

Diskretna kosinusna transformacija

Seminarski rad u okviru kursa
Naučno izračunavanje
Matematički fakultet

Bajić Ana

jun 2019.

Sažetak

U ovom radu prikazan je algoritam diskretne kosinusne transformacije na primerima JPEG kompresije *greyscale* slika i slika u boji, kao i audio kompresije.

Ključne reči — DCT, JPEG kompresija, Python

Sadržaj

| | | |
|----------|--------------------------------------------------|----------|
| 1 | Diskretna kosinusna transformacija | 2 |
| 2 | Implementacija u jeziku <i>Python</i> | 2 |
| 3 | Kompresije | 3 |
| 3.1 | Kompresija zvuka | 3 |
| 3.2 | Kompresija <i>greyscale</i> JPEG slika | 3 |
| 3.3 | Kompresija JPEG slika u boji | 3 |
| 4 | Vremenska složenost | 3 |
| | Literatura | 3 |

1 Diskretna kosinusna transformacija

Postoji više različitih formula kojima je diskretna kosinusna transformacija (u daljem tekstu: DKT) predstavljena (od DKT-I do DKT-VIII). Najčešće, kada se kaže **DKT** misli se na DKT-II. Ta transformacija je data sledećom formulom:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N_1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) k \right] \quad k = 0, \dots, N_1$$

DKT-II transformacija je ekvivalentna (do na faktor dvojke) diskretnoj Furijeovoj transformaciji $4N$ realnih ulaza parne simetrije, pri čemu su elementi na parnim indeksima jednaki nuli.

Inverzna diskretna kosinusna transformacija (u daljem tekstu IDKT) takođe ima više varijanti (u zavisnosti od toga koja se DKT koristila). Na primer, inverz DKT-I je DKT-I pomnožen sa $\frac{2}{N-1}$, inverz DKT-IV je DKT-IV pomnožen sa $\frac{2}{N}$. Inverz DKT-II (tj. standardne DKT) je transformacija DKT-III. Ona je data formulom:

$$X_k = \frac{1}{2} x_0 + \sum_{n=1}^{N_1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} n \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \quad k = 0, \dots, N_1$$

DKT je moguće vršiti i u više dimenzija. Višedimenziona DKT je kompozicija jednodimenzionih DKT primenjenih na svaku dimenziju.

2 Implementacija u jeziku *Python*

Biblioteka za *Python SciPy* u svom paketu *fftpack* ima implementacije za jednodimenzionalni DKT i IDKT. Za kompresiju zvuka ?? su korišćene ove funkcije.

Pomoću njih su implementirani 2D i 3D DKT i IDKT algoritmi korišćeni u kompresiji *greyscale* slika i slika u boji. Implementacije se mogu videti na slici 1 i slici 2. 3D transformacija je izvršena pomoću 2D transformacije po svakoj dimenziji.

```
def discrete_cosine_transform_2D(img):  
    return dct(dct(img.T, norm='ortho').T, norm='ortho')  
  
def inverse_discrete_cosine_transform_2D(coefficients):  
    return idct(idct(coefficients.T, norm='ortho').T, norm='ortho')
```

Slika 1: Implementacija 2D transformacija.

```
def dct3d(img):
    out = np.empty(img.shape)

    out[:, :, 0] = discrete_cosine_transform_2D(img[:, :, 0])
    out[:, :, 1] = discrete_cosine_transform_2D(img[:, :, 1])
    out[:, :, 2] = discrete_cosine_transform_2D(img[:, :, 2])

    return out

def idct3d(img):
    out = np.empty(img.shape)

    out[:, :, 0] = inverse_discrete_cosine_transform_2D(img[:, :, 0])
    out[:, :, 1] = inverse_discrete_cosine_transform_2D(img[:, :, 1])
    out[:, :, 2] = inverse_discrete_cosine_transform_2D(img[:, :, 2])

    return out
```

Slika 2: Implementacija 3D transformacija.

3 Kompresije

3.1 Kompresija zvuka

3.2 Kompresija *greyscale* JPEG slika

3.3 Kompresija JPEG slika u boji

4 Vremenska složenost

Složenost jednodimenzionalne DKT je $\mathcal{O}(n^2)$.

Naivna implementacija dvodimenzionalne DKT (sa 4 ugnježdene *for* petlje) je složenosti $\mathcal{O}(n^4)$.

Malo pametnija implementacija koja poziva jednodimenzionalni DKT prvo nad redovima pa onda nad kolonama tako dobijene matrice je složenosti $\mathcal{O}(n^3)$ - n puta se poziva jednodimenzionalna DKT po redovima i n puta se poziva nad kolonama.

Ako se pozivi jednodimenzionalne DKT zamene pozivima funkcije FKT (dobijena na način na koji se dobija FFT), može se postići vremenska složenost $\mathcal{O}(n \log n)$.

Literatura

- [1] Luke's blog, Simple audio compression, 2011. <http://www.lukedodd.com/really-simple-audio-compression/>
- [2] SciPy dokumentacija <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/index.html>
- [3] Wikipedia, Diskretna kosinusna transformacija https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_cosine_transform

[4] Unix4Lyfe, Diskretna kosinusna transformacija <https://unix4lyfe.org/dct/>