

hw3 刘佳璇 231220105

第五章

5.2 6 次比较找出 5 个元素的中位数

假设五个元素为 a, b, c, d, e ，令 a, b 一组， c, d 一组， e 单独一组。组内进行比较，假设比较结果为 $a > b, c > d$ ，再比较 a, c ，假设结果为 $a > c$ 。则目前得到信息 $a > c > d, a > b$ 。 a 比 b, c, d 都大，不可能是中位数，淘汰 a 。重复上述操作，将 e, b 重新并为一组，进行比较，假设结果为 $b > e$ ，再比较 b, c ，假设结果为 $b > c$ 。则目前得到信息 $b > c > d, b > e$ 。 b 比 c, d, e 都大，不可能是中位数，淘汰 b 。在 c, d, e 中，有已知信息 $c > d$ ，再比较 c, e 即可得到 c, d, e 中最大的数，即为五个元素的中位数。

5.4 阶为 i 的元素

因为算法只用比较来确定阶为 i 的元素，所以必须得到的信息有该元素比 $i - 1$ 个元素大，比 $n - i$ 个元素小。因此不需要另外的比较操作。

5.5 “黑盒”算法

假设一共有 n 个元素。用算法 \mathcal{A} 选的中位数作为 $pivot$ ，对 n 个元素进行 $partition$ ，若 $pivot \neq k$ ，则对左右两个部分中的一个递归地进行选择。算法 \mathcal{B} 的时间复杂度为 $T(n) \leq n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots = O(n)$ 。

5.6 最大的 k 个元素

1) $O(n \log n)$

用归并排序 $O(n \log n)$ 对整个数组进行排序。

2) $O(n + k \log n)$

$O(n)$ 建立最大堆，然后弹出 k 次堆顶，每次弹出需要 $O(k \log n)$ 。

3) $O(n + k^2)$

先用线性时间选择算法 $O(n)$ 找出前 k 大的元素，然后用选择排序算法 $O(k^2)$ 对前 k 大的元素进行排序。

4) $O(n + k \log k)$

先用线性时间选择算法 $O(n)$ 找出前 k 大的元素，然后用快速排序算法 $O(k \log k)$ 对前 k 大的元素进行排序。

5.7 和中位数大小最接近的 k 个数

1) $O(n \log n + k)$

先用归并排序 $O(n \log n)$ 对整个数组进行排序，假设排好后 M 的下标为 m 。用以下算法选出和 M 最接近的 k 个数，时间复杂度为 $O(k)$ ：

```
1 int i = m - 1;
2 int j = m + 1;
3 for x = 1 to k do
4 {
    if |s[i]-M| < |s[j]-M|
```

```

6   {
7     choose s[i];
8     i--;
9   }
10  else
11  {
12    choose s[j];
13    j++;
14  }
15 }

```

2) $O(n + k \log k)$

先用线性选择算法 $O(n)$ 选出中位数 M ，比 M 大的部分建立最小堆 H_min ，比 M 小的部分建立最大堆 H_max ，建立堆的总时间复杂度为 $O(n)$ 。然后用以下算法选出和 M 最接近的 k 个数（只对两个堆的前 k 层进行调整），时间复杂度为 $O(k \log k)$ ：

```

1 for x = 1 to k do
2 {
3   if |H_min.top-M| < |H_max.top-M|
4   {
5     choose H_min.top;
6     H_min.pop();
7   }
8   else
9   {
10    choose H_max.top;
11    H_max.pop();
12  }
13 }

```

5.9 并集中阶为 k 的元素

1)

先比较 $A[\frac{k}{2}]$ 和 $B[\frac{k}{2}]$ 。假设 $A[\frac{k}{2}] < B[\frac{k}{2}]$ ，则对子问题进行递归：寻找 $A[\frac{k}{2} + 1, \dots, n]$ 和 $B[1, \dots, \frac{k}{2}]$ 中阶为 $\frac{k}{2}$ 的元素。

重复递归，直至以下情况：

若 $k = 1$ ，则返回 $\min(A[1], B[1])$ ；

若其中一个数组为空（假设为 A ），则返回 $B[k]$ 。

2)

先比较 $A[\frac{k}{3}]$ ， $B[\frac{k}{3}]$ 和 $C[\frac{k}{3}]$ 。假设 $A[\frac{k}{3}] < B[\frac{k}{3}] < C[\frac{k}{3}]$ ，则对子问题进行递归：寻找 $A[\frac{k}{3} + 1, \dots, n]$ ， $B[1 \dots n]$ 和 $C[1, \dots, \frac{2k}{3}]$ 中阶为 $\frac{2k}{3}$ 的元素。

重复递归，直至以下情况：

若 $k = 1$ ，则返回 $\min(A[1], B[1], C[1])$ ；

若 $k = 2$ ，则先选出 $\min(A[1], B[1], C[1])$ （假设为 $A[1]$ ），然后返回 $\min(A[2], B[1], C[1])$ ；

若其中两个数组为空（假设为 A, B ），则返回 $C[k]$ 。

3)

先选出 $\min(A[i][\frac{k}{m}])$ 和 $\max(A[i][\frac{k}{m}])$ ($i = 1 \dots m$)，假设分别为 $A[1][\frac{k}{m}]$ 和 $A[m][\frac{k}{m}]$ ，则对子问题进行递归：寻找 $A[1][\frac{k}{m} + 1 \dots n]$, $A[i][1 \dots n]$, $A[m][1 \dots \frac{k}{m}]$ ($i = 2, \dots, m-1$) 中阶为 $\frac{m-1}{m}k$ 的元素。

重复递归，直至 $k \in [1, m-1]$ ，此时重复 k 次取 $A[i][\frac{k}{m}]$ ($i = 1 \dots m$) 最小值的操作即可。

时间复杂度分析：

$T(k) = T(\frac{m-1}{m}k) + O(m)$ ，递归次数 $r = \log k$ 。递归至 $k \in [1, m-1]$ 后，后续取最小值的时间复杂度为 $O(km)$ 。

5.10 加权中位数

1)

当 $w_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时， x_1, x_2, \dots, x_n 的中位数为第 $k = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ 个元素。有

$$\sum_{x_i < x_k} w_i = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < \frac{1}{2}, \quad \sum_{x_i > x_k} w_i = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \leq \frac{1}{2}$$

故 x_k 为加权中位数。

2) $O(n \log n)$

先用归并排序算法 $O(n \log n)$ 将 n 个元素按权重排序，然后依次累加元素权重 $O(n)$ ，求得加权中位数。

3) $O(n)$

先用线性时间选择算法 $O(n)$ 选取中位数，求得左右两个部分的权值和 $Omicron(n)$ ，若都小于 $\frac{1}{2}$ ，则选出的中位数就是加权中位数；否则在权值和大于 $\frac{1}{2}$ 的部分递归求解。

$$T(n) = T(\frac{1}{2}) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$$

第六章

6.2 计算 $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$

改进平方运算操作：假设计算 m^2 时，查询的左右边界分别为 a, b ，则

$$m^2 = (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 2ab。假设 m^2 < N，则下一次递归在 (m, b) 之间查找，$$

$$m'^2 = \left(\frac{\frac{a+b}{2} + b}{2} \right)^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}b^2 + \frac{3}{8}ab, \quad m^2 > N \text{ 的情况对称。由此，在每一次递归中， } m^2 \text{ 均可}$$

以写作 a^2, b^2, ab 的线性组合；而第一次递归时 $a = 1, b = N$ 。因此每次平方运算操作的时间复杂度为 $O(1)$ ，算法总的时间复杂度为 $O(n)$ 。

6.3 红黑树的等价定义

考虑递归定义：

当 $h = 0$ ，定义 RB_0 为唯一一个外部节点构成的红黑树，与直接定义一致；

当 $h > 0$ ，

若红黑树 RB_{h-1} 作为红色根节点的子树，外部节点的黑色高度须加上 RB_{h-1} 根节点的高度 1，即更新后的黑色高度为 h ，得到准红黑树 ARB_h ；

若红黑树 RB_{h-1} 作为黑色根节点的子树，外部节点的黑色高度须加上 RB_{h-1} 根节点的高度，即更新后的黑色高度为 h ，得到红黑树 RB_h ；

若准红黑树 ARB_h 作为黑色根节点的子树，外部节点的黑色高度不变，即更新后的黑色高度为 h ，得到红黑树 RB_h ；

如此递归，满足红黑树根节点为黑色，所有外部节点为黑色且高度一致，红色节点不连续出现，即递归定义与直接定义等价。

6.4 红黑树的平衡性

引理 6.1

假设 T 为一棵 RB_h ，则：

1) T 有不少于 $2^h - 1$ 个内部黑色节点

证明：

当 $h = 0$ ，内部黑色节点的个数为 $n_{ib}(0) = 0 = 2^0 - 1$ ；

当 $h > 0$ ， T 的根节点是一个内部黑色节点，它的子树可能是 RB_{h-1} 或 ARB_h 。对于子树 RB_{h-1} ，它为 T 提供 $n_{ib}(h-1) \geq 2^{h-1} - 1$ 个内部黑色节点；对于子树 ARB_h ，它有两个子树 RB_{h-1} ，共为 T 提供 $2n_{ib}(h-1) \geq 2^h - 2$ 个内部黑色节点。因此， T 的子树为两个 RB_{h-1} 时，内部黑色节点个数最少，为 $n_{ib}(h) = 2n_{ib}(h-1) + 1 \geq 2^h - 1$ 个。

故结论成立。

2) T 有不超过 $4^h - 1$ 个内部节点

证明：

当 $h = 0$ ，内部节点的个数为 $n_i(0) = 0 = 4^0 - 1$ ；

当 $h > 0$ ， T 的根节点是一个内部节点，它的子树可能是 RB_{h-1} 或 ARB_h 。对于子树 RB_{h-1} ，它为 T 提供 $n_i(h-1) \leq 4^{h-1} - 1$ 个内部节点；对于子树 ARB_h ，它有两个子树 RB_{h-1} ，共为 T 提供 $2n_i(h-1) + 1 \leq 2 \cdot 4^{h-1} - 1$ 个内部节点。因此， T 的子树为两个 ARB_{h-1} 时，内部节点个数最多，为 $n_i(h) = 2(2n_i(h-1) + 1) + 1 \leq 4^h - 1$ 个。

故结论成立。

3) 任何黑色节点的普通高度至多是其黑色高度的 2 倍

证明：

当黑色节点到根节点的路径上，除根节点外所有节点都是黑色节点时，普通高度为 h ；当路径上的节点黑红相间时，普通高度为 $2h$ 。故结论成立。

引理 6.2

假设 T 为一棵 ARB_h ，则：

1) T 有不少于 $2^h - 2$ 个内部黑色节点

证明：

当 $h = 1$ ，内部黑色节点的个数为 $n_{ib}(0) = 0 = 2^1 - 2$ ；

当 $h > 1$ ， T 的根节点不是内部黑色节点，它的子树是两个 RB_{h-1} 。对于子树 RB_{h-1} ，它为 T 提供 $n_{ib}(h-1) \geq 2^{h-1} - 1$ 个内部黑色节点。因此， T 的内部黑色节点个数为 $n_{ib}(h) = 2n_{ib}(h-1) \geq 2^h - 2$ 个。

故结论成立。

2) T 有不超过 $\frac{1}{2}4^h - 1$ 个内部节点

证明：

当 $h = 1$ ，内部节点的个数为 $n_{ib}(0) = 1 = \frac{1}{2}4^1 - 1$ ；

当 $h > 1$ ， T 的根节点是一个内部节点，它的子树是两个 RB_{h-1} 。对于子树 RB_{h-1} ，它为 T 提供 $n_i(h-1) \leq 4^{h-1} - 1$ 个内部节点。因此， T 的内部节点个数为 $n_i(h) = 2n_i(h-1) + 1 \leq \frac{1}{2}4^h - 1$ 个。

故结论成立。

3) 任何黑色节点的普通高度至多是其黑色高度的 2 倍

证明：

当黑色节点到根节点的路径上，除根节点外所有节点都是黑色节点时，普通高度为 h ；当路径上的节点黑红相间时，普通高度为 $2h - 1$ 。故结论成立。

6.5 $a_i = i$

采用折半查找。对数组 $A[1 \dots n]$ ，先查找中间元素 A_m ，若 $A_m = m$ 则返回，若 $A_m \neq m$ ，考虑两种情况：如果 $A_m > m$ ，则对左半部分递归查找；如果 $A_m < m$ ，则对右半部分递归查找。若递归至数组左边界大于右边界，则查找失败。

6.8 寻找整数对

1) 乱序数组求 $|x - y|_{max}$ ，要求 $O(n)$

原问题即求乱序数组的最大值和最小值。采用朴素的遍历查找即可。

```

1 int min = max = S[1];
2 for i = 2 to n do
3 {
4     if S[i] < min then
5         min = S[i];
6     else if S[i] > max then
7         max = S[i]
8 }

```

2) 有序数组求 $|x - y|_{max}$, 要求 $O(1)$

取 $S[1]$ 和 $S[n]$ 即可。

3) 乱序数组求 $|x - y|_{min}$, 要求 $O(n \log n)$

先用归并排序算法 $O(n \log n)$ 将数组排序, 然后遍历相邻元素的差 $O(n)$ 。

4) 有序数组求 $|x - y|_{min}$, 要求 $O(n)$

朴素遍历相邻元素的差 $O(n)$ 即可。

6.14 数组上的“局部最小元素”

1)

证明:

假设不存在局部最小元素。为保证 $A[2]$ 不是局部最小元素, 有 $A[2] \geq A[3]$; 同样为保证 $A[3 \dots n-1]$ 不是局部最小元素, 有 $A[i] \geq A[i+1]$ ($2 \leq i \leq n-2$)。但由于 $A[n-1] \leq A[n]$, 所以 $A[n-1]$ 是局部最小元素。故假设不成立, 即至少存在一个局部最小元素。

2)

因为数组中至少存在一个局部最小元素, 所以数组不严格单调。采用折半查找。对数组 $A[1 \dots n]$, 先查找中间元素 $A[m]$, 若 $A[m-1] \geq A[m]$, $A[m+1] \geq A[m]$ 则返回, 否则考虑两种情况: 如果 $A[m-1] \leq A[m] \leq A[m+1]$, 则在左半部分递归查找; 如果 $A[m-1] \geq A[m] \geq A[m+1]$, 则在右半部分递归查找。

第十五章

15.1 实现并查集

1) 基于矩阵

用矩阵 $A[n][n]$ 表示 n 个元素的关系, $A[i, j] = true$ 则 i 和 j 有等价关系, 反之没有。初始化矩阵:
 $\forall i \neq j, A[i, i] = true, A[i, j] = false$ 。

FIND 操作: 判断元素 i, j 是否具有等价关系, 不需要比较代表元, 只需要判断 $A[i, j]$ 的布尔值, 时间复杂度为 $O(1)$ 。

UNION(i, j) 操作: 令 $A[i][k] = A[j][k] = A[i][k] \text{ or } A[j][k]$ ($k = 1, \dots, n$), 时间复杂度为 $O(n)$ 。

总的时间复杂度为 $O(nl)$ 。

2) 基于数组

用数组 $E[1 \dots n]$ 的元素 $E[i]$ 记录元素 i 所在等价类的代表元。初始化数组 $E[1 \dots n]$ 的元素为 -1 。

$FIND(i)$ 操作：采用递归算法，返回 $FIND[E[i]]$ 。若 $FIND(i) = FIND(j)$ 则 i 和 j 有等价关系，反之没有。时间复杂度为 $O(n)$ 。

$UNION(i, j)$ 操作：记 $root_i = FIND(i)$, $root_j = FIND(j)$ ，若 $|E[root_i]| < |E[root_j]|$ ，则 $E[root_j] += E[root_i]$, $E[root_i] = root_j$ ，否则做对称的操作。时间复杂度为 $O(n)$ 。

总的时间复杂度为 $O(nl)$ 。

15.3 n 个变量的 m 个约束

建立变量 x_1, \dots, x_n 的并查集，用等式约束对并查集做合并操作。然后对不等式约束 $x_i \neq x_j$ ，判断 x_i, x_j 是否具有等价关系，若具有，则约束不可以同时满足；若遍历完所有不等式约束都没找到冲突，则约束可以同时满足。

第十六章

16.1 封闭寻址机制哈希到特定位置的概率

证明：

一个关键字哈希到某个特定地址的概率是 $\frac{1}{n}$ ，恰有 k 个关键字哈希到该地址的概率是 $(\frac{1}{n})^k(1 - \frac{1}{n})^{n-k}$ ，而 k 个关键字有 $\binom{n}{k}$ 种选择方式，故正好有 k 个关键字哈希到某个特定地址的概率是

$$Q_k = (\frac{1}{n})^k(1 - \frac{1}{n})^{n-k} \binom{n}{k}.$$

16.4 不同哈希表的存储效率

1)

令负载因子为 α ，则元素数量 $n = \alpha h_C$ 。对于封闭寻址机制，有 h_C 个链表头，每个链表头需要一个单位的存储空间；有 n 个链表节点，每个链表节点需要两个单位的存储空间，故总共需要 $(1 + 2\alpha)h_C$ 个单位的存储空间，当 $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 2$ 时分别为 $1.5 h_C, 2 h_C, 3 h_C, 5 h_C$ 。

同样的空间用于开放寻址哈希表，哈希表大小为 $(1 + 2\alpha)h_C$ ，元素数量为 αh_C ，故负载因子为 $\frac{\alpha h_C}{(1 + 2\alpha)h_C} = \frac{\alpha}{1 + 2\alpha}$ ，当 $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 2$ 时分别为 $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$ 。

2)

对于封闭寻址机制，总共需要 $(1 + 5\alpha)h_C$ 个单位的存储空间，当 $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 2$ 时分别为 $2.25 h_C, 3.5 h_C, 6 h_C, 11 h_C$ 。

同样的空间用于开放寻址哈希表，哈希表大小为 $\frac{(1 + 5\alpha)h_C}{4}$ ，元素数量为 αh_C ，故负载因子为 $\frac{4\alpha}{1 + 5\alpha}$ ，当 $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 2$ 时分别为 $\frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{8}{11}$ 。

第十八章

18.1 LAKE_VIEW 算法

1)

证明：

循环不变式为：对当前循环已经遍历的元素，栈 S 中的元素均满足湖景房的要求。

当循环开始时，栈 S 为空，满足循环不变式；

当循环 $i = k - 1$ 满足循环不变式，假设栈 S 中从栈底到栈顶的元素依次为 $A[i_1], A[i_2], \dots, A[i_{k-1}]$ ，满足 $A[i_1] > A[i_2] > \dots > A[i_t]$ 且 $i_t = k - 1$ 。考虑循环 $i = k$ ：假设 $A[i_s] > A[k] > A[i_{s+1}] > \dots > A[i_t]$ ，则在循环 $i = k$ 中，栈 S 会先对元素 $A[i_{s+1}], \dots, A[i_t]$ 执行 POP 操作，再对元素 $A[k]$ 执行 $PUSH$ 操作，循环结束时，栈 S 中的元素为 $A[i_1], \dots, A[i_s], A[k]$ ，仍满足循环不变式。

当循环到 $i = n$ 停止时，栈 S 中的元素即为所有湖景房，故算法正确。

2)

考虑在一次 for 循环中：

操作	C_{amo}	C_{act}	C_{acc}
$PUSH$	2	1	1
POP (栈 S 不为空)	0	k	$-k$

故算法的代价不超过 $2n = O(n)$ 。

18.3 数组集合

TODO

18.5 多重集合 S 的操作

算法实现：用数组存储集合。

$INSERT$ ：数组尾部插入元素 x ，代价为 $O(1)$ ；

$DEL - LARGER - HALF$ ：先用线性时间选择算法选出中间元素 $s_m = select(S, \lceil \frac{|S|}{2} \rceil)$ ，然后 $partition(S, s_m)$ 并将集合 S 的大小改为 $\lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor$ ，代价为 $O(|S|)$ 。

平摊代价：

操作	C_{amo}	C_{act}	C_{acc}
$INSERT(S, x)$	3	1	2
$DEL - LARGER - HALFS(S)$	0	k	$-k$

操作序列的平摊代价为 $3n = O(n)$ 。

第十九章

19.1 选择问题的下界

决策树的叶节点对应 n 个元素，时间复杂度下界对应树的高度 h ，因为 $2^h \geq n$ ，所以 $h \geq \log n$ ，即最坏情况时间复杂度的下界是 $\Omega(\log n)$ 。

19.3 有 1 个逆序对的数组排序

仅有的逆序对一定是两个下标相邻的元素，完成数组中元素的排序需要找出唯一的逆序对，即需要比较所有相邻元素对。最坏情况下，逆序对是最后一次比较的元素对，需要 $n - 1$ 次比较。

19.4 芯片检测问题

TODO

19.5 用 $SORT - FIVE$ 算法解决 n 个元素选择问题

1)

算法：

将每 5 个元素分为一组，用 $SORT - FIVE$ 算法选出最大值，进行锦标赛排序。算法要进行 $\lceil \frac{n-1}{4} \rceil$ 次关键操作。

最优性证明：

若有一种策略至多需要进行 $\lceil \frac{n-1}{4} \rceil - 1$ 次关键操作，每次关键操作排除 4 个元素，则该策略最多排除 $n - 2$ 个元素。采用对手策略，假设最大值为未排除的两个元素之一，则算法错误。

2)

第二大值只可能出现在输给最大元素的元素中。用 1) 中的算法找到最大元素的过程中，最大元素至多进行 $\lceil \log_5 n \rceil$ 次关键操作，只需从这些操作中落败的元素当中找到最大元素即可。算法要进行 $\lceil \frac{n-1}{4} \rceil + \lceil \frac{\log_5 n - 1}{4} \rceil$ 次关键操作。

19.6 特殊元素

1)

若 n 为偶数，将其中 $n - 2$ 个元素两两分组相互比较。如果比较结果均为“相同”，从剩余的两个元素中任取一个与相同的 $n - 2$ 个元素之一比较，共需要 $\frac{n}{2}$ 次比较。如果前 $\frac{n-2}{2}$ 次比较有一组结果为“不同”，则从结果为“不同”的组中任取一个元素与其余相同的元素比较，最多需要 $\frac{n}{2}$ 次比较。

若 n 为奇数，分组后有一个元素落单。先将其余 $n - 1$ 个元素两两比较。如果比较结果均为“相同”，落单元素即为特殊元素，共需要 $\frac{n-1}{2}$ 次比较。否则从结果为“不同”的组中任取一个元素与组外元素比较，最多需要 $\frac{n+1}{2}$ 次比较。

综上，算法可以用不多于 $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ 次比较找出特殊元素。

2)

假设特殊元素是下标为 m 的元素。

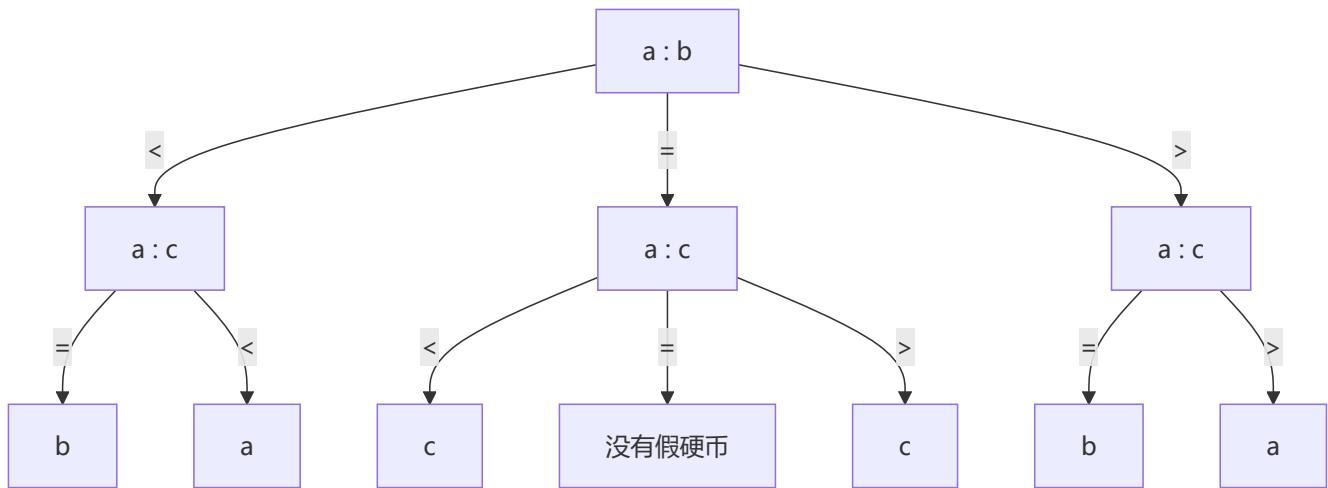
如果 $1 \leq m \leq n-2$ ，则总共比较的次数为 $\lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$ ；如果 $n-1 \leq m \leq n$ ，则总共比较次数为 $\frac{n}{2}$ 。
 因此比较次数的期望为 $E = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n-2} (\lceil \frac{m}{2} \rceil + 1) + 2 \cdot \frac{n}{2} \right] = \frac{n}{4} + \frac{3}{2} - \frac{2}{n}$ 。

3)

采用对手策略，将特殊元素放在第 n 个，因此下界为 $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ 。

19.10 假硬币

1)



2)

将硬币尽量均等地分为三堆，每次比较大小相同的两堆。假设经过 k 次比较后找出假硬币，那么比较的所有情况有 3^k 种。而 n 个硬币中，没有假硬币为 1 种情况；如果有假硬币，每个硬币都可能是假硬币，假硬币可能更重或更轻，有 $2n$ 种情况；因此总共有 $2n + 1$ 种情况。故有不等式 $3^k \geq 2n + 1$ ，即最坏情况下时间复杂度的下界为 $k = \lceil \log_3 (2n + 1) \rceil$ 。