5%), on préférera choisir pour la suite l'amortissement visqueux en ∂_{txx}

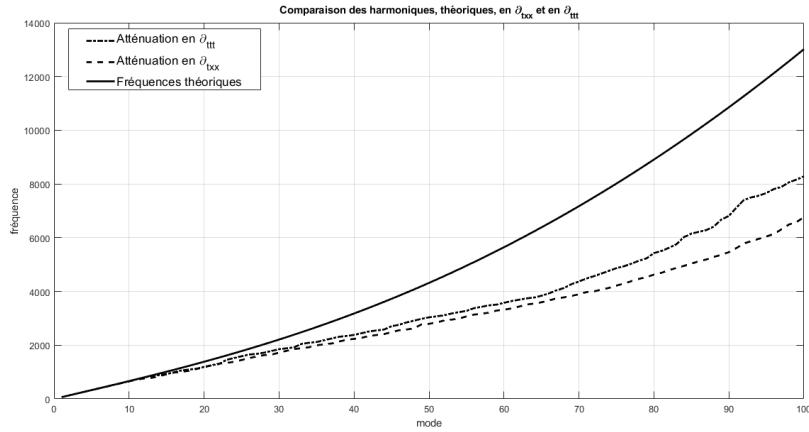


Figure 23: Fréquences des modes obtenus avec les deux modèles d'amortissement

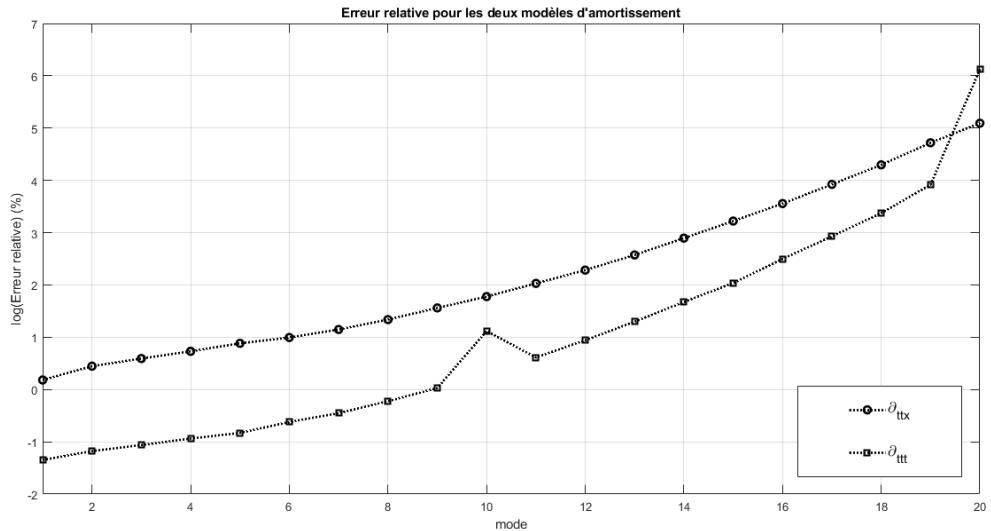


Figure 24: Erreur relative obtenue pour les harmoniques des deux modèles par rapport aux fréquences théoriques Eq. (12)

2.3 Simulation par approche modale

L'identification des déformées modales et des fréquences propres des différents éléments du système et l'équation (8) généralisée à une structure de contributions modales temporelles $u_n(t)$ et spatiales $e_n(\mathbf{x})$, en dimension spatiale quelconque met en avant la possibilité de simuler numériquement la vibration d'une structure via la détermination des contributions modales mentionnées précédemment. Dans cette partie, on s'intéresse à l'implémentation dans matlab de la synthèse modale du signal de sortie du système corde-table d'harmonie. On s'appuie sur les articles [11] [7] pour constituer une structure de simulation modale de la corde.

2.3.1 Résultats obtenus pour la corde raide amortie non couplée

On choisit d'abord de simuler un pincement de corde. Pour ce faire, il faut établir la condition initiale en force pour un pincement. Considérons une force de pincement notée F_0 . Une brève analyse de RDM montre que le profil de l'effort tranchant sur la corde à l'instant 0, $f(x, 0)$ est de la forme suivante:

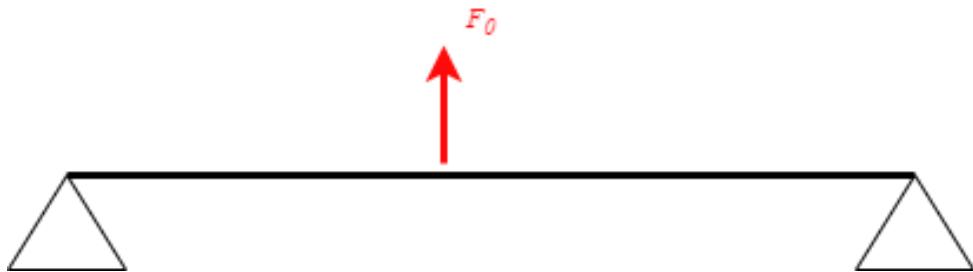


Figure 25: Condition initiale en force pour la corde pincée

On choisit d'appliquer directement la structure de simulation présentée Fig. 33 puisque, bien que la force soit décomposable en temps et en espace, ce ne sera pas le cas pour les modélisations suivantes (corde frottée par exemple). On choisit un pincement de force $F_0 = 5N$, $\alpha = 0.3m$. la structure Fig.7 est mise en place, et on obtient le plan suivant ($U(x, s)$):

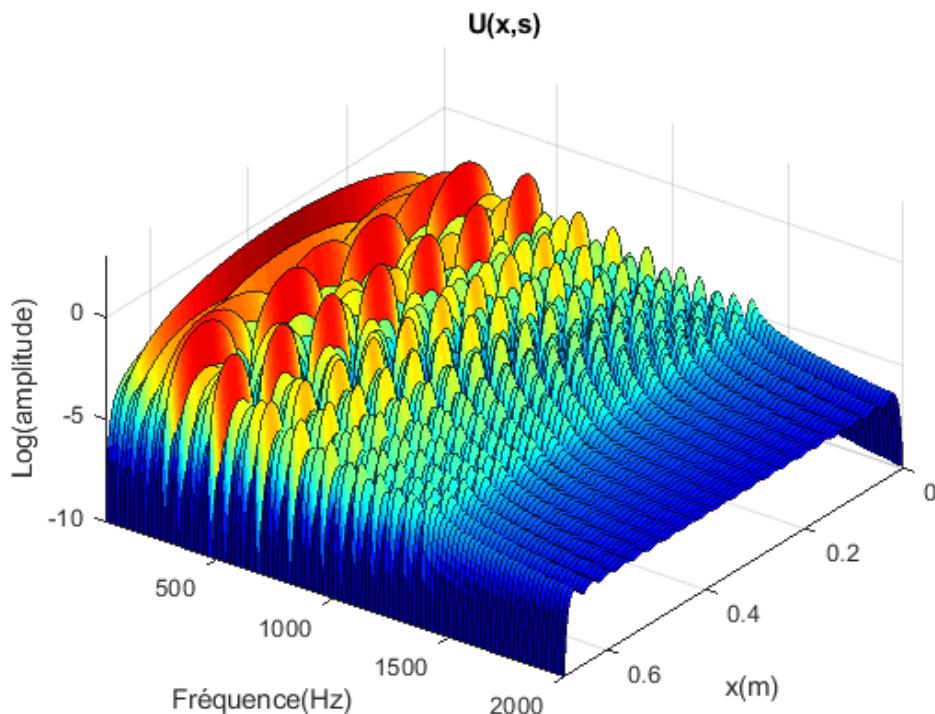


Figure 26: $U(x, s)$ obtenu pour la corde raide amortie non couplée

Les résultats obtenus sont cohérents. On peut voir la contribution modale en fonction de l'abscisse le long de la corde, et on voit bien que les modes contribuent peu lorsqu'on se situe à leurs noeuds, et inversement aux ventres.

On peut ainsi regarder le mouvement à une position de la corde, comme précédemment. La figure suivante présente les éléments d'analyse du signal obtenu à partir de la structure Fig. (7) en se plaçant à $x = 0.95L$ pour l'observation du déplacement de la corde, en simulant 20 modes, avec une excitation pincée en $\alpha = 0.3m$:

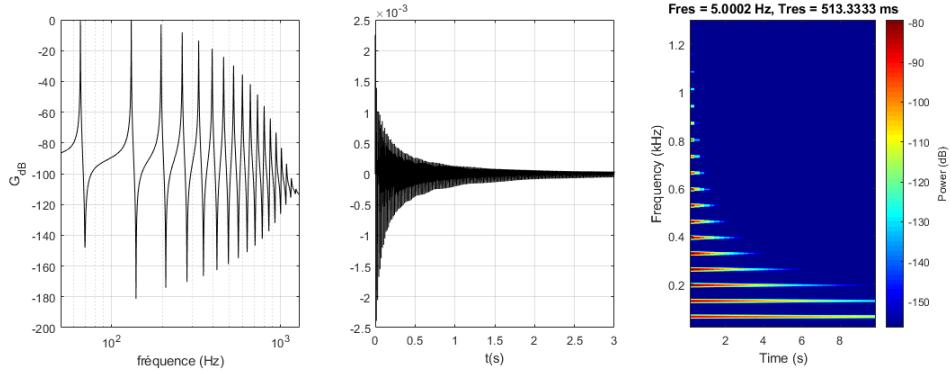


Figure 27: Signal temporel obtenu par convolution pour la corde raide amortie non couplée

La divergence des fréquences propres obtenues avec les fréquences propres théoriques est représentée figure suivante, et on peut voir qu'elle est très faible sur les premiers modes (dans tous les cas, le nombre de modes qui sera calculé restera relativement faible du fait de la taille des matrices utilisées pour le calcul.). On est donc confortés dans la cohérence de la méthode, qui permet donc d'obtenir un signal pertinent pour la corde raide amortie.

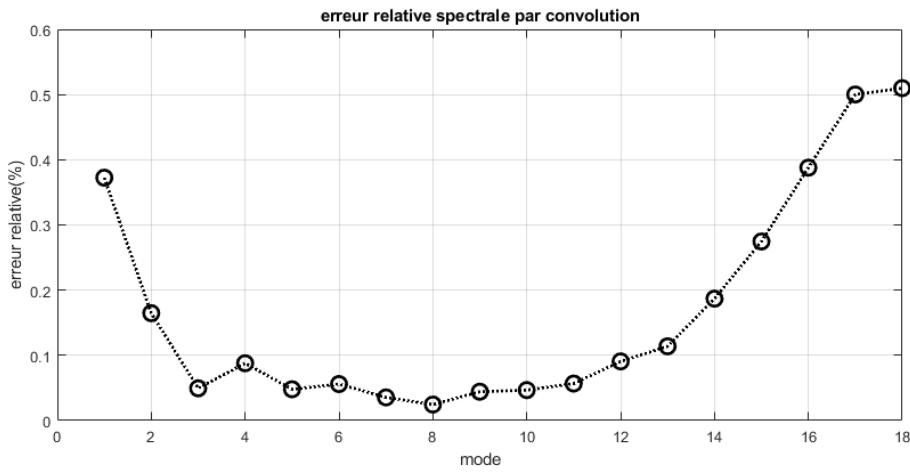


Figure 28: Erreur relative sur les premiers modes obtenus par convolution pour la corde raide amortie non couplée

3 Modélisation et simulation de la plaque et du couplage

3.1 Modèle de plaque

3.1.1 Equation du mouvement

Le modèle d'une plaque de Kirchhoff uniforme isotrope, avec un déplacement transversal noté w , est définie comme [1]

$$\partial_t^2 w = -\kappa^2 \Delta^2 w \quad (3.1)$$

$$\kappa^2 = \frac{EH^2}{12(1-\nu^2)\rho}$$

E étant le module d'Young de la plaque, H l'épaisseur de la plaque, ν son coefficient de poisson, ρ sa masse volumique, et L_p la longueur de la plaque, l_p la largeur de celle-ci.:

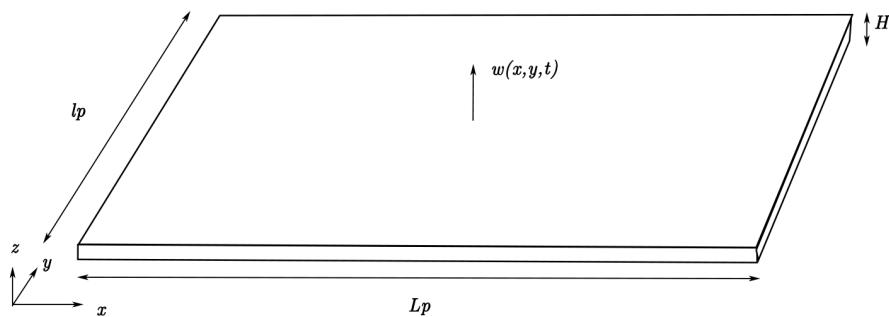


Figure 29: Modèle de la plaque mince de Kirchhoff

Avec des conditions aux limites encastrées, c'est à dire:

$$\begin{cases} w(x, y = 0, t) = \partial_x w(x, y = 0, t) = 0 \\ w(x, y = l_p, t) = \partial_x w(x, y = l_p, t) = 0 \\ w(x = 0, y, t) = \partial_x w(x = 0, y, t) = 0 \\ w(x = L_p, y, t) = \partial_x w(x = L_p, y, t) = 0 \end{cases}$$

Ces conditions aux limites sont raisonnables dans le cadre de l'étude d'un violoncelle au vu de son anatomie.

Il est également possible de faire intervenir un amortissement fluide et visqueux comme pour la corde. Notons σ_0^p le coefficient d'amortissement fluide de la plaque, σ_1^p le coefficient

d'amortissement visqueux. On choisit de négliger l'influence de la tension au vu du matériau (bois) du chevalet et de la table d'un violoncelle. L'équation de la plaque peut alors être réécrite: [1].

$$\partial_t^2 w = -\kappa \Delta^2 w - \sigma_0^p \partial_t w + \sigma_1^p \Delta \partial_t w \quad (3.2)$$

Comme pour la corde simple, une étude empirique permet également de considérer, à la place d'une contribution spatiale et temporelle de la viscosité, seulement une dérivée triple selon le temps, telle que:

$$\partial_t^2 w = -\kappa \Delta^2 w - \sigma_0^p \partial_t w + \sigma_1^p \partial_t^3 w$$

Dans le cadre de notre étude et pour l'instant, on s'attachera à décrire en modal uniquement la plaque simple. L'existence de schémas de résolution implicites pour le modèle amorti de la plaque mince permettra une implémentation plus facile en différences finies.

3.1.2 Modes de la plaque simple

Pour déterminer les modes de la plaque simple, On considère de nouveau une solution propagative de la forme:

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t}$$

Il est possible de décomposer $W(x, y) = X(x)Y(y)$ [8]. On obtient par la suite, pour une plaque de largeur h et de longueur L :

$$X(x) = \cos\left(\gamma_1\left(\frac{x}{L_p} - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\sin(\gamma_1/2)}{\sinh(\gamma_1/2)} \cosh\left(\gamma_1\left(\frac{x}{L_p} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (3.3)$$

Pour les modes pairs. γ_1 sont les solutions de l'équation caractéristique de la structure:

$$\tan(\gamma_1/2) + \tanh(\gamma_1/2) = 0 \quad (3.4)$$

Pour les modes impairs, l'équation caractéristique devient:

$$\tan(\gamma_1/2) - \tanh(\gamma_1/2) = 0 \quad (3.5)$$

et les déformées modales sont de la forme:

$$X(x) = \sin\left(\gamma_1\left(\frac{x}{L_p} - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\sin(\gamma_1/2)}{\sinh(\gamma_1/2)} \sinh\left(\gamma_1\left(\frac{x}{L_p} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (3.6)$$

L'expression de $Y(y)$ peut être établie de manière similaire, et l'expression est la même, au changement près de remplacer L par l_p dans les équations (3.3) et (3.6).

Enfin, Comme pour la corde, on peut avoir l'expression totale du mouvement de la plaque en décomposant l'exponentielle complexe dans l'équation du mouvement:

$$w(x, y, t) = \left(a_{pq} \cos(\omega_{pq} t) + b_{pq} \sin(\omega_{pq} t) \right) X(x) Y(y)$$

où les a_{pq} , b_{pq} peuvent être calculés de la même manière que pour la corde à partir des conditions initiales:

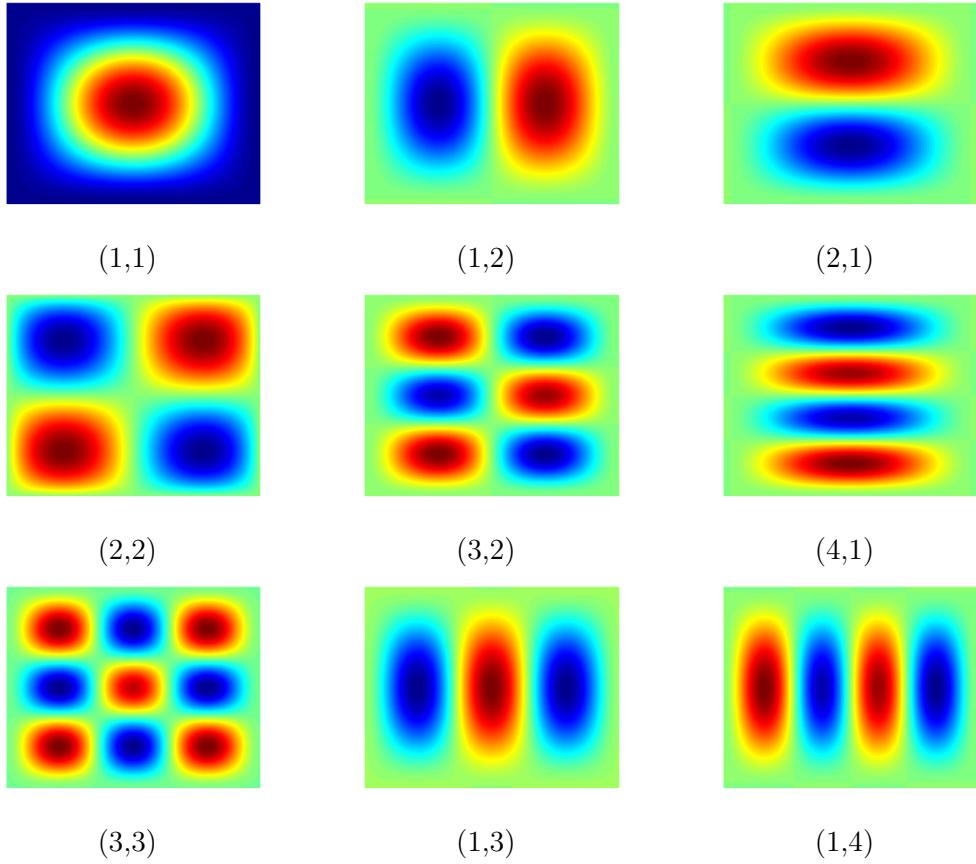


Figure 30: Premiers modes d'une plaque mince rectangulaire

$$a_{pq} = \int \int u_0(x, y) X(x) Y(y)$$

$$b_{pq} = \frac{1}{\omega_{pq}} \int \int v_0(x, y) X(x) Y(y)$$

On a donc l'expression et l'allure des premiers modes de la plaque simple. On pourra par la suite dans la partie implémentation modale de la plaque et du couplage corde-plaque exploiter ces modes pour une plaque rectangulaire homogène isotrope qu'on associera à la table de violoncelle.

3.2 Modèle du couplage

3.2.1 couplage de la corde avec la plaque en temps réel

Dans le son émis par le violoncelle, c'est la table d'harmonie du violoncelle qui rayonne l'essentiel du son, et c'est donc cette table d'harmonie, assimilable à une plaque homogène et bois, qui sera considérée comme étant la sortie du système. De toute évidence, la table possède ses modes propres, et le couplage de la corde se fait au niveau du chevalet. On rappelle que la corde est posée sur le chevalet, comme illustré sur le schéma ci-dessous:

Dans cette configuration, le déplacement transverse, respectivement de la corde et de la plaque, pour des coordonnées spatiales respectives η et x, y est noté $u(\eta, t)$ pour la

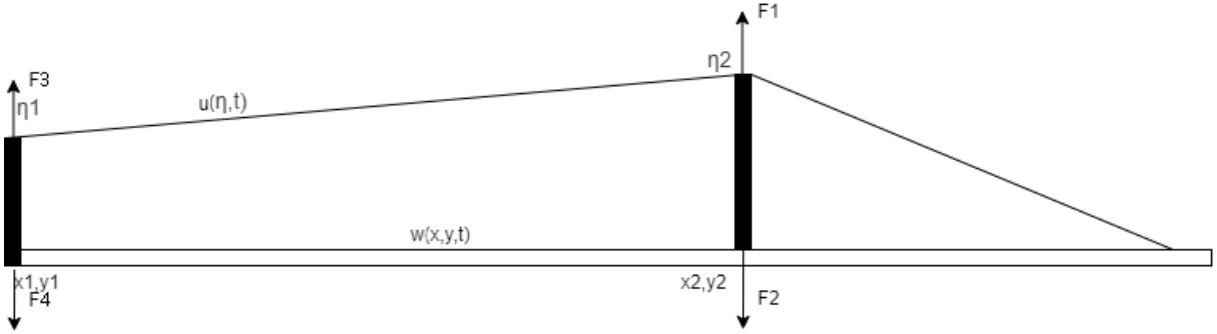


Figure 31: Schéma du couplage corde-plaque

corde et $w(x, y, t)$ pour la plaque. Les points de fixation du chevalet et du sillet sont respectivement situés en η_1 et x_1, y_1 , η_2 et x_2, y_2 .

Dans cette configuration, la plaque exerce une force sur la corde en deux points, et inversement, la corde exerce une force sur la plaque en ces deux mêmes points:

$$\partial_t^2 w = -\kappa^2 \Delta^2 w + \delta(x_1, y_1) F_4(t) + \delta(x_2, y_2) F_2(t) \quad (3.7)$$

$$\partial_t^2 u = -c^2 \partial_x^2 u - \sigma_0 \partial_t u + \sigma_1 \partial_x^2 \partial_t u + \kappa^2 \partial_x^4 u + \delta(\eta_1) F_3(t) + \delta(\eta_2) F_1(t)$$

On considère ici la plaque sans amortissement ni tension, et la corde avec amortissement et raideur. On peut faire plusieurs approximations sur cette équation:

- La première ayant déjà été faite étant l'approximation de la fenêtre spatiale de l'influence de la corde à un dirac situé sur les centres des bases du chevalet et de la touche.
- F_4 entraîne un faible déplacement du manche, et donc de la table, qui peut être considérée comme étant soumise uniquement à F_2

Ces approximations faites, on peut donc re-faire le schéma simplifié comme suit:

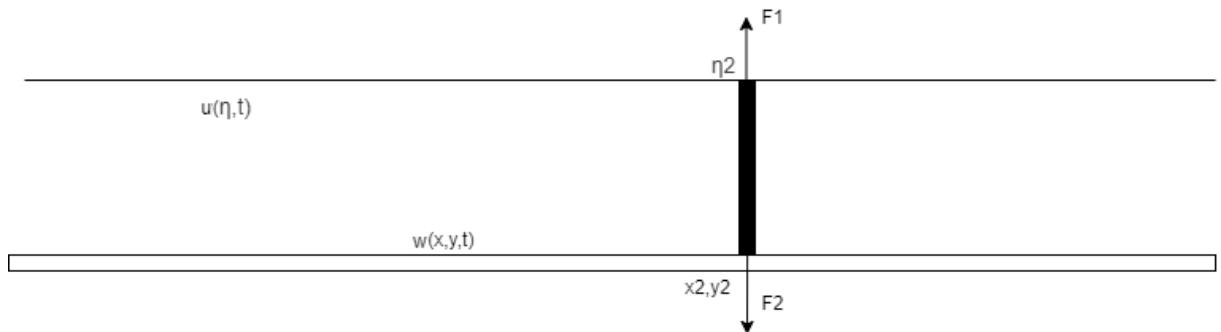


Figure 32: Schéma du couplage corde-plaque simplifié

et réécrire l'équation (3.7):

$$\partial_t^2 w = -\kappa^2 \Delta^2 w + \delta(x_2, y_2) F_2(t) \quad (3.8)$$

$$\partial_t^2 u = -c^2 \partial_x^2 u - \sigma_0 \partial_t u + \sigma_1 \partial_x^2 \partial_t u - \kappa^2 \partial_x^4 u$$

A présent, il reste la relation entre le mouvement de la corde et la force exercée par le chevalet sur la plaque pour pouvoir déterminer les solutions de l'équation par différences finies. Deux possibilités se présentent naturellement comme étant exploitables pour modéliser le système.

Conditions aux limites de chevalet rigide

Dans cette variation du modèle, on considère le chevalet comme étant rigide, c'est à dire qu'il n'y a pas de perte d'énergie dans la transmission par le chevalet. Bilbao [1] montre que pour des conditions aux limites de plaque encastrée et pour une jonction rigide entre la plaque et la corde, on a (Annexe):

$$F_2(t) = -\mu \frac{c^2 \mu}{\rho H} u_\eta(\eta_2, t) \quad (3.9)$$

$$u(\eta_2, t) = w(x_2, y_2, t)$$

Ce modèle simpliste considère que le mouvement de la plaque au niveau de la jonction et que le mouvement de la corde sont égaux. De toute évidence, ce n'est pas le cas, et un modèle plus complet prendrait en compte la réalité physique d'un chevalet non rigide.

3.2.2 Couplage de la corde à la plaque en modal

Le modèle de couplage précédent, qui sera utile en différences finies, ne convient pas cependant à la modélisation modale du système corde-plaque. Pour modéliser l'interaction entre la table et la corde en modal, il faut introduire la notion d'admittance mécanique. Celle-ci est généralement définie comme étant:

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{V(\omega)}$$

Dans le domaine des fréquences et à une dimension. F est la force appliquée en entrée du système d'admittance Y et V est la vitesse perçue en sortie du système. On peut considérer que le système étudié ici est constitué d'une corde d'axe x , connectée en $x = 0$ à une cheville rigide, et en $x = L$, à une pièce mécanique (chevalet + table) d'admittance 2D Y [10].

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{yy} & Y_{yz} \\ Y_{zy} & Y_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Y_{zz} (*Resp. yy*) est l'admittance spécifique des directions y, z , comme peuvent être vus sur la représentation schématique de la connexion au chevalet et à la table d'harmonie figure suivante.

La direction que nous prendrons dans notre cas est la direction z , puisque c'est cette mesure de mobilité du chevalet que nous possédons. Les expressions obtenues pour les vibrations de la corde ne changent pas, on considère simplement cette fois la polarisation selon la direction z du déplacement transverse de la corde. On s'intéresse ici à l'influence

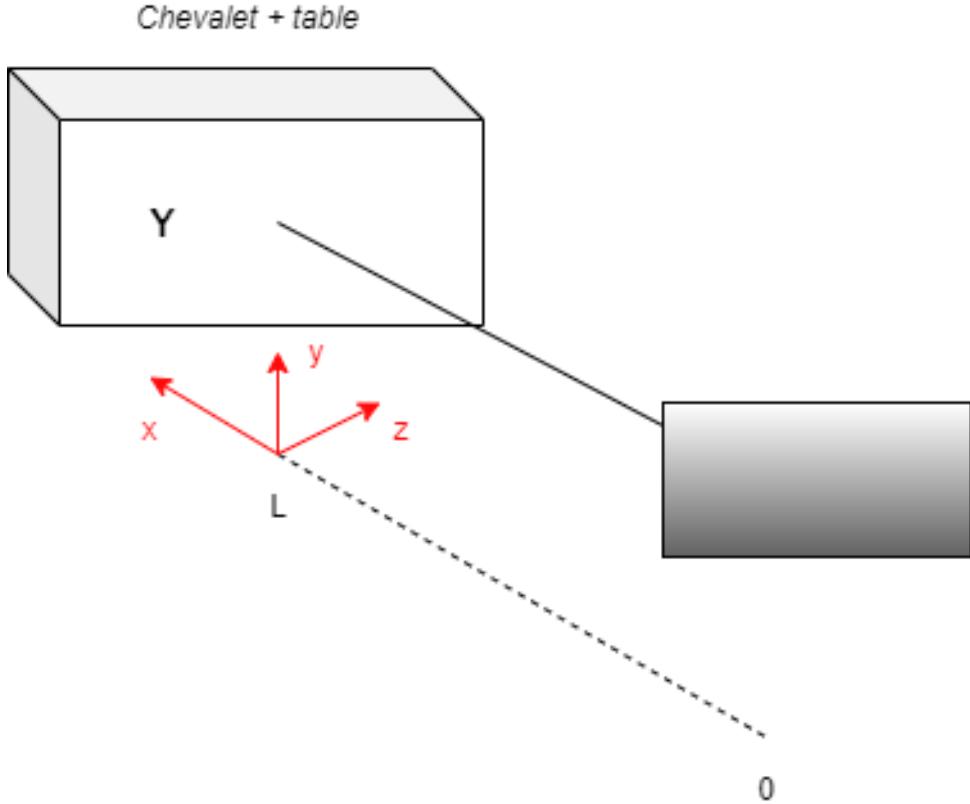


Figure 33: Schéma simplifié du couplage corde-(chevalet+table)

de ce couplage sur les modes de la corde raide amortie, dont les modes sont décrits Eq.(11), qu'on rappelle ci-dessous

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi \frac{x}{L}) e^{-R_n t} \left(a_n \cos \left(\omega_n^{EB} \sqrt{1 - \frac{R_n}{\omega_n^{EB}}} t \right) + b_n \sin \left(\omega_n^{EB} \sqrt{1 - \frac{R_n}{\omega_n^{EB}}} t \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, t)$$

On peut reformuler ces modes avec la formulation usuelle en facteur de qualité de l'amortissement pour le mouvement de la corde:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) e^{-\frac{\omega_n}{Q_n} t} \left(a_n \cos \left(\omega_n t \right) + b_n \sin \left(\omega_n t \right) \right) \quad (3.11)$$

dans le cas de la corde raide amortie, les ω_n et Q_n sont donnés respectivement par $\omega_n = \omega_n^b \sqrt{1 - \frac{R_n}{\omega_n^b}}$ et $Q_n = \frac{\omega_n}{R_n}$, mais cette formule est généralisable. En l'occurrence, on va déterminer l'expression des k_n, ω_n, Q_n dans le cas d'une corde couplée à une admittance mécanique Y_{yy} qu'on notera à partir de maintenant Y . On notera k_n^a, ω_n^a, Q_n^a les nombres d'ondes, pulsations et facteurs d'amortissement déterminés précédemment pour la corde raide amortie.

On peut écrire le mouvement du chevalet comme une petite perturbation sur les nombres d'onde de la corde non-couplée [10]:

$$k_n = k_n^a + \delta_n \quad (3.12)$$

Par continuité de l'admittance en $x = L$ et par considération de la réflexion de l'onde sur la corde, on a :

$$Y(\omega_n^a) = i \frac{\tan(k_n L)}{\sqrt{\mu T}}$$

et

$$k_n = k_n^a - i \frac{Y(\omega_n^a)\sqrt{\mu T}}{L} \quad (3.13)$$

Et on a par suite :

$$f_n = f_n^a + f_0 \frac{\sqrt{\mu T}}{\pi} \operatorname{Im}(Y(\omega_n^a)) \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_n^a} + \frac{T}{\pi L \omega_n^a} \operatorname{Re}(Y(\omega_n^a)) \quad (3.15)$$

D'où

$$R_n = \frac{\omega_n^a}{Q_n^a} + \frac{T}{\pi L} \operatorname{Re}(Y(\omega_n^a)) \quad (3.16)$$

Il est donc possible de caractériser les fréquences propres et déformées propres de la corde raide amortie couplée à la table d'harmonie. Il faut encore déterminer l'impédance en force normale de celle-ci. Les mesures de cette impédance ont été réalisées dans le cadre d'un projet d'étudiants à Sorbonne Université. Bien que la mesure en-dessous de 100Hz et au-dessus de 2kHz soit mauvaise, elle reste largement exploitable dans le cadre de la synthèse modale, qui sera abordée section **3.4.1**. La mesure obtenue est présentée figure ci-dessous.

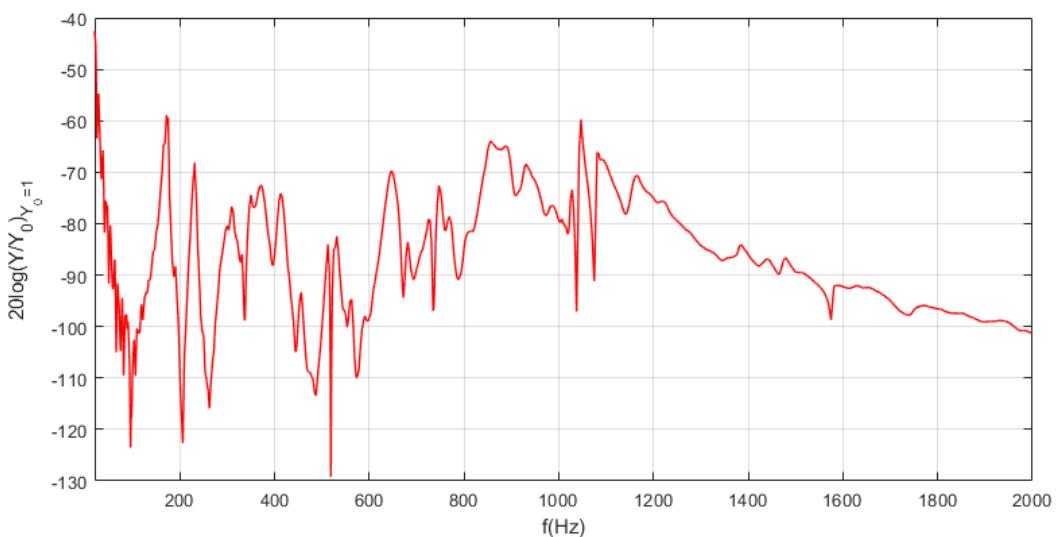


Figure 34: Admittance au chevalet d'un violoncelle

3.3 Simulation par différences finies

3.3.1 Discrétisation d'une plaque mince

La table d'harmonie du violoncelle doit, pour pouvoir implémenter le couplage en différences finies, être discrétisée également, et son équation du mouvement peut être discrétisée également avec les opérateurs différentiels discrétisés, en deux dimensions cette fois pour les opérateurs spatiaux. Les opérateurs temporels, eux, ne changent pas de forme, et sont les mêmes qui peuvent être trouvés section 2.2. Le laplacien discret avec un même pas de discrétisation dans la direction x et y , δ_{xy} peut être établi à 5 points (Δ_5) ou à 9 points (Δ_9), et les deux expressions pour ceux-ci peuvent être trouvées ci-dessous:

$$\begin{aligned}\Delta_5 w &= \frac{1}{\delta_{xy}^2} (w_{x+1,y}^n w_{x,y+1}^n + w_{x-1,y}^n + w_{x,y-1}^n - 4w_{x,y}^n) = (\nabla_{xx} + \nabla_{yy})w \\ \Delta_9 w &= \nabla_{xx} + \nabla_{yy} + \frac{\delta_{xy}^2}{2} (\nabla_{xx} \nabla_{yy})\end{aligned}$$

L'équation à discrétiser est l'équation de la plaque mince simple (13), rappelée ci-dessous:

$$\partial_t^2 w = -\kappa^2 \Delta^2 w$$

qu'on discrétise avec le laplacien à 5 points, qui suffit pour cette application (le laplacien à 9 point est utilisé si une interpolation est nécessaire pour avoir une évaluation précise d'une force non localisée appliquée à la plaque). On obtient ainsi l'équation de récurrence qui permet de calculer l'état de la plaque à chaque instant (on note $\mu = \kappa \delta_t / \delta_{xy}^2$):

$$\begin{aligned}w_{x,y}^{n+1} &= (2 - 20\mu^2)w_{x,y}^n + \mu^2(w_{x,y+1}^n + w_{x,y-1}^n + w_{x-1,y}^n + w_{x+1,y}^n) \\ &\quad - 2\mu^2(w_{x+1,y+1}^n + w_{x-1,y-1}^n + w_{x-1,y+1}^n + w_{x+1,y-1}^n) \\ &\quad - \mu^2(w_{x-2,y}^n + w_{x+2,y}^n + w_{x,y+2}^n + w_{x,y-2}^n) - w_{x,y}^{n-1}\end{aligned}$$

Cette équation est implémentée dans matlab pour une plaque rectangulaire avec des conditions aux limites encastrées, dont les caractéristiques sont répertoriées dans le tableau ci-dessous:

L (m)	h(m)	E(Pa)	H(m)	ν	ρ kg/m ³
0.77	0.38	$12 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^{-2}$	0.3	700

Table 3: Caractéristiques d'une plaque rectangulaire mince en bois. $\kappa = 6.3 m/s$

De même que pour la corde, la numérisation en différences finies de l'équation différentielle à résoudre vient avec des conditions de stabilité pour le schéma en question. En considérant un nombre d'onde β_x et β_y respectivement associés aux directions de propagation x, y , et en considérant une solution propagative échantillonnée aux positions x, y et en temps t , de manière analogue à l'équation de la corde, on obtient l'équation caractéristique pour la plaque [1]:

$$z + \left(16\mu^2 \left(\sin^2\left(\frac{\beta_x h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta_y h}{2}\right) \right)^2 - 2 \right) + z^{-1} = 0$$

On obtient la condition de stabilité:

$$\delta_{xy} \geq 2\sqrt{\kappa\delta_t}$$

Ci-dessous sont représentées quelques premiers états de la plaque décrite tableau 3 pour des temps $t = 0s, t = 2E^{-4}s, t = 4E^{-4}s$, en se plaçant à la valeur critique de limite de stabilité. Par souci de visualisation de propagation de l'onde, la condition initiale utilisée est une distribution gaussienne sur la plaque, centrée sur $x = L/2, y = h/2$.

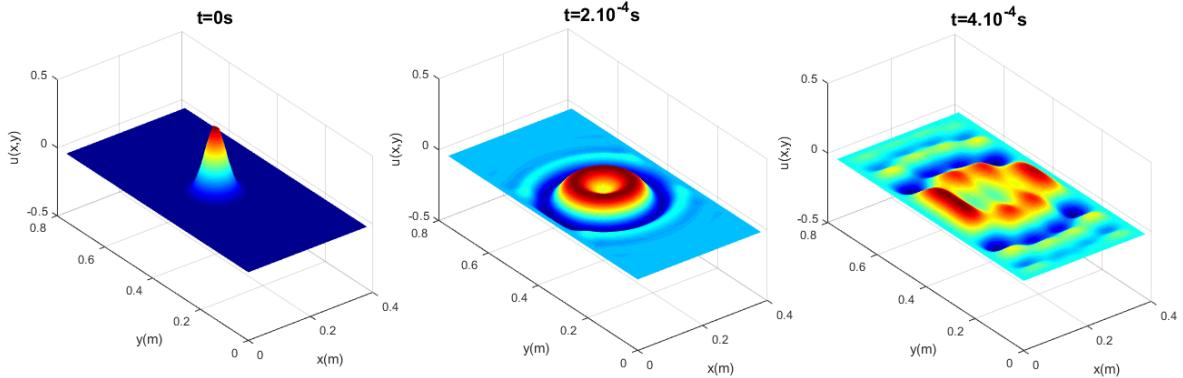


Figure 35: Propagation de l'onde sur la plaque mince implémentée en différences finies

Une généralisation des considérations d'excitation et d'observation de la corde en deux dimensions permet de prendre en compte le placement du point d'observation et d'excitation pour la plaque. On décide d'exciter la plaque avec une condition initiale "pincée" triangulaire centrée en $x = 0.7L, y = 0.7h$, et d'observer le mouvement de la plaque en $x = 0.1L, y = 0.1h$. Pour des raisons de pas de discrétisation, la grille pour la plaque est moins fine que pour la corde, ce qui ne permet pas un placement au plus près des extrémités pour l'observation de tous les modes, ce qui aurait été idéal.

La figure ci-dessous présente le signal temporel obtenu ainsi que le spectre de la plaque, et le tableau suivant répertorie les fréquences des premiers modes observés sur le spectre ainsi que leur erreur relative par rapport aux fréquences propres obtenues équation (16):

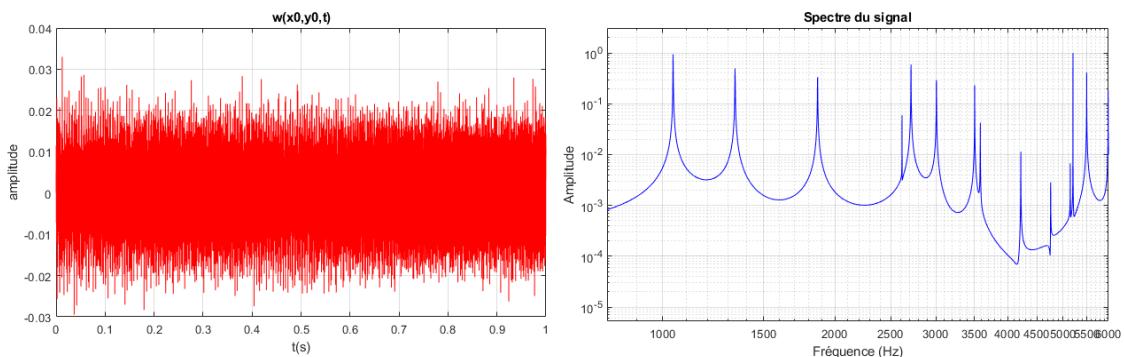


Figure 36: Spectre et signal temporel obtenus pour la plaque mince

On voit que l'erreur est importante dès le deuxième mode de la plaque. La cause de cette erreur est l'utilisation d'un schéma explicite [1] pour intégrer l'équation différentielle.

Mode	Fréquence théorique	Fréquence obtenue	Erreur relative (%)
1	2467	2433	1.4%
2	3947	3441	12.8%
3	6415	47002	26.7%
4	8389	6502	22.4%
5	9869	7112	27.8%

Table 4: Fréquences obtenues et erreur relative pour une plaque mince de coefficient de raideur $\kappa = 100$

Il est possible de réduire cette erreur en utilisant un schéma implicite, pour atteindre 5% d'erreur environ à partir du 4^e mode. Cependant, comme nous le verrons par la suite, l'utilisation d'un schéma implicite rend difficile le couplage à la corde.

3.3.2 Couplage avec la table

Nous avons vu section 3.1, Eq. (3.7), qu'il est possible de coupler les équations de la corde et de la plaque via des conditions aux limites sur la corde et une excitation en force de la plaque. en utilisant les schémas décrits précédemment, on peut discréteriser l'équation de la plaque et de la corde couplées comme suit :

$$\frac{w_{xy}^{n+1} - 2w_{xy}^n + w_{xy}^{n-1}}{\delta_t^2} = -\kappa_p^2 \Delta_5^2 - \mu J(x_2, y_2) g(x_2, y_2) c^2 \frac{u_{\eta+1}^n - u_{\eta-1}^n}{\delta_{eta}} \quad (3.17)$$

Et l'équation de la corde couplée est la même que la corde seule, à la différence près que la condition aux limites change. à chaque itération en temps, on imposera donc avant l'équation de récurrence la condition aux limites sur la corde. Dans l'équation précédente, $g(x, y)$ est une fenêtre spatiale d'application de la corde rectangulaire, plus réaliste pour un chevalet qu'un dirac. $\frac{u_{\eta+1}^n - u_{\eta-1}^n}{\delta_{eta}}$ est la discréétisation de $u_\eta(\eta_2, t)$. κ_p est le coefficient de raideur de la plaque.

L'opérateur $J(x, y)$ est un opérateur d'interpolation qui permet de spécifier une localisation du chevalet entre les noeuds de la grille discréétisée de la plaque. son expression à l'ordre 1 est:

$$J(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k_i, m = m_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

m_i, k_i étant les indices de la grille de discréétisation associés à x_i, y_i . L'implémentation en pratique dans matlab pour l'opérateur d'interpolation est la création d'une matrice correspondant à la position du chevalet. Ci-dessous sont représentées les états de la corde et de la plaque pour deux conditions d'excitation: une excitation gaussienne pour mieux visualiser la propagation de l'onde sur la plaque et sur la corde, et une excitation triangulaire pincée pour simuler une excitation *Pizzicato*. La position du chevalet sur la corde est représentée par un trait pointillé.

Une rapide analyse en ordre de grandeur montre qu'un déplacement de l'ordre de 10^{-6} pour la plaque est cohérent avec le déplacement initial imposé à la corde. On peut

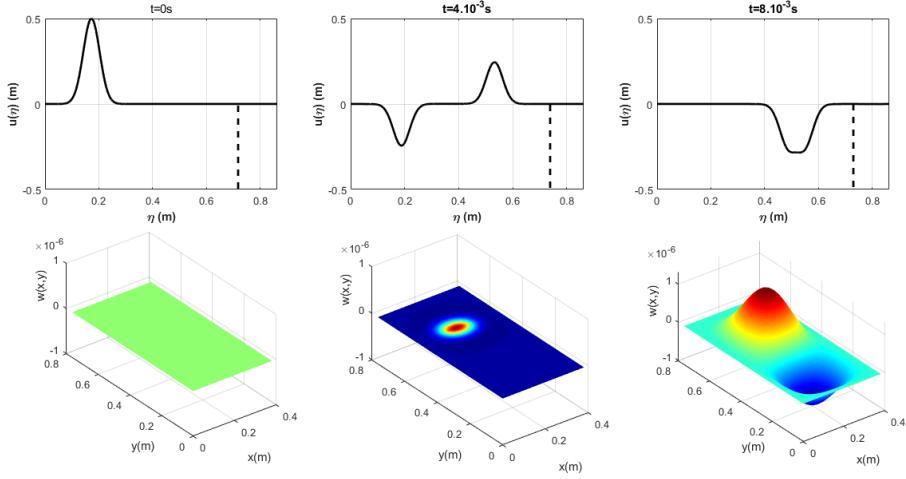


Figure 37: Simulation du couplage en différences finies pour une excitation gaussienne

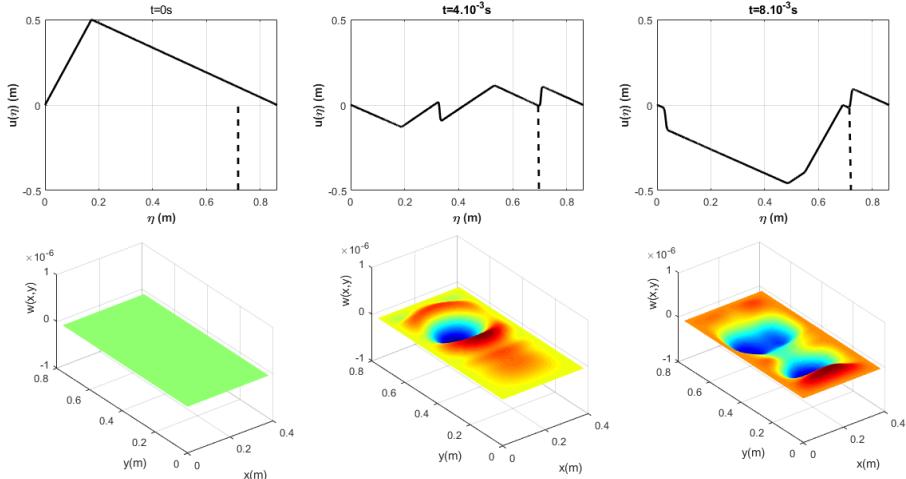


Figure 38: Simulation du couplage en différences finies pour une excitation *Pizzicato*

voir que pour la condition initiale en pizzicato, la corde vibre en fait de part et d'autre du chevalet, ce qui impliquera un spectre de rayonnement avec des composantes dues à la corde vibrante côté chevilles du chevalet. Ci-dessous sont représentés les signaux temporels obtenus pour la corde et la plaque avec une excitation de type *Pizzicato*.

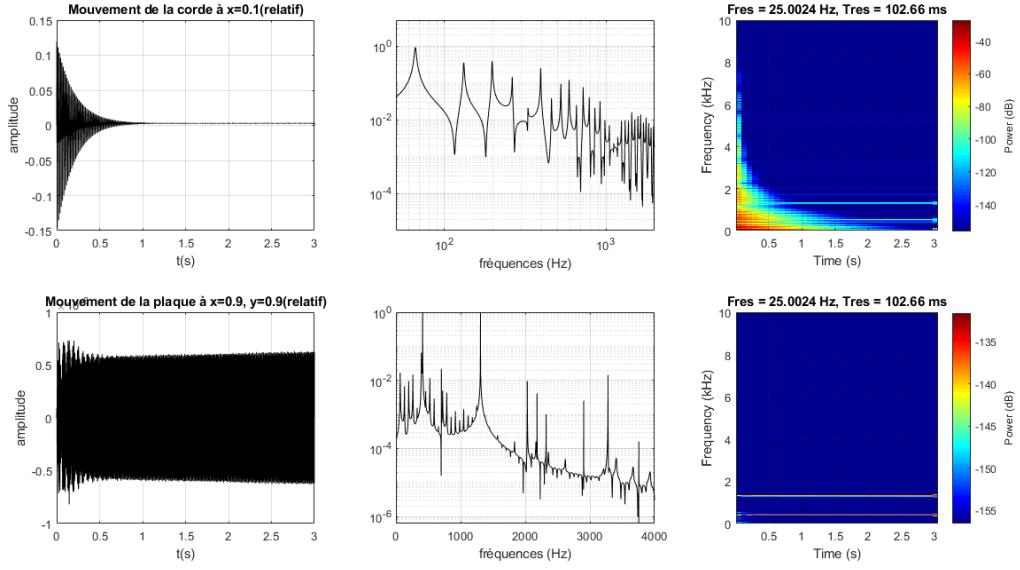


Figure 39: Signaux obtenus avec une excitation pizzicato, avec une excitation *Pizzicato* en $\eta = 0.1L$, et des positions d'observation de *eta* = 0.1L et $x = 0.9L_p$, $y = 0.9h_p$

On remarque sur le spectrogramme de la corde des contributions modales qui sont en fait celles obtenues à partir du couplage avec la plaque, qui ne s'atténuent donc pas puisque le frottement n'a pas été implémenté sur la plaque. Côté plaque, le placement du chevalet influe énormément sur la contribution modale sur le signal de sortie. Ici, le chevalet est centré en $x = 0.7L_p$ et $y = 0.5h_p$. Les modes impairs en y seront donc fortement excités, ainsi que les modes multiples de 3 selon x . Ceci explique la forte contribution d'environ 5 modes par rapport aux autres pour la plaque.

3.4 Simulation par approche modale

Couplage avec la table

Considérons d'abord le couplage avec la table d'harmonie. La solution qui semble la plus cohérente est d'utiliser l'expression des déformées modales, des fréquences propres et des facteurs de qualités obtenus Eq. (2.20), et les implémenter dans le schéma de résolution précédent, utiliser Eq.(3.9) pour calculer la force exercée sur la table en fonction du mouvement de la corde, puis mettre en cascade un bloc "Plaque". Le schéma serait alors de la forme suivante:

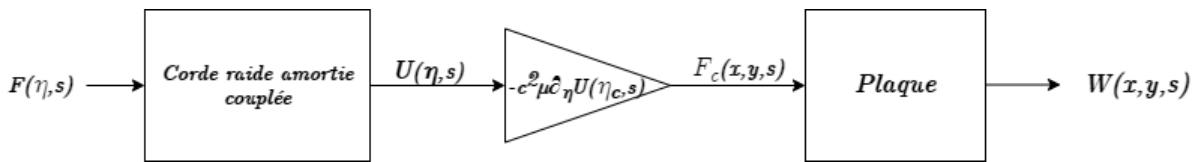


Figure 40: Structure de simulation pour la corde raide amortie couplée en modal sans boucle retour

La deuxième solution consiste en une boucle retour unitaire négative, en considérant que la forme appliquée sur la plaque est opposée à celle appliquée sur la corde. Le schéma serait alors de la forme suivante:

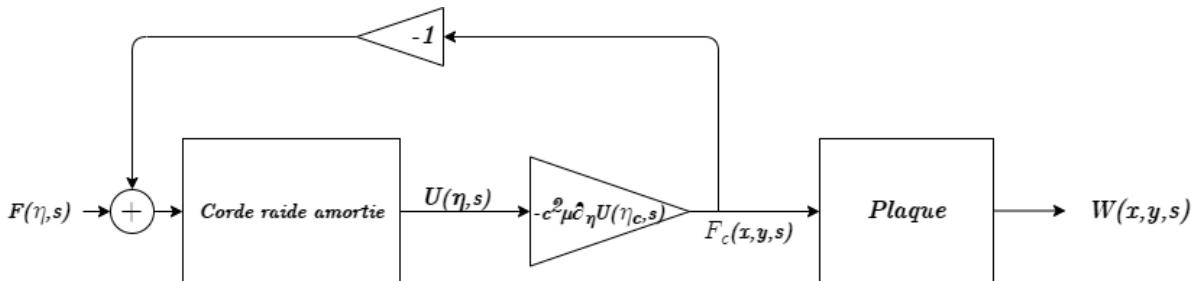


Figure 41: Structure de simulation pour la corde raide amortie couplée en modal avec boucle retour

3.4.1 Résultats obtenus pour la corde raide amortie couplée

En prenant donc l'expression des modes propres de la corde raide amortie couplée explicitées section 3.2.2 et la structure présentée figure 40, on peut d'abord observer le signal obtenu en regardant la vibration de la corde. Ce signal est présenté figure suivante:

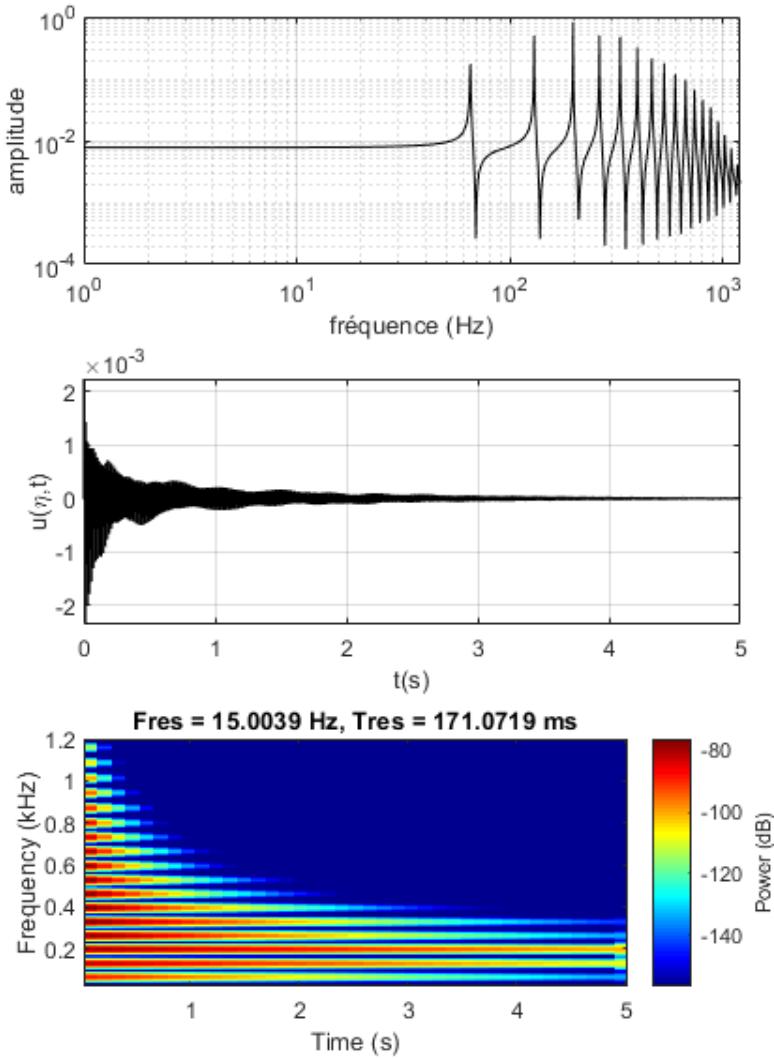


Figure 42: signal et spectrogramme obtenu pour la corde couplée observée à $\eta = 0.9L$

Par comparaison au signal obtenu par la même structure sans la modification des modes propres par la mobilité du chevalet, on voit que le premier mode est plus atténué, avec un temps d'atténuation qui reste sensiblement le même pour les autres modes, ce qui explique la qualité plus 'nasale' du son à l'écoute. En revanche, lorsqu'on observe cette fois le signal en sortie de la plaque ($w(x, y, t)$ donc), qui est représenté ci-dessous, on obtient un son beaucoup plus 'chaleureux', du fait du couplage avec la table, chaleur qui rajoute au réalisme de la note produite.

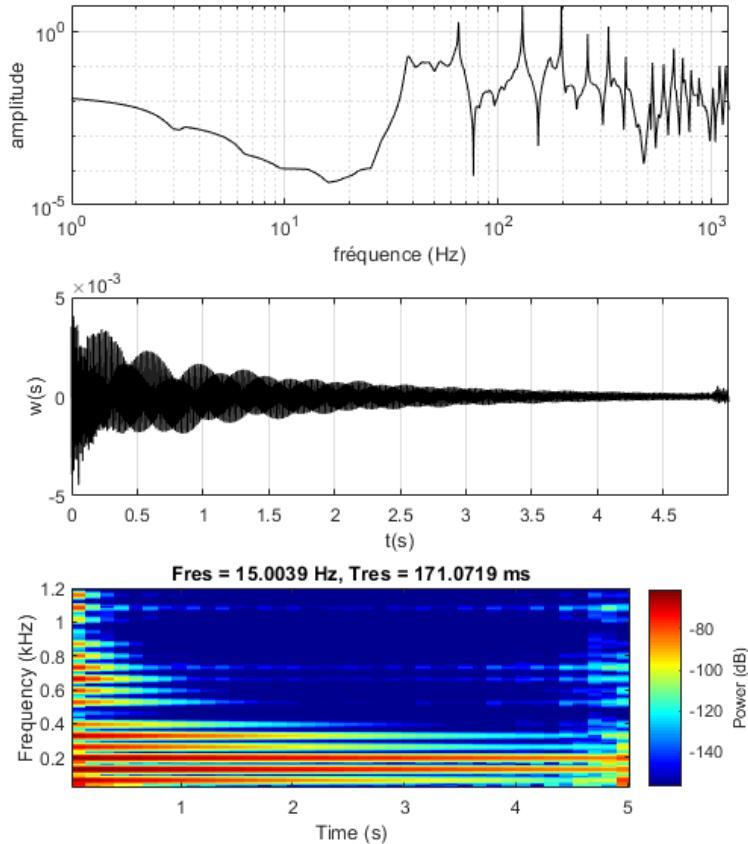


Figure 43: signal et spectrogramme obtenu pour la corde couplée amortie observé à la sortie du chevalet

Le bruitage indésirable du signal obtenu est dû essentiellement à la présence de bruit sur la mesure de l'admittance au chevalet, ainsi que des problèmes de symétrie obtenus lors de l'interpolation de celle-ci pour pouvoir effectuer la convolution numérique avec le signal obtenu en sortie de la structure de simulation. Cependant, on voit que les modes sont bien modifiées par conséquence de leur couplage avec la plaque. En effet, le 7e mode ainsi que le 14e mode sont très atténusés par exemple. Par ailleurs la comparaison à l'écoute à un son de violoncelle est considérée comme étant convenablement réaliste, plus en tout cas que la simulation du couplage par différences finies et que la simulation par convolution non couplée. Le modèle de couplage implémenté est donc satisfaisant vis-à-vis de l'objectif de réalisme du modèle souhaité.

4 Contrôle

4.1 Boucle de contrôle

Les méthodes de contrôle qui seront développées dans cette section nécessitent plusieurs actionneurs qui imposent une force à la corde. La fonction de transfert exacte reste à être déterminée mais la structure du contrôle peut déjà être l'être. Pour des raisons de simplification visuelle, on choisira de représenter la boucle de contrôle d'abord sur une corde isolée:

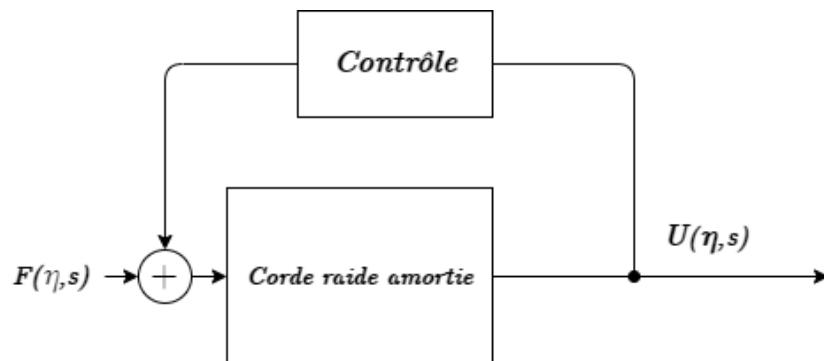


Figure 44: Structure de Contrôle pour la corde raide amortie isolée

Plusieurs approximations sont faites pour cette structure, notamment des capteurs et actionneurs parfaits. Une considération de leurs fonctions de transfert pourra être prise en compte si le projet avance assez, ou éventuellement pour une suite de cette étude. On peut également considérer un retard sur la boucle de contrôle, qui pourrait être la cause d'instabilités à hautes fréquences, et qui peut être considéré dans un modèle plus complet de la boucle de contrôle. On pourra noter la fonction de transfert du contrôle $H(s)$, qui reste à être déterminée. On a donc:

- $A(s)$ la fonction de transfert de l'actionneur
- $C(s)$ la fonction de transfert du capteur
- $R(s) = e^{\tau_c s}$ le retard de la boucle de contrôle, τ_c étant le temps d'échantillonnage cumulé du capteur et de l'actionneur.

La structure de contrôle plus complète est représentée dans la figure suivante:

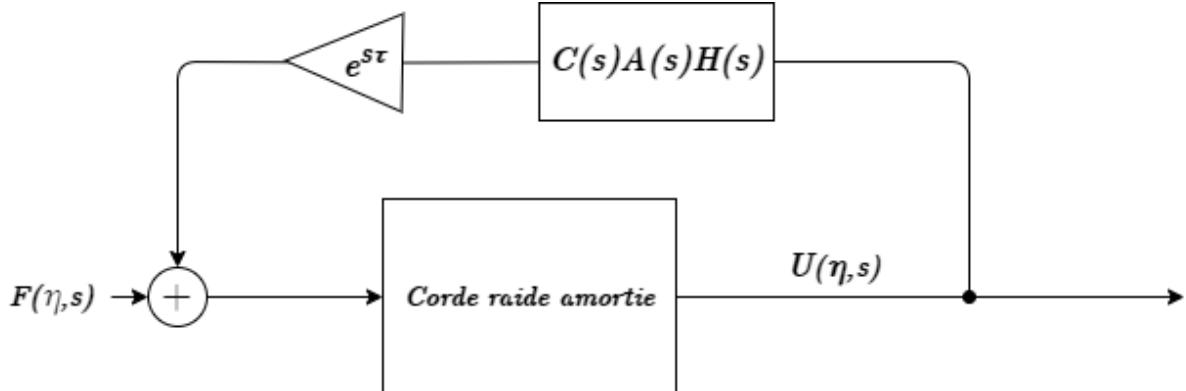


Figure 45: Structure de Contrôle pour la corde raide amortie isolée plus complète

Si on veut rajouter le couplage, il est possible de le faire, mais de manière plus simple avec la cascade représentée Fig. 35.:

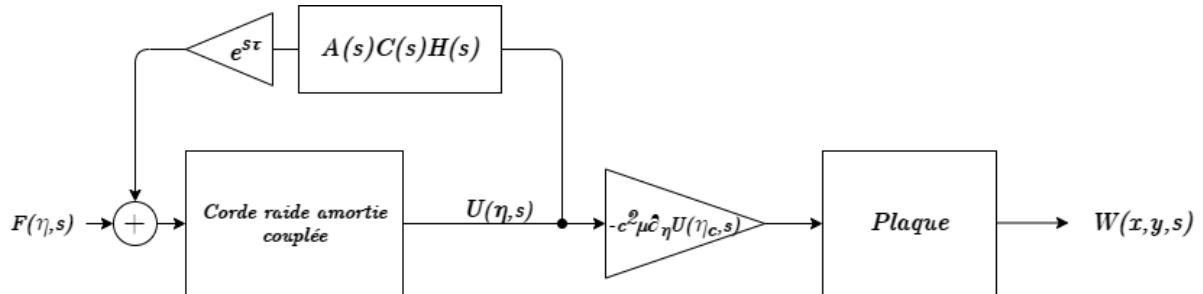


Figure 46: Structure de Contrôle complète pour la corde raide amortie Couplée

4.2 Espace d'état et contrôle par placement d'état

Il reste à présent à déterminer la fonction de transfert de contrôle à appliquer dans la boucle de retour la plus simple possible : $A(s) = C(s) = e^{i\tau} = 1$. Pour ce faire, on considère que le mouvement est décomposable en temps et en espace comme précédemment :

$$u(x, t) = \sum_0^K e_k(x) u_k(t)$$

et on note:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_K(t) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Et on considère qu'il existe r actionneurs le long de la corde qui vont permettre d'imposer une force à celle-ci. On choisit le vecteur d'état suivant pour effectuer le contrôle:

$$\mathbf{w}(\mathbf{t}) = [\mathbf{q}(\mathbf{t})^T, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})^T]^T \quad (4.2)$$

et on a l'équation différentielle suivante pour le vecteur $\mathbf{q}(\mathbf{t})$:

$$M\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) + C\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t}) + K\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (4.3)$$

Où le vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ représente le vecteur des projections de la force $f(x, t)$ appliquée à la corde sur les modes spatiaux $e_k(x)$. On a dans la force $f(x, t)$ une composante due à la force de l'instrumentiste, et r composantes F_k exercées en x_k par les r actionneurs:

$$f(x, t) = f_0(x, t) + \sum_{k=1}^r F_k(t) \delta_{x-x_k} \quad (4.4)$$

et M, K, C représentent respectivement les matrices de masse, raideur, et amortissement:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_0^L e_i(x) \mu e_k(x) dx \\ k_{ij} &= \int_0^L e_i(x) \mathcal{L} e_k(x) dx \\ c_{ij} &= \int_0^L e_i(x) \mathcal{C} e_k(x) dx \end{aligned} \quad (4.5)$$

où \mathcal{L}, \mathcal{C} sont les opérateurs de raideur et d'amortissement liés au problème. Dans notre cas, la matrice M est diagonale puisque les $e_k(x)$ forment une base orthogonale de l'espace des solutions en espace du problème. Par ailleurs, on connaît les opérateurs d'amortissement et de raideur dans notre cas. En effet, on peut procéder par identification dans Eq.(6):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T_0 \partial_x^2 - EI \partial_x^4 \\ \mathcal{C} &= -\mu \sigma_1 \partial_x^2 + \mu \sigma_0 \end{aligned}$$

Les déformées modales étant connues, on peut aisément construire ces matrices de masse, raideur et amortissement. L'équation matricielle (42) peut se réécrire [2]:

$$\dot{\mathbf{W}}(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} 0 & I_K \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{s}) + M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{s}) \end{pmatrix} = A\mathbf{W}(\mathbf{s}) + M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{s}) \end{pmatrix}$$

où

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \Psi \begin{pmatrix} F_0\delta_0(s) \\ F_1(s) \\ \vdots \\ F_r(s) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

et

$$\Psi = (\psi_j(x_k))_{1 \leq j \leq K, 0 \leq k \leq r} \quad (4.7)$$

En notant:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\Psi \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

On peut décrire la vibration de la structure par une nouvelle équation matricielle, les matrices seront nécessaires à l'expression des gains de la matrice de contrôle qui permettront de modifier les fréquences propres et facteurs de qualité de la structure:

$$s\mathbf{W}(\mathbf{s}) = A\mathbf{W}(\mathbf{s}) + BF(\mathbf{s}) \quad (4.9)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont notées λ_i . Ce sont les valeurs propres du problème Eq. (42), et peuvent être reliées aux facteurs de qualité et fréquence propre de chaque mode par les relations suivantes:

$$\omega_i = \Im(\lambda_i) \quad Q_i^{-1} = \Re(\lambda_i) \quad (4.10)$$

On note u_i, v_i les vecteurs propres associés respectivement à A, A^T . On note:

$$V_L = (v_{ij})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq 2N} = (v_L^i)_{1 \leq i \leq 2N} \quad (4.11)$$

$$V_{LRI} = [Re(v_L^1), Im(v_L^1), \dots, Re(v_L^N), Im(v_L^N)] \quad (4.12)$$

$$B_1 = V_{LRI}^T M^{-1} \Psi \quad (4.13)$$

$$V_1 = U_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j & & & 0 \\ j & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & j \\ & & & j & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

on peut établir une matrice H telle que:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_r(s) \end{pmatrix} = H\mathbf{W}(\mathbf{s}) \quad (4.15)$$

On cherche des solutions de la forme $H = G^T V_1^T$ [2], où G est la matrice de gains du contrôleur, dont l'expression est déterminée plus bas, et:

Puisqu'on effectue ici du contrôle, on va chercher à modifier ces valeurs propres en fonction des fréquences propres et facteurs de qualité qu'on cherche à atteindre pour les modes visés. On notera ces nouvelles valeurs propres voulues ρ_i .

et on a donc:

$$G = (g_{ji})_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r} \quad (4.16)$$

$$g_{ji} = \frac{1}{p_{ji}} \frac{\prod_1^m (\lambda_k - \rho_j)}{\prod_1^m (\lambda_k - \lambda_j)}$$

où m est le nombre de modes à modifier, et la matrice des p_{ji} est donnée par:

$$P_1 = V_1 B_1 \quad (4.17)$$

et enfin, on a la force à appliquer au i^{me} actionneur pour modifier les m modes pour obtenir les valeurs propres souhaitées [2]:

$$F_i(s) = g_i^T V_1^T \mathbf{W}(s) = \sum_1^{2N} g_{ji} v_{1,j}^T \mathbf{W}(s) \quad (4.18)$$

Dans notre cas, les matrices de masse, raideur, amortissement, sont relativement simples à calculer :

$$m_{ij} = \delta_{ij} \frac{\mu L}{2} \quad (4.19)$$

et on a

$$\mathcal{L}e_n(x) = \partial_x^4 \sin(n\pi \frac{x}{L}) = \partial_x^4 \sin(k_n x) = k_n^4 \sin(k_n x) = k_n^4 e_n(x) \quad (4.20)$$

d'où

$$k_{ij} = \left(-\frac{T_0 i^2 \pi^2}{2L} + \frac{EI i^4 \pi^4}{2L^3} \right) \delta_{ij} \quad (4.21)$$

En ce qui concerne la matrice d'amortissement on a:

$$\mathcal{C}e_n(x) = \sigma_1 k_n^2 \sin(k_n x) + \sigma_0 \sin(k_n x) \quad (4.22)$$

$$c_{ij} = \int_0^L \sin(k_i x) (\sigma_0 \sin(k_j x) + \sigma_1 k_j^2 \sin(k_j x)) dx \quad (4.23)$$

$$c_{ii} = \frac{\mu(\sigma_0 + \sigma_1 k_i^2)L}{2}$$

ainsi, on a donc les expressions et les valeurs numériques voulues pour construire la boucle de contrôle nécessaire à la modification souhaitée des caractéristiques fréquentielles de la corde.

Conclusion et place du stage d'application dans la construction du projet professionnel

En accord avec les objectifs du projet, un modèle réaliste et pertinent a été établi pour décrire à la fois le mouvement vibratoire de la corde, mais également le couplage à la table d'harmonie du violoncelle. Deux approches ont été proposées : Une approche dans le domaine temporel, et une dans le domaine modal. Deux structures de simulation ont également été proposées pour la synthèse par simulation du mouvement de la corde, en accord avec ceux deux modèles théoriques. Après analyse des résultats obtenus pour ces deux méthodes, celle qui est le plus en accord avec une synthèse de la vibration de l'ensemble corde-table d'harmonie est la méthode modale, de par la faible erreur observée en termes de caractéristiques spectrales. Si les deux structures de simulation proposent des résultats proches du réel, c'est donc la simulation par approche modale qui sera retenue pour le calcul et l'implémentation de la boucle de contrôle.

Après la synthèse des vibrations produites par le système simulé en excitation pincée, la boucle de contrôle nécessaire à la modification des caractéristiques a été théorisée, mais malheureusement pas implémentée. Cet aspect du projet, ainsi que l'aspect expérimental qui n'a malheureusement pas pu avoir lieu, sont les deux point négatifs essentiels de ce stage : malgré les résultats confluants obtenus sur la partie simulation, un contexte compliqué dû à la pandémie et aux conditions sanitaires a empêché à la fois l'implémentation expérimentale de la boucle de contrôle élaborée, mais également l'avancement optimal de la simulation de par le manque d'accès à des ressources suffisantes (banc de mesure de l'admittance au chevalet, PC dédié aux calculs pour la simulation modale...). C'est une déception de n'avoir pas réussi à implémenter numériquement ce contrôle, mais les résultats obtenus lors de cette étude seront un socle utile à une éventuelle reprise future de ce projet.

Contexte dans le projet professionnel

Avant le début de ce stage, je considérais les enjeux de celui-ci multiple. Ma passion pour la musique et la physique appliquée m'ayant naturellement poussé vers l'acoustique, et étant fortement intrigué par le domaine de la recherche, mon intention était de confirmer cette curiosité, à la fois vis-à vis d'une carrière, mais également d'un éventuel projet de thèse.

Malheureusement, la pandémie actuelle a grandement altéré le paysage professionnel Français au moment de ce stage, et il m'a été difficile, voire impossible, de me construire une représentation d'ensemble cohérente du monde de la recherche en acoustique musicale. Je sais encore que la musique me passionne, et l'acoustique musicale m'est encore d'un grand intérêt. Le monde de la recherche tel que je l'ai vu, lui, était essentiellement moi derrière mon PC, lisant des articles et codant en MATLAB. A l'heure actuelle, je suis un peu déçu de cette expérience, non pas à cause de la qualité de l'encadrement ou du sujet, tous deux très bons, mais parce que ce stage n'était pas représentatif du domaine dans lequel il était censé prendre place. Ceci étant le but premier, je pense, d'un stage, il en a perdu un peu de son intérêt, et ma motivation par ailleurs en a quelque peu souffert vers la fin de celui-ci.

Ceci complique un peu mon projet professionnel, mais pas nécessairement de manière irréversible. Mon projet était de réaliser deux stages, un dans le monde de la recherche

en acoustique musicale, l'autre dans le domaine de la data et du dev, optionnellement orientés vers la musique, un autre domaine pour lequel je ressens une forte curiosité et attraction. À terme, ces expériences me permettraient de travailler en RD dans une grande entreprise liée à l'acoustique, ou en dev/data/RD data dans une entreprise dédiée à la distribution musicale. À l'heure actuelle, je pense n'avoir qu'une "demi-expérience" dans le monde de la recherche, insuffisante pour confirmer mon intérêt pour le domaine. C'est pourquoi je pense axer mes deux stages de césure forcée (par le COVID) sur des projets en data et dev, si possible dans le monde de la musique. Mon double diplôme de Masters' en acoustique à l'université d'Adelaide, en Australie - dont le départ était initialement prévu pour Février 2021 mais qui a dû être reporté à Juillet 2021 (au plus tôt) - offre des projets de fin d'étude en laboratoire, orientés donc vers la recherche. Je profiterai de ceux-ci pour confirmer ou non mon intérêt pour une thèse dans le domaine.

Je reste néanmoins très positif vis-à-vis de mon projet professionnel. L'expérience de ce stage n'a en aucun cas été mauvaise et a grandement augmenté mon bagage en ce qui concerne l'acoustique et l'acoustique musicale. Mes options restent nombreuses, et je suis impatient de passer à ma prochaine expérience d'exploration des différentes voies qui s'offrent à moi.

References

- [1] S. D. Bilbao. *Numerical sound synthesis*. Wiley Online Library, 2009.
- [2] H. Boutin. *Méthodes de contrôle actif d'instruments de musique. Cas de la lame de xylophone et du violon*. PhD thesis, 2011.
- [3] J. Chabassier. *Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques*. PhD thesis, 2012.
- [4] A. Chaigne and A. Askenfelt. Numerical simulations of piano strings. i. a physical model for a struck string using finite difference methods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95(2):1112–1118, 1994.
- [5] C. Desvages, S. Bilbao, and M. Ducceschi. Improved frequency-dependent damping for time domain modelling of linear string vibration. In *Proceedings of Meetings on Acoustics 22ICA*, volume 28, page 035005. Acoustical Society of America, 2016.
- [6] A. Givois. Rapport de stage :contrôle actif du violoncelle.
- [7] T. Hélie and D. Roze. Sound synthesis of a nonlinear string using volterra series. *Journal of Sound and Vibration*, 314(1-2):275–306, 2008.
- [8] A. W. Leissa. *Vibration of plates*, volume 160. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and . . ., 1969.
- [9] H. Mansour, J. Woodhouse, and G. P. Scavone. Enhanced wave-based modelling of musical strings. part 1: Plucked strings. *Acta Acustica united with Acustica*, 102(6):1082–1093, 2016.
- [10] A. Paté, J.-L. Le Carrou, and B. Fabre. Predicting the decay time of solid body electric guitar tones. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135(5):3045–3055, 2014.
- [11] D. Roze and T. Hélie. Introducing a green–volterra series formalism to solve weakly nonlinear boundary problems: Application to kirchhoff’s string. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):2073–2086, 2014.
- [12] M. Salo. Finite difference method in sound synthesis.

A Annexe : couplage corde/table pour simulation en différences finies

Equation de la plaque:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \kappa^2 \Delta^2 w = \delta_{(x_1, y_1)}(x, y) F_1(t) + \delta_{(x_2, y_2)}(x, y) F_2(t) \quad (\text{A.1})$$

Equation de la corde raide avec frottements:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} = -\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^2 \partial t} \quad (\text{A.2})$$

où:

- (x_1, y_1) est le point d'application de la force appliquée par la corde sur la plaque au niveau du sillet;
- (x_2, y_2) est le point d'application de la force appliquée par la corde sur la plaque au niveau du chevalet;
- la force appliquée par la plaque sur la corde est négligée;

et avec:

- $\delta_{(x_1, y_1)}$ et $\delta_{(x_2, y_2)}$ en m^{-2} car $\forall i \in \{1, 2\}$,
 $\langle \Phi(x, y) | \delta_{(x_i, y_i)} \rangle = \iint_S \Phi(x, y) \delta_{(x_i, y_i)} dx dy = \Phi(x_i, y_i)$ a la même unité que Φ ;
- F_1 et F_2 , en $N.m^2.kg^{-1}$, de sorte que $\delta_{(x_i, y_i)} F_i$ sont les forces massiques appliquées en (x_i, y_i) .

On multiplie (A.1) et (A.2) par la vitesse, $\frac{\partial w}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$, puis on intègre sur la surface de la plaque et la longueur de la corde. On dérive ensuite par rapport au temps.

Pour la plaque:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy + \kappa^2 \iint_S \frac{\partial w}{\partial t} \Delta^2 w dx dy &= \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_1, y_1)} F_1(t) + \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_2, y_2)} F_2(t) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy + \kappa^2 \left(\left[\frac{\partial w}{\partial t} \Delta w \right] - \iint_S \frac{\partial \Delta w}{\partial t} \Delta w dx dy \right) &= \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_1, y_1)} F_1(t) + \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_2, y_2)} F_2(t) \end{aligned}$$

Pour une plaque encastrée, $\Delta w = 0$ aux frontières. On a donc:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy - \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\Delta w)^2 dx dy = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_1, y_1)} F_1(t) + \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_2, y_2)} F_2(t)$$

Chaque membre s'exprime en $m^4.s^{-2}$. On obtient donc une égalité de puissance en les mutlipliant par $\frac{m_p}{S}$, m_p étant la masse de la plaque, et S sa surface; ce qui s'écrit, pour le produit scalaire $\langle f | g \rangle = \iint_S f g dx dy$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{m_p}{S} \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|^2 - \frac{\kappa^2}{2} \frac{m_p}{S} \|\Delta w\|^2 \right) = \frac{m_p}{S} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_1, y_1)} F_1(t) + \frac{m_p}{S} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_2, y_2)} F_2(t) \quad (\text{A.3})$$

Le membre de gauche représente la variation temporelle d'énergie stockée par la plaque et le membre de droite celle de l'énergie fournie à la plaque par la corde.

Pour la corde:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\eta + c^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} d\eta - k^2 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} d\eta = -\sigma_0 \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\eta - \sigma_1 \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^2 \partial t} d\eta \quad (\text{A.4})$$

Pour le produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_0^L f g d\eta$:

- le 1^{er} terme s'écrit $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \right)$;
- le 2nd terme s'écrit $c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_0^L - c^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta$, i.e. $c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_0^L - \frac{c^2}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|^2$;
- le 3^{ème} terme s'écrit $-k^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} \right]_0^L + k^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} d\eta$
i.e. $-k^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} \right]_0^L + k^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right]_0^L - k^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} d\eta$
i.e. $k^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} \right]_0^L - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right\|^2$

(A.4) s'exprime en $m^3 \cdot s^{-3}$. Multipliée par $\frac{m_c}{L}$, m_c étant la masse de la corde et L sa longueur, elle exprime l'égalité entre la variation temporelle d'énergie stockée dans la corde et la puissance dissipée P_{diss} . De plus, pour une corde en appui simple: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}$ sont nuls aux frontières $\eta = 0$ et $\eta = L$. Pour ces conditions aux limites, (A.4) s'écrit donc:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{m_c}{L} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 - \frac{c^2}{2} \frac{m_c}{L} \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|^2 - \frac{k^2}{2} \frac{m_c}{L} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right\|^2 - P_{diss} \right) = -c^2 \frac{m_c}{L} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_0^L \quad (\text{A.5})$$

Un bilan d'énergie équilibré pour le système {corde + plaque} impose que la variation d'énergie stockée soit égale à la puissance dissipée, i.e., en sommant les équations (A.3) et (A.5), que le membre de droite soit nul. Le membre de gauche l'est donc aussi i.e.:

$$c^2 \frac{m_c}{L} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_L - c^2 \frac{m_c}{L} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_0 = \frac{m_p}{S} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_1, y_1)} F_1(t) + \frac{m_p}{S} \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_2, y_2)} F_2(t) \quad (\text{A.6})$$

On suppose que le chevalet et le sillet sont rigides, i.e. $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0 = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_1, y_1)}$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_L = \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{(x_2, y_2)}$. La condition (A.6) est alors vérifiée pour:

$$-c^2 \frac{m_c}{L} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_0 = \frac{m_p F_1(t)}{S} \quad (\text{A.7})$$

$$\text{et } c^2 \frac{m_c}{L} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_L = \frac{m_p F_2(t)}{S} \quad (\text{A.8})$$

En supposant que le déplacement de la corde au niveau du sillet est négligeable devant celui au niveau du chevalet, alors $F_1 \ll F_2$, et la force $\frac{m_p F_2}{S}$ représente l'ensemble des forces appliquées par la corde sur la plaque. Elle est exprimée par la condition A.8 en fonction du déplacement de la corde au chevalet.